

# ДОКРИТИЧЕСКОЕ МЕЛКОМАСШТАБНОЕ ДИНАМО В СПИРАЛЬНОМ СЛУЧАЙНОМ ПОТОКЕ

*Е. В. Юшков<sup>a,b,\*</sup>, А. С. Лукин<sup>a,c</sup>, Д. Д. Соколов<sup>b,d</sup>*

<sup>a</sup> *Институт космических исследований Российской академии наук  
117997, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики  
101100, Москва, Россия*

<sup>d</sup> *Институт Земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской академии наук  
108840, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 17 ноября 2018 г.,  
после переработки 3 января 2019 г.  
Принята к публикации 15 января 2019 г.

Исследуется возможность развития мелкомасштабного динамо в случайном потоке со слабой зеркальной асимметрией при докритических условиях генерации. Показано, что появление асимметрии потока с ненулевой спиральностью приводит к генерации крупномасштабных периодических возмущений. Эти возмущения, в свою очередь, поддерживают активную генерацию поля на малых масштабах. Мы описываем свойства такой поддержки, мощность генерации и характерные масштабы, зависящие от скорости случайного потока и степени его спиральности. Переводя задачу в спектральную область, мы демонстрируем формирование двусоставного мелко- и крупномасштабного спектра, состоящего из пика, локализованного на больших масштабах, и степенных зависимостей при больших и малых  $k$ . Особо отмечается возможность прямой проверки описываемых спектральных свойств в докритических лабораторных МГД-экспериментах.

DOI: 10.1134/S0044451019060178

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Разделение генерации магнитных полей на крупно- и мелкомасштабное динамо является традицией с середины прошлого века. В рамках данного подхода два механизма перекачки энергии из турбулентного потока в магнитное поле, каждый из которых применим на различных пространственных масштабах и имеет различные источники генерации, рассматриваются отдельно. Мелкомасштабное динамо обеспечивает рост магнитного поля на характерном масштабе турбулентности и требует большого (сверхкритического) значения магнитного числа Рейнольдса,  $Rm > Rm_{cr}$ . Второй же механизм функционирует на характерном масштабе всей си-

стемы и начинает работать при наличии дифференциального вращения и/или зеркальной асимметрии потока  $\alpha_0 \equiv \langle \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V} \rangle \neq 0$ . В отсутствие дифференциального вращения крупномасштабная генерация называется обычно  $\alpha^2$ -динамо, при наличии вращения она носит название  $\alpha\omega$ -динамо. В данной работе мы делаем попытку проанализировать генерацию магнитного поля на больших и малых масштабах, не разделяя подходы и пренебрегая вращением системы.

После того, как развитие вычислительной техники сделало возможным прямое численное моделирование магнитной самогенерации, а совершенствование лабораторной техники позволило проводить динамо-эксперименты (см., например, обзор [1]), систематическое изучение сосуществования обоих разномасштабных механизмов в одной физической системе стало доступным. Конечно, результаты таких исследований интересно проверить, насколько

\* E-mail: yushkov.msu@mail.ru

это возможно, результатами, полученными в рамках подходов, ориентированных на описание классическими аналитическими методами теоретической физики, что позволяет сделать хорошо известная модель Казанцева [2]. Эта модель, предложенная в 1967 г., основана на специальных представлениях о временных корреляциях случайного потока и традиционно используется исключительно для анализа процессов генерации на малых масштабах [3–7]. Из-за того что мелкомасштабное динамо может работать в упрощенных зеркально-симметричных случаях, именно задачи с нулевой спиральностью и рассматривались чаще всего в предыдущих работах. Крупномасштабная генерация в таких средах с  $\alpha_0 = 0$ , естественно, отсутствовала. Обобщение модели Казанцева для зеркально-асимметричных сред с ненулевой спиральностью,  $\alpha_0 \neq 0$ , было реализовано в ряде исследований, начиная с работы Вайнштейна и Кичатинова [8]. При этом основной акцент в подобных работах был сделан, прежде всего, на нелинейное подавление сверхкритической генерации магнитного поля, а также на проблемы, связанные с обобщением идей Казанцева на случай колмогоровской, а не традиционной дельта-коррелированной турбулентности (см., например, [9–11]).

В настоящей работе мы рассматриваем совсем другую проблему теории мелкомасштабной генерации. Давно известно, что процесс динамо является критическим (пороговым) явлением. В рамках мелкомасштабного процесса это значит, что неограниченный рост магнитного поля (изначально малого) возможен только при достаточно больших магнитных числах Рейнольдса,  $Rm > Rm_{cr}$ . Конечно, любое первоначально малое поле при монотонном нарастании становится со временем динамически существенным, после чего его самовозбуждение так или иначе стабилизируется и останавливается. Однако описание этой нелинейной стадии процесса выходит за рамки исходно линейного подхода Казанцева. В 1956 г. Зельдович [12] отметил, что в задаче динамо возможны нетривиальные докритические режимы для эволюции магнитного поля, в которых энергия сначала начинает расти, а только потом постепенно затухает. Поскольку в космических средах магнитные числа Рейнольдса практически всегда намного превышают критическое значение, идея Зельдовича долгое время не привлекала внимания в контексте классической модели. Однако, поскольку значения  $Rm$ , получаемые в лабораторных динамо-экспериментах находились и находятся в диапазоне, в котором для модели Казанцева естественно ожидать затухания ( $Rm \sim 10 < Rm_{cr} \sim 60$ ), исследо-

вания возможности докритического роста в рамках данной модели представляются без сомнения актуальными.

Наша идея основана на результатах работы [13], где был исследован временный рост мелкомасштабного магнитного поля в рамках симметричной модели. Было показано, что докритический рост может иметь место в двух случаях: если изначально магнитная энергия была сосредоточена на масштабах много больших, чем характерный масштаб диссипации, или если генерация происходит при внешней поддержке магнитного поля — другими словами, если магнитное поле искусственно скоррелировано на относительно больших расстояниях,  $\langle \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(0) \rangle \neq 0$  при  $r \gg 1$ . При этом, далее это будет важно, наблюдался рост магнитной энергии тем более значительный, чем значение  $Rm$  ближе к критической величине  $Rm_{cr}$ . Здесь мы постараемся объединить упомянутые результаты по докритическому поведению с представлением о том, что в асимметричном случае на больших масштабах должно работать динамо среднего поля, которое и создает внешнюю поддержку, подвергающуюся преобразованиям в результате работы мелкомасштабного процесса. Более подробную информацию об используемой модели можно найти в работах [2, 5, 14], результаты по сверхкритическому режиму — в работах [15–17], а детальное сравнение теоретических результатов с результатами прямого численного моделирования — в работах [18–20].

Особо отметим, что мы рассматриваем исключительно статистически однородное случайное течение, т. е. отвлекаемся от эффектов, связанных с конечностью области, занятой течением. Поэтому в нашем случае крупномасштабное динамо может работать и при сколь угодно малых магнитных числах Рейнольдса [21, 22]. Естественно, в ограниченной области для появления крупномасштабной самогенерации магнитное число Рейнольдса должно превышать некоторое критическое значение, а источники магнитной генерации (такие как зеркальная асимметрия или дифференциальное вращение) должны быть достаточно интенсивными [23]. Другое ограничение приближения пространственно-бесконечного потока было отмечено в работе [24]: так, в двумерном случайном потоке магнитная энергия может экспоненциально и неограниченно нарастать, а в пространственно-ограниченном теле она со временем затухает [12]. Однако подобная детализация постановки задачи в ограниченных дельта-коррелированных течениях сильно усложняет ответ на вопрос о возможности докритической генерации.

## 2. МЕЛКОМАСШТАБНОЕ ДИНАМО

Рассмотрим модификацию модели Казанцева для зеркально-асимметричной среды, описываемую системой Вайнштейна – Кичатинова [8]. Полученная для дельта-коррелированного случайного потока с ненулевой спиральностью, она определяет поведение симметричной и кососимметричной частей,  $M(r, t)$  и  $K(r, t)$ , корреляционного тензора магнитного поля

$$\langle \mathbf{H}_i(r, t) \cdot \mathbf{H}_j(0, 0) \rangle = \left( M + \frac{r}{2} \frac{\partial M}{\partial r} \right) \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) + M \frac{r_i r_j}{r^2} + K \epsilon_{ijk} r_k. \quad (1)$$

Условия, при которых удается получить эти уравнения, такие как изотропность и несжимаемость проводящего потока, отсутствие влияния магнитного поля на поток и т. д., подробно описаны, например, в обзоре [3] и в указанной там библиографии. Здесь для удобства мы будем пользоваться вспомогательными заменами  $\phi(r, t)$  и  $\theta(r, t)$ , определяемыми выражениями

$$\begin{aligned} M(r, t) &= \frac{\phi(r, t)}{r^2 \eta^{1/2}}, \\ K(r, t) &= \frac{1}{2r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\theta(r, t)}{r^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Эти замены, предложенные в работах [14, 16], сводят модель Казанцева к системе двух дифференциальных эволюционных уравнений параболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{2\eta}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2 \right] \phi - \delta \eta \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - \frac{2\theta}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \eta \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - \frac{2\theta}{r^2} \right] + \delta \phi; \quad \delta(r) = \frac{\alpha(r)}{\eta^{1/2}}. \quad (4)$$

Помимо граничных и начальных условий поведение корреляционных функций, описываемое данной системой, определяется параметрами случайного потока: фиксированной вязкостью и спиральностью:

$$\eta(r) = 1/\text{Rm} + F(0) - F(r), \quad \alpha(r) = G(0) - G(r),$$

другими словами, видом задаваемого дельта-коррелированного тензора скорости:

$$\langle \mathbf{V}_i(r, t) \cdot \mathbf{V}_j(0, 0) \rangle = \left( \left( F + \frac{r}{2} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) + F \frac{r_i r_j}{r^2} + G \epsilon_{ijk} r_k \right) \delta(t). \quad (5)$$

Задача является безразмерной таким образом, что за  $r = 1$  принимается корреляционная длина случайного гауссова поля скорости, при этом спиральность потока выбирается достаточно малой (различие этих величин на порядок является традиционной практикой при теоретическом анализе проблемы):

$$\langle \mathbf{V}(0) \cdot \mathbf{V}(0) \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{V}(0) \cdot \text{rot } \mathbf{V}(0) \rangle = \alpha_0 \leq 0.1.$$

Конечно, при выборе одинаковых гауссовых корреляционных функций для спиральности  $G(r)$  и энергии  $F(r)$  возможно нарушение хорошо известного соотношения Моффата (см. [21]), в частности, при малых  $k$  (на больших масштабах), однако само предположение об изотропности системы и неограниченности области уже накладывает условия, противоречащие выводу данной оценки. Так, в пространственно-конечном течении эти проблемы не возникают, поскольку возможные волновые числа ограничены снизу.

Экспоненциально растущее решение задачи Казанцева имеет место, только если  $\text{Rm} > \text{Rm}_{cr}$ . Критическое значение числа Рейнольдса  $\text{Rm}_{cr}$  приблизительно равно 56 в зеркально-симметричном случае и уменьшается с появлением спиральности [16]. Мы изучаем поведение решения системы (3), (4) при  $\text{Rm} < \text{Rm}_{cr}$ , численно решая уравнения на неравномерной сетке по чисто неявной схеме в предположении нулевых граничных условий для функций  $\phi(r, t)$  и  $\theta(r, t)$  и локализованного на единичном масштабе начального условия.

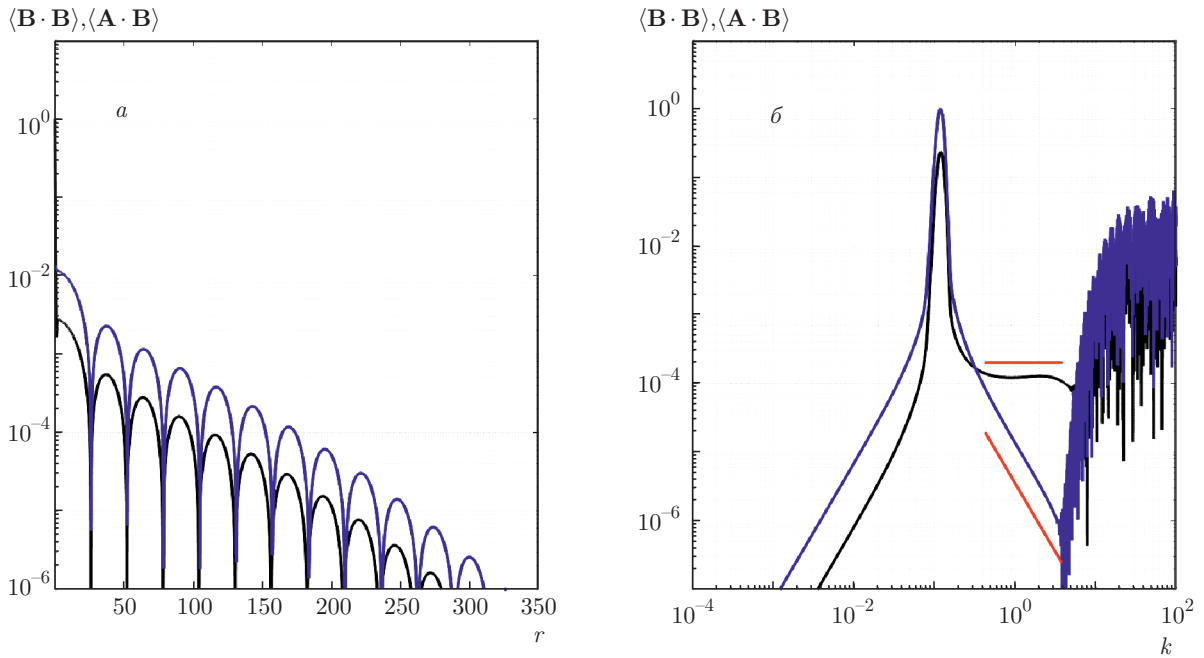
## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Все результаты представлены для корреляционных функций магнитного поля и магнитной спиральности:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rangle(r) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r\phi}{\eta^{1/2}} \right), \\ \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} \rangle(r) &= -\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r\theta), \end{aligned} \quad (6)$$

полученным из тензора (1) после его свертки по одинаковым индексам, а также для их спектральных характеристик, вычисляемым в результате трехмерного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rangle(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} \langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rangle d^3r = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \frac{2\phi(r)}{\eta^{1/2}} \cos(kr) \left( 1 - \frac{\text{tg}(kr)}{kr} \right) dr, \end{aligned} \quad (7)$$



**Рис. 1.** (В цвете онлайн) Крупномасштабная структура докритического режима генерации,  $Rm = 50$ . На рис. *a* представлены продольная корреляционная функция (черная линия) и корреляционная функция спиральности (синяя линия). На рис. *б* — их фурье-образы — плотность энергии (черная линия) и плотность спиральности (синяя линия),  $\alpha_0 = 0.5$ . Шум в спектре связан с конечным размером выбранной неравномерной сетки. Здесь и далее корреляционные функции нормированы на максимальное значение для магнитного поля, а их спектральные образы — на максимальные значения для плотности спиральности

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} \rangle(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} \rangle(r) d^3r = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \theta(r) \cos(kr) \left( 1 - \frac{\text{tg}(kr)}{kr} \right) dr. \end{aligned} \quad (8)$$

Детали вычислений стационарных и динамических решений системы (3), (4) смотрите подробнее в работе [13] и приведенных там ссылках.

На основании результатов численного эксперимента мы убедились, что и в сверхкритическом и в докритическом режимах с  $\alpha_0 \neq 0$  при любых начальных условиях начинается рост крупномасштабной структуры поля (см. пример на рис. 1). В силу того, что такая структура формируется на масштабах  $r \gg 1$ , а корреляционные функции потока локализованы на единичном масштабе при  $r < 1$ , есть возможность грубо проанализировать систему (3), (4), считая  $\delta(r)$  и  $\eta(r)$  константами. Действительно, при больших значениях  $r$  и при экспоненциальной временной зависимости  $\exp(2\gamma t)$ , система принимает достаточно простой вид:

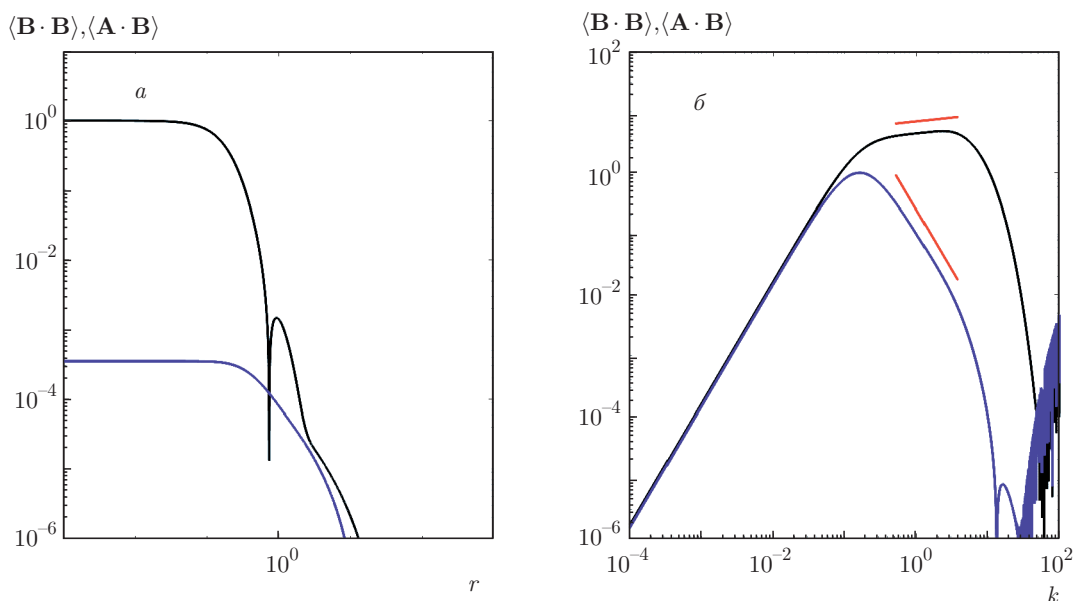
$$\eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = (\gamma - \delta^2)\phi + \gamma\delta\theta, \quad \eta \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = -\delta\phi + \gamma\theta.$$

Решение такой системы хорошо известно (см., например, [16]). Оно ведет себя как

$$\phi, \theta \propto \exp \left( 2\gamma t - \left( \frac{4\gamma}{\delta^2} - 1 \right)^{1/2} \frac{r}{l} \right) \cos \left( \frac{r}{l} \right); \quad l = \frac{2\eta}{\alpha_0}.$$

Считая, что амплитуды функций  $\phi(r)$  и  $\theta(r)$  ограничены при  $r \rightarrow \infty$ , мы получаем максимальную скорость роста равную  $\gamma = \delta^2/4 = \alpha_0^2/4\eta$  и характерный период корреляций равный  $2\eta/\alpha_0$ . Заметим, что полученная скорость и масштаб являются типичными для классической задачи Штеенбека–Краузе–Рэдлера, описывающей поведения динамо среднего поля без всякого учета мелкомасштабных процессов [25–27].

Эта крупномасштабная периодическая структура и ее формирование в пространстве (как и затухание при  $\alpha_0 = 0$ ) хорошо прослеживаются не только для симметричной, но и для несимметричной части корреляционного тензора (см. рис. 1а), уменьшение амплитуды корреляций при  $r \rightarrow \infty$  связано с процессом постепенного распространения возмущения из энергонесущей области, а периодические сингулярные особенности соответствуют переходам



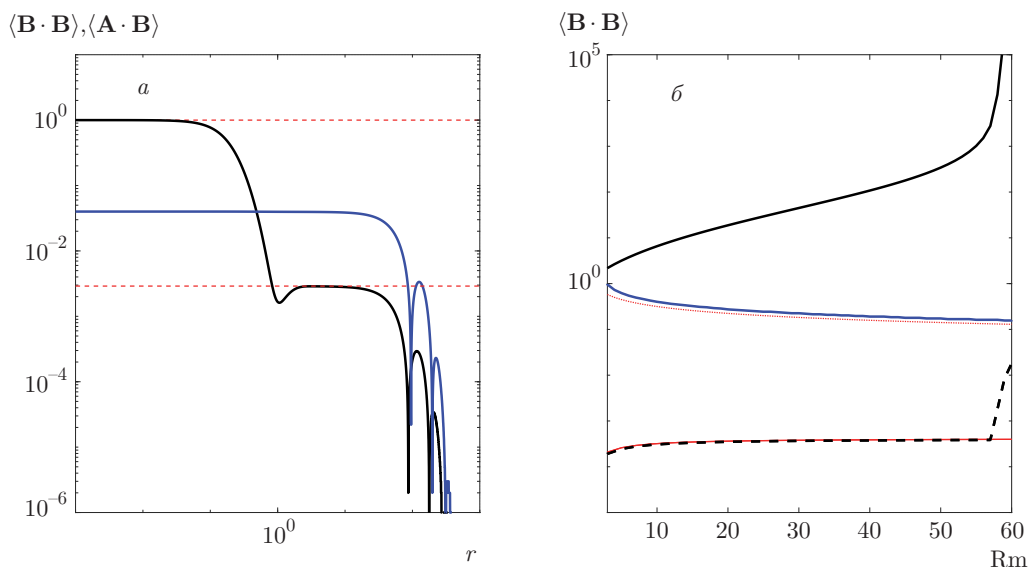
**Рис. 2.** (В цвете онлайн) Мелкомасштабная структура сверхкритического режима генерации,  $Rm = 60$ . На рис. *a* представлены продольная корреляционная функция (черная линия) и корреляционная функция спиральности (синяя линия), на рис. *б* — их фурье-образы — плотность энергии (черная линия) и плотность спиральности (синяя линия),  $\alpha_0 = 0.1$ . Красные линии соответствуют законам  $k^{-2}$ ,  $k^{0.25}$ . Смена знака спиральности соответствует сингулярной особенности на графике в правом нижнем углу рис. *б*

корреляционной функции через нуль. Ее спектральный образ, представленный на рис. 1б, имеет острый пик, соответствующий характерному периоду корреляций  $2\eta/\alpha_0$ . На малых и больших масштабах — справа и слева от пика — спектральная плотность спиральности убывает по степенному закону как  $k^{\pm 2}$ , а энергия — выходит на плато вблизи  $k = 1$  (красные линии на рис. 1 соответствуют  $k^{-2}$  и  $k = \text{const}$ ). При этом на больших масштабах ( $k \ll 1$ ) эта зависимость объясняется нулевым интегралом по пространству от  $\langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rangle(r)$  (см. формулы (7), (8)), а на малых ( $k \gg 1$ ) — характеризует мелкомасштабную структуру, скрытую за спектральным образом крупномасштабных возмущений.

Мы утверждаем, что плато для «энергии» и степенной закон для «спиральности» являются прямыми следствиями мелкомасштабной структуры магнитного поля. Доказательством этого является поведение поля в сверхкритическом режиме генерации ( $Rm = 60$ ), в котором преобладающей является именно мелкомасштабная корреляция (см. рис. 2). Теперь в корреляционных функциях не видна периодическая структура, так как она обладает более медленным ростом, чем мелкомасштабное локализованное магнитное поле. Соответственно, в спектральном пространстве максимумы плотности энер-

гии и спиральности сместились в область малых масштабов или больших волновых чисел. Для спиральности в спектральном пространстве появилась смена знака вблизи  $k = 1$  (прохождение кривой корреляционной функции через нуль характеризуется сингулярной особенностью графика). При этом у профиля магнитной энергии четко прослеживается плато порядка  $k^{0.25}$  в окрестности  $k = 1$ , а у функции спиральности степенное убывание по закону  $k^{-2}$ , т. е. те же самые структуры, которые заметны, хотя и не столь отчетливо и для  $Rm < Rm_{cr}$  (см. рис. 1). Таким образом, в докритическом режиме генерации спектры корреляционных функций состоят из двух частей — пик от крупномасштабного процесса, а плато и степенное убывание от мелкомасштабной генерации.

Такая составная структура спектра сохраняется даже при больших временах, т. е. мелкомасштабное магнитное поле развивается с той же скоростью, что и крупномасштабное (на рис. 3б показано поведение скорости роста мелкомасштабного динамо  $\langle \mathbf{H}(0)^2 \rangle(t)$  по сравнению с аналитической оценкой  $\gamma = \alpha_0^2/4\eta$  для крупномасштабного процесса), во время как в докритическом зеркально-симметричном режиме поле затухает. Одним словом, крупномасштабная генерация поддерживает мелкомас-



**Рис. 3.** (В цвете онлайн) Мелкомасштабная структура докритического режима и характеристики генерации. На рис. *a* представлены продольная корреляционная функция (черная линия) и корреляционная функция спиральности (синяя линия),  $Rm = 50$ ,  $\alpha_0 = 0.1$ , на рис. *б* — зависимость от  $Rm$  ширины мелкомасштабной структуры (синяя линия), амплитуды мелкомасштабной структуры (черная линия) и скорость генерации  $\gamma$  (штриховая черная линия). Красными линиями обозначены уровни корреляции на малом и большом масштабе (рис. *a*), зависимость  $Rm^{-1/2}$  и аналитическая формула для  $\gamma = 2\eta/\alpha_0$  (рис. *б*)

штабную. В частности, это видно на рис. 3а, где изображены ненулевые корреляционные функции при  $r \ll 1$  при наличии крупномасштабной структуры. Таким образом, корреляционная функция спиральности просто равна константе на турбулентном масштабе (синяя линия), а корреляционная функция энергии имеет двухуровневую структуру, помеченную красными штрихами и характерную для мелкомасштабного транзиентного роста при внешней поддержке ( $\langle \mathbf{H}(0) \cdot \mathbf{H}(0) \rangle$  и  $\langle \mathbf{H}(0) \cdot \mathbf{H}(1) \rangle$ ), детали см., например, в работе [13]).

Подчеркнем, что с ростом  $Rm$  ширина корреляционного пика магнитного поля вблизи  $r = 0$  (часто интерпретируемого как толщина магнитной петли) сужается, а амплитуда магнитного поля увеличивается по сравнению с уровнем поддержки  $\langle \mathbf{H}(0) \cdot \mathbf{H}(0) \rangle / \langle \mathbf{H}(0) \cdot \mathbf{H}(1) \rangle$  (см. рис. 3б). Однако при подходе к критической величине  $Rm_{cr}$  амплитуда поля в рамках модели неограниченно нарастает, в то время как ширина области локализации продолжает убывать монотонно как  $Rm^{-1/2}$  (штриховая линия). Следовательно, неограниченно растет энергия, накопленная в мелкомасштабных структурах. Неограниченный рост энергии должен приводить к появлению неустойчивости, а неустойчивость к нелинейной стабилизации процесса. Однако нелинейная фа-

за такого подавления динамо-процесса выходит за рамки настоящей статьи, посвященной линейной модели.

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы показали, что в бесконечном статистически-однородном и изотропном, но зеркально-асимметричном дельта-коррелированном потоке всегда происходит рост мелкомасштабного магнитного поля. Это связано с тем, что при зеркальной асимметрии крупномасштабное поле генерируется при любых  $Rm$  и работает как внешняя поддержка докритического мелкомасштабного процесса. Численное решение динамической задачи продемонстрировало, что у генерируемой магнитной спиральности мелкомасштабной структуры нет — корреляционная функция между полем и векторным потенциалом является однородной вблизи  $r = 1$ , в то время как магнитная энергия, как и в сверхкритическом случае, локализуется на малых масштабах. При этом два фактора — уменьшение области локализации и неограниченное увеличение плотности магнитной энергии с ростом  $Rm$  говорят о том, что вблизи критического режима в малых областях может быть локализована гораздо большая магнитная энергия,

чем в крупномасштабной составляющей. Такая способность концентрировать основную часть энергии в силовых магнитных петлях, конечно, быстро нарушает применимость линейного приближения. Нелинейная стабилизация растущего магнитного поля, без сомнения, требует дальнейшего исследования, однако уже в основном с помощью лабораторных экспериментов и DNS-моделей. Более того, экспоненциальный рост магнитной энергии на энергетическом масштабе во всех случаях — в симметричных и асимметричных средах, в до- и сверхкритических режимах — говорит о том, что механизм стабилизации за счет мелкомасштабных эффектов может играть не просто важную, а определяющую роль в динамо-теории.

Из-за наличия крупномасштабной генерации и поддержки ею мелкомасштабного процесса спектр магнитной энергии и спиральности является составным: он имеет узко локализованный пик, соответствующий характерному масштабу периодической структуры корреляционных функций, степенной рост по закону  $k^2$  при малых  $k$ , соответствующий нулевому интегралу от корреляционных функций по всему пространству, а также плато для плотности энергии и степенное падение для спиральности вблизи  $k = 1$ , характеризующее мелкомасштабную часть спектра. Эти плато и падение явно проявляются только вблизи критического режима, так как при больших  $Rm$  они сменяются достаточно быстрым экспоненциальным затуханием. Важно отметить, что полученные результаты во многом расходятся с результатами работ по прямому численному моделированию (DNS), в которых четко выраженный пик наблюдается только для кинетической энергии. Остается неясным, почему он не наблюдается для магнитной энергии. Например, это может быть связано с недостаточным размером области, так как крупномасштабная структура в докритическом режиме является неограниченной и поэтому очень чувствительна к размеру рассматриваемой области. Степенной рост при малых  $k$  фиксируется в численных экспериментах, но в основном этот рост описывается законом  $k^{3/2}$  — причина этого связана с тем, что в DNS-исследованиях наиболее часто рассматривается колмогоровская, а не казанцевская турбулентность. Закон  $k^{3/2}$  для колмогоровской турбулентности был выведен в работе [4], однако в такой турбулентности вихри разных масштабов имеют различные корреляционные времена, что противоречит предположению о коротких временных корреляциях в модели Казанцева. Однако в

некоторых DNS-моделях наблюдается полученная нами зависимость  $k^2$  — обычно это происходит в случае неразвитой ненасыщенной турбулентности, далекой от колмогоровской. К сожалению, магнитная спиральность не рассматривалась ранее в DNS-экспериментах и ее сравнение с результатами Казанцева остается пока невозможным. Для магнитной же энергии как выполаживание вблизи  $k = 1$ , совпадающее с демонстрируемым нами плато для мелкомасштабного спектра, так и степенные убывания, ассоциируемые с колмогоровским законом  $k^{-5/3}$ , были неоднократно промоделированы. Мы не наблюдаем степенного поведения для спектра магнитной энергии, однако получаем закон  $k^{-2}$  для магнитной спиральности. Это предупреждает нас о том, что схожесть степенных наклонов спектра еще не гарантирует того, что модель Казанцева, не включающая в себя обратное влияние генерируемого магнитного поля, на поток, может адекватно описывать поведение магнитных полей для развитой колмогоровской турбулентности, а следовательно, для использования полученных спектральных результатов в приложениях. Все полученные спектральные характеристики должны быть аккуратно перепроверены в натуральных и лабораторных экспериментах.

**Благодарности.** Авторы признательны П. Г. Фрику за помощь в трактовке полученных результатов.

**Финансирование.** Работа по формулировке задачи и по поиску вариантов ее анализа обеспечивалась грантом Российского фонда фундаментальных исследований (№ 18-02-00085). Е. В. Ю. благодарит фонд поддержки теоретической и математической физики БАЗИС (№ 18-1-1-77-3) за помощь при разработке численных подходов. Д. Д. С. выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований (№ 17-52-53203 ГФЕН а) за поддержку анализа возможностей экспериментальной апробации полученных результатов и закономерностей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Д. Соколов, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик, УФН **184**, 313 (2014).
2. А. П. Казанцев, ЖЭТФ **53**, 1806 (1967).
3. С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, УФН **145**, 307 (1985).

4. Ya. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *The Almighty Chance*, World Scientific, Singapore (1990).
5. R. M. Kulsrud and W. A. Stephen, *Ast. J.* **396**, 606 (1992).
6. K. Subramanian, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2957 (1999).
7. N. Kleeorin, I. Rogachevskii, and D. Sokoloff, *Phys. Rev. E* **65**, 036303 (2002).
8. S. I. Vainshtein and L. L. Kichatinov, *J. Fluid. Mech.* **168**, 73 (1986).
9. L. Malyshkin and S. Boldyrev, *Ast. J. Lett.* **671**, L185 (2007).
10. L. Malyshkin and S. Boldyrev, *Ast. J.* **697**, 1433 (2009).
11. P. Bhat and K. Subramanian, *Ast. J. Lett.* **791**, L34 (2014).
12. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ* **31**, 154 (1956).
13. E. Yushkov, A. Lukin, and D. Sokoloff, *Phys. Rev. E* **97**, 063108 (2018).
14. О. В. Артамонова, Д. Д. Соколов, *Вестник МГУ, физ. астрон.* **27**, 8 (1986).
15. В. Г. Новиков, А. А. Рuzмайкин, Д. Д. Соколов, *ЖЭТФ* **85**, 909 (1983).
16. E. V. Yushkov and A. S. Lukin, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **111**, 138 (2017).
17. E. V. Yushkov, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **109**, 450 (2015).
18. P. Bhat and K. Subramanian, *Monthly Notices of the Royal Astron. Soc.* **429**, 2469 (2013).
19. K. Subramanian and A. Brandenburg, *Monthly Notices of the Royal Astron. Soc.* **445**, 2930 (2014).
20. N. Haugen, A. Brandenburg, and W. Dobler, *Phys. Rev. E* **70**, 016308 (2004).
21. H. Moffatt, *Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, 2, 5-1, (1978).
22. Ya. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics*, Gordon and Breach Science Pub., New York (1983).
23. С. И. Брагинский, *ЖЭТФ* **48**, 2178 (1964).
24. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, Г. А. Сизов, *ЖЭТФ* **140**, 387 (2011).
25. S. Boldyrev, F. Cattaneo, and R. Rosner, *Phys. Rev. Lett.* **95**, (2005).
26. E. V. Yushkov, *Magnetohydrodynamics* **50**, 0024-998X (2014).
27. M. Steenbeck, F. Krause, and K. Radler, *Zeitschrift für Naturforschung A* **21** (1966).