

О МЕХАНИЗМЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СДВИГОМ

*В. П. Воротилин**

*Институт прикладной механики Российской академии наук
125040, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 января 2019 г.,
после переработки 14 января 2019 г.
Принята к публикации 1 февраля 2019 г.

Как результат анализа некоторых фактов турбулентных течений, объяснение которых выходит за рамки существующих полуэмпирических теорий, в частности, оценки высоты эффективной шероховатости в трубах с распределенной шероховатостью, характеризуемой двумя и более параметрами размерности длины, представлен вариант теории турбулентных течений в каналах с гладкими и шероховатыми стенками с единым механизмом динамического взаимодействия (механизмом трения) турбулентного потока с его границами — стенками канала или внешним ламинарным потоком. Получены выражения для обобщенного закона трения, описывающие турбулентное течение при всех допустимых значениях чисел Рейнольдса — от режима течения с гладкими стенками до режима с полным проявлением шероховатых элементов, — и для песочной шероховатости, согласующиеся с экспериментальными данными Никурадзе. Одним из выводов теории стало утверждение, что единственным источником турбулентности для турбулентных течений в каналах и струях являются вихри, образующиеся у стенок каналов и на свободных границах турбулентных струй, и только через эти вихри происходит перенос кинетической энергии от среднего течения к энергии турбулентных пульсаций. Наглядно разницу механизмов ламинарного и турбулентного режимов течения можно представить условной формулой (24).

DOI: 10.1134/S0044451019070174

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на не иссякающий на протяжении десятилетий поток публикаций, посвященных теоретическим и прикладным задачам турбулентных течений [1–10], остается множество, как отмечено в обзорной статье [1], трудно решаемых вопросов, касающихся как общего понимания механизма турбулентности, так и конкретных расчетов, в частности расчетов турбулентных течений в каналах с шероховатыми стенками [11–15]. При этом согласно сложившимся взглядам на турбулентность, расчет поля скоростей практически всегда оставался основной целью теоретических моделей, предназначенных для решения конкретных задач турбулентных течений [16, 17], поскольку скорость как искомая переменная входит в усредненные уравнения Навье–Стокса, являющиеся базовыми уравнениями для последующих разработок модельных методов описания турбулентных течений.

Приведенные соображения обычно молчаливо принимаются как само собой разумеющиеся истины и в данном случае упомянуты в связи с попытками альтернативного подхода к решению рассматриваемых проблем турбулентных течений.

Мотивом для постановки данной задачи явился вывод работы [18], что для турбулентных струй единственным источником турбулентности являются вихри, образующиеся в результате механизма турбулентного трения внешнего течения на границе струи. И только через эти вихри осуществляется перенос кинетической энергии от среднего течения к энергии турбулентных пульсаций. В качестве замыкающего уравнения было получено уравнение баланса «турбулентной» жидкости с выражением для скорости захвата жидкости внешней среды, по форме обобщающим эмпирическую корреляцию, предложенную в работе [19]. Отсюда, поскольку течения в каналах и струях, согласно классическим представлениям о механизме турбулентных течений [20], объединялись в единый класс турбулентных течений, характеризуемый общим термином «турбулентные течения со сдвигом», и моделировались на основе понятия турбулентной вязкости,

* E-mail: VPVorotilin@yandex.ru

возникает естественная потребность и для течений в каналах (но теперь с учетом известных фактов вихреобразования у стенок гладких каналов [6–8]) обосновать механизм турбулентности, подобный полученному ранее для турбулентных струй [18].

2. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ

2.1. Проблема турбулентного течения в каналах с распределенной шероховатостью

Одной из практически важных задач турбулентных течений, на примере которой будет предпринята попытка обоснования нового механизма турбулентности, является расчет коэффициента трения в каналах с распределенной шероховатостью, характеризуемой двумя и более параметрами размерности длины — высотой h выступа шероховатости, расстоянием p между соседними выступами и т. д. Напомним некоторые исходные факты, касающиеся этой проблемы. На основе многочисленных экспериментальных данных [20–22] установлено, что закон трения для турбулентных течений как в гладких, так и в шероховатых каналах независимо от типа шероховатости может быть представлен в виде

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{R}{K_s} \right) + B, \quad (1)$$

где \bar{u} — средняя по поперечному сечению канала скорость потока, $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$ — динамическая скорость, τ — касательное напряжение на стенке, ρ — плотность жидкости, κ и B — универсальные константы, R — характерный размер канала (ширина плоского канала или радиус трубы), K_s — высота эквивалентной песочной шероховатости, являющаяся некоторой характеристикой течения у поверхности стенки канала.

В общем случае произвольных чисел Рейнольдса $Re = 2\bar{u}R/\nu$, где ν — коэффициент молекулярной вязкости, параметр K_s , в соответствии с данным ему определением, может быть функцией величин h , p , v_* , ν и т. д., т. е. всех тех независимых и искомых переменных, которые каким-либо способом могут быть связаны с локальными условиями течения у стенки. Теоретические методы расчета зависимости K_s от указанных величин, не считая многочисленных эмпирических корреляций, отсутствуют. Только в двух особых случаях течения явный вид этой зависимости может быть получен из соображений размерности. Для течений в канале с песочной шероховатостью, характеризуемой единственным геометрическим параметром — размером

s песчинок, в режиме с полным проявлением шероховатости, т. е. в пределе $Re \rightarrow \infty$, для K_s можно написать выражение

$$K_s = s, \quad (2)$$

а для гладкого канала по той причине, что на стенку импульс передается под действием сил вязкого трения, единственная комбинация размерности длины может быть записана в виде

$$K_s = \gamma_\nu \nu / v_*, \quad (3)$$

где γ_ν — некоторая универсальная константа (в формуле (2) аналогичная константа отсутствует из-за того, что она традиционно включается в состав константы B).

В том случае, когда для описания шероховатой поверхности имеется не менее двух параметров размерности длины, например h и p , логика соображений размерности перестает работать, вследствие чего при определении K_s необходимо учитывать какие-то особенности структуры потока вблизи границы стенки. Установить характер этих особенностей и получить для них количественные оценки, решая уравнения движения, по-прежнему невозможно. Однако, поскольку течение в ядре турбулентного потока, находящегося под влиянием случайных и хаотических турбулентных пульсаций, должно быть малочувствительным к деталям течения у стенки, можно предположить, что параметр K_s будет отражать только самые общие свойства обтекания выступов шероховатости, при описании которых можно обойтись без обращения к уравнениям движения.

2.2. Обоснование предлагаемой методики оценки K_s

Одно из направлений поиска физического смысла этого параметра можно связать с известным фактом логарифмической зависимости профиля скорости от координаты y , отсчитываемой по нормали от поверхности стенки в глубину потока:

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{K_s} \right) + B_1, \quad (4)$$

где B_1 — константа, которая для стенки с песочной шероховатостью (т. е. при $K_s = s$ и $Re \rightarrow \infty$) равна 8.5. При $y \rightarrow 0$ правая часть соотношения (4) имеет логарифмическую особенность. Это означает, что у границы стенки должен существовать некоторый примыкающий к ней слой жидкости толщиной δ , в пределах которого соотношение (4) теряет свою справедливость. Поскольку по тем или

иным причинам жидкость у стенки тормозится, параметру δ можно придать смысл толщины заторможенной жидкости, откуда приближенно можно принять, что при $y = \delta$ скорость потока обращается в нуль. Поскольку δ и K_s имеют размерность длины, естественно предположить, что их связь может быть представлена прямо пропорциональной зависимостью

$$K_s = \gamma\delta, \quad (5)$$

где γ — некоторая численная константа.

Предположение о существовании указанного слоя заторможенной жидкости не подразумевает, что течение в нем перестает быть турбулентным, и поэтому и δ , и K_s по-прежнему имеют смысл параметров, характеризующих свойства турбулентных структур потока. Теперь поиск способов оценки K_s принимает более конкретные очертания. Именно, в зоне пристенного течения необходимо выделить такую гидродинамическую структуру, которая, с одной стороны, являлась бы уникальным звеном в цепи передачи импульса от потока к стенке, а с другой, могла бы быть описана такими параметрами течения, усредненному значению некоторой комбинации которых можно было бы придать смысл толщины слоя жидкости, примыкающего к поверхности стенки. В качестве кандидата для искомой структуры естественным образом напрашиваются отрывные застойные зоны, всегда образующиеся за выступами шероховатости при обтекании их внешним турбулентным потоком. Действительно, отрывное обтекание препятствия является необходимым условием для передачи импульса от потока к стенке за счет разности статических давлений на передней и задней стенках выступа. При этом коэффициент сопротивления будет зависеть только от формы выступа, а не от коэффициента молекулярной вязкости. Наличие стационарных застойных зон за выступами отдельно стоящих элементов шероховатости, примыкающих к стенке канала и имеющих ограниченную протяженность, подтверждается визуальными наблюдениями [23, 24], согласно которым усредненное по времени положение границы отрыва имеет постоянный угол наклона, α , к стенке канала такой, что $\text{ctg } \alpha \equiv A \approx 6-8$.

Универсальной характеристикой отрывной застойной зоны, присущей шероховатым выступам любого типа, является ее объем. Отсюда, поскольку средний объем застойных зон на единице площади поверхности стенки имеет размерность длины и для турбулентного потока, не чувствительного к деталям течения у стенок, будет восприниматься

как некоторый неподвижный слой жидкости, взаимосвязь параметра K_s с застойными зонами, в соответствии с ранее данным его истолкованием, можно представить в виде

$$K_s = \sum V_i, \quad (6)$$

где V_i — объем зоны за i -м выступом, а суммирование ведется по всем выступам на заданной единичной площади поверхности стенки.

2.3. Формулы и оценки для шероховатости в виде прямоугольных вставок и сравнение результатов расчета с экспериментом

Подходящим объектом для проверки сделанных предположений и выводимых на их основе расчетных формул является турбулентное течение в трубах с шероховатостью в виде прямоугольных кольцевых вставок, обзор множества экспериментальных исследований которых можно найти, например, в [24]. Методика оценки объема застойных зон различается для далеко и близко расставленных выступов и зависит от того, какой из параметров, h или $h_1 = (p - b)/A$, где b — ширина выступа, больше. Картина течения и застойных зон для обоих вариантов размещения выступов показана на рис. 1.

При $h_1 \geq h$, т. е. когда линия отрыва пересекается со стенкой канала (рис. 1а), учитывается весь объем зоны, ограниченной задней стенкой выступа, стенкой канала и поверхностью отрыва потока. При $h_1 < h$ (рис. 1б) линия отрыва упирается в переднюю стенку следующего выступа на высоте от поверхности стенки $y_1 = h - h_1$ (при $h_1 \geq h$ полагаем $y_1 = 0$). Естественно предположить, что для этого случая при подсчете K_s необходимо будет учитывать только ту часть объема застойных зон, которая лежит выше уровня $y = y_1$. Действительно, если бы на указанном уровне проходила твердая стенка, то для K_s была бы применима та же методика расчета, что и для варианта, изображенного на рис. 1а. С другой стороны, физический смысл вывода общей формулы для K_s связан с механизмом взаимодействия отрывных вихрей с ядром турбулентного потока, безразличным к факту присутствия или отсутствия твердой стенки. Поэтому величина K_s при наличии стенки на уровне $y = y_1$ должна остаться без изменения и при ее отсутствии. Отсюда выражение для K_s в соответствии с его определением (6) принимает вид

$$K_s = \begin{cases} A\varphi h^2/2p, & h_1 \geq h, \\ (p - b)^2\varphi/2Ap, & h_1 < h, \end{cases} \quad (7)$$

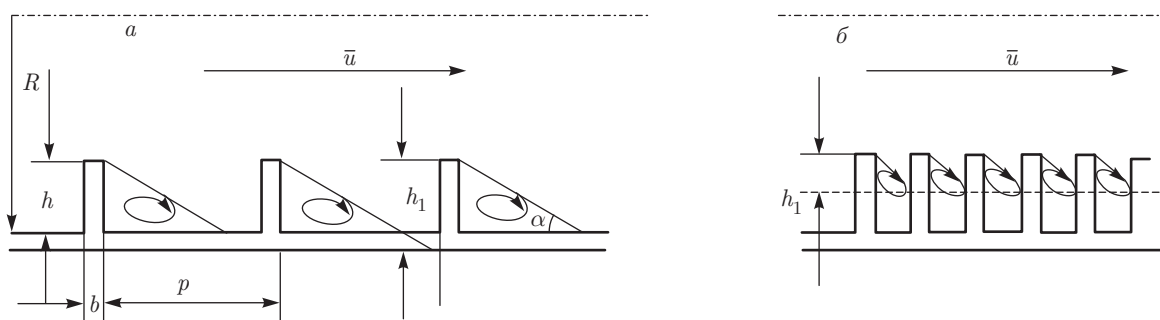


Рис. 1. Схема расположения выступов шероховатой поверхности стенки канала и обтекания их турбулентным потоком с образованием отрывных застойных зон для случаев далеко ($h < h_1$, рис. 1а) и близко ($h > h_1$, рис. 1б) стоящих друг от друга выступов шероховатости, где $h_1 = (p - b)/A$, α — угол отрыва потока

где величина $\varphi = 1 - 2h/3R$ учитывает кривизну поперечного сечения трубы.

Для проверки полученной формулы можно сравнить данные по измерению коэффициента трения, определяемого соотношениями

$$c_f = 2 \left(\frac{v_*}{\bar{u}} \right)^2 = \frac{R \nabla P}{\rho \bar{u}^2}, \quad (8)$$

где второе равенство задает связь c_f с градиентом давления ∇P вдоль трубы, с рассчитанными из уравнения (1), подставляя в него K_s из формулы (7). Однако при такой методике сравнения остается неизвестным значение константы B , для вычисления которой пришлось бы использовать саму проверяемую формулу, что понизило бы ее предсказательную ценность. Поэтому, с точки зрения большей полноты использования физических представлений теории, вместо уравнения (1) удобнее обратиться к соотношению (4), задающему логарифмическое распределение скоростей по поперечному сечению трубы. По предположению, этот закон должен выполняться вплоть до некоторого малого расстояния δ от стенки канала. Естественным шагом дальнейшего развития теории будет допущение, что величины δ и K_s совпадают (ранее предполагалась только, что они связаны прямо пропорциональной зависимостью (5)). Физически это допущение, если не гнаться за несущественными подробностями течения у стенок, должно означать, что логарифмический профиль скорости формируется сразу же за пределами неподвижного, хотя и сильно турбулизованного слоя застойных зон толщиной K_s . Отметим, что подобный подход использовался при выводе закона трения для турбулентных течений в гладких каналах [21]. Выражение для скорости с учетом слоя застойных зон K_s и сдвига начала отсчета координаты y на расстояние $h - h_1$ в глубь потока можно записать в виде

наты y на расстояние $h - h_1$ в глубь потока можно записать в виде

$$\frac{u}{v_*} = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y - y_1}{K_s} \right) + B_s, & R > y > \delta_1 = K_s + y_1, \\ 0, & \delta_1 > y > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Константа B_s при этом будет равна безразмерной скорости u_s на поверхности слоя. Несмотря на то что слой неподвижен, ее значение из-за эффекта циркуляции жидкости в застойных зонах будет несколько больше нуля — поток как бы слегка скользит над слоем застойных зон. Полагая, что интенсивность циркуляций равна интенсивности турбулентных пульсаций, для u_s можно написать оценку $u_s = B_s \approx 1$. Проинтегрировав выражение (9) по поперечному сечению канала, получим закон трения, отличающийся от формулы (1) только тем, что в нем учтены малые поправки, связанные с сужением свободного сечения трубы, а для константы B при условии малости величин K_s и y_1 можно написать равенство

$$B = B_s - \frac{3}{2\kappa}. \quad (10)$$

Таким образом, в рамках предлагаемой теории константа B однозначно определяется через другие физические осмысленные характеристики турбулентного течения.

Расчетные формулы содержат три универсальных константы: κ , A и B_s . Значения первых двух задаются исходя из известных фактов турбулентных течений: $\kappa = 0.4$, $A = 8$, а вместо первоначальной оценочной величины константы $B_s = 1$ с целью некоторого улучшения общей картины срав-

Таблица

$(p - b)/h$	b/h	h/R	K_s/h	$100c_f^{theor}$	$100c_f^{exp}$	Ссылка
19.2	0.8	0.08	0.185	0.885	0.939	[25]
8.8	1	0.081	0.382	1.145	1.044	[26]
18.6	1	0.08	0.193	0.894	0.911	
77.4	1	0.08	0.048	0.592	0.602	
156	1	0.08	0.024	0.492	0.468	
3.72	5	0.202	0.205	1.641	1.556	
9.6	5	0.201	0.353	1.591	1.662	
6	2.67	0.166	0.332	1.553	1.583	
2	2.67	0.169	0.102	1.302	1.319	
1	2.67	0.172	0.045	1.127	1.148	
12	1.33	0.083	0.297	1.054	1.147	
8	1.33	0.083	0.433	1.222	1.169	
4	1.33	0.083	0.204	1.036	1.104	
2	1.33	0.084	0.090	0.866	0.924	[27]
9	1	0.02	0.394	0.721	0.698	
9	1	0.031	0.392	0.837	0.819	
14	1	0.008	0.265	0.507	0.495	
4	1	0.012	0.199	0.537	0.583	
6	1	0.012	0.319	0.596	0.595	
14	1	0.012	0.264	0.561	0.525	
2	1.67	0.02	0.096	0.522	0.474	
3	1.67	0.02	0.155	0.581	0.661	[23]
4	1.67	0.02	0.216	0.630	0.710	
0.5	1.6	0.031	0.014	0.394	0.377	
2	1.6	0.031	0.095	0.599	0.555	
8.97	0.97	0.02	0.395	0.726	0.675	
9.48	1.94	0.04	0.389	0.899	0.892	
9.74	3.88	0.08	0.379	1.138	1.145	
19.6	1.94	0.04	0.195	0.723	0.764	
39.4	1.94	0.04	0.097	0.593	0.600	

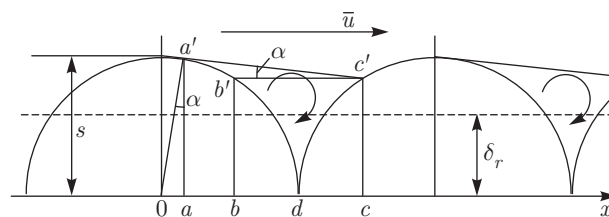


Рис. 2. Картина обтекания турбулентным потоком песочной шероховатости стенки канала, моделируемой плотноупакованными полусферами радиуса s , где верхняя граница отрывной зоны потока обозначена линией $a'c'$

нения было принято $B_s = 0.75$. Соответственно константа B в формулах (1), (10) будет равна -3 . Результаты сравнения теории и эксперимента представлены в таблице. Приведенные в ней экспериментальные данные и соответствующие им геометрические параметры шероховатости взяты из имеющейся в [24] обзорной таблицы данных различных авторов.

Из анализа представленных в таблице данных видно, что определяемые из уравнения (1) коэффициенты трения c_f на основе теоретической формулы (7) для параметра K_s согласуются с экспериментальными данными для широкого диапазона значений геометрических параметров шероховатых поверхностей с существенно различающимися способами подсчета объема застойных зон в обоих вариантах этой формулы. При этом для измеряемых в эксперименте коэффициентов трения c_f средняя величина отклонения составила 6.0 %.

2.4. Оценка параметра K_s для песочной шероховатости в опытах Никурадзе [22]

Отметим, что хотя проверка предложенной интерпретации параметра K_s как среднего объема отрывных застойных зон, образующихся за выступами шероховатых элементов, проведена на примере прямоугольных выступов, методика его численной оценки останется справедливой и для любых других типов шероховатых элементов, от формы которых будет зависеть лишь геометрия и объем застойных зон. В качестве примера проведем расчет K_s для песочной шероховатости в режиме ее полного проявления, т. е. при $Re \rightarrow \infty$, моделируя ее системой плотноупакованных полусфер. Условная схема отрывного обтекания полусферы высотой s , соприкасающейся со следующей по потоку, представлена на рис. 2.

Все реально объемные фигуры получаются вращением изображенных на рис. 2 плоских фигур вокруг оси x на угол 180° . Полный объем отрывной за-

стойной зоны занимает объем криволинейного треугольника $a'c'd$. По той же причине, что и ранее для близко стоящих прямоугольных выступов, из него необходимо вычесть объем треугольника $b'c'd$ (линия $b'c'$ отмечает уровень полного погружения полусфер в слой застойных зон). Таким образом, искомым объемом есть объем треугольника $a'b'c'$. Разделив его на $4s^2$ — площадь лежащей под ним стенки, получим формулу для расчета K_{steor} :

$$K_{steor} = \frac{\pi}{6}t(1-t)^2 \times \left[3 + 14t - 16t^2 - 32t^3 - 2(5 - 16t^2)\sqrt{t+t^2} \right] s,$$

где $t = \sin \alpha \equiv 1/\sqrt{A^2 + 1}$. Подставив значение константы $A = 8$, получим

$$K_{steor} = 0.044s.$$

Сравним этот результат с величиной K_s , которую можно вывести на основе известных экспериментальных данных. Для предела $Re \rightarrow \infty$, согласно классическим результатам теории и эксперимента, профиль скорости задается выражением (4). Заметим, что в этой формуле (при $K_s = s$) параметр s лишен какого-либо физического смысла как характеристики течения в окрестности шероховатой стенки, а числовое слагаемое $B_1 = 8.5$ в ее правой части есть экспериментально определяемая константа. Преобразуем ее к виду, аналогичному формуле (9), т. е. переведем часть константы в правой части, равную $\beta_1 = 7.75$, в множитель при параметре s под знаком логарифма, положив $\kappa\beta_1 \equiv 3.1 = \ln(1/\beta_2)$. В результате получим $\beta_2 = 0.045$. Обозначим произведение $\beta_2 s$ как

$$K_s^{exp} = 0.045s.$$

Теперь, в рамках предлагаемой теории, это есть уже четкая геометрическая характеристика турбулентного течения — слой отрывных застойных зон, отделяющий область с логарифмическим распределением скорости от стенки канала. Его величина составляет примерно $1/22$ размера s песчинок и, как видим, очень близка к рассчитанной чисто теоретически без использования экспериментальных данных.

Последующее рассмотрение различных следствий и обобщений теории и, в частности, рассматриваемые далее турбулентные течения с учетом влияния вязкости, т. е. при $Re < \infty$, будем вести, не уточняя конкретный вид шероховатых поверхностей и наряду с обозначением K_s для суммы застойных зон на единице поверхности стенки используя V (объем).

2.5. Соотношения для коэффициента сопротивления отдельного элемента шероховатой поверхности

Отметим, что в предложенной методике расчета K_s отсутствуют явные указания на механизм передачи импульса на стенку канала. Это обстоятельство позволяет предположить, что в теории имеются возможности для дальнейших обобщений, расширяющих область ее использования при описании других типов турбулентных течений и, в частности, таких, как рассматриваемые далее турбулентные течения с учетом влияния вязкости, т. е. при $Re < \infty$.

Для реализации намеченного плана обобщений рассмотрим задачу об определении доли касательного напряжения τ_i , приходящейся на i -й элемент шероховатости из всех, расположенных на единичной площади поверхности стенки. Касательное напряжение τ связано со всеми τ_i суммой

$$\tau = \rho v_*^2 = \sum_i \tau_i. \quad (11)$$

Как следует из общих представлений предлагаемой теории, параметр τ является функцией только суммы объемов V застойных зон всех выступов, а τ_i может зависеть от V и V_i . Отсюда, дифференцируя выражение (11) один раз по V_i , а другой по V_j и вычитая друг из друга обе формулы, с учетом равенств

$$\frac{\partial \tau}{\partial V_i} = \frac{\partial \tau}{\partial V} = \frac{\partial \tau_i}{\partial V_i} \Big|_V + \sum_k \frac{\partial \tau_k}{\partial V} \Big|_{V_k}$$

находим

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial V_i} \Big|_V = \frac{\partial \tau_j}{\partial V_j} \Big|_V = \varphi(V).$$

Здесь обе производные приравнены некоторой функции $\varphi(V)$ на том основании, что каждая из них помимо V может зависеть только от «своего» аргумента V_i или V_j и, следовательно, в силу равенства не зависят ни от одного из них. Интегрируя первое из полученных уравнений по V_i при постоянном V , приходим к соотношению $\tau_i = \varphi(V)V_i$, которое с целью представить искомую величину $\varphi(V)$ в безразмерной форме перепишем в виде

$$\tau_i = \rho \varphi(V)(V_i/V)\bar{u}^2. \quad (12)$$

Полученная формула выражает квадратичный закон сопротивления по средней скорости потока для отдельного выступа на шероховатой стенке. Его отличие от аналогичного закона для отрывного ламинарного обтекания препятствий состоит в том,

что коэффициент трения теперь не является константой, величина которой зависит только от формы обтекаемого выступа, а представляет собой некоторую функцию переменной V , определяющую общие условия течения в шероховатом канале. В то же время влияние геометрических свойств выступов оказалось представленным существенно более простой зависимостью c_f от единственной универсальной характеристики отрывного обтекания выступов — объема застойной зоны, вошедшего в качестве множителя в правую часть соотношения (12). Чтобы определить вид функции $\varphi(V)$, подставим τ_i из (12) в правую часть (11). Суммируя по i , находим $\tau = \rho\varphi(V)\bar{u}^2$ или $v_* / \bar{u} = \varphi^{1/2}$. Откуда, с учетом формулы (1) получим выражение

$$\varphi(V) = \left[\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{R}{V} \right) + B \right]^{-2}. \quad (13)$$

2.6. Обобщенный закон трения для каналов с подвижными стенками

Поскольку каждый выступ шероховатости по смыслу теории взаимодействует с турбулентным потоком, не «ощущая» индивидуального воздействия других выступов, на следующем шаге обобщений естественно предположить, что любой отдельно взятый выступ останется невосприимчив и к возможным перемещениям остальных выступов вдоль стенок канала. Отсюда для выступа, движущегося с произвольной скоростью u_{si} , можно написать соотношение, аналогичное квадратичному закону сопротивления (12). С учетом того, что относительный знак τ_i зависит от того, больше или меньше u_{si} средней скорости потока, и с условием того, что $\tau_i > 0$ при $\bar{u} > u_{si}$, обобщенное выражение для τ_i представим в виде

$$\tau_i = \rho\varphi(V)V(V_i/V)(\bar{u} - u_{si})|\bar{u} - u_{si}|. \quad (14)$$

Подставив τ_i из соотношения (14) в правую часть формулы (11), получим обобщенный закон трения, учитывающий произвольные перемещения выступов вдоль потока по стенкам канала:

$$\tau = \rho\varphi(V) \sum_i \frac{V_i}{V} (\bar{u} - u_{si})|\bar{u} - u_{si}|. \quad (15)$$

Область использования уравнения (15) по сравнению с привычным законом трения, записанным, например, в виде формул (1), (8) или (11), расширяется благодаря появлению новых независимых параметров u_{si} . Теперь переменные \bar{u} и τ в зависимости от внешних условий решаемой задачи могут играть

роль либо искомым, либо независимых переменных, образуя однопараметрическое многообразие турбулентных режимов течений в каналах. Так, например, если заданы \bar{u} и u_{si} , то искомой величиной является τ . Если же заранее известно, что $\tau = 0$, т. е. рассматривается безнапорное течение, то расчету подлежат средняя скорость потока, создаваемая относительным движением стенок канала, и величина τ_i на стенках. Для плоского течения Куэтта, при котором одна из стенок (пусть с индексом «1») неподвижна ($u_{s1} = 0$), а другая движется со скоростью u_{s2} , из уравнения (15) находим

$$\bar{u} = \frac{u_{s2}}{1 + \sqrt{V_1/V_2}}. \quad (16)$$

Если стенки канала имеют одинаковую шероховатость, то получается известный результат: средняя скорость равна половине скорости движения стенки, что в рамках классического подхода с очевидностью следует из центральной симметрии профиля скорости относительно оси канала. Однако для стенок, различающихся структурой шероховатой поверхности (например, когда одна стенка гладкая, а другая шероховатая), условия симметрии нарушаются. В этом случае при расчете течения Куэтта на основе полуэмпирической теории для учета асимметрии поля скоростей приходится прибегать к различного рода искусственным предположениям и гипотезам, не вытекающим из самой теории. Для сравнения отметим, что при выводе общих формул (14), (15) и как их следствия выражения (16) истинный характер распределения скоростей по сечению канала оказался несущественной подробностью теории.

Но если механизм, от которого зависят τ , τ_i , \bar{u} , не чувствителен к реальному значению скорости, то любые попытки подмены точного решения приближенными на основе модельного описания поля скоростей скорее всего приведут к утрате указанного механизма в модельных уравнениях и, следовательно, к невозможности адекватного предсказания значений τ , τ_i , \bar{u} . Заметим, что эти же выводы можно было сделать, и не зная конкретного значения $\varphi(V)$ в соотношениях (13), (14), а тот факт, что для частного случая течения в каналах с неподвижными стенками использовались данные о логарифмическом профиле скорости, можно рассматривать как некоторый удобный способ вычисления указанной константы. С учетом сделанных обобщений обратимся к намеченной ранее проблеме учета вязких эффектов для течений в гладких и шероховатых каналах при $Re < \infty$.

2.7. Обобщение метода застойных зон для турбулентных течений с учетом вязкости, т. е. при $Re < \infty$

Механизм влияния вязкости имеет двоякую природу. С одной стороны, вязкость является причиной диссипации турбулентной энергии в объеме потока и гашения турбулентных пульсаций у стенок канала. Благодаря ее тормозящему влиянию у поверхности стенки образуется вязкий подслой толщиной δ , в который турбулентные пульсации не проникают. Из соображений размерности так же, как и ранее при выводе формулы (3), величину δ можно оценить соотношением

$$\delta_i = \gamma\nu/v_{*i}, \quad (17)$$

где γ — некоторая константа, v_{*i} — локальное значение динамической скорости на гладких ($i = \nu$) и шероховатых ($i = r$) участках. Заметим, что формулы (3) и (17) при внешнем сходстве имеют разный физический смысл и поэтому значения констант γ_ν и γ в этих формулах совпадать не обязаны. Влияние вязкого торможения на турбулентное течение в шероховатом канале можно описать как результат уменьшения эффективной высоты шероховатости на величину, равную толщине примыкающего к стенке вязкого подслоя. Так, в формуле (7), задающей K_s для распределенной шероховатости в виде прямоугольных вставок, вместо h следует подставить $h_\delta = h - \delta_r$.

С другой стороны, для турбулентных течений в каналах с гладкими стенками параметр K_s , как видно из формулы (3), зависит от коэффициента молекулярной вязкости. Отсюда, исходя из естественного понимания роли шероховатости как одного из факторов формирования и интенсификации турбулентности, вторую функцию вязкости можно связать с процессами турбулизации течения в гладких каналах. Можно предположить, что на границе вязкого подслоя и ядра турбулентного потока вследствие, например, эффектов неустойчивости течения вблизи поверхности стенки образуются участки заторможенной жидкости, играющие роль шероховатых выступов. С вершин этих формирований происходит срыв потока, и за ними, как и за твердыми выступами, образуются застойные зоны. Их отличие от стационарных застойных зон лишь в том, что возникают они в случайных местах на стенках канала, в случайные моменты времени и перемещаются вдоль стенок с некоторой скоростью u_s , равной скорости потока на внешней границе ламинарного подслоя,

величину которой получим из уравнения движения в вязком подслое $v_{*\nu}^2 = \nu du/dy$ при $y = \delta_s = \gamma\nu/v_{*\nu}$:

$$u_s = \gamma v_{*\nu}.$$

Будучи усреднены по времени и длине канала такие застойные зоны, так же как и стационарные застойные зоны, могут быть охарактеризованы некоторым объемом, величину которого на единицу поверхности стенки из соображений размерности можно записать в виде

$$V_\nu = \gamma_\nu \nu / v_{*\nu}, \quad (18)$$

где γ_ν — константа, та же, что и в формуле (3), поскольку для гладких каналов обе формулы должны совпадать.

Тот факт, что предложенный механизм действительно возможен, находит подтверждение в экспериментальных работах по визуализации турбулентных течений [6–8], в которых обнаружено существование отрывных вихрей, зон заторможенного и ускоренного течений вблизи поверхности гладкой стенки. Но отметим, что в настоящей работе предсказание существования отрывных структур у стенок гладких каналов сделано чисто умозрительным путем, как само собой напрашивающееся обобщение физического смысла роли шероховатых элементов, как формирующих отрывные вихри у стенок каналов. Поэтому упомянутые экспериментальные факты, а также, например, аналитическое решение [9], подтверждающие факт существования подобных структур, представляют интерес прежде всего с точки зрения описания деталей картины турбулентных течений у стенок каналов.

При подсчете суммы объемов застойных зон от твердых выступов и гладких участков, величину объема V_ν необходимо умножить на S_ν — долю занимаемой им площади поверхности стенки. Отсюда общее выражение для K_s , учитывающее совместный вклад шероховатых элементов и гладких участков, может быть записано в виде

$$K_s = V_r + S_\nu V_\nu, \quad (19)$$

где в первом слагаемом суммы аналогичный множитель площади под застойными зонами шероховатых выступов $S_r = 1 - S_\nu$ отсутствует, поскольку, согласно формуле (6), параметр V_r изначально определяется как величина, приходящаяся на единицу площади поверхности.

Полученные оценочные соотношения содержат две новые константы, γ и γ_ν , для определения которых можно использовать известные результаты

расчетов и эксперимента для течений в гладких каналах. Поскольку в литературе встречается множество примерно равнозначных вариантов записи формул для профиля скорости и закона трения, для определенности выбор источника необходимых данных был остановлен на монографии [21], в соответствии с которым для константы γ принято значение $\gamma = 5$, а закон трения для гладких каналов представляется в виде

$$\frac{\bar{u}}{v_{*\nu}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{Rv_{*\nu}}{\nu} \right) + 1.75.$$

Аналогичное выражение для $\bar{u}/v_{*\nu}$ найдем из уравнения (15) для турбулентных течений в гладких каналах, т. е. при $V = V_\nu$. С учетом приведенных выше выражений для $\varphi(V)$ и u_s получим

$$\frac{\bar{u}}{v_{*\nu}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{Rv_{*\nu}}{\gamma_\nu \nu} \right) + B + \frac{u_s}{v_{*\nu}}, \quad (20)$$

где, напомним, константа $B = -3$. Приравняв друг другу обе формулы, находим выражение и численное значение константы γ_ν :

$$\gamma_\nu = 0.15e^{\kappa\gamma} \approx 1.1.$$

Получили, что толщина гипотетически введенного слоя застойных зон над вязким подслоем оказалась равной примерно 1/5 его толщины, и в данном контексте этот результат можно рассматривать как пример косвенного подтверждения результатов предлагаемой теории.

2.8. Расчет трения в шероховатых каналах при произвольных числах Рейнольдса $Re < \infty$

В качестве примера использования полученных обобщений теории рассмотрим турбулентное течение для описанного ранее типа шероховатой поверхности в виде прямоугольных выступов высотой h с расстоянием p между ними. Задача решается на основе двух уравнений (14) для долей касательных напряжений τ_i на гладких и шероховатых участках, связывающих τ_i с объемом застойных зон V_i на этих участках. Отметим, что, поскольку, по определению, величина τ_i рассчитывается на единицу площади поверхности стенки, в выражении для локальной динамической скорости v_{*r} в окрестности шероховатого выступа должна быть учтена доля площади поверхности стенки S_r , занятой отрывной застойной зоной за выступом шероховатости, $v_{*r} = \sqrt{\tau_r/\rho S_r}$. Для прямоугольных вставок S_r следует заменить на

$L_r = A(h - \delta_r)/p$ — долю протяженности застойной зоны. Переходя далее к безразмерным переменным с радиусом трубы R в качестве характерного масштаба длины и средней скоростью потока \bar{u} — масштаба скорости, объемы V_i застойных зон на гладких и шероховатых участках канала запишем в виде

$$\begin{aligned} V_\nu &= \frac{2\gamma_\nu}{v_{*\nu} Re}, \\ V_r &= \frac{A(h - \delta_r)^2}{2p}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\delta_r = 2\gamma_r/v_{*r} Re$, γ_r — константа толщины вязкого подслоя, принимаемая равной ранее введенной константе γ для гладких участков, т. е. $\gamma_r = 5$. Помня, что $\tau_i = v_{*i}^2$, формулы (14) можно рассматривать как уравнения для искомых величин v_{*i} . С учетом выражений (21) для искомых величин V_i преобразуем их к виду

$$\begin{aligned} v_{*\nu}^3 V \varphi(V) - \frac{2\gamma_\nu(1 - \gamma_r v_{*\nu})^2}{Re} &= 0, \\ v_{*r}^2 V \varphi(V) - \frac{h - \delta_r}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $V \equiv K_s$, а функция $\varphi(V)$ задается соотношением (13).

Результаты расчетов коэффициента трения c_f (в виде комбинации $\lambda = 400c_f$) для турбулентных течений в трубах с шероховатостью в форме прямоугольных вставок для ряда значений параметра шероховатости p/h и соответствующие им опытные данные работы [23] приведены на рис. 3.

На рис. 3 видно, что результаты теории удовлетворительно согласуются с экспериментом. Поскольку предложенный метод оценки влияния вязкости на объем застойных зон за прямоугольными выступами оказался успешным, представляет интерес применить его к другим типам шероховатости и, в частности, к песочной шероховатости, элементы которой моделируются полусферами. Погружение песчинок в вязкий подслой толщиной δ_r отмечено штриховой линией на рис. 2. Объем застойной зоны V_r определяется как часть ее полного объема, лежащая выше штриховой линии. Пара уравнений, на основе которых рассчитываются коэффициенты трения, аналогична системе (22) для прямоугольных вставок, но с иной зависимостью объемов V_i и площадей S_i от параметра δ_r , учитывающей геометрические особенности фигур, изображенных на рис. 2. Результаты расчетов (сплошные кривые) и экспериментальные данные Никурадзе [22] (точки) для песочной шероховатости с отношением радиуса

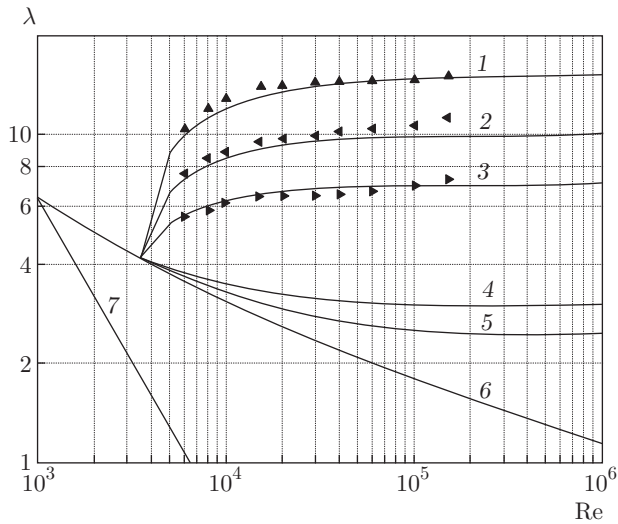


Рис. 3. Теоретические зависимости (сплошные кривые) коэффициента трения $\lambda = 400c_f$ от числа Рейнольдса в трубах с распределенной шероховатостью в виде прямоугольных вставок с $h/R = 0.04$ и рядом значений параметра p : кривая 1 — $p/h = 10$; 2 — $p/h = 20$; 3 — $p/h = 40$, и соответствующие им опытные данные (точки) из работы [22]; кривые 4 и 5 для $p/h = 400$ и $p/h = 800$, а также кривые 6 и 7 для турбулентного и ламинарного режимов течения в гладких трубах как иллюстрация иного характера изменения коэффициента трения с ростом числа Рейнольдса

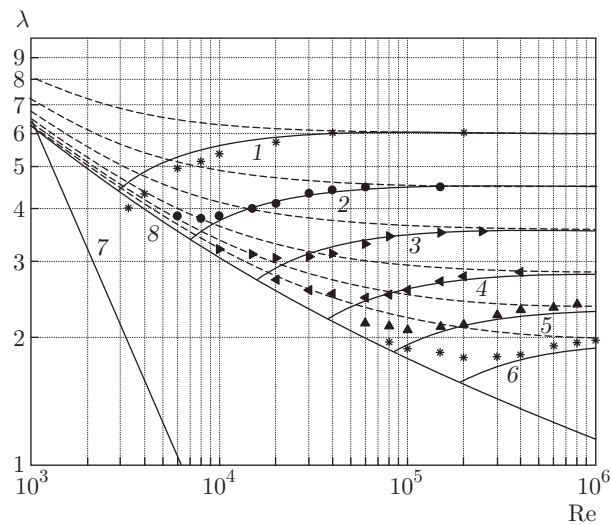


Рис. 4. Кривые зависимости коэффициента трения $\lambda = 400c_f$ от числа Рейнольдса в трубах с песочной шероховатостью с относительным размером песчинок R/s от 15 до 507: точки — измерения Никурадзе [22]; сплошные кривые — соответствующие им расчеты данной теории; штриховые кривые — расчеты по подгоночной формуле Коулбура и Уайта [21]; кривые 7 и 8 — те же, что и 7 и 6 на рис. 3

трубы к размерам песчинок в интервале от 15 до 507 показаны на рис. 4.

Представленные на рис. 4 экспериментальные данные соответствуют классическим представлениям о постепенном выходе шероховатости из вязкого подслоя. Точнее, эти представления сформировались под влиянием указанных экспериментов. В то же время из приведенных на рис. 4 результатов расчета видно, что теоретические кривые «не видят» начального этапа выхода песчинок из вязкого подслоя, причем этот эффект усиливается по мере уменьшения их размера. С позиций предлагаемой теории расхождение с экспериментом можно объяснить исходя из характера приведенных на рис. 3 кривых 4 и 5 для больших значений отношения p/h , т. е. редко стоящих выступов шероховатых элементов. Можно предположить, что для в целом однородной структуры песчинок, пусть очень редко, но встречаются песчинки больших размеров, вклад которых в трение начинает проявляться раньше, чем для основной массы песчинок заданного размера. Пока большинство песчинок скрыто в вязком подслое, их влияние на коэффициент сопротивления будет таким же, как и для кривых 4 и 5 на рис. 3.

2.9. О механизме тепло- и массопереноса в каналах с шероховатыми стенками

Одной из практически важных проблем турбулентного течения в шероховатых каналах является оценка влияния шероховатости на эффективность процесса тепло- и массопереноса, характеризуемого числом Нуссельта Nu . Известно, что шероховатость способствует интенсификации этих процессов [11]. Однако экспериментальные исследования показали также, что по мере возрастания числа Рейнольдса наступает момент, когда эффективность теплообменного процесса начинает снижаться. Поскольку во многих случаях справедлива оценка $Nu \sim 1/\delta$, причину этого явления, не останавливаясь на деталях исследования проблемы в целом, достаточно пояснить оценкой влияния шероховатых выступов на толщину δ_ν вязкого подслоя на гладких участках канала с прямоугольными вставками в пределе $Re \rightarrow \infty$. В этом пределе, как видно из уравнений (21), величина $\delta_\nu \equiv V_\nu \rightarrow 0$ пропорциональна $1/Re$ и $V \simeq V_r$. Отсюда из первого уравнения (22) для параметра динамической скорости на гладких участках находим

$$v_{*\nu} \simeq \gamma_\infty Re^{-1/3},$$

где

$$\gamma_\infty = \left(\frac{2\gamma_\nu}{V_r \varphi(V_r)} \right)^{1/3}$$

— некоторая функция от V_r , т. е. величина, зависящая только от геометрических параметров выступов. Соответственно для толщины ламинарного подслоя на гладких участках с учетом ранее полученных оценок (21) имеем оценку

$$\frac{\delta_\nu}{R} \equiv \frac{\gamma_r}{v_{*\nu} \text{Re}} = \frac{\gamma_r}{\gamma_\infty \text{Re}^{2/3}}.$$

Таким образом, получили, что в пределе $\text{Re} \rightarrow \infty$ толщина ламинарного подслоя уменьшается, как $\text{Re}^{-2/3}$. Для сравнения укажем, что для целиком гладких труб толщина ламинарного подслоя при возрастании Re уменьшается значительно быстрее,

$$\frac{\delta_\nu}{R} = \frac{\gamma_r}{v_{*\nu} \text{Re}},$$

т. е. практически пропорционально Re^{-1} , поскольку зависимость $v_{*\nu}(\text{Re})$ имеет логарифмический характер.

Полученные оценки дают полное представление о роли шероховатости в процессах переноса тепла и массы во всем диапазоне чисел Рейнольдса. При относительно небольших значениях Re выступы полностью погружены в вязкий подслон и процессы переноса протекают с равной интенсивностью как в гладких, так и шероховатых каналах. С ростом Re выступы все более выступают из вязкого подслоя и соответственно усиливаются эффекты турбулизации и процессы переноса. Однако при очень больших Re толщина вязкого подслоя на гладких участках будет уменьшаться медленнее, чем в гладком канале, и относительная скорость теплообменных процессов начнет снижаться. Измерения показали [24], что зависимость отношения $\text{Nu}_r / \text{Nu}_\nu$ от Re имеет вид выпуклой кривой, проходящей через максимум при некотором значении Re_{cr} и затем начинающей снижаться.

3. О МЕХАНИЗМЕ ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА, ВИХРЕОБРАЗОВАНИИ И ДИССИПАЦИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Результаты предлагаемой теории видятся не только в универсальной применимости получаемых на ее основе соотношений, но также в тех общих выводах, к которым она приводит относительно фундаментальных понятий и представлений о турбу-

лентности, лежащих в основе существующих моделей и методов расчета турбулентных течений. В частности, выше было отмечено, что при турбулентном режиме распределение скоростей не является тем определяющим фактором течения, на основе которого можно было бы установить закономерности движения турбулентных потоков. Но если механизм, от которого зависят такие динамические параметры турбулентных течений, как τ , c_f , v_* и т. д., не чувствителен к истинному распределению скоростей, то любые попытки его расчета на основе полумпирических моделей (не считая подгонок) скорее всего приведут к утрате указанного механизма в модельных уравнениях и, следовательно, к невозможности их адекватной оценки.

Поясним сказанное сопоставлением особенностей ламинарного и турбулентного режимов течения. При любом из них и любых условиях вихреобразования у стенок канала (гладких или шероховатых) уравнение баланса между затрачиваемой кинетической энергией потока на преодоление трения у стенок канала и скоростью диссипации кинетической энергии потока ε с учетом соотношения (8), связывающего ∇P и c_f , можно представить в виде

$$\varepsilon = c_f \rho \bar{u}^3 / R. \quad (23)$$

При ламинарном режиме течения первичным является процесс формирования параболического профиля скорости, в соответствии с которым из уравнений движения и энергии вначале рассчитываются величины ∇P и ε независимо от наличия или отсутствия выступов шероховатости (при этом, чтобы пренебречь искажениями в профиле скорости, предполагается выполненным условие $h \ll R$), а коэффициент трения c_f определяется формальным равенством (8). Течение же в окрестности выступов в зависимости от их формы за счет сгущения или разряжения линий тока подстраивается таким образом, чтобы на стенке получались определяемые заданным значением ∇P значения касательного напряжения τ .

При турбулентном режиме первичным в процессе переноса импульса является механизм отрывного обтекания выступов шероховатых элементов (или возмущений ламинарного подслоя у стенок в гладком канале). Сток импульса на стенку происходит за счет разности статических давлений на переднюю и заднюю стенки выступа. Его величина изначально задается соотношениями (14), (15), а ∇P определяется той же формулой (8), которой ранее формально задавалась величина c_f . Наглядно режимы ламинарного и турбулентного течений и раз-

ницу между ними, т. е. что первично и что вторично, можно представить формулой (8), записав ее в виде

$$c_f \equiv 2 (v_* / \bar{u})^2 \frac{turb}{\lambda m} R \nabla P / \rho \bar{u}^2. \quad (24)$$

Образующиеся при отрывном обтекании выступов вихри снабжают ядро турбулентного потока переносимой ими кинетической энергией, необходимой для поддержания данного уровня интенсивности турбулентных пульсаций в стационарном состоянии, а с другой стороны, взаимодействуют с застойными зонами и обеспечивают согласующийся с энергетическими потерями перенос импульса на стенки канала. Подчиняясь единым законам отрывных течений, эти процессы должны приводить к одним и тем же результатам измеряемых характеристик обтекания. В частности, между энергией, передаваемой отрывным вихрям в турбулентном потоке в канале, и коэффициентом трения на его стенках, должно выполняться равенство (23). Эта формула выводится как интегральное уравнение баланса кинетической энергии для всего объема турбулентного потока, и, следовательно, величина ε выражает общие энергетические потери течения в канале. Из представленной схемы взаимодействия потока с выступами шероховатой поверхности и экспериментально подтвержденного факта зависимости c_f от объема отрывных застойных зон следует вывод о том, что в объеме потока не существует других механизмов передачи кинетической энергии потока турбулентным пульсациям, кроме как через отрывные вихри, образующиеся у поверхности стенки.

Вывод о том, что турбулентный поток получает энергию от внешних источников только через посредство образующихся у стенок отрывных вихрей, расходится с традиционно физическим пониманием механизма этого процесса, основанным на законах движения вязкой жидкости, но по аналогии применяемым к режиму турбулентного движения. Формально выводимый закон логарифмического распределения скоростей для простейшего варианта турбулентного течения в каналах на основе понятия турбулентной вязкости фактически эквивалентен записи из соображений размерности выражения для производной скорости в виде $du/dy = \alpha/y$, где α — некоторая константа [3, 28], и поэтому турбулентная вязкость не является единственно возможным физическим механизмом формирования поля скоростей. Тот же результат, например, в работе [29], был получен на основе сращивания асимптотических разложений скорости вблизи и вдали от стенок канала.

Из результатов предлагаемой теории как одного из альтернативных вариантов механизма турбулентности следует, что работа внешнего источника силы первоначально затрачивается на энергию отрывных вихрей, а все последующие развивающиеся во времени и пространстве процессы, связанные с формированием усредненного профиля скорости и касательного напряжения, происходят без дополнительных затрат энергии при уже установившемся вдоль потока значении ∇P .

4. НЕКОТОРЫЕ ИТОГИ И ПУТИ ДАЛЬНЕЙШИХ ОБОБЩЕНИЙ

Разработана теория и получены соотношения, описывающие закон сопротивления для разнообразных типов турбулентных течений, включая течения в шероховатых и гладких каналах, напорные (течение Пуазейля) и безнапорные (течение Куэтта) течения во всем диапазоне чисел Рейнольдса, начиная от режима течения с гидравлически гладкими стенками и до режима с полным проявлением шероховатых элементов. Раскрыт физический смысл понятия эффективной шероховатости K_s как средней толщины отрывных застойных зон, образующихся за выступами шероховатых элементов и получены выражения для K_s в случаях шероховатости в виде прямоугольных вставок и песочной шероховатости Никурадзе, справедливость которых подтверждена сравнением с экспериментальными данными. Теория основана на единой для всех типов течений идее образования отрывных застойных зон у стенок канала. Эта идея вводится в качестве некоего постулата, который, очевидно, невозможно вывести из общих уравнений движения сплошной среды, но, заметим, ни она, ни ее следствия не могут и противоречить этим уравнениям, поскольку нигде с ними не пересекаются и не являются их каким-либо невыводимым упрощением. Можно только говорить о том, не противоречит ли она соображениям здравого смысла и экспериментальным данным, или, наоборот, эти соображения и эксперименты дают повод для ее дальнейшего использования и обобщений. Проведенные исследования показали ее плодотворность. Начав с чисто утилитарной задачи определения K_s для канала с распределенной шероховатостью, путем последовательной разработки одной и той же идеи удалось прийти к обобщенным соотношениям (17), (18) и (20), (21), охватывающим широкий спектр различных турбулентных течений.

Дальнейшие шаги обобщений, которые позволили бы распространить теорию на более сложные структуры турбулентных потоков, например течение в диффузорах, течения со свободными границами, пограничный слой на пластине и т. д., связаны с необходимостью вводить дополнительные, четко сформулированные правила их описания. Кроме того, каждый из упомянутых типов течений обладает такими, присущими только ему особенностями, исследование которых могло бы составить самостоятельную задачу разработки общей теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Marusic, B. J. McKeon, P. A. Monkewitz, H. M. Nagib, A. J. Smits, and K. R. Sreenivasan, *Phys. Fluids* **22**, 065103 (2010).
2. A. J. Smits, B. J. McKeon, and I. Marusic, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **43**, 353 (2011).
3. T. B. Nickels, I. Marusic, S. Hafez, N. Hutchins, and M. S. Chong, *Phil. Trans. Roy. Soc. Amer.* **365**, 807 (2007).
4. И. И. Вигдорович, *ЖЭТФ* **144**, 413 (2013).
5. И. И. Вигдорович, *ЖЭТФ* **146**, 1063 (2014).
6. T. Theodorsen, in *Proc. 2nd Midwest. Conf. Fluid Mech.*, March 17–19, Ohio State University, Columbus (1952), p. 1.
7. S. J. Kline, W. C. Reynolds, F. A. Schraub, and P. W. Runstadler, *J. Fluid Mech.* **30**, 741 (1967).
8. E. R. Corino and R. S. J. Brodkey, *J. Fluid Mech.* **37**, 1 (1969).
9. A. E. Perry and M. S. Chong, *J. Fluid Mech.* **119**, 173 (1982).
10. R. J. Adrian, *Phys. Fluids* **19**, 041301 (2007).
11. J. Jimenez, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **36**, 173 (2004).
12. H. Herwig, D. Gloss, and T. Wenterodt, *J. Fluid Mech.* **613**, 35 (2008).
13. K. A. Flack and M. P. Schultz, *Phys. Fluids* **26**, 101305 (2014).
14. A. Busse, M. Thakkar, and N. D. Sandham, *J. Fluid Mech.* **810**, 196 (2017).
15. M. Thakkar, A. Busse, and N. D. Sandham, *J. Fluid Mech.* **837**, 1 (2018).
16. Zhen-Su She, Xi Chen, and Fazle Hussain, *J. Fluid Mech.* **827**, 322 (2017).
17. Xi Chen, Fazle Hussain, and Zhen-Su She, *J. Fluid Mech.* **850**, 401 (2018).
18. В. П. Воротилин, *ЖЭТФ* **153**, 313 (2018).
19. B. R. Morton, G. I. Taylor, and J. S. Turner, *Proc. R. Soc. Lond. A* **234**, 1 (1956).
20. A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge Univ. Press (1980).
21. Г. Шлихтинг, *Теория пограничного слоя*, Наука, Москва (1969).
22. J. Nikuradse, *Laws of Flow in Rough Pipes*, NACA Technical Memorandum 1292, Washington (1950).
23. R. L. Webb, E. R. G. Eckert, and R. J. Goldstein, *Int. J. Heat Mass Transfer* **14**, 601 (1971).
24. M. Dalle Donne and L. Meyer., *Int. J. Heat Mass Transfer* **20**, 583 (1977).
25. W. Nunner, *ForschHft, Ver. Dt. Ing.* 455 (1956).
26. R. Koch, *ForschHft, Ver. Dt. Ing.* 469, Ser. B, **24**, 1 (1958).
27. I. Gargaund and G. Paumard, CEA-R-2464 (1964).
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, Москва (1953).
29. C. B. Millikan, in *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass. (1938), p. 386.