

# МАГНИТНАЯ КОНВЕКЦИЯ В НЕОДНОРОДНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

М. И. Копн<sup>а</sup>, А. В. Тур<sup>с\*</sup>, В. В. Яновский<sup>а,б\*\*</sup>

<sup>а</sup> Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины  
61001, Харьков, Украина

<sup>б</sup> Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина  
61000, Харьков, Украина

<sup>с</sup> Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie  
BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France

Поступила в редакцию 24 июня 2018 г.

Исследуется устойчивость конвективного течения в неоднородно вращающемся слое плазмы в аксиальном однородном магнитном поле. Рассмотрены стационарный и колебательный режимы магнитной конвекции в зависимости от профиля угловой скорости вращения (числа Россби  $Ro$ ) электропроводящей среды. Для описания слабонелинейной стадии развития конвекции применяется метод Галеркина, с помощью которого получена нелинейная динамическая система уравнений типа Лоренца. Численный анализ этих уравнений показал наличие хаотического поведения конвективных течений. Найдены критерии возникновения хаотических движений в зависимости от параметров конвекции (числа Рэлея  $Ra$ ), магнитного поля (числа Чандрасекара  $Q$ ), вращения (числа Тейлора  $Ta$ ) для рэлеевского ( $Ro = -1$ ) и кеплеровского ( $Ro = -3/4$ ) профилей угловой скорости вращения среды.

DOI: 10.1134/S0044451018120210

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Конвективные течения, вызванные тепловыми процессами в гравитационном поле, имеют важное значение для объяснения многих явлений, происходящих в недрах планет, звезд и других космических объектов. Общеизвестно, что конвекция является источником генерации как крупномасштабных магнитных полей, так и крупномасштабных вихревых структур, независимо от выбора модели: ламинарного [1–4] или турбулентного динамо [5–7].

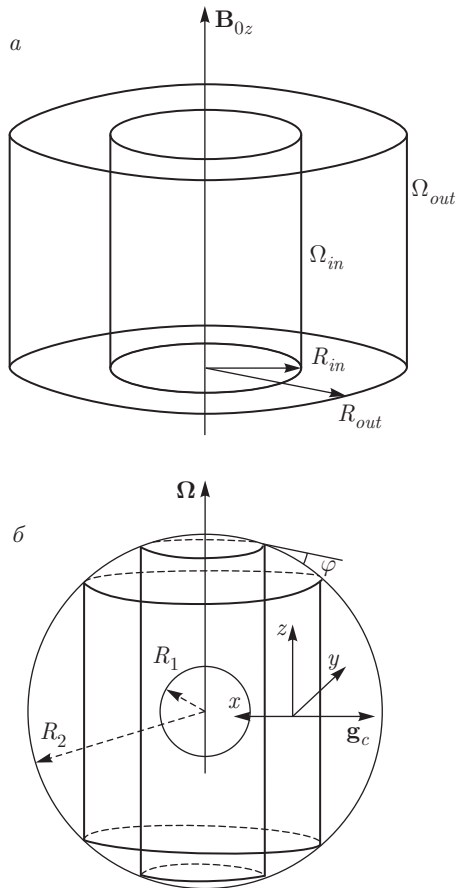
Безусловно огромное влияние на конвективные течения электропроводящих сред оказывают вращение и магнитные поля. Теория таких процессов (задача Рэлея–Бенара) для случая однородного вращения и постоянного магнитного поля подробно изложена в монографиях [8, 9]. Однако большинство различных космических объектов, состоящих из плотных газов или жидкости (Юпитер, Сатурн,

Солнце, галактики и т. д.), а также электропроводящая среда внутри планет, вращаются неоднородно. Во многих гидродинамических задачах дифференциальное вращение среды моделируется течением Куэтта, заключенным между двумя вращающимися с разной угловой скоростью цилиндрами (см. рис. 1а), что оказывается удобным для реализации лабораторных экспериментов [10]. Устойчивость такого течения для идеально проводящей среды в магнитном поле была впервые рассмотрена в работах [11, 12]. Там же показано, что слабое осевое магнитное поле дестабилизирует азимутальное дифференциальное вращение плазмы и при выполнении условия  $d\Omega^2/dR < 0$  в бездиссипативной плазме возникает магнитовращательная неустойчивость (МВН) или стандартная МВН (standard magnetorotational instability, SMRI) (см. рис. 1а). Поскольку это условие выполняется и для кеплеровских течений,  $\Omega \sim R^{-3/2}$ , МВН является наиболее вероятным источником турбулентности в аккреционных дисках.

Открытие МВН послужило толчком к многочисленным теоретическим исследованиям [13], а также к лабораторным исследованиям вращения жидких металлов (натрия, галлия) и низкотемпе-

\* E-mail: Anatoly.Tour@irap.omp.eu

\*\* E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua



**Рис. 1.** а) Геометрия задачи для стандартной МВН: два концентрических цилиндра радиусами  $R_{in} = R_1$  и  $R_{out} = R_2$  вращаются со скоростями  $\Omega_{in} = \Omega_1$  и  $\Omega_{out} = \Omega_2$ ;  $\mathbf{B}_{0z}$  — аксиальное магнитное поле, направленное вертикально вверх. б) Модель Буссе (конвективное динамо) для слоя электропроводящей жидкости во вращающейся магнитоконвекции

ратурной плазмы [14, 15]. Первые теоретические исследования, которые касались проблемы аккреционных течений, проводились в приближении бездиссипативной плазмы с учетом как радиальной тепловой стратификации [16], так и замагниченности тепловых потоков [17]. В работах [18–23] подробно исследовалось влияние эффектов вязкости и магнитной диффузии на устойчивость неоднородно вращающейся плазмы в магнитном поле. В работе [24] рассматривалась устойчивость дифференциально-вращающейся плазмы в аксиальном магнитном поле с одновременным учетом как диссипативных эффектов (вязкость и омическая диссипация), так и тепловой радиальной стратификации плазмы. Эффект МВН в спиральном магнитном поле, т. е. с нетривиальной топологией

$\mathbf{B}_0 \text{rot} \mathbf{B}_0 \neq 0$ , изучался в работах [25, 26]. Эффект МВН в азимутальном магнитном поле в литературе получил название азимутальной МВН (azimuthal magnetorotational instability, AMRI) [22, 23]. В недавних работах [27, 28] были найдены критерии развития МВН для разреженной плазмы при учете эффектов Холла и диссипации.

Модель вращающихся цилиндров применялась в теории конвективного динамо, развитой в работах [29–32]. В этой теории [29] внешний цилиндр вращается с угловой скоростью  $\Omega_2$ , а внутренний остается неподвижным,  $\Omega_1 = 0$  (см. рис. 1б). Конвективные течения (ячейки Бенара) возникают в слое жидкости между цилиндрами из-за разности температур внутреннего  $T_1$  и внешнего  $T_2$  цилиндров:  $T_2 > T_1$ .

Разность высот внутреннего  $h_1$  и внешнего  $h_2$  цилиндров приводит к аналогичному эффекту — действию силы Кориолиса на  $\beta$ -плоскости. Модель Буссе соответствует конвекции в слоях жидкости, расположенных в экваториальной области вращающегося объекта, где существенна роль азимутального магнитного поля. Эта модель также активно применялась для изучения поведения гидромагнитных волн во вращающейся магнитоконвекции. В результате действия  $\beta$ -эффекта во вращающейся магнитоконвекции возникает более общий тип волн Россби, так называемые магнито-тепловые волны Россби [33].

В настоящей работе, в отличие от модели Буссе [29–32], мы исследуем устойчивость неоднородно вращающейся плазмы в аксиальном магнитном поле и при наличии вертикального градиента температуры. Иначе говоря, здесь мы совместно рассматриваем задачу об устойчивости электропроводящей жидкости между двумя вращающимися цилиндрами (течение Куэтта) и задачу Рэля–Бенара во внешнем постоянном магнитном поле (рис. 2). В такой постановке задачи угловая скорость вращения  $\Omega(R)$  вязкой электропроводящей жидкости в цилиндрической геометрии  $(R, \phi, z)$  задачи описывается соотношением

$$\Omega(R) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R^2 (R_2^2 - R_1^2)},$$

где  $R_{1,2}$  и  $\Omega_{1,2}$  — радиусы и угловые скорости вращения внутреннего и внешнего цилиндров.

Настоящая работа построена следующим образом. В разд. 2 получены уравнения эволюции малых возмущений в приближении Буссинеска во вращающейся вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости, находящейся в поле силы тяжести с постоянным градиентом температуры. В разд. 3 ре-

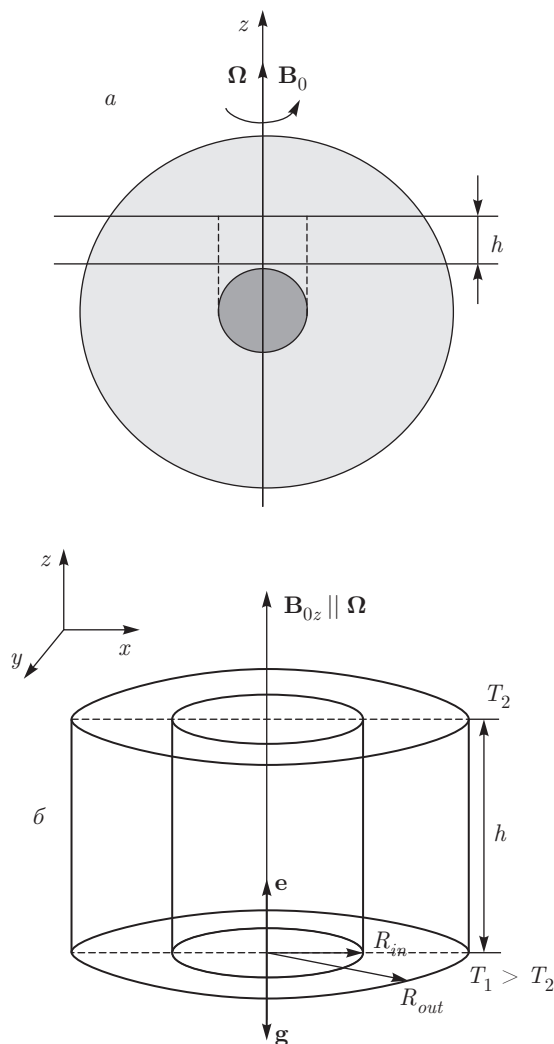


Рис. 2. а) Слой электропроводящей жидкости толщины  $h$  астрофизического объекта, который вращается с неоднородной скоростью  $\Omega(R)$  в аксиальном магнитном поле  $B_0$ . б) Геометрическое описание проблемы течения Куэтта–Тейлора с вертикальным градиентом температуры в аксиальном магнитном поле

шается задача Рэлея–Бенара для слоя электропроводящей жидкости, заключенной между двумя вращающимися цилиндрами и подогреваемой снизу. С помощью дисперсионного уравнения, полученного в разд. 3, в разд. 4 исследуются монотонный и колебательный режимы конвекции. Там же получены критические значения чисел Рэлея для стационарной и колебательной конвективных неустойчивостей. Проведен анализ развития этих неустойчивостей для различных профилей угловой скорости вращения  $\Omega(R)$ . В разд. 5 для осесимметричных возмущений исследуется слабонелинейная стадия вращающейся магнитоконвекции, в которой возникает

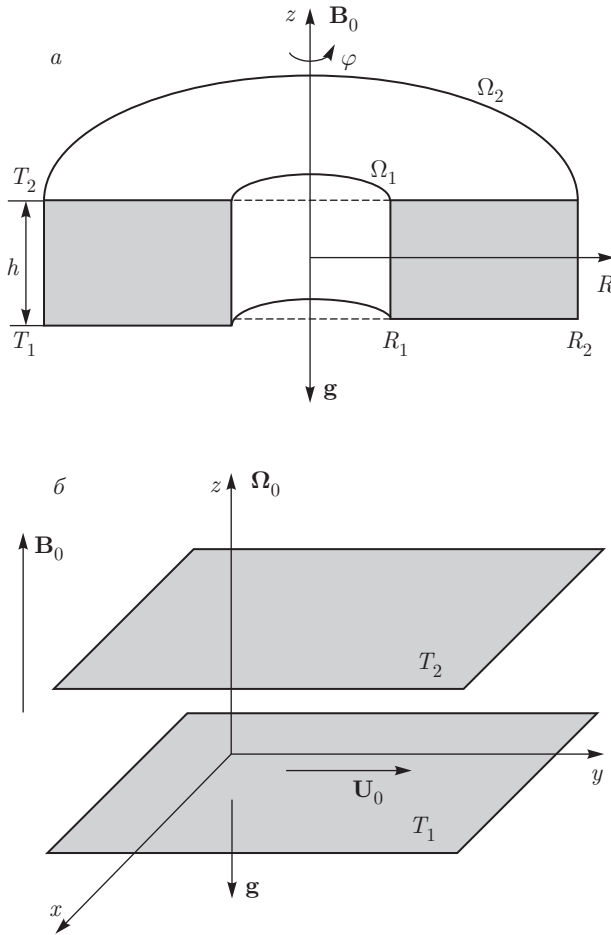
хаотический режим, приводящий к случайным вариациям магнитного поля. За последние несколько лет хаотическое поведение конвекции интенсивно изучалось во вращающихся слоях жидкости [34, 35], в проводящих средах с однородным магнитным полем [36–39], а также вращающихся с магнитным полем проводящих средах [40]. Однако в этих работах не рассматривалась сама динамика магнитного поля, что соответствует безындукционному приближению. Такие задачи имеют большое значение для технологических приложений: рост кристаллов, химические процессы затвердевания и центробежного литья металлов и т. д.

Применяя метод Галеркина к нелинейной системе уравнений для неоднородно вращающейся магнитоконвекции, мы получили динамическую систему уравнений типа Лоренца, но для шестимерного фазового пространства. Аналитический и численный анализы этой системы уравнений показал хаотическое поведение магнитного поля и его инверсию. Развита в настоящей работе теория может применяться к различным астрофизическим и геофизическим задачам, рассматривающим хаотическое поведение магнитного поля в конвективных слоях ядер Земли, Солнца, в горячих галактических кластерах, аккреционных дисках и в других объектах.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим неоднородно вращающийся поток несжимаемой вязкой электропроводящей жидкости, которую будем моделировать течением Куэтта–Тейлора между двумя вращающимися цилиндрами с внешним радиусом  $R_{out}$  и внутренним радиусом  $R_{in} \ll R_{out}$  [10].

Очевидно, что для исследования данного типа течения удобно использовать цилиндрическую систему координат  $(R, \phi, z)$  (см. рис. 3), выбор которой обусловлен возможностью практического применения развиваемой здесь теории. Пусть вращающаяся проводящая среда (плазма) находится в постоянных гравитационном и магнитном полях при постоянном вертикальном градиенте температуры  $\nabla T_0 = \text{const} = -Ae$ , где  $A > 0$  — постоянный градиент,  $e$  — единичный вектор, направленный вертикально вверх по оси  $z$ . Конвективные течения, вызванные градиентом температуры, описываются уравнениями движения вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости в приближении Буссинеска [9]:



**Рис. 3.** *а)* Геометрия задачи для неоднородно вращающейся магнетоконвекции. Электропроводящая жидкость заполняет слой между двумя цилиндрами, вращающимися с угловыми скоростями  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Нижняя поверхность слоя имеет температуру  $T_1$ , а верхняя —  $T_2$ . *б)* Декартова аппроксимация задачи для неоднородно вращающейся магнетоконвекции. Неоднородное вращение в локальной декартовой системе координат состоит из вращения с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$  и сдвиговой скорости  $\mathbf{U}_0$ , параллельной оси  $y$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\left(P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\rho_0}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} + g\beta T\mathbf{e} + \nu\nabla^2\mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v} = \eta\nabla^2\mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T = \chi\nabla^2T, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

где  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $\rho_0 = \text{const}$  — плотность среды,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\eta = c^2/4\pi\sigma$  — коэффициент

магнитной вязкости,  $\sigma$  — коэффициент электропроводности,  $\chi$  — коэффициент теплопроводности среды.

Полагаем, что однородное магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  направлено вдоль оси  $z$ . Далее будем называть его аксиальным. Направление магнитного поля совпадает с осью вращения среды  $\Omega$  и осью  $z$ . Плазма вращается в азимутальном направлении со скоростью  $v_\phi = R\Omega(R)$ , где  $\Omega(R)$  — угловая скорость вращения.

Система уравнений (1)–(4) имеет стационарные решения вида

$$P = p_0(R, z), \quad B_R(R) = 0, \quad B_\phi(R) = 0,$$

$$B_z(R) = B_0 = \text{const}, \quad v_R(R) = 0, \quad v_\phi(R) = R\Omega(R),$$

$$v_z(R) = 0, \quad T_0(z) = \text{const} + Az.$$

Для такого течения в радиальном направлении устанавливается центробежное равновесие:

$$\Omega^2 R = \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dR}, \quad (5)$$

а в вертикальном — гидростатическое:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} = -g\beta T_0. \quad (6)$$

Основной нашей задачей является вопрос об устойчивости малых возмущений физических величин  $(\mathbf{u}, \mathbf{b}, p, \theta)$  на фоне стационарного состояния, описываемого уравнениями (5), (6). Представляя все величины в уравнениях (1)–(4) в виде суммы стационарной и возмущенной частей,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}, \quad P = p_0 + p, \quad T = T_0 + \theta,$$

получим уравнения эволюции малых возмущений в линейном приближении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}_0 &= -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho_0}[(\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{b} - \nabla(\mathbf{B}_0\mathbf{b})] + g\beta\theta\mathbf{e} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{b} - (\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{v}_0 &= \eta\nabla^2\mathbf{b}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\theta + (\mathbf{u}\nabla)T_0 &= \chi\nabla^2\theta, \\ \operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mathbf{v}_0 = (0, R\Omega(R), 0)$ ,  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ . Система уравнений (7) будет использоваться нами для исследования вопроса устойчивости малых возмущений. Для этой цели запишем уравнения (7) в цилиндрической

системе координат, используя при этом следующие соотношения:

$$\nabla^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

$$\left( \nabla^2 \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \right)_R = \nabla^2 \begin{pmatrix} u_R \\ b_R \end{pmatrix} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix} - \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} u_R \\ b_R \end{pmatrix},$$

$$\left( \nabla^2 \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \right)_\phi = \nabla^2 \begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} u_R \\ b_R \end{pmatrix} - \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix}.$$

В результате получим основные уравнения для исследования устойчивости малых возмущений:

$$\frac{\partial u_R}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_R}{\partial \phi} - 2\Omega u_\phi - \frac{1}{4\pi\rho_0} B_0 \frac{\partial b_R}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial R} + \nu \left( \nabla^2 u_R - \frac{2}{R^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{u_R}{R^2} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\kappa^2}{2\Omega} u_R - \frac{1}{4\pi\rho_0} B_0 \frac{\partial b_\phi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0 R} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \phi} + \nu \left( \nabla^2 u_\phi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial u_R}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{R^2} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{1}{4\pi\rho_0} B_0 \frac{\partial b_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + g\beta\theta + \nu \nabla^2 u_z, \quad (10)$$

$$\frac{\partial b_R}{\partial t} + \Omega \frac{\partial b_R}{\partial \phi} - B_0 \frac{\partial u_R}{\partial z} = \eta \left( \nabla^2 b_R - \frac{2}{R^2} \frac{\partial b_\phi}{\partial \phi} - \frac{b_R}{R^2} \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial b_\phi}{\partial \phi} - R \frac{\partial \Omega}{\partial R} b_R - B_0 \frac{\partial u_\phi}{\partial z} = \eta \left( \nabla^2 b_\phi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial b_R}{\partial \phi} - \frac{b_\phi}{R^2} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial b_z}{\partial \phi} - B_0 \frac{\partial u_z}{\partial z} = \eta \nabla^2 b_z, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \theta}{\partial \phi} - u_z A = \chi \nabla^2 \theta, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{u_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial b_R}{\partial R} + \frac{b_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial b_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial b_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$\kappa = 2\Omega \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega}{d \ln R}}$$

— эциклическая частота,

$$\tilde{p} = p + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{b})$$

— общее возмущенное давление.

### 3. ЗАДАЧА РЭЛЕЯ – БЕНАРА ДЛЯ ТОНКОГО СЛОЯ НЕОДНОРОДНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Полученную в предыдущем разделе систему уравнений (8)–(15) будем применять для описания конвективных явлений в тонком слое неоднородно вращающейся проводящей среды (плазмы) толщины  $h \ll R_{out} - R_{in}$ . Температуру нижней части слоя обозначим через  $T_1$ , а верхней —  $T_2$ , причем  $T_1 > T_2$  — подогрев снизу (см. рис. 3). Такая постановка задачи обобщает классическую проблему Рэлея – Бенара для свободной конвекции.

Для данной задачи характерный масштаб неоднородности среды в горизонтальной плоскости больше, чем в вертикальном направлении,  $L_R \gg L_h$ . Поэтому мы можем применить локальный метод ВКБ для возмущений, зависящих от горизонтальных координат  $(R, \phi)$ . Разложим все величины в ряд Тейлора в окрестности фиксированных точек  $(R_0, \phi_0)$ , оставляя члены нулевого порядка по локальным координатам  $\tilde{R} = R - R_0$ ,  $\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$ . В результате получим систему дифференциальных уравнений (8)–(15) с постоянными коэффициентами. При этом будем учитывать следующие соотношения:

$$\Omega_0 = \Omega(R_0), \quad \nabla^2 \rightarrow \hat{D}^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{R}^2} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{R}} + \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}^2},$$

$$\hat{D} \equiv \frac{d}{dz},$$

$$\left( \nabla^2 \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \right)_R = \nabla^2 \begin{pmatrix} u_R \\ b_R \end{pmatrix} - \frac{2}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} \begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix} - \frac{1}{R_0^2} \begin{pmatrix} u_R \\ b_R \end{pmatrix},$$

$$\left( \nabla^2 \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \right)_\phi = \nabla^2 \begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix} + \frac{2}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} \begin{pmatrix} u_R \\ b_R \end{pmatrix} - \frac{1}{R_0^2} \begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix}.$$

Все возмущения в системе уравнений (8)–(15) представим в виде плоских волн

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \\ \theta \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(z) \\ \mathbf{H}(z) \\ \Theta(z) \\ \tilde{P}(z) \end{pmatrix} \exp(\gamma t + im\tilde{\phi} + ik\tilde{R}), \quad (16)$$

после чего, в коротковолновом приближении  $k \gg \gg 1/R_0$ , пренебрегая членами  $ik/R_0 - 1/R_0^2$ , находим

$$\widehat{L}_\nu U_R + \frac{2\Omega_0}{\nu} U_\phi - \frac{2im}{\nu R_0^2} U_\phi + \frac{B_{0z}}{4\pi\rho_0\nu} \widehat{D}H_R - \frac{ik}{\nu\rho_0} \widetilde{P} = 0, \quad (17)$$

$$\widehat{L}_\nu U_\phi - \frac{2\Omega_0}{\nu} (1 + \text{Ro}) U_R + \frac{2im}{\nu R_0^2} U_R + \frac{B_{0z}}{4\pi\rho_0\nu} \widehat{D}H_\phi - \frac{im}{\nu\rho_0 R_0} \widetilde{P} = 0, \quad (18)$$

$$\widehat{L}_\nu U_z + \frac{B_{0z}}{4\pi\rho_0\nu} \widehat{D}H_z + \frac{g\beta}{\nu} \Theta - \frac{\widehat{D}}{\nu\rho_0} \widetilde{P} = 0, \quad (19)$$

$$\widehat{L}_\eta H_R + \frac{B_{0z}}{\eta} \widehat{D}U_R = 0, \quad (20)$$

$$\widehat{L}_\eta H_\phi + \frac{B_{0z}}{\eta} \widehat{D}U_\phi + \frac{2\Omega_0}{\eta} \text{Ro} H_R = 0, \quad (21)$$

$$\widehat{L}_\eta H_z + \frac{B_{0z}}{\eta} \widehat{D}U_z = 0, \quad (22)$$

$$\widehat{L}_\chi \Theta + \frac{A}{\chi} U_z = 0, \quad \widehat{D}U_z + ikU_R + \frac{im}{R_0} U_\phi = 0, \quad (23)$$

$$\widehat{D}H_z + ikH_R + \frac{im}{R_0} H_\phi = 0.$$

Здесь  $\text{Ro}$  — число Россби и введены следующие обозначения для операторов:

$$\widehat{L}_\nu = \widehat{D}^2 - \left( \frac{\gamma + m\Omega_0}{\nu} + k^2 + \frac{m^2}{R_0^2} \right),$$

$$\widehat{L}_\eta = \widehat{D}^2 - \left( \frac{\gamma + m\Omega_0}{\eta} + k^2 + \frac{m^2}{R_0^2} \right),$$

$$\widehat{L}_\chi = \widehat{D}^2 - \left( \frac{\gamma + m\Omega_0}{\chi} + k^2 + \frac{m^2}{R_0^2} \right).$$

Систему уравнений (17)–(23) удобно привести к безразмерному виду, вводя безразмерные величины, которые отметим звездочкой:

$$(R_0^*, z^*) = h^{-1}(R_0, z),$$

$$(U_R^*, U_\phi^*, U_z^*) = \chi h^{-1}(U_R, U_\phi, U_z),$$

$$(H_R^*, H_\phi^*, H_z^*) = B_0^{-1}(H_R, H_\phi, H_z),$$

$$\phi^* = \phi, \quad \Theta^* = \Theta(Ah)^{-1}, \quad \widetilde{P}^* = \widetilde{P} \left( \frac{h^2}{\rho_0\nu\chi} \right),$$

$$t^* = t \left( \frac{\nu}{h^2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{h^2}{\nu} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Опуская значок «звездочка», получим систему безразмерных уравнений

$$\widehat{L}_\nu U_R + \sqrt{\text{Ta}} U_\phi - \frac{2im}{R_0^2} U_\phi + \text{Pr Pm}^{-1} \text{Ha}^2 \widehat{D}H_R - ik\widetilde{P} = 0, \quad (24)$$

$$\widehat{L}_\nu U_\phi - \sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro}) U_R + \frac{2im}{R_0^2} U_R + \text{Pr Pm}^{-1} \text{Ha}^2 \widehat{D}H_\phi - \frac{im}{R_0} \widetilde{P} = 0, \quad (25)$$

$$\widehat{L}_\nu U_z + \text{Pr Pm}^{-1} \text{Ha}^2 \widehat{D}H_z + \text{Ra}\Theta - \widehat{D}\widetilde{P} = 0, \quad (26)$$

$$\widehat{L}_\eta H_R + \text{Pr}^{-1} \text{Pm} \widehat{D}U_R = 0, \quad (27)$$

$$\widehat{L}_\eta H_\phi + \text{Pr}^{-1} \text{Pm} \widehat{D}U_\phi + \sqrt{\text{Ta}} \text{Pm} \text{Ro} H_R = 0, \quad (28)$$

$$\widehat{L}_\eta H_z + \text{Pr}^{-1} \text{Pm} \widehat{D}U_z = 0, \quad (29)$$

$$\widehat{L}_\chi \Theta + U_z = 0, \quad \widehat{D}U_z + ikU_R + \frac{im}{R_0} U_\phi = 0,$$

$$\widehat{D}H_z + ikH_R + \frac{im}{R_0} H_\phi = 0,$$

$$\widehat{L}_\nu = \widehat{D}^2 - \gamma - im \frac{\sqrt{\text{Ta}}}{2} - k^2 - \frac{m^2}{R_0^2}, \quad (30)$$

$$\widehat{L}_\eta = \widehat{D}^2 - \text{Pm} \left( \gamma - im \frac{\sqrt{\text{Ta}}}{2} \right) - k^2 - \frac{m^2}{R_0^2},$$

$$\widehat{L}_\chi = \widehat{D}^2 - \text{Pr} \left( \gamma - im \frac{\sqrt{\text{Ta}}}{2} \right) - k^2 - \frac{m^2}{R_0^2},$$

куда входят безразмерные параметры  $\text{Pr} = \nu/\chi$  — число Прандтля,  $\text{Pm} = \nu/\eta$  — магнитное число Прандтля, числа  $\text{Ta} = 4\Omega_0^2 h^4/\nu^2$  — Тейлора,  $\text{Ha} = B_0 h/\sqrt{4\pi\rho_0\nu\eta}$  — Гартмана,  $\text{Ra} = g\beta Ah^4/\nu\chi$  — Рэлея на масштабе  $h$ ,  $\text{Ro} = (R/2\Omega)d\Omega/dR$  — число Россби. Иногда в теории конвективной неустойчивости [8] вместо числа Гартмана  $\text{Ha}$  используют число Чандрасекара  $Q = \text{Ha}^2$ .

Рассмотрим эволюцию осесимметричных возмущений, т. е. не зависящих от азимутального угла  $\phi$  ( $m = 0$ ). В этом случае система линейных уравнений (24)–(30) заметно упростится и в результате несложных, но громоздких преобразований сведется к одному дифференциальному уравнению для  $U_z$ :

$$[\widehat{a}_{33} (\widehat{a}_{11}\widehat{a}_{22} - \widehat{a}_{21}\widehat{a}_{12}) + \widehat{a}_{13}\widehat{a}_{21}\widehat{a}_{32}] U_z = 0, \quad (31)$$

где

$$\widehat{a}_{11} = \widehat{L}_\nu - \text{Ha}^2 \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta}, \quad \widehat{a}_{12} = \frac{\sqrt{\text{Ta}} \widehat{D}^2}{\widehat{D}^2 - k^2},$$

$$\widehat{a}_{21} = -\sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro}) + \text{Ha}^2 \sqrt{\text{Ta}} \text{Ro Pm} \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta^2},$$



$$\hat{a}_{22} = \hat{L}_\nu - \text{Ha}^2 \frac{\hat{D}^2}{\hat{L}_\eta}, \quad \hat{a}_{13} = \frac{\text{Ra} ik \hat{D}}{(\hat{D}^2 - k^2) \hat{L}_\chi},$$

$$\hat{a}_{32} = -\frac{i\kappa \hat{D}}{\hat{D}^2 - k^2} \sqrt{\text{Ta}},$$

$$\hat{a}_{33} = \hat{L}_\nu - \text{Ha}^2 \frac{\hat{D}^2}{\hat{L}_\eta} + \frac{\text{Ra} k^2}{\hat{L}_\chi (\hat{D}^2 - k^2)}.$$

Уравнение (31) дополняется граничными условиями только в  $z$ -направлении:

$$U_z = \frac{d^2 U_z}{dz^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = 1. \quad (32)$$

Таким образом, в данном разделе мы получили уравнение (31), описывающее конвективные явления в тонком слое неоднородно вращающейся замагниченной жидкости.

#### 4. МОНОТОННЫЙ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ РЕЖИМЫ КОНВЕКЦИИ

Во многих задачах по линейной теории конвективной неустойчивости [9] обычно ограничиваются одномодовым приближением. Будем искать решение уравнения (31) с граничным условием (32) в следующем виде:

$$U_z = W_0 \sin(\pi z), \quad (33)$$

где  $W_0$  — постоянная амплитуда. Подставляя (33) в (31) и проводя интегрирование по толщине слоя  $z = (0, 1)$ , получим дисперсионное уравнение

$$\text{Ra} = \frac{\Gamma_\chi}{k^2 \Gamma_\eta \Gamma_A^2} [a^2 \Gamma_A^4 + \pi^2 \text{Ta} (1 + \text{Ro}) \Gamma_\eta^2 + \pi^4 \text{Ha}^2 \text{Ta} \text{Ro} \text{Pm}], \quad (34)$$

где введены обозначения

$$\Gamma_A^2 = (\gamma + a^2)(\gamma \text{Pm} + a^2) + \pi^2 \text{Ha}^2, \quad \Gamma_\chi = \gamma \text{Pr} + a^2,$$

$$\Gamma_\eta = \gamma \text{Pm} + a^2, \quad a^2 = \pi^2 + k^2.$$

Без учета тепловых процессов, т. е. когда нет подогрева ( $\text{Ra} = 0$ ), уравнение (34) совпадает с дисперсионным уравнением для стандартной МВН с учетом диссипативных процессов (см., например, работу [26]). Пороговое значение гидродинамического

числа Россби  $\text{Ro}$  определяется из условия  $\gamma = 0$  и имеет вид

$$\text{Ro}_{cr} = -\frac{a^2(a^4 + \pi^2 \text{Ha}^2)^2 + \pi^2 a^4 \text{Ta}}{\pi^2 \text{Ta}(a^4 + \pi^2 \text{Ha}^2 \text{Pm})}.$$

При переходе к размерным переменным

$$\frac{\pi^2 \text{Ha}^2}{a^4} \rightarrow \frac{\omega_A^2}{\omega_\nu \omega_\eta}, \quad \frac{\pi^2 \text{Ha}^2 \text{Pm}}{a^4} \rightarrow \frac{\omega_A^2}{\omega_\eta^2},$$

$$\frac{\text{Ta}}{a^4} \rightarrow \frac{4\Omega^2}{\omega_\nu^2}, \quad \frac{\pi^2}{a^2} \rightarrow \xi^2$$

находим выражение для  $\text{Ro}_{cr}$  [26]:

$$\text{Ro}_{cr} = -\frac{(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)^2 + 4\xi^2 \Omega^2 \omega_\eta^2}{4\Omega^2 \xi^2 (\omega_A^2 + \omega_\eta^2)},$$

где введены обозначения для вязкостной  $\omega_\nu = \nu k^2$  и омической  $\omega_\eta = \eta k^2$  частот;  $\omega_A$  — альфвеновская частота,  $\omega_A^2 = k_z^2 c_A^2 = k_z^2 B_0^2 / 4\pi \rho_0$ .

Таким образом, в предельном случае  $\text{Ra} = 0$  в неоднородно вращающемся слое электропроводящей жидкости в постоянном магнитном поле возникает магнитовращательная неустойчивость. Критерием ее возникновения является условие, накладываемое на профиль угловой скорости вращения жидкости  $\Omega(R)$ , т. е. числа Россби  $\text{Ro} > \text{Ro}_{cr}$ .

Перейдем теперь к исследованию более общего случая, когда есть нагрев слоя жидкости ( $\text{Ra} \neq 0$ ) и его неоднородное вращение ( $\text{Ro} \neq 0$ ). Здесь мы будем рассматривать конвективное течение в плоском неоднородно вращающемся слое в виде валов (ячеек). Величина скорости роста возмущений  $\gamma$  в общем случае является комплексной,  $\gamma = \gamma_r + i\omega_i$ . Ясно, что система устойчива, если  $\gamma_r < 0$ , и неустойчива, если  $\gamma_r > 0$ . Перейдем к определению границы устойчивости для монотонных ( $\omega_i = 0$ ) и колебательных ( $\omega_i \neq 0$ ) возмущений. На границе устойчивости (нейтральные состояния)  $\gamma_r = 0$ , поэтому, сделав в уравнении (34) замену  $\gamma = i\omega_i$ , находим

$$\text{Ra} = \text{Ra}_r + i\omega_i \text{Ra}_i, \quad (35)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 Ra_r &= \frac{a^2}{k^2 \xi} \times \\
 &\times [\zeta(a^4 + \omega_i^2 Pm Pr) - \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)(Pr - Pm)] + \\
 &\quad + \pi^2 Ta(1 + Ro) \times \\
 &\times \frac{(a^4 - \omega_i^2 Pm Pr)\zeta + \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)(Pm + Pr)}{k^2 [\zeta^2 + \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)^2]} + \\
 &\quad + \pi^4 Q Ta Ro Pm \times \\
 &\times \frac{(a^4 + \omega_i^2 Pm Pr)\zeta + \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)(Pr - Pm)}{k^2 \xi [\zeta^2 + \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)^2]}, \\
 Ra_i &= \frac{a^4}{k^2 \xi} \times \\
 &\times [(1 + Pm)(a^4 + \omega_i^2 Pm Pr) + (Pr - Pm)\zeta] + \\
 &\quad + \pi^2 Ta(1 + Ro) \times \\
 &\times \frac{a^2 [(Pr + Pm)\zeta - (1 + Pm)(a^4 - \omega_i^2 Pm Pr)]}{k^2 [\zeta^2 + \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)^2]} + \\
 &\quad + \pi^4 Q Ta Ro Pm \times \\
 &\times \frac{a^2 [(Pr - Pm)\zeta - (1 + Pm)(a^4 + \omega_i^2 Pm Pr)]}{k^2 \xi [\zeta^2 + \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)^2]}, \\
 \xi &= a^4 + \omega_i^2 Pm^2, \quad \zeta = a^4 + \pi^2 Q - \omega_i^2 Pm.
 \end{aligned}$$

#### 4.1. Стационарный режим конвекции

В случае, когда коэффициент  $\gamma$  равен нулю, из формулы (34) найдем критическое значение числа Рэлея  $Ra_{st}$  для стационарной конвекции:

$$\begin{aligned}
 Ra_{st} &= \frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2} + \frac{\pi^2(\pi^2 + k^2)Q}{k^2} + \\
 &\quad + \frac{\pi^2(\pi^2 + k^2)^2 Ta}{k^2 [(\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 Q]} + \\
 &\quad + \frac{\pi^2 Ta Ro [(\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 Q Pm]}{k^2 [(\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 Q]}. \quad (36)
 \end{aligned}$$

Минимальное значение критического числа Рэлея находится из условия  $\partial Ra_{st} / \partial k = 0$  и соответствует волновым числам  $k = k_c$ , удовлетворяющим следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
 \frac{2k_c^2 - \pi^2}{k_c} - \frac{\pi^4 Q}{k_c a_c^4} + \frac{2\pi^2 k_c Ta(1 + Ro)}{a_c^2 (a_c^4 + \pi^2 Q)} - \\
 - \frac{\pi^2 Ta(a_c^4 + \pi^2 Q + 2k_c^2 a_c^2)}{k_c (a_c^4 + \pi^2 Q)^2} - \\
 - \frac{\pi^2 Ta Ro (a_c^4 + \pi^2 Q Pm)(a_c^4 + \pi^2 Q + 2k_c^2 a_c^2)}{k_c a_c^4 (a_c^4 + \pi^2 Q)^2} = 0, \\
 a_c^2 = \pi^2 + k_c^2.
 \end{aligned}$$

Числу  $Ra_{st}^{min}$  на рис. 4 соответствует точка на нейтральной кривой, разделяющей области устойчивых

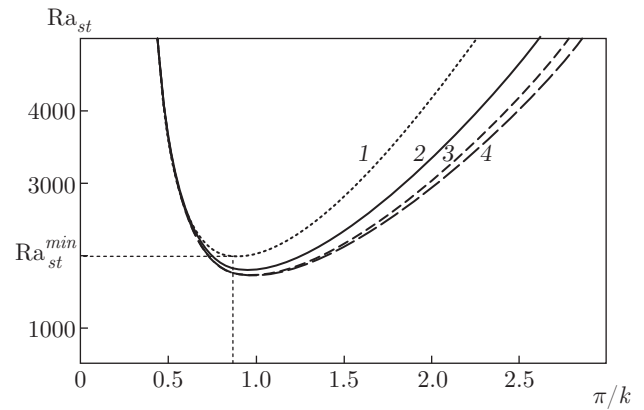


Рис. 4. Зависимости стационарного числа Рэлея  $Ra_{st}$  от  $\pi/k$  для различных чисел Россби  $Ro$  при постоянных параметрах  $Q = 50$ ,  $Ta = 100$  и  $Pm = 1$ : кривая 1 —  $Ro = 2$ ; 2 —  $Ro = 0$ ; 3 —  $Ro = -3/4$ ; 4 —  $Ro = -1$

и неустойчивых возмущений. Здесь видно, что с возрастанием положительного профиля числа Россби  $Ro$  минимальное значение критического числа Рэлея  $Ra_{st}^{min}$  также возрастает, т.е. повышается порог развития неустойчивости. С другой стороны, для отрицательных профилей вращения: кеплеровского ( $Ro = -3/4$ ) и рэлеевского ( $Ro = -1$ ), наблюдаем уменьшение критического числа Рэлея, т.е. более низкий порог развития неустойчивости по сравнению со случаем однородного ( $Ro = 0$ ) и неоднородного ( $Ro = 2$ ) вращения. В отсутствие вращения ( $Ta = 0$ ,  $Ro = 0$ ) и магнитного поля ( $B_0 = 0$ ) из выражения (36) следует известный результат [8, 9]:

$$Ra_{st} = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2}.$$

Минимальное значение критического числа Рэлея здесь достигает значения  $Ra_{st}^{min} = 27\pi^4/4$  для волновых чисел  $k_c = \pi/\sqrt{2}$ .

В случае неэлектропроводящей ( $\sigma = 0$ ) и однородно вращающейся ( $Ro = 0$ ) среды из выражения (36) также получим известный результат [8, 9]:

$$Ra_{st} = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} + \frac{\pi^2 Ta}{k^2}.$$

Здесь значения критического числа Рэлея получены для  $k = k_c$ , удовлетворяющих следующему соотношению:

$$1 + \frac{Ta}{\pi^4} = 2 \left( \frac{k_c}{\pi} \right)^6 + 3 \left( \frac{k_c}{\pi} \right)^4.$$

Обобщение этого результата на случай неоднородно вращающейся среды представляет собой замену



числа Тейлора  $Ta \rightarrow Ta(1 + Ro)$ . Если нет вращения ( $Ta = 0$ ) и среда находится в однородном аксиальном магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ , то критическое значение числа Рэлея принимает вид [8, 9]

$$Ra_{st} = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} \left( 1 + \frac{\pi^2 Ha^2}{(k^2 + \pi^2)^2} \right)$$

для волновых чисел  $k = k_c$ , удовлетворяющих соотношению

$$1 + \frac{Ha^2}{\pi^2} = 2 \left( \frac{k_c}{\pi} \right)^6 + 3 \left( \frac{k_c}{\pi} \right)^4.$$

При наличии однородного вращения ( $Ro = 0$ ) и постоянного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  критическое число Рэлея также было вычислено Чандрасекаром [8]:

$$Ra_{st} = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} + \frac{\pi^2(k^2 + \pi^2)}{k^2} \left( Ha^2 + \frac{Ta(k^2 + \pi^2)}{(k^2 + \pi^2)^2 + \pi^2 Ha^2} \right). \quad (37)$$

Для исследования эффектов неоднородного вращения и магнитного поля вычислим производные  $d\tilde{R}/d\tilde{Q}$ ,  $d\tilde{R}/d\tilde{T}$ ,  $d\tilde{R}/dRo$  в новых переменных

$$\tilde{R} = \frac{Ra_{st}}{\pi^4}, \quad \tilde{T} = \frac{Ta}{\pi^4}, \quad \tilde{Q} = \frac{Q}{\pi^2}, \quad x = \frac{k^2}{\pi^2}.$$

Они имеют вид

$$\frac{d\tilde{R}}{d\tilde{Q}} = \frac{1+x}{x} - \frac{(1+x)^2 \tilde{T}(1+Ro)}{x[(1+x)^2 + \tilde{Q}]^2} - \frac{\tilde{T}Ro\tilde{Q}Pm}{x[(1+x)^2 + \tilde{Q}]^2} + \frac{\tilde{T}RoPm}{x[(1+x)^2 + \tilde{Q}]}, \quad (38)$$

$$\frac{d\tilde{R}}{d\tilde{T}} = \frac{(1+x)^2}{x[(1+x)^2 + \tilde{Q}]} + \frac{Ro[(1+x)^2 + \tilde{Q}Pm]}{x[(1+x)^2 + \tilde{Q}]}, \quad (39)$$

$$\frac{d\tilde{R}}{dRo} = \frac{\tilde{T}[(1+x)^2 + \tilde{Q}Pm]}{x[(1+x)^2 + \tilde{Q}]}. \quad (40)$$

Из формул (38) и (39) видно, что для стационарной конвекции величины  $d\tilde{R}/d\tilde{Q}$ ,  $d\tilde{R}/d\tilde{T}$  могут быть как положительными, так и отрицательными. Следовательно, магнитное поле и неоднородное вращение могут оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее действие. Неоднородное вращение оказывает стабилизирующий эффект в случае положительных чисел Россби,  $Ro > 0$ . В обратном случае,  $Ro < 0$ , неоднородное вращение может оказывать дестабилизирующий эффект. Уравнения (38), (39) решались численно.

На рис. 5 построен график зависимости критического числа Рэлея  $\tilde{R}$  от чисел Чандрасекара  $\tilde{Q}$  при параметре вращения  $\tilde{T} = 100$  для разных чисел Россби  $Ro$  и волновых чисел  $x = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$ . В случае однородного вращения ( $Ro = 0$ ) магнитное поле оказывает стабилизирующее действие на развитие неустойчивости, которое особенно проявляется с ростом волновых чисел  $x$ . Для положительно-го профиля вращения ( $Ro = 2$ ) также наблюдается стабилизация неустойчивости магнитным полем, но при больших значениях  $\tilde{R}$ , чем для случая однородного вращения. Такая стабилизация наиболее эффективна для коротковолновых возмущений. При кеплеровском ( $Ro = -3/4$ ) и рэлеевском ( $Ro = -1$ ) профилях вращения магнитное поле оказывает дестабилизирующий эффект, который наиболее чувствителен к коротковолновым (большие  $x$ ) возмущениям.

На рис. 6 показан график изменения  $\tilde{R}$  по отношению к  $\tilde{T}$  при параметре  $\tilde{Q} = 100$  для различных чисел Россби  $Ro$  и волновых чисел  $x = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$ . Как известно [9], быстрое твердотельное вращение ( $Ro = 0$ ) оказывает стабилизирующее действие независимо от величины магнитного поля. Аналогичный эффект возникает и при неоднородном вращении для положительных чисел Россби,  $Ro > 0$ . Однако в случае отрицательных профилей вращения ( $Ro = -3/4$  и  $Ro = -1$ ) само вращение может оказывать дестабилизирующее действие, усиливающееся для коротковолновых возмущений. На рис. 7 показано изменение  $\tilde{R}$  от числа Россби  $Ro$ . Здесь виден постоянный стабилизирующий эффект независимо от величины магнитного поля для положительных чисел Россби  $Ro > 0$  при параметрах  $\tilde{T} = 1000$ ,  $\tilde{Q} = 100$  и  $x = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$ . Дестабилизирующий эффект, как видно на рис. 7, возникает при отрицательных числах Россби,  $Ro < 0$ .

#### 4.2. Колебательный (осциллирующий) режим конвекции

Из физических соображений очевидно, что величина  $Ra$  является действительной, тогда мнимая часть уравнения (35) должна обращаться в нуль. При этом возможны следующие варианты:  $\omega_i = 0$  и  $Ra_i = 0$ . В первом варианте ( $\omega_i = 0$ ) мы получаем критическое значение числа Рэлея  $Ra_c$  для монотонных возмущений, совпадающее с выражением (36) для режима стационарной конвекции:  $Ra_c = Ra_{st}$ . В случае колебательного возмущения,  $\omega_i \neq 0$  ( $Ra_i = 0$ ), из формулы (35) находим критическое число Рэлея для колебательной неустойчивости,

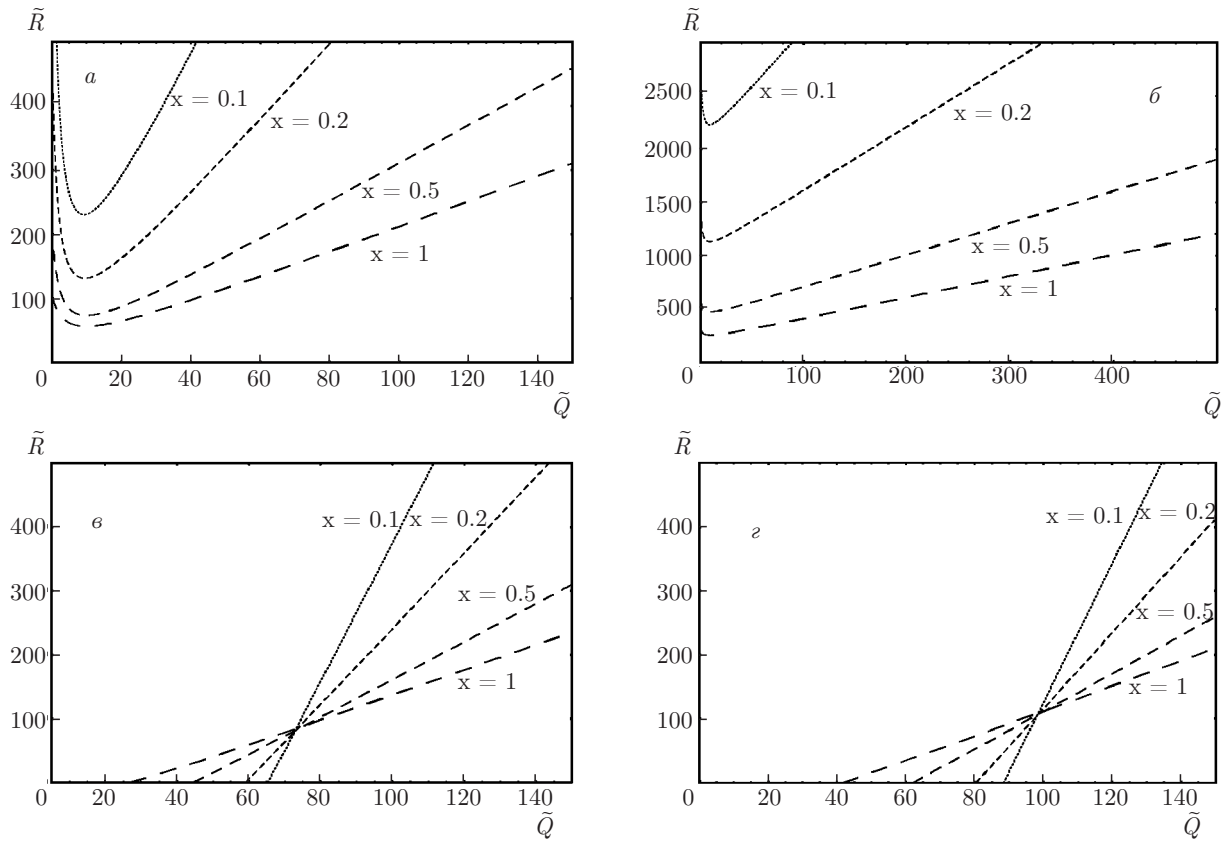


Рис. 5. Зависимости числа Рэлея  $\tilde{R}$  от числа Chandrasekara  $\tilde{Q}$  для различных волновых чисел  $x = k^2/\pi^2$  при постоянных параметрах  $\tilde{T} = 100$  и  $Pm = 1$  и числах Россби  $Ro = 0$  (а), 2 (б),  $-3/4$  (в),  $-1$  (г)

$$Ra_{osc} = \frac{a^2}{k^2 \xi} \times [\zeta(a^4 + \omega_i^2 Pm Pr) - \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)(Pr - Pm)] + \pi^2 Ta(1 + Ro) \times \frac{(a^4 - \omega_i^2 Pm Pr)\zeta + \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)(Pm + Pr)}{k^2 [\zeta^2 + \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)^2]} + \pi^4 Q Ta Ro Pm \times \frac{(a^4 + \omega_i^2 Pm Pr)\zeta + \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)(Pr - Pm)}{k^2 \xi [\zeta^2 + \omega_i^2 a^4 (1 + Pm)^2]}, \quad (41)$$

и частоту нейтральных колебаний  $\omega = \omega_i$ , удовлетворяющую уравнению

$$K_0(\omega^6) + K_1(\omega^4) + K_2(\omega^2) + K_3 = 0,$$

где введены обозначения

$$K_0 = Pm^2(1 + Pr)Pm^2,$$

$$K_1 = [a^4(1 + Pm) + (Pr - Pm)(a^4 + \pi^2 Q)]Pm^2 + Pm^2(1 + Pr)[a^4(1 + Pm)^2 - 2Pm(a^4 + \pi^2 Q)] + \frac{\pi^2}{a^2} Ta(1 + Ro)Pm^3(Pr - 1),$$

$$K_2 = [a^4(1 + Pm) + (Pr - Pm)(a^4 + \pi^2 Q)] \times [a^4(1 + Pm)^2 - 2Pm(a^4 + \pi^2 Q)] + Pm^2(1 + Pr)(a^4 + \pi^2 Q)^2 + \frac{\pi^2}{a^2} Ta(1 + Ro) \times [a^4 Pm^2(Pr - 1) + (a^4 + \pi^2 Q)(Pr + Pm)Pm - a^4(1 + Pm)Pm] - \frac{\pi^4}{a^2} Q Ta Ro Pm \times [2Pm Pr + Pm^2(Pr - 1)],$$

$$K_3 = [a^4(1 + Pm) + (Pr - Pm)(a^4 + \pi^2 Q)] \times (a^4 + \pi^2 Q)^2 + \frac{\pi^2}{a^2} Ta(1 + Ro)a^4 \times [(Pr + Pm)(a^4 + \pi^2 Q) - a^4(1 + Pm)] + \frac{\pi^4}{a^2} Q Ta Ro Pm [(Pr - Pm)(a^4 + \pi^2 Q) - a^4(1 + Pm)].$$

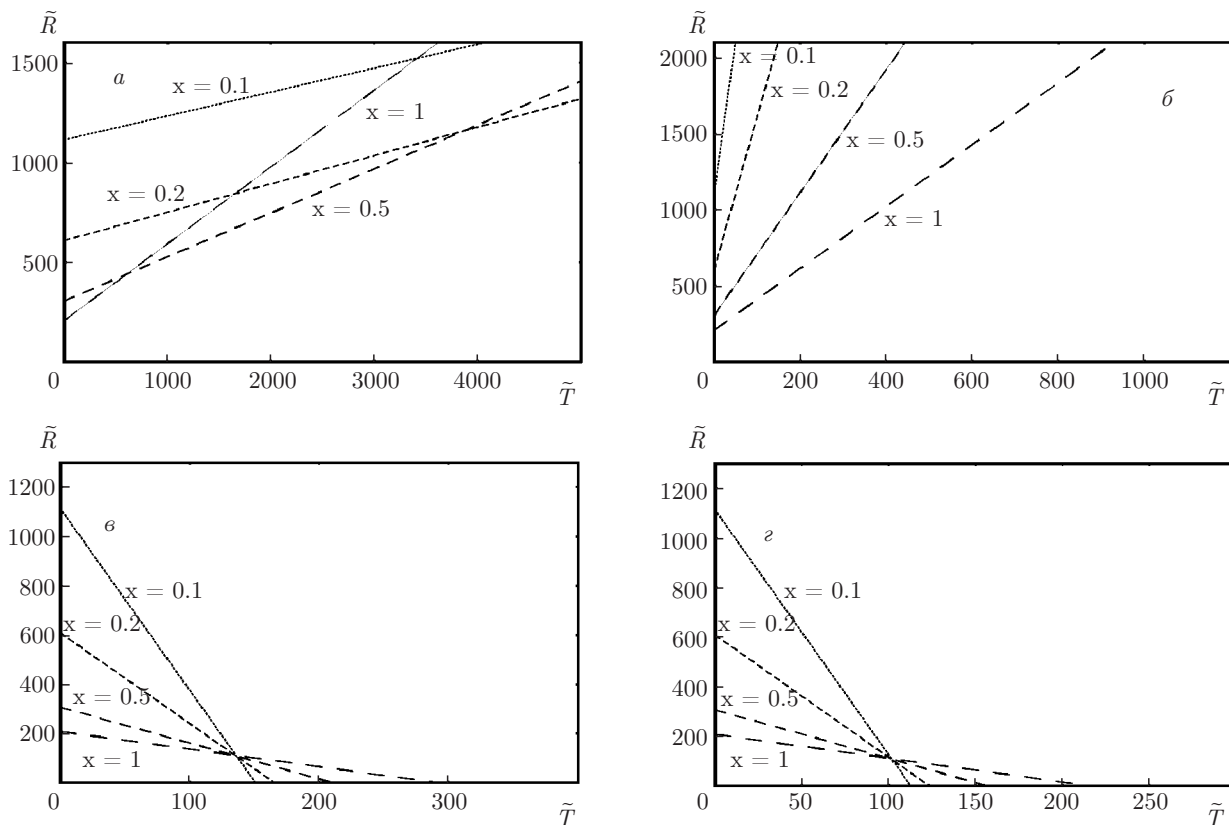


Рис. 6. Зависимости числа Рэлея  $\tilde{R}$  от числа Тейлора  $\tilde{T}$  для различных волновых чисел  $x = k^2/\pi^2$  при постоянных параметрах  $\tilde{Q} = 100$  и  $\text{Pm} = 1$  и числах Россби  $\text{Ro} = 0$  (а), 2 (б),  $-3/4$  (в),  $-1$  (г)

Формула (41) в некоторых предельных случаях содержит известные результаты. Например, для случая однородного вращения ( $\text{Ro} = 0$ ) и непроводящей жидкости ( $\sigma = 0$ ), Чандрасекаром [8] было получено выражение для критического числа Рэлея колебательной неустойчивости:

$$\text{Ra}_{osc} = \frac{1}{k^2} \left[ a^6 - \omega^2 a^2 \text{Pr} + \frac{\pi^2 \text{Ta} (a^4 + \omega^2 \text{Pr})}{a^4 + \omega^2} \right].$$

В отсутствие вращения ( $\text{Ta} = 0, \text{Ro} = 0$ ) в замагниченной проводящей жидкости ( $Q \neq 0$ ) критическое число Рэлея  $\text{Ra}_{osc}$  для колебательной конвекции также было получено Чандрасекаром [8]:

$$\text{Ra}_{osc} = \frac{a^2}{k^2} \left[ a^4 - \omega^2 \text{Pr} + \frac{\pi^2 Q (a^4 + \omega^2 \text{Pr} \text{Pm})}{a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2} \right].$$

На рис. 8 показаны зависимости критического числа Рэлея  $\text{Ra}_{osc}$  для колебательной неустойчивости от  $\pi/k$  при различных профилях неоднородного вращения. Видно, что при отрицательных числах Россби  $\text{Ro} < 0$  пороговое число Рэлея  $\text{Ra}_{osc}^{min}$  уменьшается.

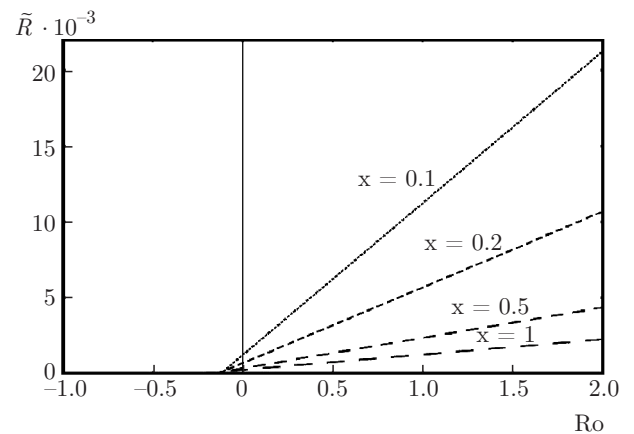


Рис. 7. Зависимости числа Рэлея  $\tilde{R}$  от числа Россби  $\text{Ro}$  для различных волновых чисел  $x = k^2/\pi^2$  при постоянных параметрах  $\tilde{T} = 1000, \tilde{Q} = 100$  и  $\text{Pm} = 1$

### 5. СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЖИМ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Для описания нелинейных конвективных явлений в неоднородно вращающемся слое электропро-

водящей жидкости удобно перейти во вращающуюся систему отсчета с локальными декартовыми координатами  $(x, y, z)$  (см. рис. 3б). Эта система отсчета вращается с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega} = \Omega(R)\mathbf{e}$ , в которой цилиндрическим координатам  $(R, \phi, z)$  будут соответствовать декартовы:  $x$  — радиальное,  $y$  — азимутальное и  $z$  — аксиальное направление, параллельное оси вращения. Постоянное магнитное поле  $\mathbf{B}_0 = \text{const}$ , как и ранее, считаем параллельным угловой скорости вращения  $\mathbf{\Omega}$ . Следовательно, неоднородное вращение слоя жидкости локально можно представить в виде вращения с постоянной угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}_0$  и азимутальной сдвиговой скоростью (shear flow) [41], профиль которой локально линеен:  $\mathbf{U}_0 = -q\Omega_0 x \mathbf{e}_y$ , где  $q \equiv -d \ln \Omega / d \ln R = 3/2$  — безразмерный сдвиговой параметр, определяемый из профиля угловой скорости вращения  $\Omega(R) = \Omega_0(R/R_0)^{-q}$ . Нетрудно заметить, что параметр  $q$  связан с введенным выше числом Россби  $Ro$  соотношением  $q = -2Ro$ .

Уравнения (1)–(4) для возмущенных величин с учетом сказанного выше примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{U}_0 + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} &= \\ = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} + \frac{1}{4\pi\rho_0} ((\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{b}) + & \\ + g\beta\theta\mathbf{e} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, & \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} - (\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{U}_0 + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{b} - & \\ - (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{u} = \eta\nabla^2\mathbf{b}, & \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial \theta}{\partial y} + (\mathbf{u}\nabla)T_0 + (\mathbf{u}\nabla)\theta = \chi\nabla^2\theta, & \\ \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. & \end{aligned} \quad (42)$$

Рассмотрим динамику осесимметричных возмущений. Все возмущенные величины в уравнениях (42) зависят только от двух переменных,  $x$  и  $z$ :

$$\mathbf{u} = (u, v, w), \quad \mathbf{b} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}), \quad \tilde{p} = \tilde{p}(x, z), \quad \theta = \theta(x, z)$$

Уравнения соленидальности для осесимметричных возмущений скорости и магнитного поля примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0. \quad (43)$$

Согласно уравнениям (43), мы можем ввести две скалярные функции: гидродинамическую функцию тока  $\psi$  и магнитную  $\phi$ , для которых выполняются следующие соотношения:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \tilde{u} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \tilde{w} = \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

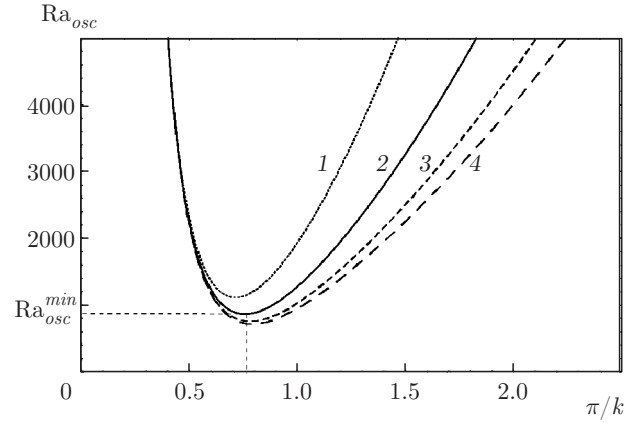


Рис. 8. Кривые нейтральной устойчивости  $(\pi/k, Ra_{osc})$  колебательной конвекции для различных чисел Россби  $Ro$  при постоянных параметрах  $Q = 50, Ta = 100, Pm = 1$  и  $Pr = 1$ : кривая 1 —  $Ro = 2$ ; 2 —  $Ro = 0$ ; 3 —  $Ro = -3/4$ ; 4 —  $Ro = -1$

Запишем уравнения (42) через функции тока  $\psi$  и  $\phi$ , перенося при этом нелинейные члены в правой части уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + 2\Omega_0 \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{B_0}{4\pi\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi - g\beta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nu \nabla^4 \psi &= \\ = \frac{1}{4\pi\rho_0} J(\phi, \nabla^2 \phi) - J(\psi, \nabla^2 \psi), & \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - 2\Omega_0(1 + Ro) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{B_0}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \nu \nabla^2 v &= \\ = \frac{1}{4\pi\rho_0} J(\phi, \tilde{v}) - J(\psi, v), & \quad (45) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - B_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \eta \nabla^2 \phi = -J(\psi, \phi), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - B_0 \frac{\partial v}{\partial z} + 2\Omega_0 Ro \frac{\partial \phi}{\partial z} - \eta \nabla^2 \tilde{v} &= \\ = J(\phi, v) - J(\psi, \tilde{v}), & \quad (47) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - A \frac{\partial \psi}{\partial x} - \chi \nabla^2 \theta = -J(\psi, \theta), \quad (48)$$

где

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial x}$$

— оператор якобиана или скобка Пуассона,  $J(a, b) \equiv \{a, b\}$ . Отметим, что в отсутствие тепловых явлений система уравнений (44)–(48) была получена в работе [42], в которой исследовался механизм насыщения МВН. Поскольку здесь мы учитываем тепловые явления, в уравнениях (44)–(48) удобно перейти к безразмерным переменным

$$(x, z) = h(x^*, z^*), \quad t = \frac{h^2}{\nu} t^*,$$

$$\begin{aligned} \psi &= \chi\psi^*, \quad \phi = hB_0\phi^*, \\ v &= \frac{\chi}{h}v^*, \quad \tilde{v} = B_0\tilde{v}^*, \quad \theta = Ah\theta^*. \end{aligned}$$

Опуская значок «звездочка», перепишем уравнения (44)–(48) в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi + \sqrt{\text{Ta}}\frac{\partial v}{\partial z} - \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q} \frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\phi - \\ - \text{Ra} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nabla^4\psi = \text{Pr Pm}^{-1}\text{Q} J(\phi, \nabla^2\phi) - \\ - \text{Pr}^{-1} J(\psi, \nabla^2\psi), \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro})\frac{\partial \psi}{\partial z} - \text{Pr Pm}^{-1}\text{Q} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \nabla^2 v = \\ = \text{Pr Pm}^{-1}\text{Q} J(\phi, \tilde{v}) - \text{Pr}^{-1} J(\psi, v), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \text{Pr}^{-1}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \text{Pm}^{-1}\nabla^2\phi = -\text{Pr}^{-1} J(\psi, \phi), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \text{Pr}^{-1}\frac{\partial v}{\partial z} + \text{Ro}\sqrt{\text{Ta}}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \text{Pm}^{-1}\nabla^2\tilde{v} = \\ = \text{Pr}^{-1}[J(\phi, v) - J(\psi, \tilde{v})], \end{aligned} \quad (52)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} - \nabla^2\theta = -J(\psi, \theta). \quad (53)$$

Система уравнений (49)–(53) дополняется следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi = \nabla^2\psi = 0, \quad \frac{dv}{dz} = 0, \quad \tilde{v} = 0, \\ \frac{d\phi}{dz} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\ \psi = \nabla^2\psi = 0, \quad \frac{dv}{dz} = 0, \quad \tilde{v} = 0, \\ \frac{d\phi}{dz} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad z = 1, \end{aligned} \quad (54)$$

которую будем решать, используя метод Галеркина.

### 5.1. Разложение Галеркина

Нелинейную систему уравнений (49)–(53) будем решать, используя галеркинское разложение в  $x$ - и  $z$ -направлениях для функций тока  $\psi$ ,  $\phi$ , а также  $y$ -компонент возмущений скорости  $v$ , магнитного поля  $\tilde{v}$  и температуры  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= A_1(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \\ v &= V_1(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \\ \phi(x, z, t) &= B_1(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \\ \tilde{v} &= W_1(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \\ \theta(x, y, t) &= C_1(t) \cos(kx) \sin(\pi z) + \\ &+ C_2(t) \sin(2\pi z), \end{aligned} \quad (55)$$

где  $k = 2\pi h/L$  — безразмерное волновое число,  $L$  — характерная длина слоя в горизонтальном направлении,  $A_1, V_1, B_1, W_1, C_1, C_2$  — амплитуды возмущений. В результате подстановки разложений (55) в уравнения (49)–(53) и проведения интегрирования по всей области  $[0, 1] \times [0, L/h]$  с учетом свойства ортогональности функций,

$$\int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 1/2, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

получим уравнения эволюции для амплитуд возмущений:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = -A_1 - \frac{\pi\sqrt{\text{Ta}}}{a^4} V_1 - \frac{\pi\text{QPr}}{a^2\text{Pm}} B_1 + \frac{k\text{Ra}}{a^4} C_1, \quad (56)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -V_1 + \frac{\pi\sqrt{\text{Ta}}}{a^2}(1 + \text{Ro})A_1 + \frac{\pi\text{QPr}}{a^2\text{Pm}} W_1, \quad (57)$$

$$\text{Pm} \frac{\partial B_1}{\partial t} = -B_1 + \frac{\pi\text{Pm}}{a^2\text{Pr}} A_1, \quad (58)$$

$$\text{Pm} \frac{\partial W_1}{\partial t} = -W_1 - \frac{\pi\text{Pm}}{a^2\text{Pr}} V_1 + \frac{\pi\text{PmRo}\sqrt{\text{Ta}}}{a^2} B_1, \quad (59)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial C_1}{\partial t} = -C_1 + \frac{k}{a^2} A_1 + \frac{\pi k}{a^2} A_1 C_2, \quad (60)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial C_2}{\partial t} = -\frac{4\pi^2}{a^2} C_2 - \frac{\pi k}{2a^2} A_1 C_1. \quad (61)$$

Здесь  $a = \sqrt{k^2 + \pi^2}$  — общее волновое число и  $\tilde{t} = a^2 t$  — редуцированное время. Полученная нами система обыкновенных дифференциальных уравнений (56)–(61) является спектральной моделью низкого порядка, но вполне может качественно воспроизводить конвективные процессы в полной (самосогласованной) нелинейной системе уравнений (49)–(53). Таким образом, динамическая система уравнений (56)–(61) пригодна для описания слабо-нелинейной стадии развития конвекции. Введем для удобства обозначения

$$\text{R} = \frac{k^2\text{Ra}}{a^6}, \quad \text{T} = \frac{\pi^2\sqrt{\text{Ta}}}{a^6}, \quad \text{H} = \frac{\pi^2}{a^4} \frac{\text{QPr}}{\text{Pm}}, \quad \gamma = \frac{4\pi^2}{a^2}$$

и проведем перемасштабирование амплитуд  $A_1, V_1, B_1, W_1, C_1, C_2$  в виде

$$\begin{aligned} X(\tilde{t}) &= \frac{k\pi}{a^2\sqrt{2}} A_1(\tilde{t}), \quad V(\tilde{t}) = \frac{kV_1(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, \\ U(\tilde{t}) &= \frac{kB_1(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, \quad W(\tilde{t}) = \frac{a^2k}{\pi\sqrt{2}} W_1(\tilde{t}), \\ Y(\tilde{t}) &= \frac{\pi C_1(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, \quad Z(\tilde{t}) = -\pi C_2(\tilde{t}). \end{aligned}$$

Тогда уравнения (56)–(61) принимают вид нелинейной динамической системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -X + RY - TV - HU, \\ \dot{V} &= -V + HW + \sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro})X, \\ \dot{U} &= -\text{Pm}^{-1}U + \text{Pr}^{-1}X, \\ \dot{W} &= -\text{Pm}^{-1}W - \text{Pr}^{-1}V + \text{Ro}\sqrt{\text{Ta}}U, \\ \dot{Y} &= \text{Pr}^{-1}(-Y + X - XZ), \\ \dot{Z} &= \text{Pr}^{-1}(-\gamma Z + XY), \end{aligned} \tag{62}$$

где точка сверху обозначает дифференцирование по времени  $\tilde{t}$ . Последние два нелинейных уравнения в системе (62) имеют сходство с аналогичными уравнениями в системе Лоренца [43, 44]. Поэтому полученную нами нелинейную систему уравнений (62) отнесем к уравнениям типа Лоренца для шестимерного фазового пространства.

### 5.2. Анализ устойчивости

В этом разделе мы исследуем устойчивость конвективных течений в неоднородно вращающихся слоях электропроводящей жидкости под влиянием однородного магнитного поля. Качественный и численный анализы динамической системы уравнений (62) позволяет определить тип неподвижных точек и условия возникновения хаотического режима. Нетрудно заметить, что система уравнений (62) диссипативная, поскольку дивергенция векторного поля отрицательна:

$$\begin{aligned} \text{div } \Phi &= \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial V} + \frac{\partial \dot{U}}{\partial U} + \frac{\partial \dot{W}}{\partial W} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = \\ &= -2(1 + \text{Pm}^{-1}) - \text{Pr}^{-1}(1 + \gamma) < 0. \end{aligned}$$

Шестимерный фазовый объем экспоненциально уменьшается во времени при движении вдоль траекторий фазового пространства

$$\Phi(\tilde{t}) = \Phi(0) \exp \{ [-2(1 + \text{Pm}^{-1}) - \text{Pr}^{-1}(1 + \gamma)] \tilde{t} \}.$$

Таким образом, вследствие диссипации имеет место сжатие фазового объема. Это означает, что в фазовом пространстве диссипативных систем появляются притягивающие множества – аттракторы. Кроме того, система уравнений (62) инвариантна относительно замены

$$(X, V, U, W, Y, Z) \rightarrow (-X, -V, -U, -W, -Y, Z).$$

Приравнивая левые части уравнений (62) нулю, получим три состояния равновесия:

$$\begin{aligned} O_1(X_1, V_1, U_1, W_1, Y_1, Z_1), \\ O_2(X_2, V_2, U_2, W_2, Y_2, Z_2), \\ O_3(X_3, V_3, U_3, W_3, Y_3, Z_3), \end{aligned} \tag{63}$$

где координаты неподвижных точек  $X_{1,2,3}$ ,  $V_{1,2,3}$ ,  $U_{1,2,3}$ ,  $W_{1,2,3}$ ,  $Y_{1,2,3}$ ,  $Z_{1,2,3}$  соответственно равны

$$(X_1, V_1, U_1, W_1, Y_1, Z_1) = (0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(X_2, X_3) = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\gamma r(R - r)},$$

$$(V_2, V_3) = \pm \frac{\sqrt{\text{Ta}}(\text{HRoPm}^2 + \text{Pr}(1 + \text{Ro}))}{r(\text{HPm} + \text{Pr})} \sqrt{\gamma r(R - r)},$$

$$(U_2, U_3) = \pm \frac{\text{Pm}}{r\text{Pr}} \sqrt{\gamma r(R - r)},$$

$$(W_2, W_3) = \pm \frac{\sqrt{\text{TaPm}}(\text{RoPm} - \text{Ro} - 1)}{r(\text{HPm} + \text{Pr})} \sqrt{\gamma r(R - r)},$$

$$(Y_2, Y_3) = \pm \frac{1}{R} \sqrt{\gamma r(R - r)}, \quad (Z_2, Z_3) = 1 - \frac{r}{R},$$

здесь

$$r = 1 + \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}}\text{H} + \text{T}\sqrt{\text{Ta}} \frac{1 + \text{Ro} \left( 1 + \frac{\text{Pm}^2}{\text{Pr}}\text{H} \right)}{1 + \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}}\text{H}}.$$

Для выяснения типа неподвижных точек линейзуем стандартным методом систему уравнений (62) в малой окрестности неподвижных точек. В результате линейризованные уравнения запишем в виде матрицы Якоби  $\|J_{ij}\|$  с элементами

$$\begin{aligned} J_{11} &= -1, \quad J_{12} = -\text{T}, \quad J_{13} = -\text{H}, \quad J_{14} = 0, \\ J_{15} &= \text{R}, \quad J_{16} = 0, \quad J_{21} = \sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro}), \\ J_{22} &= -1, \quad J_{23} = 0, \quad J_{24} = \text{H}, \quad J_{25} = 0, \\ J_{26} &= 0, \quad J_{31} = \text{Pr}^{-1}, \quad J_{32} = 0, \\ J_{33} &= -\text{Pm}^{-1}, \quad J_{34} = 0, \quad J_{35} = 0, \quad J_{36} = 0, \\ J_{41} &= 0, \quad J_{42} = -\text{Pr}^{-1}, \quad J_{43} = \text{Ro}\sqrt{\text{Ta}}, \\ J_{44} &= -\text{Pm}^{-1}, \quad J_{45} = 0, \quad J_{46} = 0, \\ J_{51} &= \text{Pr}^{-1}(1 - Z_0), \quad J_{52} = 0, \quad J_{53} = 0, \\ J_{54} &= 0, \quad J_{55} = -\text{Pr}^{-1}, \quad J_{56} = -\text{Pr}^{-1}X_0, \\ J_{61} &= \text{Pr}^{-1}Y_0, \quad J_{62} = 0, \quad J_{63} = 0, \quad J_{64} = 0, \\ J_{65} &= \text{Pr}^{-1}X_0, \quad J_{66} = -\gamma\text{Pr}^{-1}. \end{aligned} \tag{64}$$



Собственные значения матрицы Якоби  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) определяются из решений характеристических уравнений вида

$$\begin{aligned} &M_0 [(\lambda + 1)M_1 + \text{HPr}^{-1}M_2 + \\ &+ \text{RPr}^{-1}(\lambda + \text{Pm}^{-1})M_3] + \text{T}\sqrt{\text{Ta}} \times \\ &\times [(1 + \text{Ro})(\lambda + \text{Pm}^{-1})^2 + \text{H}\text{RoPr}^{-1}] M_2 = 0, \\ &M_0 = (\lambda + 1)(\lambda + \text{Pm}^{-1}) + \text{HPr}^{-1}, \\ &M_1 = (\lambda + \text{Pm}^{-1})(\lambda + \text{Pr}^{-1})(\lambda + \gamma\text{Pr}^{-1}) + \\ &+ X_0^2\text{Pr}^{-2}, \\ &M_2 = (\lambda + \text{Pr}^{-1})(\lambda + \gamma\text{Pr}^{-1}) + X_0^2\text{Pr}^{-2}, \\ &M_3 = X_0Y_0\text{Pr}^{-1} - (\lambda + \gamma\text{Pr}^{-1})(1 - Z_0), \end{aligned} \tag{65}$$

где  $X_0 = (X_1, X_2, X_3)$ ,  $Y_0 = (Y_1, Y_2, Y_3)$ ,  $Z_0 = (Z_1, Z_2, Z_3)$  — координаты неподвижных точек. Подставляя в уравнения (65) значения трех состояний равновесия (63), получим характеристические уравнения для собственных значений  $\lambda_i$  (показателей Ляпунова) в каждом из этих состояний, причем для точек  $O_2(X_2, V_2, U_2, W_2, Y_2, Z_2)$  и  $O_3(X_3, V_3, U_3, W_3, Y_3, Z_3)$  характеристические уравнения совпадают. Все характеристические уравнения можно записать в виде полинома шестого порядка

$$P(\lambda) \equiv a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0,$$

где  $a_0 = 1 > 0$ . Явный вид вещественных коэффициентов  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  мы не приводим в силу очень громоздкого вида. Однако из теории асимптотической устойчивости [45] известен критерий Раусса–Гурвица, согласно которому, для того чтобы многочлен  $P(\lambda)$  имел все корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) все коэффициенты многочлена  $P(\lambda)$  были положительны:  $a_n > 0$ ,  $n = 1-6$ ;

2) для определителей Гурвица имели место неравенства  $\Delta_{n-1} > 0$ ,  $\Delta_{n-3} > 0, \dots$ , где  $\Delta_m$  обозначает определитель Гурвица  $m$ -порядка:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_m \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что при выполнении критерия Раусса–Гурвица неподвижные точки устойчивы и положение их равновесия классифицируется как устойчивый узел.

Проведем численный анализ уравнения (65) для неподвижной точки  $O_1$  в случае рэлеевского профиля вращения ( $\text{Ro} = -1$ ). Выбирая значения параметров  $\text{Pm} = 1$ ,  $\text{Pr} = 9$ ,  $\text{H} = 5$ ,  $\text{T} = 1$ ,  $\text{Ta} = 2$  и  $\gamma = 1$ , вычислим собственные значения  $\lambda_i$  в зависимости от параметра Рэлея  $R$ . Эти результаты приведены в табл. 1, а для случая кеплеровского профиля вращения ( $\text{Ro} = -3/4$ ) — в табл. 2. Видно, что для отрицательных значений  $\text{Re}\lambda < 0$  траектории входят в точку  $O_1$ , т. е. соответствуют устойчивым собственным направлениям, а при положительных  $\text{Re}\lambda > 0$  траектории выходят из точки  $O_1$  и, следовательно, соответствуют неустойчивым собственным направлениям. Стационарному состоянию конвекции ( $\lambda = 0$ ) соответствует критическое значение параметра

$$R_{1cr} = 1 + \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}}\text{H} + \text{T}\sqrt{\text{Ta}} \frac{1 + \text{Ro} \left(1 + \frac{\text{Pm}^2}{\text{Pr}}\text{H}\right)}{1 + \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}}\text{H}}, \tag{66}$$

или критическое значение числа Рэлея

$$\text{Ra}_{cr} = \frac{a^6}{k^2} + a^2Q + \frac{\pi^2\text{Ta}}{k^2} \frac{a^4 + \text{Ro}(a^4 + \pi^2Q\text{Pm})}{a^4 + \pi^2Q},$$

совпадающее с формулой (35) и выражением для  $r$ . Для указанных выше численных значений параметров критическое число  $R_{1cr} \approx 1.05$ . В случае кеплеровского профиля вращения ( $\text{Ro} = -3/4$ ) критическое число Рэлея несколько выше,  $R_{1cr} \approx 1.4$ . Если параметр Рэлея

$$R = R_{1cr} = 1 + \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}}\text{H} + \text{T}\sqrt{\text{Ta}} \frac{1 + \text{Ro} \left(1 + \frac{\text{Pm}^2}{\text{Pr}}\text{H}\right)}{1 + \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}}\text{H}},$$

то в системе существует одна неподвижная точка  $O_1(X_1, U_1, Y_1, Z_1)$ . Проводя аналогичные рассуждения, вычислим собственные значения  $\lambda_i$  в зависимости от параметра Рэлея  $R$  для второго (третьего) состояния равновесия  $O_{2,3}$ . Результаты этих вычислений для рэлеевского профиля вращения  $\text{Ro} = -1$  показаны в табл. 3, а для случая кеплеровского профиля вращения ( $\text{Ro} = -3/4$ ) — в табл. 4. Здесь отрицательным собственным значениям  $\text{Re}\lambda < 0$  соответствуют устойчивые собственные направления, а положительным  $\text{Re}\lambda > 0$  — неустойчивые. Стационарному состоянию конвекции ( $\lambda = 0$ ) соответствует критическое значение параметра  $R_{2cr}$ , которое оказывается равным первому критическому значению:  $R_{2cr} = R_{1cr}$ .

**Таблица 1.** Собственные значения  $\lambda_{1,2,3,4,5,6}$  (показатели Ляпунова) для неподвижной точки  $O_1$ , вычисленные для разных значений параметра R при  $Pm = 1$ ,  $Pr = 9$ ,  $H = 5$ ,  $T = 1$ ,  $Ta = 2$ ,  $\gamma = 1$  и для рэлеевского профиля вращения  $Ro = -1$

R	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
1	-0.1111	-1.0106 + i1.1861	-0.0045	-0.4906	-1.5944	-1.0106 - i1.1861
5	-0.1111	0.2771	-1.0463 + i1.1316	-0.6180	-1.6775	-1.0463 - i1.1316
10.3	0.5483	-1.0776 + i1.0686	-0.1111	-0.7024	-1.8017	-1.0776 - i1.0686
10.5	0.5574	-1.0784 + i1.0664	-0.1111	-0.7048	-1.8067	-1.0784 - i1.0664
22.878	1.0323	-1.1012 + i0.9576	-0.1111	-0.8023	-2.1385	-1.1012 - i0.9576
22.998	1.0362	-1.1012 + i0.9568	-0.1111	-0.8030	-2.1418	-1.1012 - i0.9568
45	-0.1111	1.6572	-1.0848 + i0.8625	-0.8766	-2.7220	-1.0848 - i0.8625

**Таблица 2.** Собственные значения  $\lambda_{1,2,3,4,5,6}$  (показатели Ляпунова) для неподвижной точки  $O_1$ , вычисленные для разных значений параметра R при  $Pm = 1$ ,  $Pr = 9$ ,  $H = 5$ ,  $T = 1$ ,  $Ta = 2$ ,  $\gamma = 1$  и для кеплеровского профиля вращения  $Ro = -3/4$

R	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
5	-0.1111	0.2246	-1.0531 + i1.1978	-0.7212	-1.5082	-1.0531 - i1.1978
14.6	0.6708	-1.1108 + i1.0685	-0.1111	-0.8242	-1.7360	-1.1108 - i1.0685
14.7	0.6748	-1.1111 + i1.0674	-0.1111	-0.8249	-1.7386	-1.1111 - i1.0674
28.2369	1.1449	-1.1201 + i0.9441	-0.1111	-0.8863	-2.1294	-1.1201 - i0.9441
30.8455	1.2234	-1.1173 + i0.9279	-0.1111	-0.8936	-2.2061	-1.1173 - i0.9279
30.8457	1.2234	-1.1173 + i0.9279	-0.1111	-0.8936	-2.2061	-1.1173 - i0.9279
105	-0.1111	2.7923	-1.0498 + i0.7943	-0.9634	-3.8404	-1.0498 - i0.7943

**Таблица 3.** Собственные значения  $\lambda_{1,2,3,4,5,6}$  (показатели Ляпунова) для неподвижных точек  $O_{2,3}$ , вычисленные для разных значений параметра R при  $Pm = 1$ ,  $Pr = 9$ ,  $H = 5$ ,  $T = 1$ ,  $Ta = 2$ ,  $\gamma = 1$  и для рэлеевского профиля вращения  $Ro = -1$

R	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
1	0.0084	-1.0111 + i1.1855	-0.1206	-0.4923	-1.5952	-1.0111 - i1.1855
5	0.2966	-1.0482 + i1.1287	-0.1173	-0.6223	-1.6826	-1.0482 - i1.1287
10.3	0.5760	-1.0799 + i1.0634	-0.1169	-0.7076	-1.8137	-1.0799 - i1.0634
10.5	0.5854	-1.0808 + i1.0612	-0.1168	-0.7100	-1.8190	-1.0808 - i1.0612
22.878	1.0740	-1.1016 + i0.9504	-0.1166	-0.8075	-2.1687	-1.1016 - i0.9504
22.998	1.0780	-1.1016 + i0.9496	-0.1166	-0.8081	-2.1722	-1.1016 - i0.9496
45	1.7156	-1.0830 + i0.8571	-0.1165	-0.8807	-2.7744	-1.0830 - i0.8571

**Таблица 4.** Собственные значения  $\lambda_{1,2,3,4,5,6}$  (показатели Ляпунова) для неподвижных точек  $O_{2,3}$ , вычисленные для разных значений параметра  $R$  при условии:  $Pm = 1, Pr = 9, H = 5, T = 1, Ta = 2, \gamma = 1$  и для кеплеровского профиля вращения  $Ro = -3/4$

$R$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
5	$-0.0366 + i0.2328$	$-1.0182 + i1.2451$	$-0.6631$
14.6	$0.557 + i0.2743$	$-1.0437 + i1.1942$	$-0.7346$
14.7	$0.0565 + i0.2745$	$-1.0439 + i1.1937$	$-0.7352$
28.2369	$0.1626 + i0.2849$	$-1.07167 + i1.1298$	$-0.7941$
30.8455	$0.1811 + i0.2829$	$-1.0758 + i1.1184$	$-0.8026$
30.8457	$0.1811 + i0.2829$	$-1.0758 + i1.1184$	$-0.8026$
105	0.2571	0.9028	$-1.0952 + i0.9125$
$R$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
5	$-1.4493$	$-1.0182 - i1.2451$	$-0.0366 - i0.2328$
14.6	$-1.5114$	$-1.0437 - i1.1942$	$0.0557 - i0.2743$
14.7	$-1.5121$	$-1.0439 - i1.1937$	$0.0565 - i0.2745$
28.2369	$-1.6100$	$-1.0716 - i1.1298$	$0.1626 - i0.2849$
30.8455	$-1.6301$	$-1.0758 - i1.1184$	$0.1811 - i0.2829$
30.8457	$-1.6301$	$-1.0758 - i1.1184$	$0.1811 - i0.2829$
105	$-0.9106$	$-2.2810$	$-1.0952 - i0.9125$

### 6. ОБСУЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В этом разделе мы представим результаты численных исследований нелинейной системы уравнений (62) с начальными условиями  $X(0) = V(0) = U(0) = W(0) = Y(0) = Z(0) = 1$  во временной области  $0 \leq \tilde{t} \leq 1000$  для рэлеевского ( $Ro = -1$ ) и кеплеровского ( $Ro = -3/4$ ) профилей вращения. При числах  $R > R_{1cr}$  происходит потеря устойчивости и в системе возникают конвективные движения. Как видно на рис. 9а, при  $R = 1$  конвекция не возникает, а начальное возмущенное магнитное поле затухает (рис. 9б). При параметре  $R = 5$  в фазовой плоскости  $UY$  вокруг неподвижной точки  $O_2$  наблюдаем возникновение спиральных траекторий (рис. 9в-г, рис. 10а,б), которые будут накручиваться по мере увеличения параметра  $R$ . Это заметно уже при значении  $R = 10.3$  (рис. 9д) для числа Россби  $Ro = -1$  и при  $R = 14.6$  (рис. 10в) для числа Россби  $Ro = -3/4$ . При этом величина возмущенного магнитного поля совершает затухающие по амплитуде колебания

(рис. 9е, рис. 10г). В этом случае собственные значения  $\lambda_i$  — комплексные величины с отрицательной действительной частью (см. табл. 3 и табл. 4), и следовательно, неподвижную точку классифицируем как устойчивый фокус. Незначительное увеличение параметра Рэлея с  $R = 10.3$  до  $R = 10.5$  (рис. 11а) и аналогично с  $R = 14.6$  до  $R = 14.7$  (рис. 10в,г и рис. 10д,е) приводит к смене знака (направления) осциллирующего возмущенного магнитного поля, которое также затухает (рис. 10е, 11б). Здесь фазовые траектории накручиваются по спирали вокруг неподвижной точки  $O_3$ , расположенной в отрицательном секторе плоскости  $UY$ , и ее также классифицируем как устойчивый фокус.

На рис. 11в,г при параметрах  $R = 22.878$  и  $Ro = -1$  показано возникновение гомоклинической траектории в фазовом пространстве, которая содержит петлю состояния равновесия типа седло-фокус (см. табл. 1 и 3). Аналогичную картину наблюдаем при параметрах  $R = 28.2369455$  и  $Ro = -3/4$  (рис. 12а,б). При  $R = 22.998$  ( $Ro = -1$ ) наблюдается

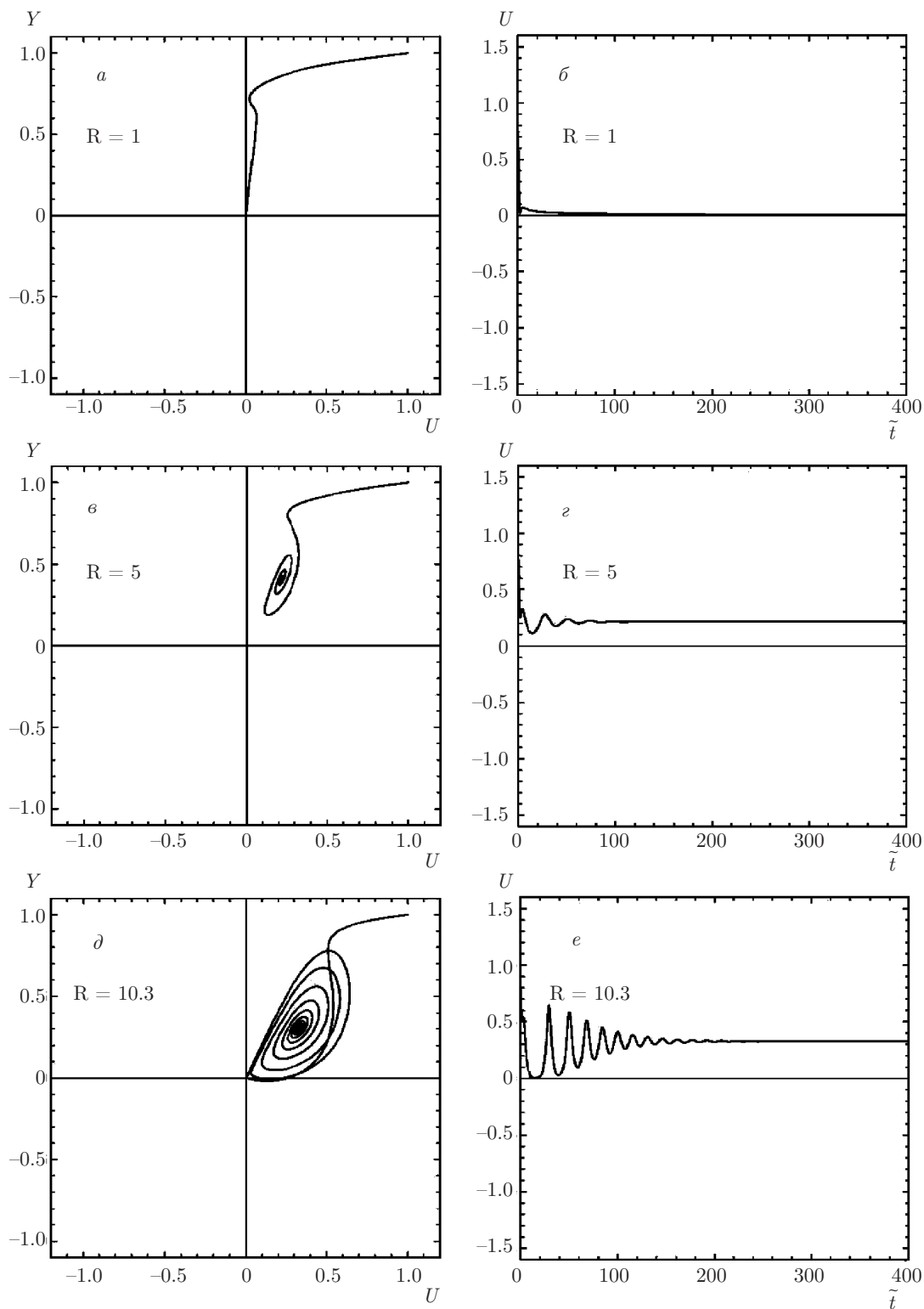


Рис. 9. а, в, г) Проекция фазовых траекторий в плоскости  $UY$  при изменении параметра  $R$  для  $\gamma = 1$ ,  $Pm = 1$ ,  $Pr = 9$ ,  $H = 5$ ,  $T = 1$ ,  $Ta = 2$ ,  $Ro = -1$ . б, з, е) Временные зависимости вариаций амплитуды магнитной компоненты  $U(t)$

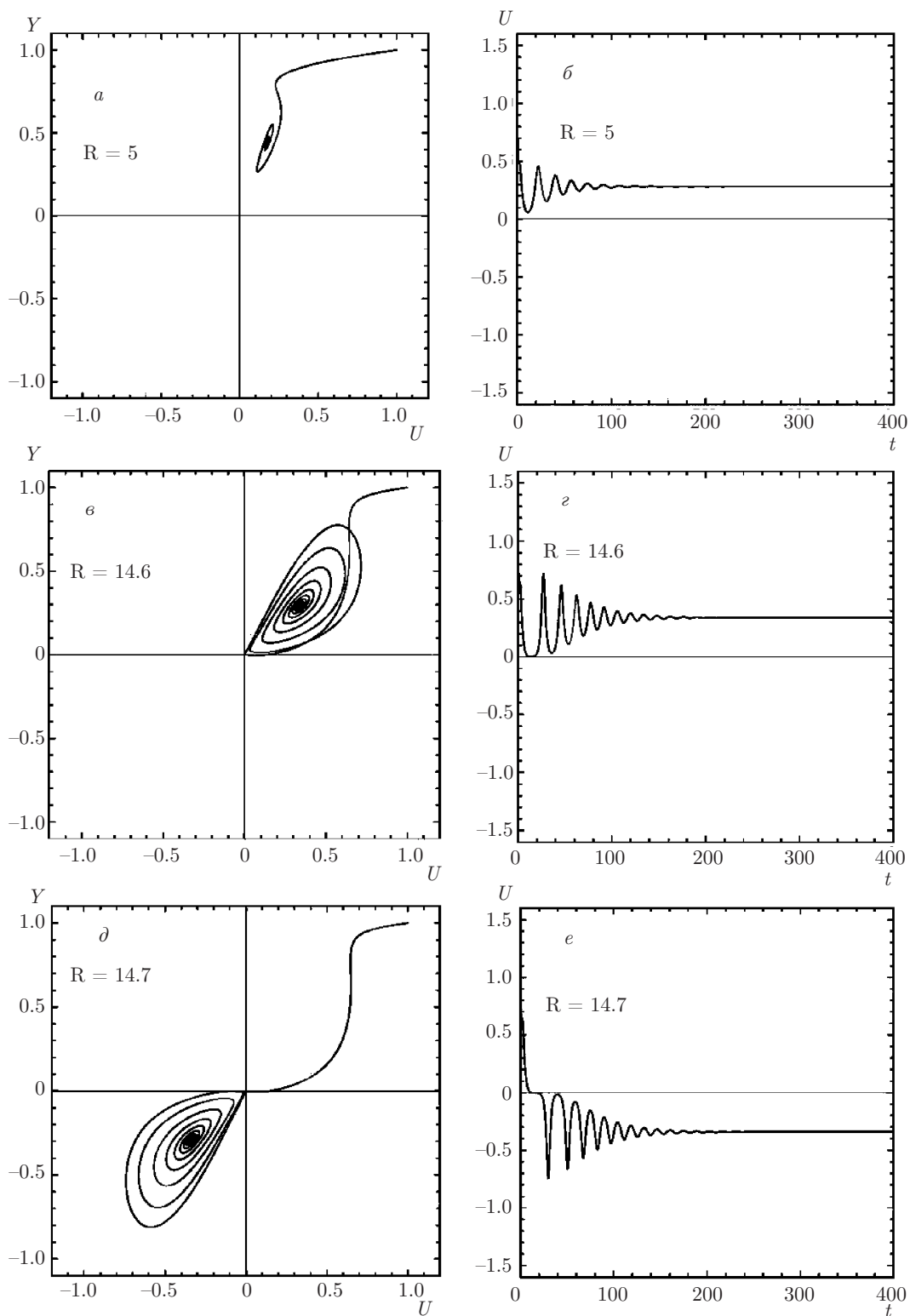


Рис. 10. То же, что на рис. 9, но для  $Ro = -3/4$

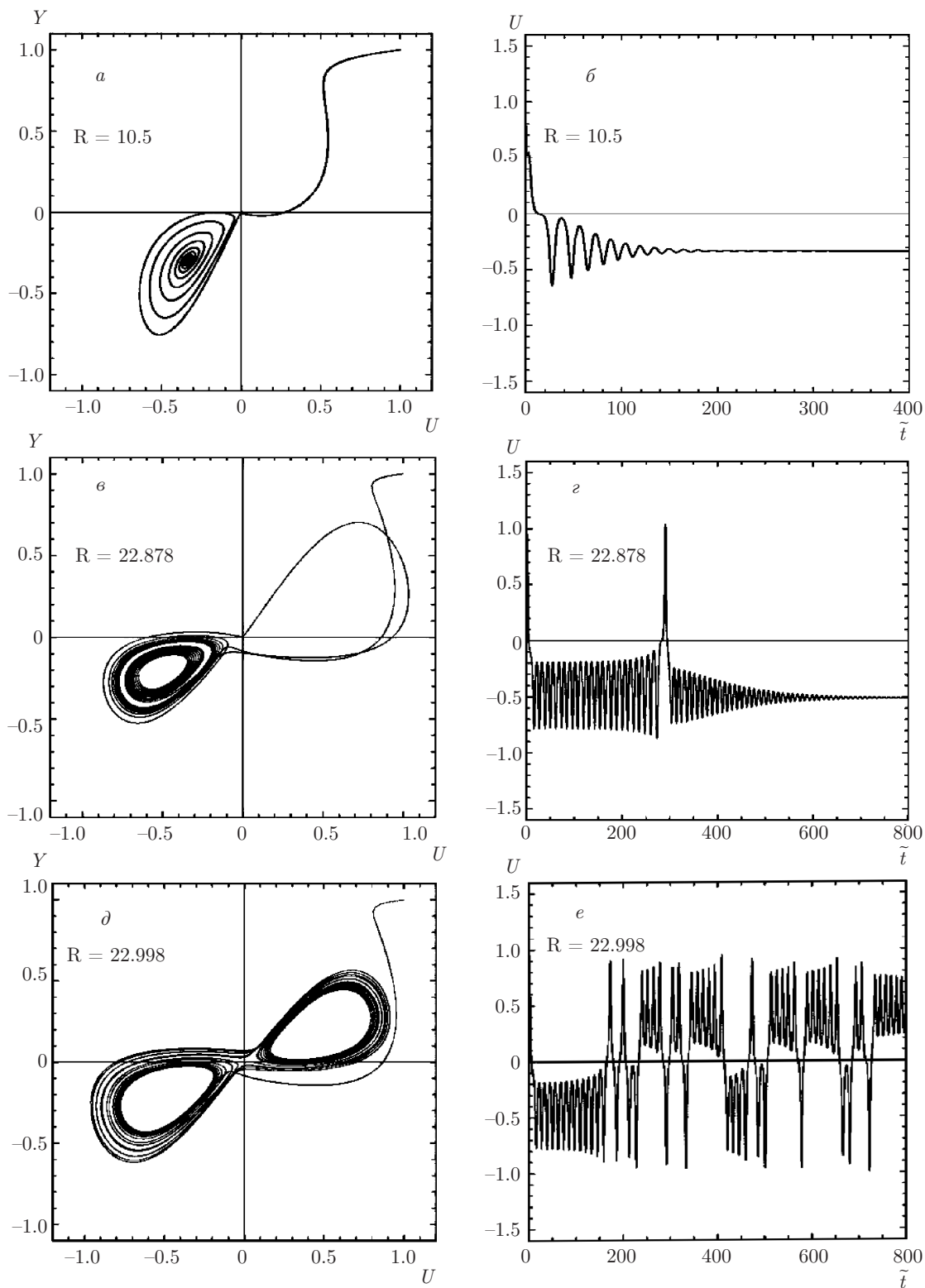


Рис. 11. То же, что на рис. 9, но для  $Ro = -1$



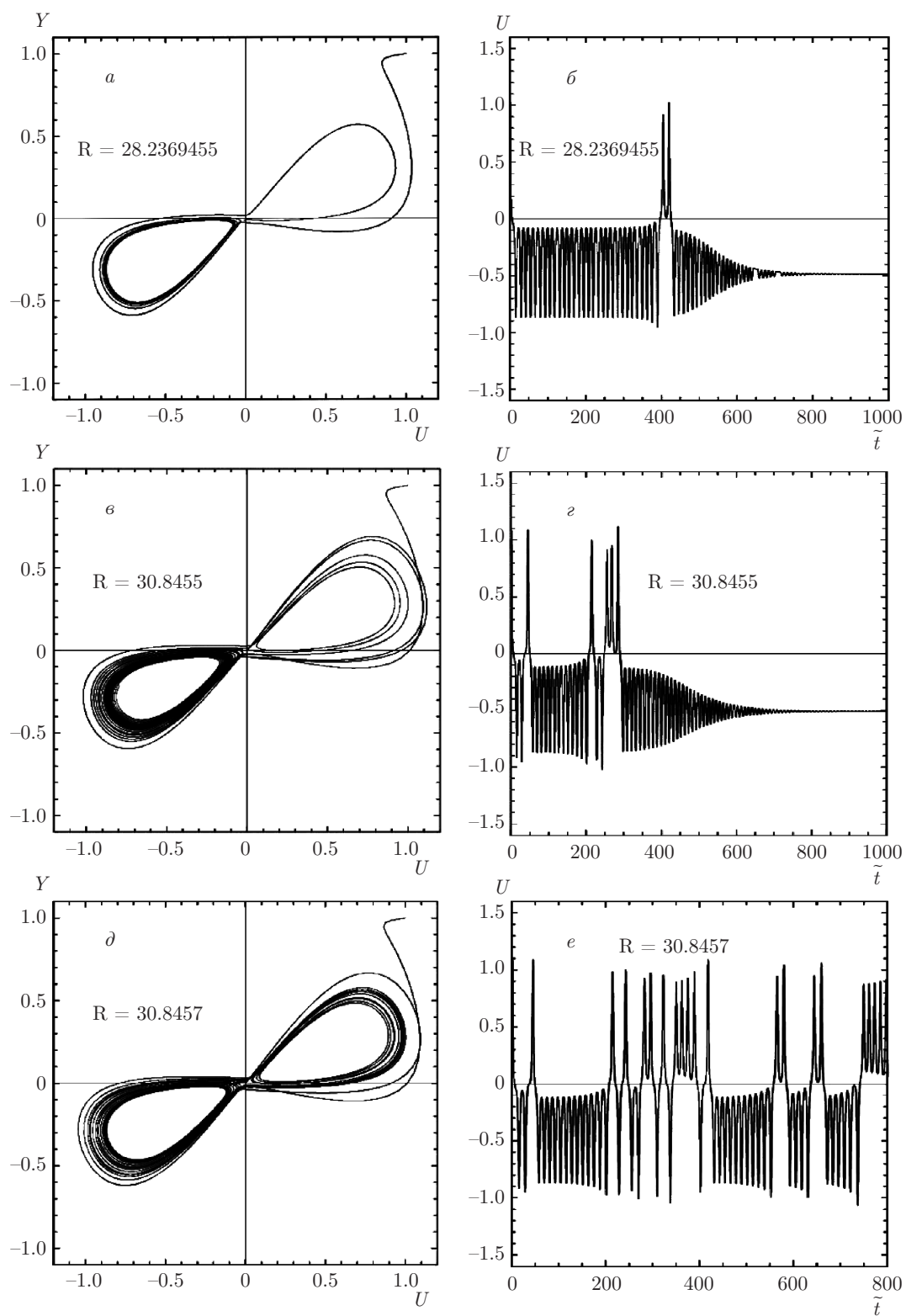


Рис. 12. То же, что на рис. 10, но для других значений параметра  $R$ .

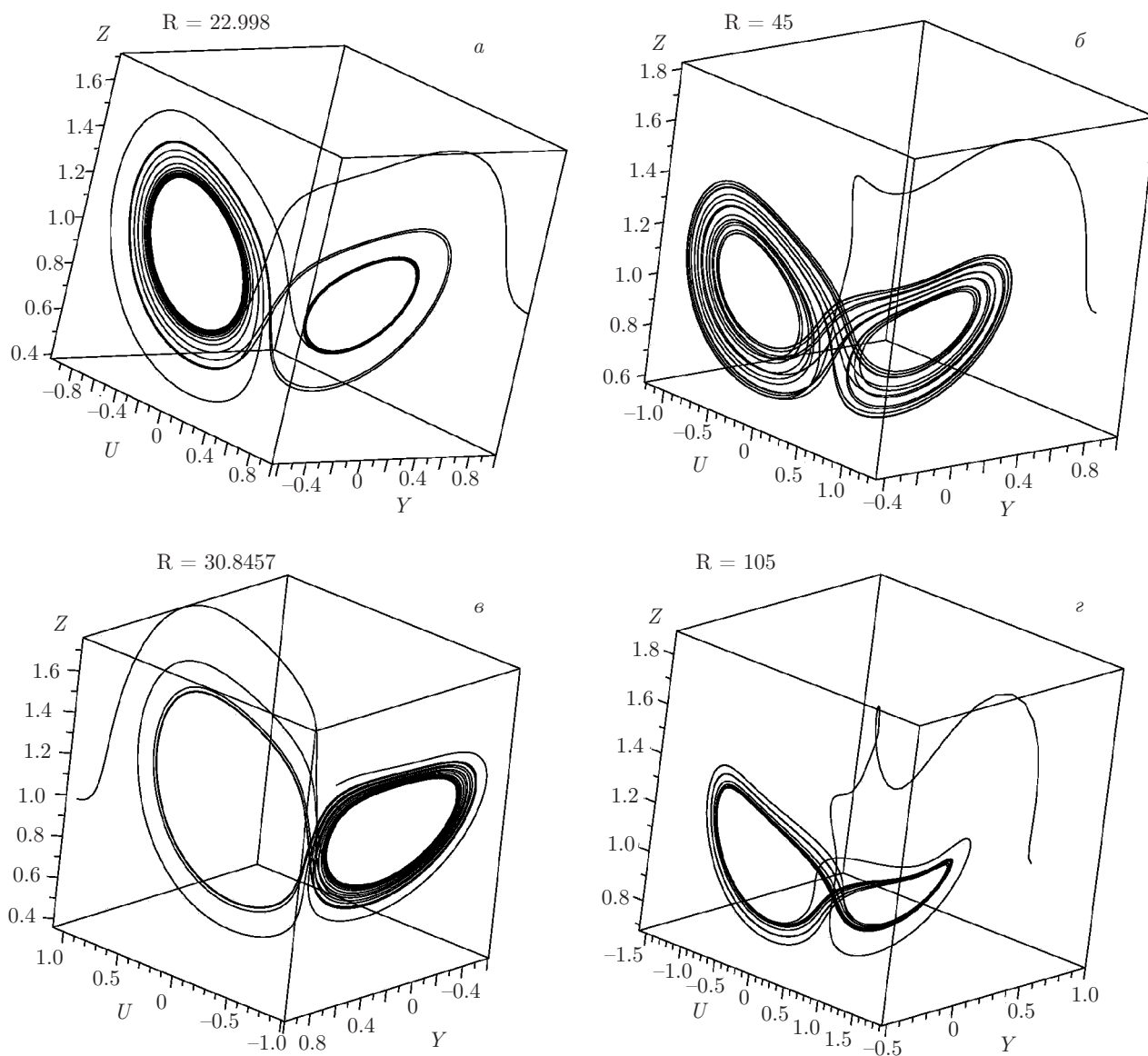


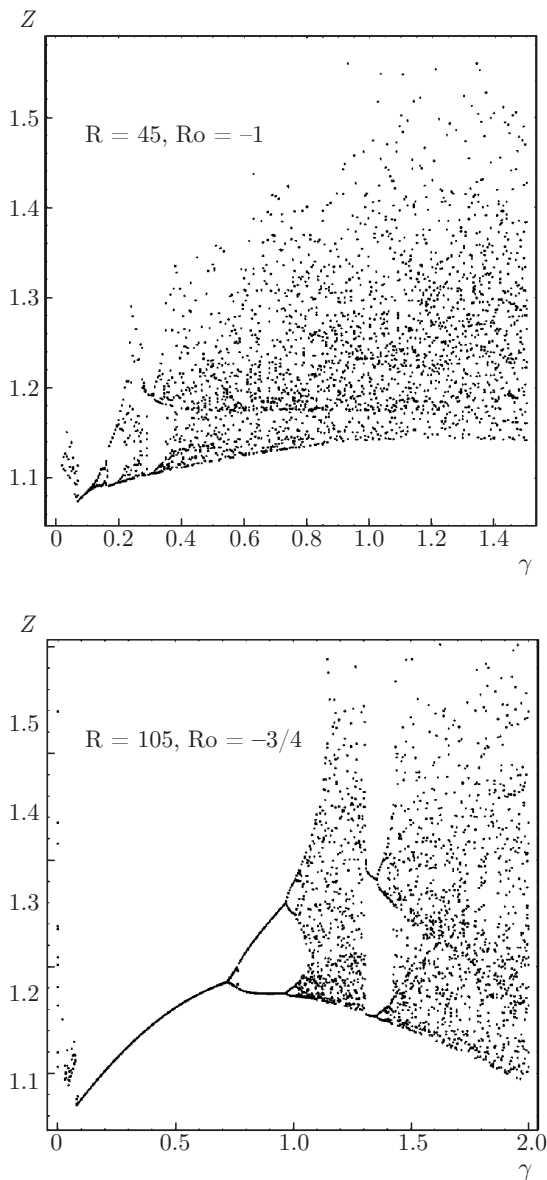
Рис. 13. Трехмерные проекции траекторий хаотических движений при увеличении параметра  $R$ , соответствующие рэлеевскому ( $a, б$ ;  $Ro = -1$ ) и кеплеровскому ( $в, г$ ;  $Ro = -3/4$ ) профилям вращения

переход от гомоклинической траектории к хаотическому движению (см. рис. 11д, 13а). На рис. 12в,г показан метастабильный хаос, в котором хаотическая фаза длится примерно до  $\tilde{t} \approx 300$ , а затем происходит переход к затухающим колебаниям. Для кеплеровского профиля вращения ( $Ro = -3/4$ ) переход к хаотическому движению наблюдается при параметрах Рэлея  $R = 30.8457$  (см. рис. 12д, 13в). На рис. 11е и 12е показаны нерегулярные колебания с аperiodическим изменением амплитуды и направления (инверсией) возмущенного магнитного поля.

Дальнейшее увеличение параметра  $R$  способствует развитию хаотического поведения

конвекции, в которой образуются хаотические фрактальные структуры — странные аттракторы (см. рис. 13). Заметим, что рассмотренные выше режимы конвекции возникают и при больших значениях  $H$  и  $T$ , но и, соответственно, параметр  $R$  также должен вырасти.

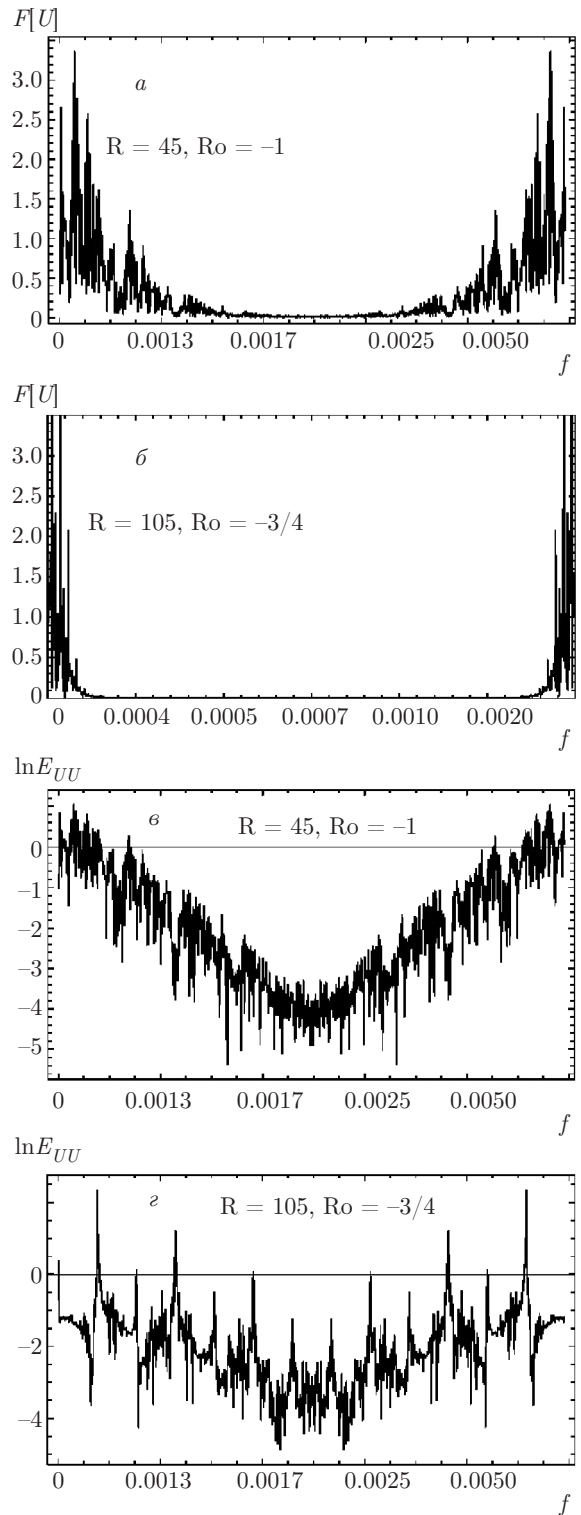
На рис. 14 показаны бифуркационные диаграммы, из которых видно возникновение хаотического режима через ряд бифуркаций удвоения периода. Результаты приведены для  $Z$ -амплитуд в зависимости от величины  $\gamma$ . Из сравнения бифуркационных диаграмм видно, что хаотический режим в системе наступает при меньших значениях параметра Рэлея



**Рис. 14.** Бифуркационные диаграммы для  $Z$ -амплитуд при изменениях  $\gamma$ . Вычисления проводились при параметрах  $Pm = 1, Pr = 9, H = 5, T = 1, Ta = 2$  для различных профилей вращения

( $R = 45$ ) для случая рэлеевского профиля вращения ( $Ro = -1$ ). Обе бифуркационные диаграммы показывают, что с ростом параметра  $\gamma$  возникает большое количество сложных циклов, приводящих в итоге к хаотическому (турбулентному) состоянию в системе.

С помощью спектрального анализа системы уравнений (62) численным методом, мы получили сложное аperiodическое поведение возмущений магнитного поля с шумоподобным спектром частот. На рис. 15*а,б* показаны зависимости фурье-компо-



**Рис. 15.** Фурье-спектры возмущений магнитного поля  $U(t)$  и фурье-спектры энергии  $E_{UU}$  возмущенного магнитного поля в логарифмическом масштабе при параметрах  $\gamma = 1, Pm = 1, Pr = 9, H = 5, T = 1, Ta = 2$  для рэлеевского (*а, в*) и кеплеровского (*б, г*) профилей вращения

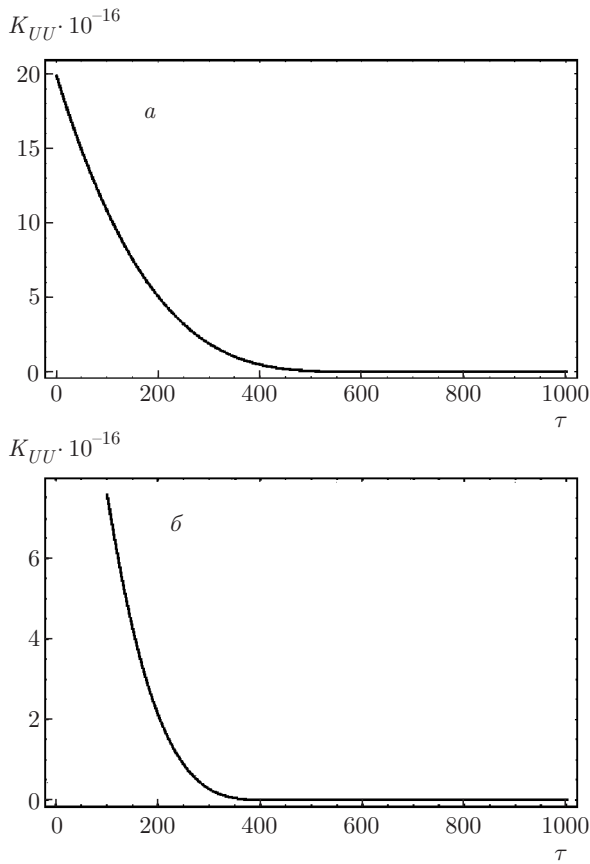


Рис. 16. Зависимости автокорреляционной функции  $K_{UU}$  от времени  $\tau$  для  $R = 45$  при параметрах  $\gamma = 1$ ,  $Pm = 1$ ,  $Pr = 9$ ,  $H = 5$ ,  $T = 1$ ,  $Ta = 2$ ,  $Ro = -1$  (а),  $-3/4$  (б)

нент возмущений магнитного поля  $F[U]$  от частоты  $f$  для чисел Рэлея  $R = 45, 105$  и чисел Россби  $Ro = -1, -3/4$ . Видно, что спектр не убывает с увеличением частоты, а, наоборот, возникает после некоторой зоны провала.

Следовательно, полученное решение при указанных выше параметрах действительно хаотично. Большие всплески фурье-спектра энергии возмущенного магнитного поля  $E_{uu}$  наблюдаются при кеплеровском профиле вращения ( $Ro = -3/4$ ) и параметре Рэлея  $R = 105$  по сравнению с рэлеевским профилем ( $Ro = -1$ ) при  $R = 45$  (см. рис. 15б,г).

Хаотическое поведение конвекции при разных профилях вращения с числами Россби  $Ro = -1$  и  $Ro = -3/4$  подтверждается результатами численного вычисления автокорреляционных функций  $K_{UU}(\tau)$  для возмущений магнитного поля, показанных на рис. 16. Хаотическому движению соответствуют участки траекторий с экспоненциальным спадом функции  $K_{UU}(\tau)$ . Очевидно, что участок экспоненциального спада в логарифмическом

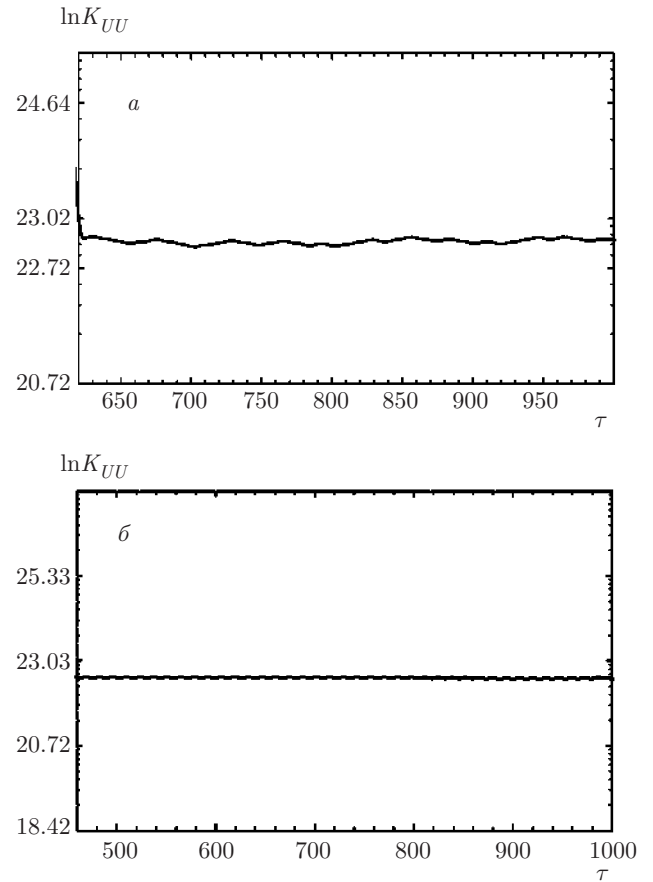


Рис. 17. Прямолинейные зависимости автокорреляционной функции  $K_{UU}$  в логарифмических масштабах от интервала времени  $\tau$  для сильнохаотического движения:  $R = 45$ ,  $Ro = -1$  (а),  $-3/4$  (б)

масштабе автокорреляционной функции  $K_{UU}(\tau)$  аппроксимируется прямыми линиями (рис. 17).

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалась устойчивость неоднородно вращающейся электропроводящей жидкости в аксиальном магнитном поле при наличии постоянного градиента температуры. В линейном приближении мы получили дисперсионное уравнение, из которого в отсутствие градиента температуры ( $Ra = 0$ ) следует известный критерий возникновения МВН [25]. С учетом градиента температуры, т. е. конвективных течений, мы рассмотрели стационарный и колебательный режимы конвекции. Проведенный анализ этих режимов конвекции в зависимости от профиля неоднородного вращения (числа Россби  $Ro$ ) показал, что отрицательные значения  $Ro < 0$  оказывают дестабилизирующий эффект.

В этом случае критическое число Рэлея  $Ra_{min}$  становится меньше, чем в случае однородного вращения  $Ro = 0$  или вращения с положительными числами  $Ro > 0$  (см. рис. 4). Кроме того, мы исследовали хаотическое поведение трехмерной магнитоконвекции в неоднородно вращающихся слоях электропроводящей жидкости на основе уравнений нелинейной динамики шестимерного фазового пространства. Эти уравнения мы получили с помощью галлеркинской аппроксимации минимального порядка. Аналитическим и численным способами проведен качественный анализ нелинейной системы динамических уравнений, в результате которого показано существование сложной хаотической структуры — странного аттрактора. Таким образом, был найден режим конвекции, при котором возникают хаотические изменения направления (инверсии) и амплитуды возмущенного магнитного поля с учетом неоднородного вращения среды. Развита в настоящей работе теория может применяться в качестве сценария возникновения турбулентности в горячих аккреционных дисках.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Буссе, *Магнитная гидродинамика земного динамо. Вихри и волны*, Мир, Москва (1984).
2. P. H. Roberts and G. A. Glatzmaier, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **94**, 47 (2001).
3. T. Rikitake, *Cambridge Phil. Soc.* **54**, 89 (1958).
4. Б. Я. Шмерлин, М. В. Калашник, *УФН* **183**, 497 (2013).
5. М. Штеенбек, Ф. Краузе, *Магнитная гидродинамика* **3**, 19 (1967).
6. С. С. Моисеев, П. Б. Руткевич, А. В. Тур, В. В. Яновский, *ЖЭТФ* **94**(2), 144 (1988).
7. A. V. Tur and V. V. Yanovsky, *Open J. Fluid Dyn.* **3**, 64 (2013).
8. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, London (1961).
9. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
10. Д. А. Шальбков, *УФН* **179**, 971 (2009).
11. S. Chandrasekhar, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **42**, 273 (1956).
12. Е. П. Велихов, *ЖЭТФ* **36**, 1398 (1959).
13. А. Б. Михайловский, Дж. Г. Ломинадзе, А. П. Чуриков, В. Д. Пустовитов, *Физика плазмы* **35**, 307 (2009).
14. А. И. Карчевский, Е. П. Потанин, *Плазменные центрифуги. Изотопы. Свойства, получение, применение*, Физматлит, Москва (2005).
15. G. Rüdiger, L. Kitchatinov, and R. Hollerbach, *Magnetic Processes in Astrophysics. Theory, Simulation, Experiments*, Wiley-VCH, Verlag, Weinheim (2013).
16. S. A. Balbus and J. F. Hawley, *Astrophys. J.* **376**, 214 (1991).
17. C. Nipoti and L. Posti, arXiv:1206.3890v2.
18. H. Ji, J. Goodman, and A. Kageyama, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **325**, 1 (2001).
19. K. Noguchi, V. I. Pariev, S. A. Colgate et al., *Astrophys. J.* **575**, 1151 (2002).
20. G. Rüdiger and Y. Zhang, *Astron. Astroph.* **378**, 302 (2001).
21. J. Goodman and H. Ji, *J. Fluid. Mech.* **462**, 365 (2002).
22. F. Stefani and O. N. Kirillov, *Phys. Rev. E* **3**, 925 (2015).
23. O. N. Kirillov, *Proc. Roy. Soc. London A* **473**, 2205 (2017).
24. В. П. Лахин, В. И. Ильгисонис, *ЖЭТФ* **137**, 783 (2010).
25. O. N. Kirillov and F. Stefani, *Proc. Internat. Astron. Union* **8**, 233 (2012).
26. O. N. Kirillov, F. Stefani, and Y. Fukumoto, *J. Fluid Mech.* **760**, 591 (2014).
27. Н. М. Горшунов, Е. П. Потанин, *Успехи прикл. физ.* **1**, 178 (2013).
28. Н. М. Горшунов, Е. П. Потанин, *Успехи прикл. физ.* **2**, 18 (2014).
29. F. H. Busse, *Phys. Earth. Planet. Int.* **12**, 350 (1976).
30. A. M. Soward, *Phys. Earth Planet Int.* **20**, 134 (1979).
31. F. H. Busse and A. C. Or, *J. Fluid Mech.* **166**, 173 (1986).
32. E. Kurt, F. H. Busse, and W. Pesch, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **18**, 251 (2004).

33. C. C. Finlay, *Les Houches* **88**, 403 (2008).
34. P. Vadasz and S. Olek, *Int. J. Heat Mass Transfer* **41**, 1417 (1999).
35. V. K. Gupta, B. S. Bhadauria, I. Hasim et al., *Alexandria Eng. J.* **54**, 981 (2015).
36. V. K. Gupta, R. Prasad, and A. K. Singh, *Int. J. Energy Technol.* **5**(28), 1 (2013).
37. V. K. Gupta and A. K. Singh, *Int. J. Energy Technol.* **5**(27), 1 (2013).
38. R. Prasad and A. K. Singh, *Int. J. Appl. Math. Informat.* **7**, 87 (2013).
39. J. M. Jawdat and I. Hashim, *Int. J. Adv. Sci. Eng. Inform. Technol.* **2**, 346 (2012).
40. R. Prasad and A. K. Singh, *J. Appl. Fluid Mech.* **9**(6), 2887 (2016).
41. P. Goldreich and D. Lynden-Bell, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **130**, 125 (1965).
42. E. Knobloch and K. Jullien, *Phys. Fluids* **17**, 094106 (2005).
43. E. N. Loren, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).
44. C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer-Verlag, New York (1982).
45. Ф. Р. Гантмахер, *Лекции по аналитической механике*, Физматлит, Москва (2005).