

К ПРОБЛЕМЕ ГЕНЕРАЦИИ И РАСПОЗНАВАНИЯ СОЛИТОННЫХ СОСТОЯНИЙ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

А. И. Конюхов^{a,c}, Е. В. Щуркин^a, Л. А. Мельников^{b,c},*

А. А. Сысолятин^c, К. С. Гочелашвили^c

*^a Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, Россия*

*^b Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина
410054, Саратов, Россия*

*^c Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 августа 2018 г.,
после переработки 19 октября 2018 г.
Принята к публикации 24 октября 2018 г.

Состояние солитона характеризуется собственными значениями задачи Захарова–Шабата. В оптоволоконных линиях связи, использующих собственные значения для кодирования сигнала, скорость передачи данных может быть значительно увеличена только при развитии оптических методов управления собственными значениями. В данной работе для генерации заданных наборов комплексных собственных значений и детектирования солитонных состояний предложено использовать оптические волокна с синусоидальным изменением дисперсии. Под действием периодического изменения дисперсии многосолитонные импульсы разделяются на несколько солитонов, распространяющихся с различными групповыми скоростями. Разделение импульсов отражается в изменении действительной и мнимой частей собственных значений. Данный эффект можно использовать для приготовления фиксированных наборов собственных значений. Распознавание солитонного сигнала может быть реализовано при помощи анализа импульсов и их спектров на выходе волокна с периодическим изменением дисперсии. На примере солитонов, заданных наборами из четырех собственных значений, показано, что поле на выходе из волокна соответствует уникальной комбинации спектра и числа импульсов, определяемых начальными собственными значениями.

DOI: 10.1134/S0044451019030076

1. ВВЕДЕНИЕ

Волоконно-оптические линии связи используются для передачи большей части мирового объема данных. Для увеличения пропускной способности используется одновременная передача информации по нескольким каналам. Однако распараллеливание данных с использованием разделения сигнала по длинам волн, поляризации, амплитуде и фазе, доступные в линейных системах, исчерпывают свои возможности. Для увеличения скорости передачи необходимо использовать ультракороткие им-

пульсы. При использовании пикосекундных импульсов становится актуальным искажение сигнала из-за дисперсии и нелинейности. В этой ситуации заслуживает внимания использование солитонных схем.

Солитоны являются структурно-устойчивыми образованиями, т.е. устойчивыми относительно не только малых, но и конечных возмущений, например, таких, которые солитон испытывает при рассеянии на других солитонах [1]. Именно это очень привлекательное свойство солитонов лежит в основе их применения в оптических волокнах. Однако из-за взаимодействия между солитонами [2, 3] использование солитонных импульсов для прямого кодирования битовой последовательности затруднено. Так, например, два синфазных

* E-mail: kai@optics.sgu.ru, KonukhovAI@info.sgu.ru

солитона при распространении в волокне притягиваются [4]. В результате расстояние между соседними импульсами изменяется, что приводит к усложнению детектирования битовых сигналов. Увеличение временного расстояния между импульсами не решает проблемы взаимодействия [5]. Для ослабления взаимодействия между солитонами разработаны методы спектральной фильтрации и спектрально-ограниченного усиления [6]. Однако при таком подходе форма солитона искажается, и максимальная дистанция его распространения ограничивается.

В работе [7] для кодирования информации было предложено использовать собственные значения задачи Захарова – Шабата [8, 9]. Важным является тот факт, что при распространении классических солитонов Шредингера дискретный набор собственных значений остается неизменным. Процедура нахождения собственных значений получила название нелинейного преобразования Фурье (НПФ) [10–12]. Нелинейный спектр содержит непрерывную и дискретную части (набор собственных значений). На основе НПФ реализовано кодирование сигналов с использованием как непрерывной, так и дискретной части нелинейного спектра [13, 14]. Использование в оптической связи нелинейного спектра и, в частности, дискретных собственных значений делает возможным преодоление ограничений, связанных с нелинейным взаимодействием солитонов и с керровской самомодуляцией фазы [15, 16]. В настоящее время скорость передачи данных в линиях связи на основе НПФ ограничена отсутствием оптических методов кодирования и декодирования информации. Обработка сигналов проводится при помощи преобразования оптического сигнала в электрический [17, 18]. Развитие оптических методов управления собственными значениями и нелинейным спектром в целом имеет практическое применение при нелинейном мультиплексировании сигналов [7, 13, 15, 19].

Собственные значения определяют амплитуду, групповую скорость и фазу солитона. Поэтому задача об управлении собственными значениями напрямую связана с возможностью модификации солитонов оптическими методами. Для модификации солитонов можно использовать возмущения, которые описываются дополнительными слагаемыми в нелинейном уравнении Шредингера (НУШ) [2]. При разных соотношениях между коэффициентами НУШ можно получить различные траектории движения солитона [20]. При наличии возмущений оптические солитоны могут разрушаться, сливаться или даже аннигилировать [21, 22]. Роль возмущения могут иг-

рывать изменение дисперсии или нелинейности вдоль волокна [23, 24], фазовая кросс-модуляция в системе связанных НУШ [25, 26], вынужденное комбинационное рассеяние [27], фазовая самомодуляция импульсов [28, 29]. Распад солитонов, их объединение были проанализированы с использованием различных нелинейных эволюционных моделей [30–33].

Ряд возможностей по управлению солитонами предоставляют волокна с переменной по длине дисперсией. Оптические солитоны, распространяющиеся в таких волокнах, удовлетворяют неавтономному НУШ с переменными коэффициентами дисперсии и нелинейности [34]. Проблема преобразования формы оптических импульсов при распространении в волокнах с изменением дисперсии вдоль длины волокна рассмотрена в работе [35]. В волокнах с периодической модуляцией дисперсии солитоны могут управляться резонансными эффектами. Если период модуляции возмущения сравним с характерным периодом многосолитонного импульса, то он распадается на несколько фундаментальных солитонов [23]. В работах [36, 37] описаны эксперименты по разделению многосолитонных импульсов при помощи волокна с модуляцией диаметра. Разделение сопровождается изменением несущих частот импульсов [38]. Распад многосолитонного бризера в волокне с переменной дисперсией носит каскадный характер [39]. Распад бризера происходит через последовательность преобразований двух собственных значений. Волокно с периодической модуляцией дисперсии может использоваться не только для разделения многосолитонных импульсов, но и для слияния солитонов [40, 41]. Разделение многосолитонных импульсов может происходить под действием ступенчатого изменения дисперсии [42], а также сильного поглощения [43]. В экспериментах [44] было реализовано слияние двух солитонов. В работе [45] показана возможность разделения многосолитонного импульса за счет начальной фазовой самомодуляции. Чирпированный импульс разделяется на несколько фундаментальных солитонов при распространении в волокне с аномальной дисперсией.

В оптических линиях передачи, работающих на основе НПФ, используется тот факт, что спектр собственных значений остается неизменным при распространении солитонов, подчиняющихся классическому НУШ. Притяжение, отталкивание, упругие столкновения солитонов не изменяют собственные значения. В то же время для кодирования информации необходимо иметь некоторый механизм, позволяющий изменять собственные значения по запросу. Методы управления солитонами, основанные

на применении специального вида дисперсии, поглощения, усиления, здесь мало подходят, поскольку трудно реализуемы в стандартных одномодовых волокнах. Представленные в данной работе результаты показывают, что для модификации собственных значений и их детектирования можно использовать волоконно-оптические методы. Мы надеемся, что подходы, основанные на использовании оптических волокон с периодическим изменением дисперсии, послужат основой для оптических методов детектирования сигнала в линиях передачи данных, использующих НПФ.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА И ЗАДАЧА ЗАХАРОВА – ШАБАТА

Для описания распространения оптических импульсов в одномодовых волокнах используется модель НУШ [2, 4, 46]. В отсутствие потерь, дисперсии высших порядков и вынужденного комбинационного рассеяния уравнение для огибающей $A(z, t)$ электрического поля имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\gamma|A|^2 A(z, t), \quad (1)$$

где

$$A(z, t) = E(z, t)\sqrt{cn\epsilon_0 S_{eff}/2},$$

$E(z, t)$ — комплексная амплитуда напряженности электрического поля, c — скорость света в вакууме, n — показатель преломления, ϵ_0 — диэлектрическая постоянная, S_{eff} — эффективная площадь основной моды волокна [46], z — расстояние, пройденное импульсом, t — время в бегущей системе координат. Переменные z и t выражаются через истинное время Θ и координату Z как $z = Z$, $t = \Theta - \beta_1 z$, где $\beta_1 = (d\beta/d\omega)|_{\omega_0}$, $\beta = \beta(\omega)$ — постоянная распространения основной моды волокна, ω — частота, ω_0 — несущая частота импульса. Параметр t определяет временной интервал между импульсом, распространяющимся с групповой скоростью $u = \beta_1^{-1}$ и исследуемым импульсом. Параметр $\beta_2 = (d^2\beta/d\omega^2)|_{\omega_0}$ определяет дисперсию групповой скорости. Коэффициент керровской нелинейности $\gamma = (\omega_0/c)n_2 S_{eff}^{-1}$, где n_2 — нелинейный показатель преломления.

2.1. Задача рассеяния

Важным свойством НУШ (1) является его полная интегрируемость [8]. Для нахождения солитонных решений уравнению (1) ставится в соответствие задача на собственные функции $v_l(\tau, \lambda)$, $l = 1, 2$ и собственные значения λ [10, 47, 48]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\lambda & q(\tau) \\ -q^*(\tau) & i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\tau = t/t_0$ — нормированное время, t_0 — длительность начального импульса, $q(\tau)$ — потенциал, определенный для фиксированного z :

$$q(\tau) = A(z, \tau) t_0 \sqrt{\frac{\gamma}{|\beta_2|}}. \quad (3)$$

Функции $v_l(\tau = -\infty, \lambda)$ и $v_l(\tau = \infty, \lambda)$, $l = 1, 2$ связаны через матрицу рассеяния

$$M = \begin{pmatrix} a(\lambda) & -b^*(\lambda^*) \\ b(\lambda) & a^*(\lambda^*) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Комплексные величины λ_j , для которых $a(\lambda_j) = 0$, соответствуют солитонным решениям НУШ (1). Если $a(\lambda_j) = 0$, то также $a^*(\lambda_j^*) = 0$.

Для дискретного набора λ_j можно определить величину

$$r_j(\lambda_j) = \frac{b(\lambda_j)}{a'(\lambda_j)}, \quad (5)$$

где $a'(\lambda_j) = (da/d\lambda)|_{\lambda=\lambda_j}$, $j = 1, 2, \dots, N$, N — число солитонов.

Непрерывная $r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$ и дискретная $r_j(\lambda_j)$ спектральные функции представляют собой НПФ величины $q(\tau)$ [10–12].

При отсутствии решений $a(\lambda_j) = 0$ солитоны не формируются и потенциал $q(\tau)$ полностью определяется через $r(\lambda)$. Собственные значения λ часто называют спектральными параметрами. Действительные значения λ определяют непрерывную часть НПФ. Набор комплексных значений λ_j определяют его дискретную часть.

Для пояснения физического смысла дискретных величин λ_j рассмотрим солитоны, поля которых не перекрываются. Такая ситуация возможна, когда групповые скорости всех солитонов различны. При $z \rightarrow \infty$ все солитоны разделяются и представляют собой отдельные импульсы. Комплексная амплитуда j -го фундаментального солитона определяется следующим образом:

$$A_j(z, t) = R_j \operatorname{sech}(\kappa_j t - t_j - v_j z) \exp[i\varphi_j(z, t)], \quad (6)$$

где R_j — амплитуда солитона, κ_j — обратная длительность солитона, τ_j — координата пика импульса, $\varphi_j(z, t)$ — фаза, величина v_j определяет изменение групповой скорости солитона: $v_g = (1/u + v_j)^{-1}$. Амплитуда, длительность и групповая скорость фун-

даментального солитона (6) могут быть выражены через дискретные спектральные параметры λ_j [4]:

$$\begin{aligned} R_j &= \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{|\beta_2|}{\gamma}} \cdot 2 \operatorname{Im} \lambda_j, \\ \kappa_j &= \frac{1}{t_0} \cdot 2 \operatorname{Im} \lambda_j, \\ v_j &= \frac{\beta_2}{t_0} \cdot 2 \operatorname{Re} \lambda_j. \end{aligned} \quad (7)$$

Энергия солитона

$$J_j = 2R_j^2 \kappa_j^{-1} = J_0 \cdot 2 \operatorname{Im} \lambda_j, \quad (8)$$

где $J_0 = (2/t_0)|\beta_2|/\gamma$ — энергия фундаментального солитона ($\lambda_1 = 0.5i$) длительность которого равна t_0 . Средний сдвиг несущей частоты солитона определяется действительной частью собственного значения [4]:

$$\Delta\Omega = \frac{1}{t_0} \cdot 2 \operatorname{Re} \lambda_j, \quad (9)$$

где $\Delta\Omega = \omega_2 - \omega_1$, ω_1 — несущая частота начального импульса ($\operatorname{Re} \lambda_j = 0$), ω_2 — несущая частота солитона, которому соответствует собственное значение λ_j .

Изменение групповой скорости может быть найдено из соотношения

$$\Delta(1/u) = -\beta_2 \Delta\Omega. \quad (10)$$

Для расчета матрицы M (2) разработано множество методов [11, 47, 48]. Среди них можно выделить итерационные методы, такие как метод конечных разностей, метод Абловица–Ладика, метод послойного расчета (layer-peeling method).

Мы использовали метод послойного расчета матрицы рассеяния [47]. В алгоритме используется аппроксимация потенциала $q(\tau)$ ступенчатой функцией. На интервале $\tau_k < \tau \leq \tau_{k+1}$ ($k = 1, \dots, K$) величина $q(\tau) = q_k$ считается постоянной. Матрица рассеяния вычисляется как произведение частичных матриц, соответствующих потенциалу $q(\tau) = q_k$. Чтобы найти точки λ_j , соответствующие солитонным решениям $a(\lambda_j) = 0$, использовался метод Ньютона [48].

2.2. Обратная задача рассеяния

Решение обратной задачи рассеяния позволяет восстановить форму импульса $q(\tau)$ по заданным величинам $r = b/a$, r_j (5) и λ_j . Для этого решается система уравнений Римана–Гильберта относительно неизвестных функций $\Psi_1 = (\Psi_{11}, \Psi_{12})^T$ и $\Psi_2 = (\Psi_{21}, \Psi_{22})^T$ [11]:

$$\begin{aligned} \Psi_2(\tau, \lambda_m^*) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{r_j(\lambda_j) \exp(2i\lambda_j\tau)}{\lambda_m^* - \lambda_j} \Psi_1(\tau, \lambda_j) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\gamma) \exp(2i\gamma\tau)}{\gamma - \lambda_m^*} \Psi_1(\tau, \gamma) d\gamma, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(\tau, \lambda_m) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{r_j^*(\lambda_j^*) \exp(-2i\lambda_j^*\tau)}{\lambda_m - \lambda_j^*} \Psi_2(\tau, \lambda_j^*) - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r^*(\gamma) \exp(-2i\gamma\tau)}{\gamma - \lambda_m} \Psi_2(\tau, \gamma^*) d\gamma, \end{aligned} \quad (12)$$

где N — число солитонов, соответствующих решению $a(\lambda_m) = 0$, $m = 1, \dots, N$. Система уравнений (11), (12) решается для каждого фиксированного момента времени τ . Затем находится поле

$$\begin{aligned} q^*(\tau) &= 2i \sum_{j=1}^N r_j(\lambda_j, z) \exp(2i\lambda_j\tau) \Psi_{12}(\tau, \lambda_j) - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) \exp(2i\lambda\tau) \Psi_{12}(\tau, \lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (13)$$

При отсутствии несолитонной составляющей ($r(\lambda) = 0$) систему (11), (12) можно упростить [4]. В этом случае солитонная составляющая вычисляется по формуле

$$q^*(\tau) = 2i \sum_{j=1}^N r_j(\lambda_j) \exp(2i\lambda_j\tau) x_j, \quad (14)$$

где вектор-столбец $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_N)^T$ является решением системы линейных уравнений

$$(\mathbf{1} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{E}, \quad (15)$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица, $\mathbf{E} = (1, 1, \dots, 1)^T$, элементы матрицы \mathbf{A} вычисляются по формуле

$$A_{m,n} = \sum_{j=1}^N \frac{r_j(\lambda_j) \exp(2i\tau L_{n,j}) r_n^*(\lambda_n^*)}{L_{m,j} L_{n,j}}, \quad (16)$$

где $L_{n,j} = \lambda_n - \lambda_j^*$. Использование решения в виде (14) позволяет находить аналитические выражения для многосолитонных импульсов.

2.3. Модифицированное нелинейное уравнение Шредингера с переменными коэффициентами

Изменение диаметра волокна приводит к изменению его дисперсионных и нелинейных свойств. Коэффициенты нелинейного уравнения Шредингера становятся зависимыми от длины волокна. С учетом дисперсии третьего порядка, линейного поглощения и вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) уравнение, описывающее распространение импульсов в одномодовых волокнах, принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}A(z, t) = -i\frac{\beta_2(z)}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\beta_3(z)}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + iP_{NL} + \mathcal{N}(z, t), \quad (17)$$

где α — коэффициент поглощения, $\mathcal{N}(z, t)$ — шум усиленной спонтанной эмиссии [10, 12, 16], $\beta_2(z)$ и $\beta_3(z)$ — коэффициенты дисперсии:

$$\beta_{2,3}(z) = \langle \beta_{2,3} \rangle [1 + \beta_{2,3(m)} \sin(2\pi z/z_m + \varphi_m)], \quad (18)$$

$$\langle \beta_2 \rangle = -12.76 \text{ пс}^2/\text{км}, \quad \langle \beta_3 \rangle = 0.0761 \text{ пс}^3/\text{км}, \quad \beta_{2(m)} = 0.02, \quad \beta_{3(m)} = 0.095.$$

Нелинейная поляризация среды в уравнении (17) включает эффект Керра и ВКР:

$$P_{NL}(z, t) = \gamma(z)[(1 - f_R)|A|^2 A + f_R Q A(z, t)],$$

где

$$\gamma(z) = \langle \gamma \rangle [1 + 0.028 \sin(2\pi z/z_m)].$$

В расчетах использовались величины $f_R = 0.18$ [46] и $\langle \gamma \rangle = 7.1 \text{ (Вт} \cdot \text{км)}^{-1}$. Отклик $Q(z, t)$ комбинационно-активной среды аппроксимируется затухающими колебаниями [4]:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial Q}{\partial t} + \Omega^2 Q(z, t) = \Omega^2 |A(z, t)|^2, \quad (19)$$

где $T_2 = 32 \text{ фс}$, $\Omega = 13.1 \text{ ТГц}$. Для моделирования распространения импульсов (17) использовалась численная схема с контролем точности вычислений [49]. Для подавления волн, отраженных от границ расчетной области использовались поглощающие граничные условия.

Адаптируем задачу рассеяния для анализа динамики солитонов в волокне с переменным диаметром. Алгоритм оценки параметров солитона состоит из трех этапов.

1) Найдем численное решение $A(z, t)$ уравнения (17) на фиксированном расстоянии $z = z_s$.

2) Для потенциала

$$q(\tau) = A(z, t/t_A) t_A \sqrt{\gamma(z_s)/|\beta_2(z_s)|}$$

рассчитаем коэффициенты матрицы рассеяния (4), соответствующей НУШ (1) с фиксированными коэффициентами дисперсии $\beta_2 = \beta_2(z_s)$ и нелинейности $\gamma = \gamma(z_s)$. Здесь

$$t_A = t_0 \frac{|\beta_2|/\gamma}{|\langle \beta_2 \rangle|/\langle \gamma \rangle}$$

соответствует длительности односолитонного импульса, распространяющегося в волноводе с адiabатическим ($z_m \gg 1$) изменением дисперсии и нелинейности.

3) Найдем комплексные собственные значения λ_j из уравнения $a(\lambda_j) = 0$.

Шаги 1–3 повторяются при новом значении $z = z_s$. В результате получим собственные значения в зависимости от пройденного расстояния, $\lambda_j = \lambda_j(z)$. Строго говоря, $\lambda_j(z)$ не являются характеристиками солитонных решений уравнения Шредингера (17) с переменными коэффициентами. Величины $\lambda_j(z)$ показывают параметры солитонов, как если бы они распространялись в волокне с постоянной дисперсией и нелинейностью. На каждом шаге z численное решение уравнения (17) анализируется с использованием данных обратной задачи рассеяния, сформулированной для НУШ с фиксированными коэффициентами дисперсии β_2 и нелинейности γ .

3. РАЗДЕЛЕНИЕ ДВУХСОЛИТОННОГО БРИЗЕРА

В отсутствие возмущений НУШ (1) может поддерживать состояния, связанные с несколькими солитонами, распространяющимися с одинаковыми групповыми скоростями. Такие состояния известны как бризеры. В частном случае начальное поле бризера может быть описано гиперболическим секансом

$$A(t) = SR_1 \text{sech}(t/t_0), \quad (20)$$

где $R_1 = t_0^{-1} \sqrt{|\beta_2|/\gamma}$, S — параметр, определяющий амплитуду импульса и число собственных значений λ_j [4, 8]. Двухсолитонный бризер ($1.5 < S < 2.5$) имеет мнимые значения $\lambda_j = i(S+1/2-j)$. В световоде с постоянной дисперсией ($z_m \gg 1$) бризер характеризуется периодическим изменением формы. Период изменения равен

$$z_0 = \frac{\pi}{2} \frac{t_0^2}{|\beta_2|} \frac{2}{|\lambda_2^2 - \lambda_1^2|}. \quad (21)$$

При изменении коэффициентов в НУШ (17) бризер стремится принять новые согласованные значения ширины и амплитуды. В результате часть из-

лучения переходит в несолитонную часть, соответствующую дисперсионной волне. При адиабатическом изменении дисперсии, когда период модуляции достаточно большой ($z_m \gg z_0$), бризер успевает изменить свои параметры без разделения на отдельные солитоны. При малом периоде модуляции, $z_m \ll z_0$, действие периодической модуляции дисперсии усредняется. Импульс распространяется в виде бризера с излучением дисперсионной волны, что, в свою очередь, приводит к уменьшению амплитуд солитонов, составляющих бризер.

Ситуация радикально меняется, если модуляция дисперсии происходит при резонансных условиях, когда период солитона z_0 (21) сопоставим с периодом модуляции волокна z_m , т. е. изменение дисперсии носит существенно неадиабатический характер. В этом случае бризер разделяется на несколько импульсов.

Разделение двухсолитонного бризера ($S = 2$, $\lambda_1 = 1.5i$, $\lambda_2 = 0.5i$) при резонансных условиях $z_m = z_0$ показано на рис. 1. Расчеты проводились на основе уравнения (17) без учета поглощения ($\alpha = 0$), ВКР ($f_R = 0$) и дисперсии третьего порядка ($\beta_3 = 0$). Период осцилляций солитона $z_0 = 0.158$ км. Период модуляции дисперсии (18) выбран равным периоду солитона ($z_m = z_0$). При $z = 0$ собственные значения равны $\lambda_1 = 1.5i$ и $\lambda_2 = 0.5i$.

При $\varphi_m = \pi$ (рис. 1а) модуль коэффициента дисперсии β_2 на начальном этапе распространения ($z/z_0 < 0.25$) уменьшается. Это способствует сильному самосжатию импульса. После сжатия бризер разделяется на два фундаментальных солитона с одинаковыми амплитудами (рис. 1а (1)). Соответствующие изменения комплексных собственных значений λ_1 и λ_2 показаны на панелях (3), (4) рис. 1а. Видно, что после разделения бризера собственные значения имеют одинаковые мнимые части ($\text{Im } \lambda_1 = \text{Im } \lambda_2$) и разные по знаку действительные части ($\text{Re } \lambda_1 = -\text{Re } \lambda_2$). Мнимая часть собственного значения определяет энергию солитона (8), а действительная часть — сдвиг частоты (9). Поэтому состояния с $\text{Im } \lambda_1 = \text{Im } \lambda_2$ и $\text{Re } \lambda_1 = -\text{Re } \lambda_2$ характеризуют два фундаментальных солитона с одинаковыми энергиями, но разными сдвигами несущей частоты.

Разделение бризера на отдельные солитоны подчиняется закону сохранения импульса ([8] гл. I, § 10):

$$P = \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (q^* \partial_t q) dt \right). \quad (22)$$

Без учета несолитонной составляющей импульс поля

$$P = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \text{Re } \lambda_j \text{Im } \lambda_j. \quad (22')$$

Для начального бризера солитоны имеют нулевую действительную часть, $\text{Re } \lambda = 0$. Поэтому после разделения солитонов сумма (22') должна сохранять нулевое значение. В спектральном представлении закон сохранения (22) выражает постоянство среднего сдвига частоты

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega |q(\Omega)|^2 d\Omega = \text{const},$$

где $q(\Omega)$ — спектральная амплитуда, $\Omega = \omega - \omega_0$ — разностная частота [4].

Характер разделения бризера зависит от фазы модуляции φ_m дисперсии волокна. При $\varphi_m = 0$ (рис. 1б) интенсивность достигает пиковых значений при $z/z_0 = 0.56$, $z/z_0 = 1.0$ и $z/z_0 = 1.89$. Однако самосжатие бризера не является достаточным для его разделения под действием изменяющейся дисперсии. Начальный этап распространения бризера ($z/z_0 < 1$) соответствует увеличению расстояния между собственными значениями λ_1 и λ_2 (рис. 1б (3)). «Столкновение» решений λ_1 и λ_2 на комплексной плоскости $\text{Re } \lambda$, $\text{Im } \lambda$ и связанное с этим разделение бризера на два отдельных солитона происходит только при $z/z_0 = 1.89$. При модуляции фазы $\varphi_m = 0$ (рис. 1б) разделение солитонов происходит позже, чем при $\varphi_m = \pi$ (рис. 1а). Фаза модуляции влияет на действительную часть собственных значений $\lambda_{1,2}$. При $\varphi_m = 0$ на расстоянии $z/z_0 = 3$ действительная часть $\text{Re } \lambda_1 = -\text{Re } \lambda_2 = 0.23$. Тогда как при $\varphi_m = \pi$ действительная часть достигает значения $\text{Re } \lambda_1 = -\text{Re } \lambda_2 = 0.32$. Эта величина определяет сдвиг несущей частоты солитона (9).

Разделение двухсолитонного бризера позволяет получить импульсы, для которых сдвиг несущей частоты превышает половину ширины спектра исходного импульса. На рис. 2 показана величина мгновенного сдвига частоты, нормированная на обратную длительность импульса,

$$\Delta\nu = t_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)_{t=t_{max}}, \quad (23)$$

где $\varphi = \arg A$, момент времени $t = t_{max}$ соответствует максимуму интенсивности одного из выходных импульсов. На рис. 2 видно, что при большой глубине модуляции дисперсии возможно получение мгновенного сдвига частоты $\Delta\nu > 1$. Если

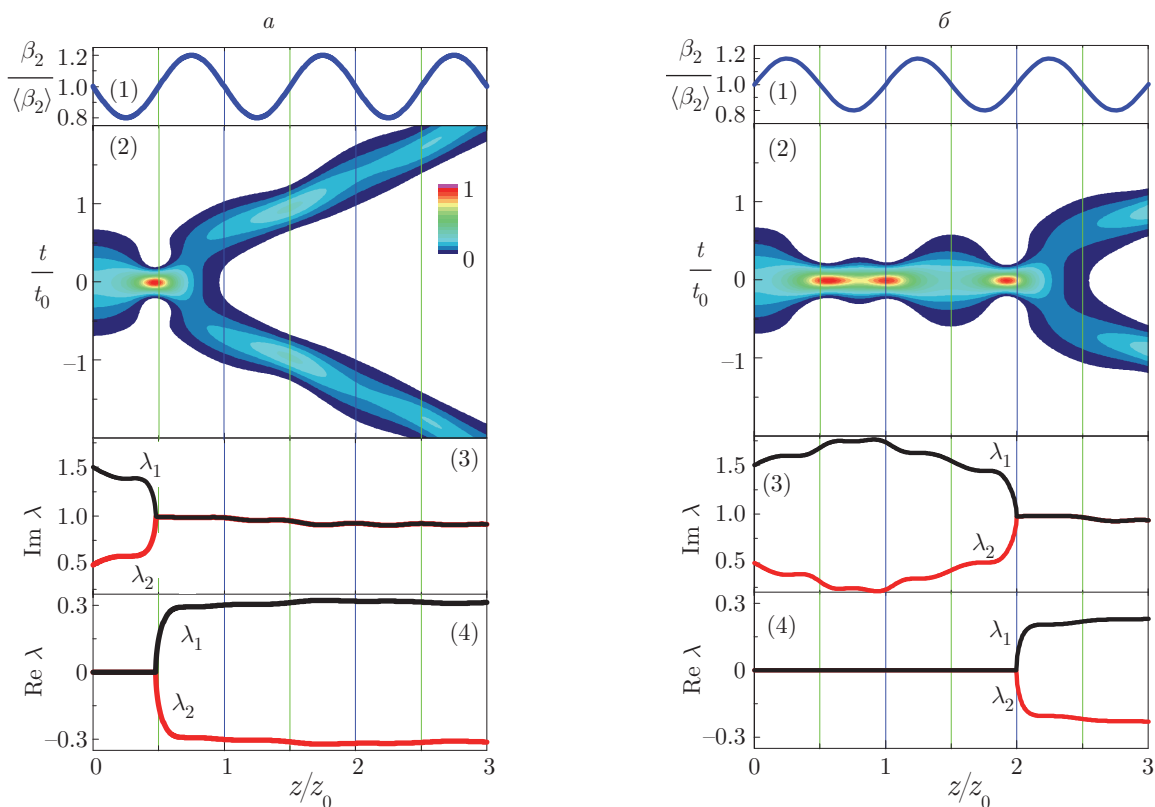


Рис. 1. (В цвете онлайн) Разделение двухсолитонного импульса ($S = 2$) для $\varphi_m = \pi$ (а) и $\varphi_m = 0$ (б). Длительность начального импульса $T_{FWHM} = 2$ пс ($t_0 = 1.135$ пс). Период модуляции дисперсии $z_m = z_0 = 0.158$ км. $\beta_3 = 0$, $f_R = 0$, $\alpha = 0$. Сверху вниз: (1) — изменение коэффициента дисперсии $\beta_2(z)/\langle\beta_2\rangle = 1 + \beta_{2(m)} \sin(2\pi z/z_m + \varphi_m)$; (2) — динамика импульса (цветовая шкала показывает диапазон изменения интенсивности $I(z, t) = |A(z, t)|^2$ в относительных единицах); (3) — мнимые части собственных значений λ_1, λ_2 в зависимости от пройденного расстояния; (4) — действительные части собственных значений λ_1, λ_2 в зависимости от пройденного расстояния

входное излучение представляет собой последовательность импульсов, то после волокна с периодическим изменением дисперсии каждый из импульсов разделяется на два других с различными несущими частотами. Величина спектрального сдвига $\Delta\nu$ является достаточно большой, поэтому одну группу импульсов можно отделить от другой, используя спектральные фильтры, например волоконные брэгговские фильтры. Такой метод позволяет получить последовательность импульсов со сдвигом несущей частоты [38].

Одной из особенностей периодической модуляции дисперсии является наличие нескольких резонансов при разделении бризера [23]. Основной резонанс проявляется при периоде модуляции, равном периоду солитона $z_m = z_0$ (см. рис. 2). Следующий резонанс наблюдается при $z_m = z_0/3$. Данные для рис. 2 рассчитаны для короткой дистанции распространения $z = z_0$, т. е. разделение бризера происхо-

дит на расстоянии, меньшем периода солитона z_0 , как это показано на рис. 1а. При других параметрах разделение бризера может происходить на расстояниях $z \gg z_0$ (см. рис. 1б). Однако на больших дистанциях модуляция дисперсии ведет к заметному росту несолитонной составляющей, что приводит к уменьшению энергии отдельных солитонов, определяемой $\text{Im } \lambda_j$ (8).

Важным фактором при практическом применении частотного разделения импульсов является возможность перестройки спектральных параметров λ_j . При математическом моделировании было получено, что величина частотного сдвига и сценарий разделения двухсолитонного бризера зависят от периода модуляции волокна, фазы модуляции. Однако данные параметры не могут изменяться по запросу. Рассмотрим возможность использования в качестве управляющего параметра энергию начального импульса (20), которая, в свою очередь, определя-

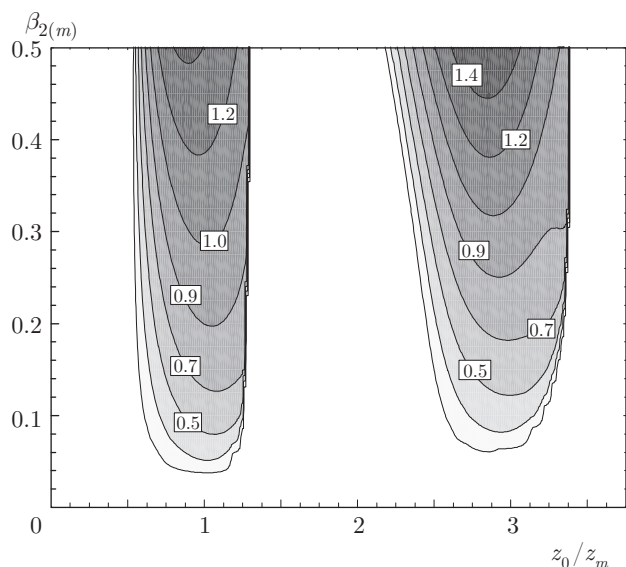


Рис. 2. Мгновенный сдвиг частоты $\Delta\nu$ (23) в зависимости от глубины модуляции $\beta_{2(m)}$ и от величины, обратной периоду модуляции z_m (18). Сдвиг частоты рассчитан для одного из импульсов, полученных при разделении бризера второго порядка $S = 2$ (20). Дистанция распространения $z = z_0$. $\alpha = 0, \beta_3 = 0, f_R = 0, \mathcal{N}(z, t) = 0$

ет параметр S . Целые значения S совпадают с числом солитонов, т. е. с числом дискретных собственных значений λ_j . На рис. 3а показаны изменения собственных значений двухсолитонного бризера при изменении параметра S (20). Возрастание параметра S до величины 1.67 приводит к преобразованию двухсолитонного импульса в два отдельных фундаментальных солитона с одинаковыми амплитудами, задаваемыми $\text{Im } \lambda$. Сдвиг несущей частоты, определяемый $\text{Re } \lambda$, достигает экстремума при $S = 2.05$. Дальнейшее увеличение параметра S приводит к уменьшению сдвига частоты и появлению третьего солитона при $S = 2.45$ (рис. 3а). Для двух солитонов действительные части собственных значений равны и противоположны по знаку, $\text{Re } \lambda_1 = -\text{Re } \lambda_2$. Третий солитон имеет $\text{Re } \lambda_3 = 0$ и распространяется на несущей частоте исходного импульса.

Конкурирующим процессом, влияющим на разделение многосолитонного бризера, является ВКР. Под влиянием ВКР от бризера отделяется фундаментальный солитон с высокой пиковой интенсивностью [27]. Сдвиг частоты данного солитона возрастает с увеличением дистанции распространения. Для пикосекундных солитонов распад бризера за счет ВКР сравним с эффектом модуляции дисперсии волокна. На рис. 3б показано изменение собственных значений в зависимости от параметра S ,

когда в уравнении (17) учитывается ВКР и коэффициент дисперсии третьего порядка β_3 . За счет присутствия ВКР пороговое значение S , при котором происходит разделение бризера, уменьшается. Разделение бризера становится заметным уже при $S = 1.6$. Для двухсолитонного режима величины $\text{Re } \lambda_{1,2}$ достигают экстремума при $S = 1.805$, тогда как при отсутствии ВКР максимальное разделение соответствует $S = 2.05$ (рис. 3а). При $S = 2.2$ появляется третий солитон, которому соответствует собственное значение $\lambda_3 = -0.27 + 0.38i$ (рис. 3б). Дальнейшее увеличение S приводит к нарастанию амплитуды первого солитона и увеличению сдвига частоты, определяемого $\text{Re } \lambda_1$. ВКР является нежелательным эффектом при разделении бризера, так как приводит к появлению импульсов с различными амплитудой и сдвигом частоты. В отсутствие ВКР бризер разделяется симметрично ($\text{Im } \lambda_1 = \text{Im } \lambda_2, \text{Re } \lambda_1 = -\text{Re } \lambda_2$).

4. РАЗДЕЛЕНИЕ МНОГОСОЛИТОННЫХ ИМПУЛЬСОВ

На рис. 4 показан распад четырехсолитонного импульса ($S = 4$), заданного формулой (20). Начальные собственные значения $\lambda_1 = 3.5i, \lambda_2 = 2.5i, \lambda_3 = 1.5i$ и $\lambda_4 = 0.5i$. Режимы, показанные на рис. 4а и рис. 4б различаются фазой модуляции дисперсии. Для $\varphi_m = \pi$ (рис. 4а) модуляция дисперсии приводит к разделению солитонов, которым соответствуют собственные значения λ_3 и λ_4 . Так же как и для двухсолитонного бризера (см. рис. 1), распад бризера происходит через изменение групповых скоростей двух солитонов таким образом, что $\text{Re } \lambda_3 = -\text{Re } \lambda_4$. Остальные два солитона (с собственными значениями λ_1, λ_2) формируют новый бризер, распространяющийся на несущей частоте исходного импульса ($\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = 0$). Изменение дисперсии $\beta_2 = \beta_2(z)$ приводит к заметной модуляции мнимых частей собственных значений $\text{Im } \lambda_1(z), \text{Im } \lambda_2(z)$. Размах осцилляций составляет величину более чем 20% от среднего значения $\text{Im } \lambda_{1,2}$ (панель (3) на рис. 4а). При дальнейшем распространении часть энергии солитонов переходит в дисперсионную волну, что приводит к уменьшению $\text{Im } \lambda_1, \text{Im } \lambda_2$. При достижении некоторых резонансных условий периодическая модуляция дисперсии может вызвать дополнительное разделение бризера, характеризующегося собственными значениями λ_1 и λ_2 . Каскадный распад многосолитонного бризера описан в работе [39].

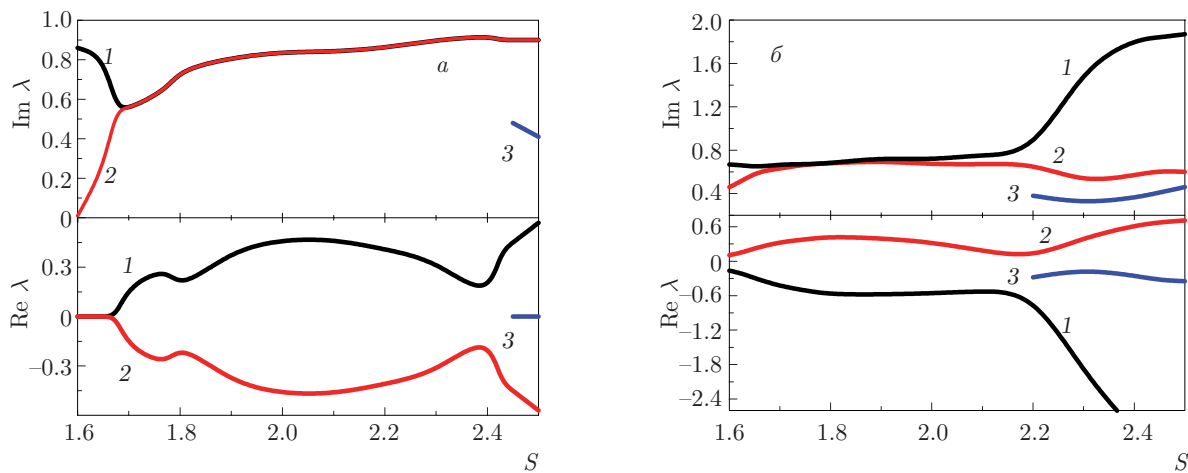


Рис. 3. (В цвете онлайн) Собственные значения в зависимости от порядка солитона S : a — без учета ВКР, $f_R = 0$ в (17); b — с учетом ВКР, $f_R = 0.18$. Длительность начального импульса $t_0 = 1.135$ пс. Период модуляции дисперсии $z_m = 0.158$ км, $\varphi_m = \pi$. Длина волокна $z = 1.58$ км. Коэффициент поглощения $\alpha = 0$, $\langle \beta_3 \rangle = 0$. Цифрами 1, 2, 3 отмечены кривые, соответствующие собственным значениям λ_1 , λ_2 и λ_3

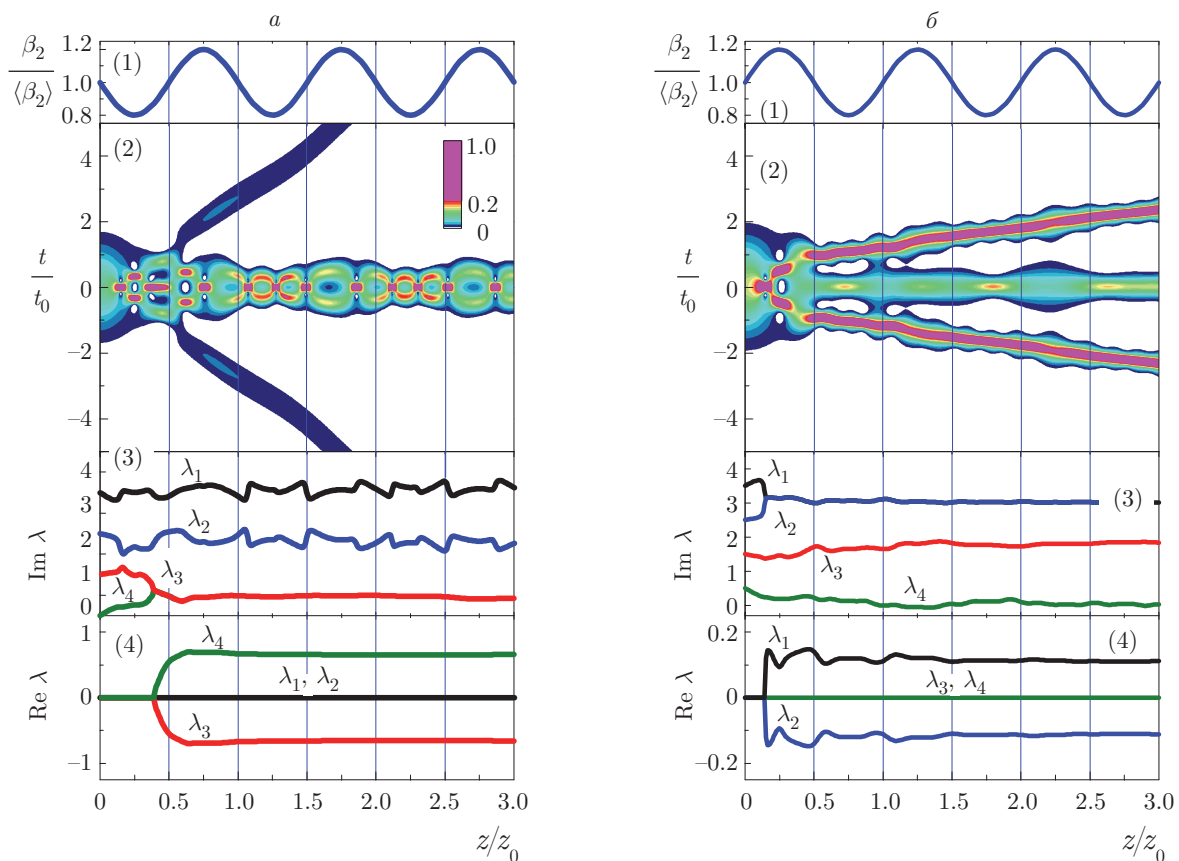
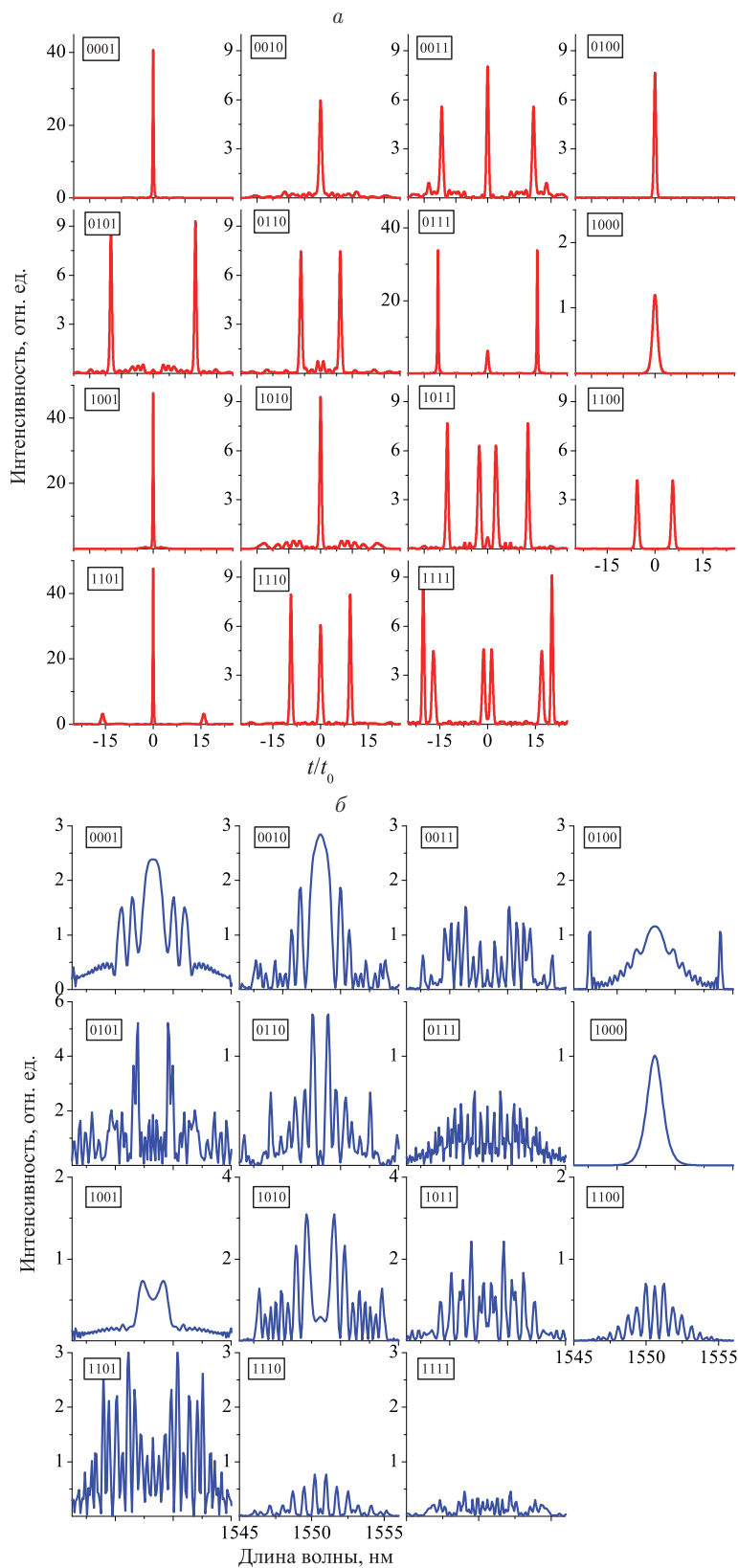


Рис. 4. (В цвете онлайн) Разделение четырехсолитонного импульса ($S = 4$). Параметры и обозначения такие же как на рис. 1: a — $\varphi_m = \pi$; b — $\varphi_m = 0$



Смена фазы модуляции приводит к изменению динамики бризера. Распад бризера происходит в результате неупругого взаимодействия солитонов, характеризующихся собственными значениями λ_1 и λ_2 (рис. 4б). Первые два солитона приобретают разные групповые скорости и уходят на периферию расчетного окна (панель (2) на рис. 4б). Остальные два солитона формируют бризер. При $z/z_0 = 3$ собственные значения составляют $\lambda_3 = 1.72i$, $\lambda_4 = 0.18i$. В отличие от режима, показанного на рис. 4а, для $\varphi_m = 0$ (рис. 4б) после разделения исходного импульса, $z/z_0 > 1.5$, собственные значения остаются практически неизменными. Фактически это означает, что при дальнейшем распространении модуляция дисперсии не оказывает заметного влияния на солитоны.

Рассмотрим распад бризера, заданного произвольной комбинацией чисел λ_j . Такая задача интересна с точки зрения идентификации многосолитонных импульсов в линиях связи, работающих на основе НПФ [14]. Для построения решений методом обратной задачи рассеяния требуется задать не только λ_j , но и функции $a(\lambda)$, $b(\lambda)$. Для импульса (20) при целом $S = N$ решение задачи рассеяния дает величины [4, 8]

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^N \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \lambda_j^*}, \quad (24)$$

$$b(\lambda_j) = (-1)^j, \quad (25)$$

$$\lambda_j = i(N + 1/2 - j), \quad (26)$$

где $j = 1, \dots, N$.

Используя соотношения (24)–(26), найдем аналитические выражения для бризера заданного произвольной комбинацией четырех собственных значений, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 . Такой бризер будет соответствовать четырехбитовому сигналу, где старший бит кодируется величиной $\lambda_1 = 0.5i$. Следующие два би-

та кодируются величинам $\lambda_2 = 1.5i$ и $\lambda_3 = 2.5i$. Младший бит кодируется величиной $\lambda_4 = 3.5i$. Солитон четвертого порядка ($S = 4$) (20) соответствует четырем единичным битам «1111». Фундаментальный солитон $\lambda_1 = 0.5i$ соответствует конфигурации «1000», солитон второго порядка — «1100» и т. д. Для четырехбитового сигнала существует 15 ненулевых сигналов, каждый из которых соответствует определенной четырехбитовой последовательности, закодированной комбинацией собственных значений (таблица).

На рис. 5 показаны результаты расчетов формы импульсов и их спектров после прохождения сигнала (см. таблицу) волокна с периодическим изменением дисперсии.

Односолитонные импульсы с кодировками 0001, 0010, 0100 и 1000 не разделяются (рис. 5а). Однако периодическая модуляция дисперсии вызывает генерацию несолитонной составляющей (дисперсионной волны). В результате спектр выходных импульсов, соответствующих кодировкам 0001, 0010 и 0100, претерпевает значительные изменения. В спектре выходных импульсов появляются боковые пики (рис. 5б). Для фундаментального солитона (1000) модуляция дисперсии не оказывает заметного влияния как на сам импульс (рис. 5а), так и на его спектр (рис. 5б). Форма выходного спектра имеет вид гиперболического секанса. Бризеры, характеризующиеся кодами 1001 и 1010, также не разделяются. Основной вклад в изменение их спектра вносят дисперсионные волны.

Для остальных типов сигналов (см. таблицу) происходит разделение бризера на отдельные импульсы. Во временной области выходное поле представляет собой один или несколько импульсов, распространяющихся с разными групповыми скоростями (рис. 5а). В спектральной области интерференция импульсов приводит к модуляции спектров (рис. 5б).

Для каждого из сигналов, заданных в таблице, выходное поле представлено уникальной комбинацией спектра и импульсов. В настоящее время в линиях передач, работающих на основе НПФ, детектирование дискретных собственных значений реализовано на основе решения прямой задачи рассеяния (2) [12–14]. Распад многосолитонного бризера в волокне с периодической модуляцией дисперсии с последующим детектированием числа импульсов и спектра представляет собой некоторый подход для оптического детектирования солитонных состояний в линиях связи на основе НПФ.

Рис. 5. (В цвете онлайн) Форма импульса (а) и спектр выходного поля (б) в зависимости от комбинаций четырех собственных значений, составляющих начальный сигнал. На каждом из отдельных рисунков двоичное число в рамке показывает четырехбитовое слово (word), задающее комбинацию собственных значений и форму начального сигнала при $z = 0$ (см. таблицу). Интенсивность сигнала нормирована на начальную величину пиковой интенсивности фундаментального солитона (1000). Моделирование проводилось на основе НУШ (17) при $t_0 = 1.135$ пс, $z_m = 0.053$ км, $\varphi_m = \pi$, $\beta_3 = 0$, $f_R = 0$, $\alpha = 0$. Дистанция распространения $z = 0.792$ км

Таблица. Форма сигнала для различных комбинаций четырех собственных значений, заданных числами $0.5i$, $1.5i$, $2.5i$ и $3.5i$. Каждая из комбинаций соответствует четырехбитовому слову (word)

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$	Word	$A(\tau)R_1^{-1}$
$0, 0, 0, 3.5i$	0001	$-\frac{7}{\text{ch}(7\tau)}$
$0, 0, 2.5i, 0$	0010	$\frac{5}{\text{ch}(5\tau)}$
$0, 0, 2.5i, 3.5i$	0011	$-\frac{54 - 96 \text{ch}(2\tau) + 60 \text{ch}(4\tau)}{15 \text{ch}(\tau) - 10 \text{ch}(3\tau) + 6 \text{ch}(5\tau) - 3 \text{ch}(7\tau) + \text{ch}(9\tau)}$
$0, 1.5i, 0, 0$	0100	$-\frac{3}{\text{ch}(3\tau)}$
$0, 1.5i, 0, 3.5i$	0101	$-\frac{10[11 - 18 \text{ch}(2\tau) + 6 \text{ch}(4\tau)]}{15 \text{ch}(\tau) - 24 \text{ch}(3\tau) + 12 \text{ch}(5\tau) - 4 \text{ch}(7\tau)}$
$0, 1.5i, 2.5i, 0$	0110	$\frac{8[-2 + 3 \text{ch}(2\tau)]}{6 \text{ch}(\tau) - 3 \text{ch}(3\tau) + \text{ch}(5\tau)}$
$0, 1.5i, 2.5i, 3.5i$	0111	$\frac{15[15 - 16 \text{ch}(2\tau) + 4 \text{ch}(4\tau)]}{-20 \text{ch}(\tau) + 36 \text{ch}(3\tau) - 8 \text{ch}(5\tau) + \text{ch}(7\tau)}$
$0.5i, 0, 0, 0$	1000	$\frac{1}{\text{ch}(\tau)}$
$0.5i, 0, 0, 3.5i$	1001	$-\frac{24[3 - 3 \text{ch}(2\tau) + \text{ch}(4\tau)]}{6 \text{ch}(\tau) - 11 \text{ch}(3\tau) + 9 \text{ch}(5\tau)}$
$0.5i, 0, 2.5i, 0$	1010	$\frac{6[-3 + 2 \text{ch}(2\tau)]}{-3 \text{ch}(\tau) + 4 \text{ch}(3\tau)}$
$0.5i, 0, 2.5i, 3.5i$	1011	$\frac{27 - 32 \text{ch}(2\tau) + 4 \text{ch}(4\tau)}{4 \text{ch}(\tau) - 4 \text{ch}(3\tau) + \text{ch}(5\tau)}$
$0.5i, 1.5i, 0, 0$	1100	$-\frac{2}{\text{ch}(\tau)}$
$0.5i, 1.5i, 0, 3.5i$	1101	$\frac{57 - 48 \text{ch}(2\tau)}{8 \text{ch}(\tau) - 9 \text{ch}(3\tau)}$
$0.5i, 1.5i, 2.5i, 0$	1110	$\frac{3}{\text{ch}(\tau)}$
$0.5i, 1.5i, 2.5i, 3.5i$	1111	$-\frac{4}{\text{ch}(\tau)}$

5. ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Оптическая обработка сигналов не перестает быть актуальной задачей в плане использования в оптоволоконных линиях связи, устройствах обработки информации.

В настоящей работе показано, что волокно с периодическим изменением дисперсии может быть использовано для изменения скоростей солитонов, амплитуд и даже их числа. Параметры выходных импульсов могут изменяться в зависимости от пери-

ода и фазы модуляции дисперсии волокна. Управление солитонами может быть реализовано при помощи одномодового оптического волокна. Этим предлагаемая методика выгодно отличается от способов управления солитонами на основе спектральной или временной фильтрации, специального вида дисперсии или нелинейности.

Периодическая модуляция диаметра волокна может быть использована для разделения многосолитонных импульсов на фундаментальные солитоны, распространяющиеся с разными групповыми скоро-

стями. Разделение бризера на импульсы с различными несущими частотами позволяет создать много-частотный источник пикосекундных импульсов для оптических линий связи с гибридным частотно-временным (WDM/TDM) [17,18] уплотнением каналов.

Групповая скорость солитона связана со сдвигом несущей частоты, который, в свою очередь, определяется действительной частью собственного значения, $\text{Re } \lambda_j$. Энергия солитона определяется мнимой частью собственного значения, $\text{Im } \lambda_j$. При разделении бризера на отдельные солитоны происходит перераспределение энергий солитонов и их несущих частот, что, в свою очередь, отражается на спектре собственных значений.

Кодирование с использованием собственных значений в настоящее время является перспективным направлением, поскольку позволяет преодолеть ограничения, связанные с наличием нелинейной фазовой модуляции сигнала за счет высокочастотного эффекта Керра [15]. Однако скорость передачи данных ограничена отсутствием оптических методов обработки солитонных сигналов. Изменение собственных значений λ_j в волокне с модуляцией дисперсии позволяет готовить заданные наборы комплексных чисел λ_j , используемых для кодирования оптического сигнала.

Описанные выше результаты демонстрируют возможность управления параметрами солитонов волоконно-оптическими методами. Помимо практических применений волокна с переменной дисперсией представляют новый инструмент для изучения физики солитонов.

Работа выполнена при поддержке Российским научным фондом (грант № 17-12-01564).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **182**, 569 (2012).
2. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки*, Физматлит, Москва (2003).
3. G. I. Stegeman and M. Segev, Science **286**, 1518 (1999).
4. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
5. J. K. Jang, M. Erkintalo, S. G. Murdoch, and S. Coen, Nature Photon. **7**, 657 (2013).
6. Ю. С. Кившар, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, Москва (2005).
7. A. Hasegawa and T. Nyu, J. Lightwave Technol. **11**, 395 (1993).
8. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
9. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **61**, 118 (1971).
10. M. I. Yousefi and F. R. Kschischang, IEEE Trans. Inform. Theory **60**, 4312 (2014).
11. M. I. Yousefi and F. R. Kschischang, IEEE Trans. Inform. Theory **60**, 4329 (2014).
12. M. I. Yousefi and F. R. Kschischang, IEEE Trans. Inform. Theory **60**, 4346 (2014).
13. S. K. Turitsyn, J. E. Prilepsy, S. T. Le et al., Optica **4**, 307 (2017).
14. Z. Dong, S. Hari, T. Gui et al., IEEE Photon. Technol. Lett. **27**, 1621 (2015).
15. S. T. Le, V. Aref, and H. Buelow, Nature Photon. **11**, 570 (2017).
16. R.-J. Essiambre, G. J. Foschini, G. Kramer, and P. J. Winzer, Phys. Rev. Lett. **101**, 163901 (2008).
17. A. Tamini and M. M. Kakhki, Adv. Comp. Sci. Internat. J. **5**, 73 (2016).
18. E. Wong, J. Lightwave Technol. **30**, 597 (2012).
19. А. И. Конюхов, П. А. Маврин, Е. В. Щуркин, Изв. Саратовского ун-та, сер. Физика **18**, 16 (2018).
20. D.-Y. Liu, B. Tian, and X.-Y. Xie, Laser Phys. **27**, 035403 (2017).
21. B. A. Malomed, *Soliton Management in Periodic Systems*, Springer, New York (2006).
22. W. Królikowski, B. Luther-Davies, C. Denz, and T. Tschudi, Opt. Lett. **23**, 97 (1998).
23. A. Hasegawa and Y. Kodama, Phys. Rev. Lett. **66**, 161 (1991).
24. D. Chao-Qing and C. Wei-Lu, Chinese Phys. B **22**, 010507 (2013).
25. D. Mihalache, D. Mazilu, F. Lederer, and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. A **79**, 013811 (2009).
26. F. Lu, Q. Lin, W. H. Knox, and G. P. Agrawal, Phys. Rev. Lett. **93**, 183901 (2004).

27. Е. А. Головченко, Е. М. Дианов, А. М. Прохоров, В. Н. Серкин, Письма в ЖЭТФ **42**, 74 (1985).
28. А. И. Маймистов, Ю. М. Скляр, КЭ **14**, 796 (1987).
29. M. Desaix, L. Helczynski, D. Anderson, and M. Lisak, Phys. Rev. E **65**, 056602 (2002).
30. S. Wang, X. Tang, and S. Lou, Chaos, Solitons & Fractals **21**, 231 (2004).
31. J. Pfeiffer, M. Schuster, A. A. Abdumalikov Jr., and A. V. Ustinov, Phys. Rev. Lett. **96**, 034103 (2006).
32. W. Krolikowski and S. A. Holmstrom, Opt. Lett. **22**, 369 (1997).
33. T. Okamawari, A. Hasegawa, and Y. Kodama, Phys. Rev. A **51**, 3203 (1995).
34. V. N. Serkin and A. Hasegawa, Письма в ЖЭТФ **72**, 125 (2000).
35. N. G. R. Broderick, Opt. Express **18**, 24060 (2010).
36. A. A. Sysoliatin, E. M. Dianov, A. I. Konyukhov et al., Laser Phys. **17**, 1306 (2007).
37. A. A. Sysoliatin, A. K. Senatorov, A. I. Konyukhov et al., Opt. Express **15**, 16302 (2007).
38. A. A. Sysoliatin, A. Belanov, A. Konyukhov et al., IEEE J. Select. Topics Quant. Electron. **14**, 733 (2008).
39. К. С. Гочелашвили, А. А. Сысолятин, А. И. Коныхов и др., Кратк. сообщ. по физ. ФИАН **44**, 52 (2017).
40. A. I. Konyukhov, M. A. Dorokhova, L. A. Melnikov, and A. S. Plastun, Laser Phys. Lett. **12**, 055103 (2015).
41. А. И. Коныхов, М. А. Дорохова, Л. А. Мельников, А. С. Пластун, КЭ **45**, 1018 (2015).
42. S. Sears, M. Soljagic, M. Segev et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 1902 (2000).
43. A. Hause, C. Mahnke, and F. Mitschke, Phys. Rev. A **98**, 033814 (2018).
44. S. R. Friberg, Opt. Lett. **16**, 1484 (1991).
45. D. Krylov, L. Leng, K. Bergman et al., Opt. Lett. **24**, 1191 (1999).
46. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Acad. Press, Amsterdam (2013).
47. G. Boffetta and A. R. Osborne, J. Comp. Phys. **102**, 252 (1992).
48. S. Burtsev, R. Camassa, and I. Timofeyev, J. Comp. Phys. **147**, 166 (1998).
49. O. V. Sinkin, R. Holzlohner, J. Zweck et al., J. Lightwave Technol. **21**, 61 (2003).