

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И СОЛИТОНЫ НАМАГНИЧЕННОСТИ В ПАРАМАГНЕТИКЕ С ДИПОЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

*К. В. Циберкин**

*Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 23 июня 2018 г.

На основе микроскопического подхода получены уравнения динамики локальной намагниченности спиновой системы, связанной диполь-дипольным взаимодействием, в однородном магнитном поле в приближении сплошной среды. С использованием обобщенного метода многих масштабов найдены поправки к ларморовской частоте прецессии магнитных моментов, вызванные межчастичным взаимодействием, которые приводят к уширению спектральных линий и формированию сателлитов вдали от ларморовской частоты. В старших порядках разложения получены нелинейные уравнения для амплитуды намагниченности, допускающие волновые и солитонные решения. Проанализировано влияние несекулярной части диполь-дипольного взаимодействия на устойчивость солитонов и определены условия их существования.

DOI: 10.1134/S0044451018120106

1. ВВЕДЕНИЕ

Передача энергии и информации посредством управления спиновой динамикой является ключевым элементом перспективных направлений прикладной физики конденсированного состояния — спинтроники и магноники [1]. Особую роль в процессах переноса играют локализованные возмущения намагниченности — магнитные солитоны. Солитоны в ферромагнетиках и антиферромагнетиках долгое время являются предметом активного теоретического и экспериментального изучения [2, 3]. Высокая интенсивность обменного взаимодействия допускает существование солитонов и коллективных возбуждений при температурах вплоть до комнатных, в то время как дипольное взаимодействие магнитных моментов в обычных условиях пренебрежимо мало.

Описание коллективных явлений в парамагнетиках с дипольным взаимодействием впервые развито при построении теории ядерного магнитного резонанса при низких температурах [4, 5]. Впоследствии показана теоретически принципиальная возможность существования солитонов в парамагнитных средах [6, 7], однако их наблюдение затруднено необходимостью проведения экспериментов в обла-

сти спиновых температур порядка 1 К (для электронов). При слабом спин-решеточном взаимодействии спиновая подсистема в сильном магнитном поле приближается к состоянию насыщения, и ее температура быстро падает. Современная экспериментальная техника позволяет получать стабильные низкие спиновые температуры [8], что открывает новые возможности прямого изучения коллективных моментов в парамагнитных средах.

Существующая теория нелинейных волн в парамагнетиках построена с использованием обычного для физики магнитного резонанса приближения, в котором пренебрегают несекулярной (не коммутирующей с оператором энергии Зеемана) частью гамильтониана дипольного взаимодействия. Действительно, ее вклад в спектры резонанса проявляется преимущественно в тонкой структуре и не производит существенных сдвигов резонансной частоты и изменения формы основных линий резонанса [9]. Однако несекулярная часть обладает выраженной пространственной анизотропией, что, как показано в настоящей работе, существенным образом влияет на устойчивость волн и солитонов в дипольно-связанной спиновой системе. Применение универсального метода многих масштабов [10] для анализа уравнений эволюции намагниченности позволило выстроить иерархию динамических явлений в парамагнетике в приближении сплошной среды. В рамках единого подхода описываются дипольное

* E-mail: kbtsiberkin@psu.ru

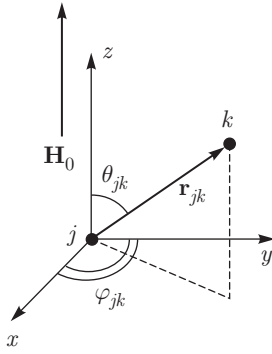


Рис. 1. Сферическая система координат для пары узлов решетки относительно направления магнитного поля

уширение спектральных линий, формирование спутников вдали от главной линии на ларморовской частоте и нелинейная динамика локальной намагниченности.

2. УРАВНЕНИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Рассматривается парамагнитный кристалл, помещенный в однородное постоянное магнитное поле \mathbf{H}_0 . Ось z ориентирована вдоль поля (рис. 1). Магнитные моменты на узлах кристаллической решетки связаны парным диполь-дипольным взаимодействием; магнитоупругое и упругое взаимодействия не учитываются.

Гамильтониан спиновой подсистемы кристалла [9] включает зеемановскую энергию:

$$\hat{H}_Z = -\gamma \mathbf{H}_0 \cdot \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{S}}_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где γ — гиромагнитное отношение, $\hat{\mathbf{S}}_j$ — оператор спинового момента в точке \mathbf{r}_j , N — полное число частиц в системе, а также гамильтонианы секулярной и несекулярной компонент дипольной энергии:

$$\hat{H}_{dd}^s = \frac{\gamma^2}{2} \sum_{j \neq k} a_{jk} \left(S_j^z S_k^z - \frac{1}{4} (S_j^+ S_k^- + S_j^- S_k^+) \right), \quad (2)$$

$$\hat{H}_{dd}^n = \frac{\gamma^2}{2} \sum_{j \neq k} (b_{jk} S_j^+ S_k^+ + 2c_{jk} S_j^+ S_k^z + \text{H.c.}), \quad (3)$$

где $S^\pm = S^x \pm iS^y$ — циклические компоненты оператора спина, коэффициенты

$$a_{jk} = \frac{1 - 3 \cos^2 \theta_{jk}}{r_{jk}^3}, \quad -\frac{3}{4} b_{jk} = \frac{\sin^2 \theta_{jk}}{r_{jk}^3} e^{-2i\varphi_{jk}},$$

$$-\frac{3}{2} c_{jk} = \frac{\sin \theta_{jk} \cos \theta_{jk}}{r_{jk}^3} e^{-i\varphi_{jk}},$$

определяют взаимное расположение магнитных моментов, θ_{jk} , φ_{jk} — полярный и азимутальный углы для вектора \mathbf{r}_{jk} (см. рис. 1), H.c. — эрмитово сопряжение предшествующих слагаемых.

В качестве основного состояния принято насыщение, при котором все магнитные моменты ориентированы вдоль поля. Благодаря дипольному взаимодействию при низких спиновых температурах (менее 1 К для электронов) в системе могут возникать коллективные возмущения намагниченности, которые эффективно описываются в рамках формализма вторичного квантования Холстейна – Примакова [4, 11]. С использованием преобразования Дайсона – Малеева компоненты спина в терминах операторов отклонения от направления поля принимают вид [4]

$$\hat{S}_j^+ \approx \sqrt{2S} \beta_j, \quad \hat{S}_j^- \approx \sqrt{2S} \beta_j^\dagger \left(1 - \frac{\beta_j^\dagger \beta_j}{2S} \right), \quad (4)$$

$$\hat{S}_j^z = S - \beta_j^\dagger \beta_j,$$

где β^\dagger и β — операторы рождения и уничтожения спиновых отклонений на узлах решетки. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям для бозе-операторов:

$$[\beta_j, \beta_k^\dagger] = \delta_{jk}, \quad [\beta_j^\dagger, \beta_k^\dagger] = [\beta_j, \beta_k] = 0.$$

Для определенности далее принято, что рассматриваемый кристалл обладает простой кубической решеткой с постоянной a_0 . Ребра элементарной кубической ячейки ориентированы вдоль осей координат, что дает $c_{jk} = 0$. С учетом этого гамильтониан (1)–(3) преобразуется к виду

$$\frac{\hat{H}}{\hbar\omega_0} \approx \sum_j \beta_j^\dagger \beta_j - \frac{p_d}{2} \sum_{j \neq k} a_{jk} \left(2S \beta_j^\dagger \beta_j + S \beta_j^\dagger \beta_k - \left(\beta_j^\dagger \beta_k^\dagger \beta_j \beta_k + \frac{1}{2} \beta_j^\dagger \beta_j^\dagger \beta_j \beta_k \right) \right) - S p_d \sum_{j \neq k} (b_{jk} \beta_j \beta_k + \beta_{jk}^* \beta_j^\dagger \beta_k^\dagger), \quad (5)$$

где $\omega_0 = \gamma H_0$ — ларморовская частота для магнитных моментов в кристалле, $p_d = \hbar \gamma S / \omega_0 a_0^3$ — параметр интенсивности дипольного взаимодействия.

Эволюция относящихся к точке \mathbf{r}_q операторов β_q , β_q^\dagger и $\beta_q^\dagger \beta_q$ дается уравнением Гейзенберга:

$$i \frac{d\hat{A}_q}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (6)$$

Явный вид уравнения для β_q с сохранением слагаемых не выше третьего порядка:

$$i \frac{d\beta_q}{dt} = \beta_q - \frac{p_d}{2} \sum_{q \neq j} a_{pj} (2S\beta_q + S\beta_j) - 2Sp_d \sum_{q \neq j} b_{qj}^* \beta_j^\dagger + \frac{p_d}{2} \sum_{q \neq j} a_{qj} (2\beta_j^\dagger \beta_j \beta_q + \beta_q^\dagger \beta_q \beta_j), \quad (7)$$

время здесь измеряется в единицах ω_0^{-1} . Уравнение для β_q^\dagger получается эрмитовым сопряжением (7), а уравнение для эволюции оператора числа спиновых отклонений $\hat{n}_q = \beta_q^\dagger \beta_q$ — комбинацией двух уравнений для одиночных операторов рождения и уничтожения.

Уравнение (7) допускает переход к сплошной среде. Операторы спиновых отклонений при этом преобразуются в компоненты локальной намагниченности. Для операторов на узлах, соседних с q , применимо разложение в ряд Тейлора [12]:

$$\beta_j = \beta_q \pm a_0 \frac{\partial \beta_q}{\partial x} + \frac{a_0^2}{2} \frac{\partial^2 \beta_q}{\partial x^2} + \dots$$

Это позволяет записать систему нелинейных уравнений для намагниченности кристалла в приближении взаимодействия только ближайших соседей. Вещественная и мнимая части (7) определяют уравнения динамики поперечных компонент намагниченности:

$$\frac{\partial M^x}{\partial t} = M^y - \frac{Sp_d}{2} \hat{Q}^+ M^y - p_d (M^z \hat{L} M^y - M^y \hat{L} M^z), \quad (8)$$

$$\frac{\partial M^y}{\partial t} = -M^x + \frac{Sp_d}{2} \hat{Q}^- M^x + p_d (M^z \hat{L} M^x - M^x \hat{L} M^z), \quad (9)$$

где введены дифференциальные операторы

$$\hat{L} = \Delta - 3 \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \hat{D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\hat{Q}^\pm = \hat{L} \pm 3\hat{D}.$$

Их структура в общем случае определяется ориентацией магнитного поля относительно решетки и количеством учитываемых координационных сфер. В качестве единицы длины выбрана постоянная решетки a_0 . Для отклонения продольной намагниченности от насыщения получаем

$$\frac{\partial M^z}{\partial t} = Sp_d (M^x \hat{Q}^- M^y - M^y \hat{Q}^+ M^x). \quad (10)$$

В пренебрежении несекулярными членами гамильтониана, вклад которых определяется оператором \hat{D} , уравнения (8)–(10) соответствуют классической модели, построенной в работе [6]. Они близки по структуре к уравнениям Ландау–Лифшица [13]:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff},$$

где \mathbf{H}_{eff} — эффективное магнитное поле, определяемое внешним полем и пространственным распределением намагниченности всего кристалла. Модель (8)–(10) не может быть сформулирована непосредственно в таком же виде в результате асимметрии несекулярных слагаемых. Вклад последних, тем не менее, возможно переписать в виде добавочного эффективного поля:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{\Gamma} \cdot [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}] + \mathbf{\Gamma}_{ns} \cdot [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{ns}], \quad (11)$$

$$\mathbf{H}_{eff} = \{p_d \hat{L} M^x, p_d \hat{L} M^y, 1 + p_d \hat{L} M^z\},$$

$$\mathbf{H}_{ns} = \{3p_d \hat{D} M^x, -3p_d \hat{D} M^y, 0\},$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_{ns} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

Уравнения динамики намагниченности описывают ее локальные значения и включают пространственные производные. Поскольку целью настоящей работы является изучение именно локальной динамики намагниченности, возможность использования в уравнениях (11) интегральных характеристик и анализа только временной динамики посредством уравнений типа Блоха не рассматривается. Дополнительным преимуществом описанной модели является вывод уравнений напрямую из микроскопического подхода, благодаря чему уравнения не содержат эмпирических параметров, описывающих взаимодействие магнитных моментов и релаксационные процессы.

3. ФОРМИРОВАНИЕ ДИПОЛЬНОГО УШИРЕНИЯ И САТЕЛЛИТОВ В ЯМР-СПЕКТРЕ

3.1. Метод многих масштабов

В предельном случае отсутствия взаимодействия ($p_d = 0$) система (8)–(10) сводится к уравнениям движения магнитного момента в однородном постоянном поле:

$$\frac{\partial M^x}{\partial t} = M^y, \quad \frac{\partial M^y}{\partial t} = -M^x, \quad \frac{\partial M^z}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

и описывает однородную прецессию намагниченности вокруг оси z . В спектре присутствует только ларморовская частота:

$$\begin{aligned} M^x &= ae^{it} + \text{c.c.}, & M^y &= iae^{it} + \text{c.c.}, \\ M^z &= b = \text{const}. \end{aligned} \quad (13)$$

Малая величина параметра взаимодействия p_d (порядка 10^{-3} – 10^{-2}) позволяет применить разнообразные методы теории возмущений. В работах [6, 7] применяется преобразование Гарднера–Морикавы [14], включающее разложение по медленному времени и бегущей волне вида

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varepsilon^\alpha \mathbf{M}_\alpha(\varepsilon\eta, \varepsilon^2 t) e^{im(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \\ \eta &= \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega(\mathbf{k})t, \end{aligned} \quad (14)$$

где в роли малого параметра ε выступает условная амплитуда возмущения равновесного состояния. При описании динамики намагниченности в высших порядках существенны только слагаемые с $m = \pm 1$. Важное ограничение такого подхода состоит в том, что он подразумевает получение нелинейного уравнения Шредингера, поскольку преобразование (14) отвечает именно его свойствам симметрии [14]. Кроме того, данное преобразование не позволяет описать возмущения с различными характерными временами в строгой последовательности и заранее предполагает, что координата и время в первом порядке малости будут связаны в виде переменной бегущей волны.

В связи с перечисленными ограничениями для подробного описания динамики намагниченности реализован обобщенный метод многих масштабов [10]. В качестве начального приближения используется плоская бегущая волна с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} :

$$\begin{aligned} M^x &= M^x e^{i\theta}, & M^y &= M^y e^{i\theta}, & M^z &= \text{const}, \\ \theta &= \omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (15)$$

Предполагается, что существует разложение вида

$$\mathbf{M} = \sum_{n=0}^{\infty} p_d^n \mathbf{M}_n(\theta, \mathbf{X}_1, T_1, T_2, T_3, \dots), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\zeta(\mathbf{X}_1, T_1)}{p_d}, & \mathbf{X}_1 &= p_d \mathbf{r}, & T_n &= p_d^n t, \\ \omega &= \frac{\partial \zeta}{\partial T_1} = 1, & \mathbf{k} &= -\nabla_1 \zeta, \end{aligned}$$

оператор ∇_1 обозначает дифференцирование по растянутым координатам \mathbf{X}_1 . $\omega = 1$, поскольку время изменяется в единицах ларморовской частоты. Производные в уравнениях (8)–(10) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \theta} + p_d \frac{\partial}{\partial T_1} + p_d^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots, \\ \Delta &= k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - p_d \text{div} \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \theta} - 2p_d \mathbf{k} \cdot \nabla_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + p_d^2 \Delta_1. \end{aligned}$$

В нулевом порядке разложения реализуется система уравнений (12) с решением вида (13), но амплитуды компонент намагниченности теперь зависят от медленных времен и координат:

$$\begin{aligned} M^x &= a(\mathbf{X}_1, T_1, T_2, \dots) e^{i\theta} + \text{c.c.}, \\ M^y &= ic(\mathbf{X}_1, T_1, T_2, \dots) e^{i\theta} + \text{c.c.}, \\ M^z &= b(\mathbf{X}_1, T_1, T_2, \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

Для M^x и M^y введены разные амплитуды a и c с целью корректного учета несекулярной части дипольного взаимодействия.

3.2. Первый порядок разложения. Дипольное уширение

В первом порядке разложения вековые члены определяют систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial T_1} &= 6iS(k_x^2 - k_y^2)(a^*c - ac^*), \\ \frac{\partial a}{\partial T_1} &= \frac{iS}{2} ((k^2 - 3k_z^2)(1 + 2b) + 3(k_x^2 - k_y^2))c, \\ \frac{\partial c}{\partial T_1} &= \frac{iS}{2} ((k^2 - 3k_z^2)(1 + 2b) - 3(k_x^2 - k_y^2))a. \end{aligned} \quad (18)$$

Анализ полной системы (18) возможен только численно. Однако в предположении, что отклонение продольной намагниченности от насыщения мало ($2b \ll 1$), для поперечных компонент можно записать линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} \approx iP^+c, \quad (19)$$

$$\frac{\partial c}{\partial T_1} \approx iP^-a, \quad (20)$$

решение которой дает поправки к ларморовской частоте, определяемые волновым вектором \mathbf{k} :

$$\begin{aligned} a(T_1) &= ae^{i\Omega T_1} + \text{c.c.}, \\ c(T_1) &= \sqrt{\frac{P^-}{P^+}} ae^{i\Omega T_1} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\Omega^2 = P^+P^-$, а амплитуда a зависит от \mathbf{X}_1 и T_2, T_3, \dots . Полная намагниченность принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} M^x &= a(\mathbf{X}_1, T_2, T_3, \dots) e^{i(\theta + p_d \Omega t)} + \text{c.c.}, \\ M^y &= ic(\mathbf{X}_1, T_2, T_3, \dots) e^{i(\theta + p_d \Omega t)} + \text{c.c.}, \\ M^z &= b(\mathbf{X}_1, T_2, T_3, \dots). \end{aligned} \quad (22)$$

Произвольное начальное распределение намагниченности в системе может быть представлено в виде суперпозиции бегущих волн (15). Оно возбуждает колебания с различными длинами волн, каждое из которых определяет собственную поправку Ω к ларморовской частоте. В результате суммарная намагниченность содержит непрерывный спектр колебаний с различными Ω , ширина которого пропорциональна p_d , и реализуется дипольное уширение спектральных линий. Пропорциональные $e^{\pm 2i\theta}$ нерезонансные слагаемые, которые возникают в уравнении для продольной намагниченности M_1^z в первом порядке разложения, ответственны за возникновение сателлита резонансной линии на удвоенной ларморовской частоте. Медленная динамика амплитуды b обуславливает формирование сателлита вблизи нулевой частоты.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НАМАГНИЧЕННОСТИ

4.1. Второй порядок разложения

Во втором порядке разложения по p_d уравнения для амплитуд намагниченности включают первые производные по координатам \mathbf{X}_1 . Уравнения для амплитуд поправок a_1, b_1, c_1 по структуре подобны (18), и соответствующие им слагаемые могут быть исключены без потери точности в данном порядке разложения, поскольку они вносят вклад преимущественно в уширение спектральных линий. В предположении, что волновой вектор \mathbf{k} не зависит от \mathbf{X}_1 , получается система нелинейных гиперболических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial T_2} &= -(S + 2b) \left(\mathbf{k} \cdot \nabla_1 c - 3k_z \frac{\partial c}{\partial Z_1} \right) - \\ &\quad - 3S \left(k_x \frac{\partial c}{\partial X_1} - k_y \frac{\partial c}{\partial Y_1} \right) + \text{c.c.}, \\ \frac{\partial c}{\partial T_2} &= -(S + 2b) \left(\mathbf{k} \cdot \nabla_1 a - 3k_z \frac{\partial a}{\partial Z_1} \right) - \\ &\quad - 3S \left(k_x \frac{\partial a}{\partial X_1} - k_y \frac{\partial a}{\partial Y_1} \right) + \text{c.c.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial T_2} &= 2S \left[a \left(\mathbf{k} \cdot \nabla_1 c^* - 3k_z \frac{\partial c^*}{\partial Z_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + c \left(\mathbf{k} \cdot \nabla_1 a^* - 3k_z \frac{\partial a^*}{\partial Z_1} \right) \right] - \\ &\quad - 6S \left[a \left(k_x \frac{\partial c^*}{\partial X_1} - k_y \frac{\partial c^*}{\partial Y_1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - c \left(k_x \frac{\partial a^*}{\partial X_1} - k_y \frac{\partial a^*}{\partial Y_1} \right) \right] + \text{c.c.} \end{aligned}$$

Данные уравнения удобно проанализировать в частных случаях волн, движущихся вдоль осей координат. Наиболее простые устойчивые решения существуют при $k_x = k_y = 0, k_z = \text{const}$. Несекулярные члены при этом автоматически исключаются из уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial T_2} &= 2(S + 2b)k_z \frac{\partial c}{\partial Z_1} + \text{c.c.}, \\ \frac{\partial c}{\partial T_2} &= 2(S + 2b)k_z \frac{\partial a}{\partial Z_1} + \text{c.c.}, \\ \frac{\partial b}{\partial T_2} &= 4Sk_z \left(a \frac{\partial c^*}{\partial Z_1} + c \frac{\partial a^*}{\partial Z_1} \right) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (23)$$

Для поперечных компонент могут быть получены волновые уравнения второго порядка. Дифференцирование по времени первого уравнения в (23) с последующей подстановкой в него производных b и c дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial T_2^2} &= 4k^2(S + 2b)^2 \frac{\partial^2 a}{\partial Z_1^2} + 8k^2(S + 2b) \frac{\partial a}{\partial Z_1} \frac{\partial b}{\partial Z_1} - \\ &\quad - 16k^2S \frac{\partial c}{\partial Z_1} \frac{\partial}{\partial Z_1} (ac^* + a^*c). \end{aligned} \quad (24)$$

Это уравнение может быть дополнительно упрощено, если положить $a \approx c$ в силу равноправности направлений x и y в рассматриваемой кристаллической решетке и $\partial b / \partial Z_1 \approx 0$ в силу более медленной динамики продольной намагниченности по сравнению с поперечными компонентами:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial T_2^2} = 4k^2(S + 2b)^2 \frac{\partial^2 a}{\partial Z_1^2} - 32k^2S \frac{\partial a}{\partial Z_1} \frac{\partial |a|^2}{\partial Z_1}. \quad (25)$$

Полученное уравнение допускает решение в виде бегущей волны в растянутых координатах $a \propto e^{iKZ_1}$. При этом нелинейное слагаемое равно нулю, поскольку модуль амплитуды бегущей волны является постоянным. Частоты медленных волн определяются дисперсионным соотношением

$$\Omega_2^2 = 4k^2(S + 2b)^2 K^2$$

и вносят квадратичную по p_d поправку в спектр колебаний намагниченности.

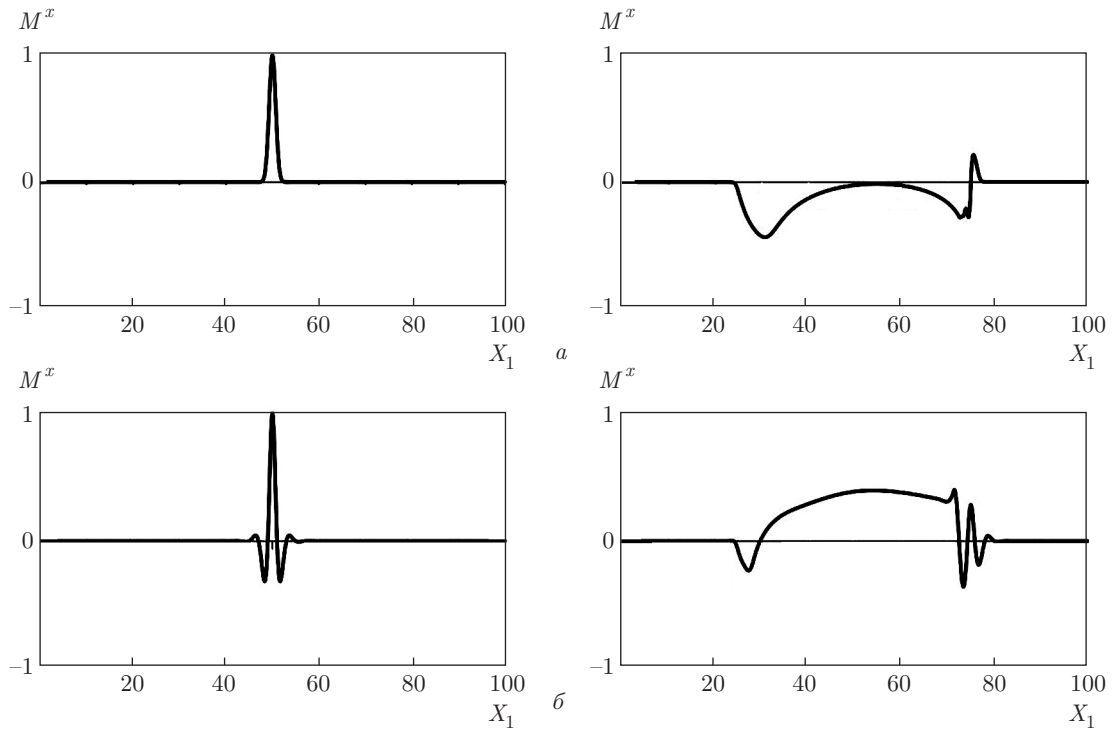


Рис. 2. Эволюция амплитуды поперечной намагниченности: *a* — начальное состояние в виде гауссовой функции; *б* — локализованный волновой пакет. Справа показаны рассчитанные профили бегущей волны в момент $T_2 = 25$

Численное решение уравнения (25) с различными начальными условиями и сохранением нелинейного слагаемого показывает, что возмущения намагниченности, распространяясь в среде, формируют фоновую бегущую волну с еще большими характерными временами (рис. 2).

При распространении волн в плоскости xy ($k_z = 0$) вклад несекулярных слагаемых приводит к тому, что уравнение вида (25) становится эллиптическим. В результате устойчивых волновых решений, распространяющихся по кристаллу, в этом случае не существует. Анализ динамики решений при произвольных направлениях распространения волн лежит за рамками настоящей работы.

4.2. Третий порядок разложения. Солитоны

В третьем порядке разложения для компонент \mathbf{M}_0 получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^x}{\partial T_3} &= -\frac{S}{2} \hat{Q}^+ M^y - (M^z \hat{L} M^y - M^y \hat{L} M^z), \\ \frac{\partial M^y}{\partial T_3} &= \frac{S}{2} \hat{Q}^- M^x + (M^z \hat{L} M^x - M^x \hat{L} M^z), \\ \frac{\partial M^z}{\partial T_3} &= S (M^x \hat{Q}^- M^y - M^y \hat{Q}^+ M^x). \end{aligned} \quad (26)$$

Полное описание системы требует учета динамики продольной компоненты намагниченности, однако уравнения (26) могут быть сведены к паре нелинейных уравнений относительно поперечных компонент. Для этого воспользуемся тем фактом, что абсолютная величина намагниченности M_S сохраняется, а рассматриваемые отклонения от состояния насыщения малы [6]:

$$\begin{aligned} (M^x)^2 + (M^y)^2 + (M_S - M^z)^2 &= M_S^2, \\ M^z &\approx \frac{(M^x)^2 + (M^y)^2}{2M_S}. \end{aligned} \quad (27)$$

Это позволяет исключить M^z в первом и втором уравнениях (26). Полагая также, что зависимость M^z от координат более медленная, чем у M^x и M^y , дополнительно можно пренебречь производными $\hat{L} M^z$. Их учет значительно усложняет структуру уравнений и лежит за рамками данной работы.

Учитывая, что устойчивы периодические волны, распространяющиеся вдоль оси z , будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} M^x &= a(T_3, \mathbf{X}_1) \exp \{i(KZ_1 + \Omega_2 T_2 + \Omega T_1 + \theta)\}, \\ M^y &= ic(T_3, \mathbf{X}_1) \exp \{i(KZ_1 + \Omega_2 T_2 + \Omega T_1 + \theta)\}. \end{aligned}$$

Для амплитуд получается система двумерных уравнений типа Гросса – Питаевского:

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial a}{\partial T_3} &= \frac{S}{2} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial Y_1^2} \right) + SK^2 c + \\
 &+ \frac{3S}{2} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 c}{\partial Y_1^2} \right) + \frac{K^2}{M_S} (|a|^2 + |c|^2) c, \\
 i \frac{\partial c}{\partial T_3} &= \frac{S}{2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial Y_1^2} \right) + SK^2 a - \\
 &- \frac{3S}{2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial Y_1^2} \right) + \frac{K^2}{M_S} (|a|^2 + |c|^2) a.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Подстановка

$$a, c = \varphi, \psi(\eta) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - sT_3)}, \quad \eta = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - UT_3, \tag{29}$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор в плоскости xy , $\mathbf{q} = \{q_x, q_y\}$ – волновой вектор, дает уравнения для огибающих:

$$\begin{aligned}
 \frac{S}{2} (q^2 + 3\bar{q}^2) (\psi'' - \psi) - s\psi + \frac{K^2}{M_S} (|\varphi|^2 + |\psi|^2) \psi &= \\
 = i(S((q_x + q_y) + 3(q_x - q_y))\psi' + U\varphi'), & \tag{30} \\
 \frac{S}{2} (q^2 + 3\bar{q}^2) (\varphi'' - \varphi) - s\varphi + \frac{K^2}{M_S} (|\varphi|^2 + |\psi|^2) \varphi &= \\
 = i(S((q_x + q_y) - 3(q_x - q_y))\varphi' + U\psi'), &
 \end{aligned}$$

где $q^2 = q_x^2 + q_y^2$, $\bar{q}^2 = q_x^2 - q_y^2$.

Для получения вещественной огибающей необходимо исключить из системы слагаемые с мнимыми коэффициентами. В пренебрежении несекулярными слагаемыми это достигается при условии

$$U = qS \sqrt{1 + \frac{2q_x q_y}{q^2}}. \tag{31}$$

Величина U является вещественной при любых значениях компонент вектора \mathbf{q} .

Несекулярные слагаемые существенно меняют условие (31). В этом случае скорость огибающей U дается соотношением

$$U = 2qS \sqrt{\frac{5q_x q_y}{q^2} - 2}. \tag{32}$$

Область устойчивости решений определяется неравенством $q^2 < q_x q_y / 2$, ограниченной на плоскости $q_x q_y$ прямыми $q_y = 2q_x$ и $q_x = 2q_y$ (рис. 3). В других случаях влияние несекулярной части дипольного взаимодействия в рассматриваемой постановке исключает существование устойчивых решений вида (29), в том числе и солитонов.

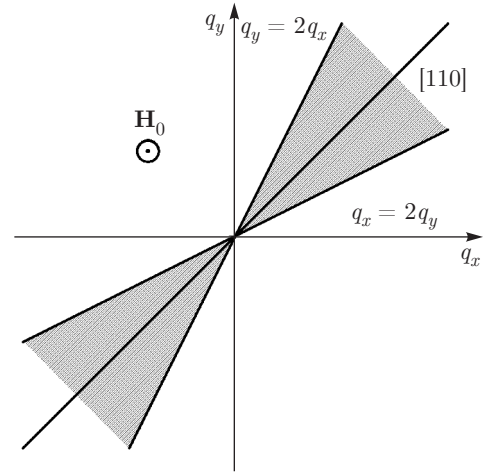


Рис. 3. Область существования устойчивых волн огибающей при учете несекулярной части дипольного взаимодействия (заштрихована). Показано направление внешнего магнитного поля

При $q_x = q_y$ (движение вдоль оси [110]) уравнения (30) с учетом (31), (32) преобразуются к симметричному виду:

$$\begin{aligned}
 (\psi'' - \psi) - \sigma\varphi + \beta(|\varphi|^2 + |\psi|^2)\psi &= 0, \\
 (\varphi'' - \varphi) - \sigma\psi + \beta(|\varphi|^2 + |\psi|^2)\varphi &= 0, \\
 \sigma = \frac{2s}{Sq^2}, \quad \beta = \frac{2K^2}{M_S Sq^2}. & \tag{33}
 \end{aligned}$$

Эта система имеет решение в виде солитонов, типичных для уравнений типа Шредингера и Гросса – Питаевского с кубической нелинейностью:

$$\varphi = \psi = u_S = \frac{\sqrt{\sigma + 1}}{\sqrt{\beta} \operatorname{ch}(\sqrt{\sigma + 1} \eta)}. \tag{34}$$

Вид полученного решения накладывает дополнительное ограничение на устойчивость – существование солитонов возможно при $\sigma > -1$.

Малое отклонение от оси [110] не приводит к неустойчивости солитонных решений. Подстановка в (30) возмущений

$$\varphi = u_S + \alpha f, \quad \psi = u_S + \alpha g,$$

где $\alpha = 6\hat{q}^2 / Sq^2$ – параметр, характеризующий величину указанного отклонения, позволяет записать неоднородную линейную задачу для возмущений:

$$\begin{aligned}
 f'' - f - \sigma g + 2\beta u_S^2 (g + 2f) &= u_S - u_S'', \\
 g'' - g - \sigma f + 2\beta u_S^2 (2g + f) &= -u_S + u_S''.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Учитывая, что решение (34) локализовано вблизи $\eta = 0$ и экспоненциально затухает при удалении, можно перейти к асимптотическим уравнениям

$$\begin{aligned} f'' - f - \sigma g &= 0, \\ g'' - g - \sigma f &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

общее решение которых имеет вид

$$\begin{aligned} f &= C_1 e^{\sqrt{\sigma+1}\eta} + C_2 e^{-\sqrt{\sigma+1}\eta} + \\ &+ C_3 \sin(\sqrt{\sigma-1}\eta) + C_4 \cos(\sqrt{\sigma-1}\eta), \\ g &= C_1 e^{\sqrt{\sigma+1}\eta} + C_2 e^{-\sqrt{\sigma+1}\eta} - \\ &- C_3 \sin(\sqrt{\sigma-1}\eta) - C_4 \cos(\sqrt{\sigma-1}\eta). \end{aligned} \quad (37)$$

При $C_1 = C_2 = 0$ реализуется ограниченное по амплитуде решение. Таким образом, вдали от солитона при отклонении его от оси [110] возникают бегущие гармонические волны, движущиеся в том же направлении и с той же скоростью. Из (37) следует также более жесткое ограничение на существование устойчивых решений: $\sigma > 1$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована динамика намагниченности парамагнетика с простой кубической решеткой, помещенного в постоянное магнитное поле, ориентированное вдоль ребра элементарной ячейки. В рамках микроскопического подхода методом вторичного квантования получена система уравнений эволюции намагниченности, не включающая эмпирических параметров. Анализ уравнений в пределе сплошной среды выполнен обобщенным методом многих масштабов, что позволило продемонстрировать единую иерархию динамических явлений в парамагнитной среде.

Метод успешно воспроизводит возникновение дипольного уширения и спутников в спектре магнитного резонанса. Рассмотрены также крупномасштабные нелинейные волны намагниченности с разными характерными временами. Продемонстрировано, что локализованные в пространстве возмущения намагниченности возбуждают в среде бегущие волны большой длины. В системе возможно существование солитонов огибающей, описываемых уравнением Шредингера с кубической нелинейностью и подобных хорошо изученным солитонам в магнитоупорядоченных средах. В парамагнетике солитоны распространяются перпендикулярно маг-

нитному полю, модулируя более быструю продольную бегущую волну. Ее волновое число определяет амплитуду нелинейных членов в уравнениях для огибающих. При отсутствии бегущих волн солитонное решение не реализуется.

Серьезным отличием от ферромагнетиков в рассмотренной постановке выступает анизотропия дипольного взаимодействия. Она приводит к абсолютной неустойчивости бегущих волн, распространяющихся перпендикулярно внешнему магнитному полю, так как именно это показано в разд. 4.1. Вопрос об устойчивости волн, распространяющихся в промежуточных направлениях, в настоящей работе подробно не исследовался.

Несекулярные члены дипольного взаимодействия ограничивают область устойчивости солитонов. Волны огибающей устойчивы в ограниченном интервале направлений вокруг кристаллографической оси [110]. При движении строго вдоль нее реализуются хорошо известные солитонные решения. Отклонение от оси благодаря вкладу несекулярной части возбуждает также крупномасштабные колебания намагниченности, охватывающие обширные области решетки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-42-590271) и Министерства образования и науки Пермского края (проект С-26/798).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Никитов, Д. В. Калябин, И. В. Лисенков и др., УФН **185**, 1099 (2015).
2. А. М. Kosevich, В. А. Ivanov and A. S. Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1990).
3. А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, т. 1, УрО РАН, Екатеринбург (2009).
4. Э. Б. Фельдман, А. К. Хитрин, ЖЭТФ **98**, 967 (1990).
5. Э. Б. Фельдман, А. К. Хитрин, ЖЭТФ **108**, 1416 (1995).
6. Н. П. Гиоргадзе, Р. Р. Хомерики, ФТТ **37**, 929 (1995).
7. N. Giorgadze, R. Khomeriki, J. Low Temp. Phys. **116**, 381 (1999).
8. M. Vladimirova, S. Cronenberger, D. Scalbert et al., Phys. Rev. B **97**, 041301(R) (2018).

9. Ч. Сликтер, *Основы теории магнитного резонанса*, Мир, Москва (1981).
10. А. Найфэ, *Методы возмущений*, Мир, Москва (1976).
11. К. В. Tsiberkin, *Eur. Phys. J. B* **89**, 54 (2016).
12. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск (2000).
13. А. Aharoni, *Introduction to the Theory of Ferromagnetism*, Clarendon Press, Oxford (2001).
14. Т. Taniuti, *Progr. Theor. Phys. Suppl.* **55**, 1 (1974).