

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ТОЧЕЧНЫХ ФЕРМИОНОВ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

В. П. Незнамов^{a,b}, И. И. Сафронов^a*

^a ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»
607188, Саров, Нижегородская обл., Россия

^b Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 апреля 2018 г.

При использовании уравнения второго порядка типа Шредингера с эффективным потенциалом поля Шварцшильда доказано существование стационарного состояния частиц со спином $1/2$ с энергией $E = 0$. Для каждого из значений квантовых чисел j, l физически значимая энергия состояния $E = 0$ (энергия связи $E_b = mc^2$) реализуется при значении гравитационной константы связи $\alpha \geq \alpha_{min}$. Частицы с $E = 0$ с подавляющей вероятностью находятся на расстоянии от горизонта событий в интервалах от нуля до долей комптоновской длины волны фермиона в зависимости от величины гравитационной константы связи и величин j, l . В работе анонсируются аналогичные решения уравнения второго порядка для связанных состояний фермионов в полях Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена. Системы атомного типа — коллапсары с фермионами, находящимися в связанных состояниях, — предложены в качестве частиц темной материи.

DOI: 10.1134/S0044451018100073

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой механике для описания движения частиц со спином $1/2$ общепринятым является использование уравнения Дирака с биспинорной волновой функцией. Практически одновременно Дираком было также предложено уравнение второго порядка для электронов и позитронов во внешнем электромагнитном поле [1]. Используя соотношение между верхним и нижним спинорами дираковского биспинора, уравнение второго порядка можно записать в виде двух отдельных уравнений со спинорными волновыми функциями. При этом для обеспечения самосопряженности необходимо в каждом из двух уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями провести соответствующие неунитарные преобразования подобия (см., например, [2]). Такие преобразования сохраняют энергии квантовомеханических состояний, но не сохраняют вероятности состояний. В результате использова-

ние самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями в квантовой механике частиц со спином $1/2$ во внешних электромагнитных и гравитационных полях может приводить к новым физическим следствиям.

В данной работе мы обсуждаем стационарные решения уравнения Дирака и уравнения второго порядка в гравитационном поле Шварцшильда [3].

Ранее в многочисленных работах в пространстве-времени Шварцшильда показано существование нестационарных решений уравнения Дирака, соответствующих связанным состояниям дираковских частиц с комплексными энергиями, экспоненциально распадающимися со временем. Существование резонансных состояний в поле Шварцшильда для массивных скалярных частиц с использованием уравнения Клейна–Гордона обсуждалось в работах [4–7]. Аналогичная проблема для дираковских частиц исследовалась в работах [8–13].

В данной работе мы получили стационарное решение уравнения Дирака с энергией фермиона $E = 0$ (энергия связи $E_b = mc^2$, где m — масса фермиона). Однако это решение нефизично, поскольку волновая функция состояния с $E = 0$ не являет-

* E-mail: vpneznamov@vniief.ru, vpneznamov@mail.ru

ся квадратично-интегрируемой из-за логарифмической расходимости нормировочного интеграла вблизи горизонта событий. В этом смысле мы подтвердили доказанное ранее в работах [14–17] отсутствие физически значимых стационарных решений уравнения Дирака в классических полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма [18], Керра [19], Керра–Ньюмена [20].

Для стационарных решений уравнения второго порядка ситуация качественно изменяется. Решению $E = 0$ соответствуют квадратично-интегрируемые собственные волновые функции, обращающиеся в нуль на горизонте событий. Волновые функции зависят от гравитационной константы связи α и от квантовых чисел углового и орбитального моментов частицы со спином $1/2$.

В качестве анонса в работе приводятся также решения уравнения второго порядка, соответствующие энергиям связанных состояний частиц со спином $1/2$ для полей Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена. Обоснование этих результатов требует отдельного рассмотрения.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 для связности изложения приведен самосопряженный дираковский гамильтониан в поле Шварцшильда с плоским (без весового множителя Паркера [21]) скалярным произведением волновых функций. Гамильтониан ранее был получен в работе [22] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики, примененных в [22–24] для получения самосопряженных дираковских гамильтонианов в произвольных гравитационных полях, в том числе зависящих от времени. В разд. 2 проводится также разделение переменных, приводятся уравнения и асимптотика для радиальных функций.

В разд. 3 приведены два самосопряженных уравнения второго порядка с эффективными потенциалами. Каждое уравнение относится только к одной из двух преобразованных радиальных волновых функций. В разделе исследуются особенности и асимптотики эффективных потенциалов, определяются асимптотики волновых функций уравнения второго порядка, устанавливается существование регулярного стационарного решения с $E = 0$ с соответствующими квадратично-интегрируемыми волновыми функциями.

В разд. 4 для численного решения уравнения второго порядка осуществляется преобразование Прюфера [25–28] от уравнения второго порядка к двум нелинейным дифференциальным уравнениям первого порядка, содержащим фазовую функцию $\Phi(r)$. Здесь же устанавливаются граничные условия

при $r \rightarrow \infty$, $r \rightarrow r_0$ (r_0 — гравитационный радиус), кратко комментируется численный метод решения уравнения с $\Phi(r)$.

В разд. 5 приведены результаты численных расчетов. Показано, что для значений $\alpha > 0.25$ существует единственное стационарное связанное состояние фермионов с $E = 0$. Частицы с $E = 0$ с подавляющей вероятностью находятся на расстоянии от горизонта событий в интервалах от нуля до долей комптоновской длины волны фермиона в зависимости от величины гравитационной константы связи α и от величин квантовых чисел j, l .

В разд. 6 приведены энергии связанных состояний частиц со спином $1/2$ в полях Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена.

В разд. 7 коллапсары Шварцшильда со стационарно-связанными дираковскими частицами рассмотрены в качестве кандидатов на роль частиц темной материи.

В разд. 8 обсуждается возможность перехода от квантовой механики к классическому описанию.

В Заключении излагаются и обсуждаются основные результаты работы.

В Приложениях А, В приводятся процедура получения и явный вид эффективных потенциалов уравнения второго порядка в поле Шварцшильда.

2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Решение Шварцшильда характеризуется точечным источником гравитационного поля массой M и гравитационным радиусом (горизонтом событий)

$$r_0 = 2GM/c^2. \quad (1)$$

Здесь G — гравитационная постоянная, c — скорость света. Для пробной частицы с массой m безразмерная гравитационная константа связи равна

$$\alpha = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_P^2} = \frac{r_0}{2l_c}. \quad (2)$$

В формуле (2) $M_P = \sqrt{\hbar c/G} = 2.2 \cdot 10^{-5}$ г — планковская масса, $l_c = \hbar/mc$ — комптоновская длина волны частицы.

В отличие от констант взаимодействия в Стандартной модели константа связи может достигать очень больших значений. Для электрона величине $\alpha \approx 1$ соответствует источник гравитации с массой $M = 0.5 \cdot 10^{15}$ кг. Тогда, например, гравитационное взаимодействие электрона с источником с солнечной

массой $M = M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг определяется величиной $\alpha \approx 4 \cdot 10^{15}$.

Ниже будем, как правило, использовать систему единиц $\hbar = c = 1$, сигнатуру пространства-времени Минковского

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (3)$$

Здесь подчеркивание введено для локальных индексов. Обозначения γ^{α} и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ соответствуют мировым и локальным матрицам Дирака. В качестве локальных матриц будем использовать матрицы в представлении Дирака–Паули.

Метрика Шварцшильда

$$ds^2 = f_S dt^2 - \frac{dr^2}{f_S} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4)$$

В формуле (4) $f_S = 1 - r_0/r$.

В работе [23] для метрики Шварцшильда получен стационарный самосопряженный дираковский гамильтониан с плоским (без весового множителя Паркера [21]) скалярным произведением волновых функций:

$$H_{\eta} = H_{\eta}^+ = \sqrt{f_S} m \gamma^0 - i \sqrt{f_S} \gamma^0 \times \left\{ \gamma^1 \sqrt{f_S} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \gamma^2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \gamma^3 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \frac{\partial f_S}{\partial r}. \quad (5)$$

В (5) индекс «+» означает эрмитово сопряжение. Уравнение Дирака с гамильтонианом (5) имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi_{\eta}}{\partial t} = H_{\eta} \Psi_{\eta}. \quad (6)$$

2.1. Разделение переменных

Уравнение Дирака (6) допускает разделение угловых и радиальных переменных. Для стационарных состояний удобно биспинор $\Psi_{\eta}(\mathbf{r}, t)$ определить в виде [13]

$$\Psi_{\eta}(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} F(r)\xi(\theta) \\ -iG(r)\sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix} e^{-iEt} e^{im_{\varphi}\varphi} \quad (7)$$

и использовать уравнение Брилла–Уилера [29]

$$\left[-\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + i\sigma^1 m_{\varphi} \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) = i\kappa \xi(\theta). \quad (8)$$

Чтобы воспользоваться уравнением (8), необходимо в гамильтониане (5) провести эквивалентную замену γ -матриц:

$$\gamma^{\underline{1}} \rightarrow \gamma^{\underline{3}}, \quad \gamma^{\underline{3}} \rightarrow \gamma^{\underline{2}}, \quad \gamma^{\underline{2}} \rightarrow \gamma^{\underline{1}}. \quad (9)$$

В равенствах (7), (8) спинор $\xi(\theta)$ представляет собой сферические гармоники для спина 1/2, σ^i — двумерные матрицы Паули, m_{φ} — азимутальная компонента углового момента j , κ — квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + 1/2, \\ l, & j = l - 1/2. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь j, l — квантовые числа углового и орбитального моментов дираковской частицы.

Спинор $\xi(\theta)$ можно представить в виде [13]

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} -1/2 Y_{jm_{\varphi}}(\theta) \\ 1/2 Y_{jm_{\varphi}}(\theta) \end{pmatrix} = (-1)^{m_{\varphi}+1/2} \times \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j-m_{\varphi})!}{(j+m_{\varphi})!}} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (\kappa - m_{\varphi} + 1/2) P_l^{m_{\varphi}-1/2}(\theta) \\ P_l^{m_{\varphi}+1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В (11) выражение после квадратного корня в круглых скобках является двумерной матрицей, $P_l^{m_{\varphi}\pm 1/2}(\theta)$ — присоединенные функции Лежандра.

В результате разделения переменных получаем уравнения для радиальных функций $F(\rho), G(\rho)$. Далее эти уравнения будем записывать в безразмерных переменных $\varepsilon = E/m, \rho = r/l_c, r_0/l_c = 2\alpha, l_c = m^{-1}$. Ниже рассматривается движение фермиона относительно покоящегося источника поля Шварцшильда, т. е. $m \ll M$.

2.2. Уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций

Система уравнений для радиальных функций $F(\rho), G(\rho)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right) \frac{dF}{d\rho} + \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right) F - \\ - \left(\varepsilon + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}\right) G = 0, \\ \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right) \frac{dG}{d\rho} + \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right) G + \\ + \left(\varepsilon - \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}\right) F = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим асимптотику решений (12).

При $\rho \rightarrow \infty$ ведущие члены асимптотик равны (см., например, [13])

$$F = C_1 \varphi_1(\rho) e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 \varphi_2(\rho) e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

$$G = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(-C_1 \varphi_1(\rho) e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 \varphi_2(\rho) e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right). \quad (13)$$

Здесь $\varphi_1(\rho)$, $\varphi_2(\rho)$ — степенные функции от ρ . Для обеспечения финитного движения дираковских частиц необходимо использовать лишь экспоненциально убывающие решения (13), т.е. в этом случае $C_2 = 0$.

При $\rho \rightarrow 2\alpha$ ($r \rightarrow r_0$) представим функции $F(\rho)$, $G(\rho)$ в виде

$$F|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \nu^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k \nu^k,$$

$$G|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \nu^s \sum_{k=0}^{\infty} g_k \nu^k, \quad (14)$$

где $\nu = |\rho - 2\alpha|$.

Определяющее уравнение для системы (12) приводит к решению

$$s = -\frac{1}{2} \pm i2\alpha\varepsilon. \quad (15)$$

Из (15) видно, что осциллирующие части решений (14) исчезают при нулевой энергии фермиона $\varepsilon = 0$.

Формально решение $\varepsilon = 0$ является единственным регулярным решением системы (12), однако это решение не соответствует реальной физической ситуации из-за логарифмической расходимости нормировочного интеграла

$$N_D = \int (F^*(\rho)F(\rho) + G^*(\rho)G(\rho)) \rho^2 d\rho \quad (16)$$

вблизи горизонта событий.

В результате мы так же, как и авторы [14–17], приходим к выводу об отсутствии решений уравнения Дирака, соответствующих стационарным связанным состояниям фермионов в поле Шварцшильда. Ниже рассмотрим эту проблему применительно к решениям уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями.

3. УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФЕРМИОНОВ В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Для получения уравнения второго порядка необходимо осуществить три этапа:

- 1) получение самосопряженного гамильтониана или получение самосопряженного уравнения Дирака;
- 2) переход в уравнении второго порядка от биспинорных к спинорным волновым функциям;
- 3) проведение неунитарного преобразования подобия для обеспечения самосопряженности уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями.

Преобразование подобия обеспечивает сохранение энергии фермиона при переходе от уравнения Дирака к уравнению второго порядка.

Процедура получения уравнений второго порядка для фермионов в поле Шварцшильда представлена в Приложении А. Уравнения для радиальных функций $\psi_F(\rho)$, $\psi_G(\rho)$ имеют вид уравнения Шредингера с эффективными потенциалами $U_{eff}^F(\rho)$, $U_{eff}^G(\rho)$, нелинейно зависящими от энергии ε :

$$\frac{d^2 \psi_F(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F(\rho)) \psi_F(\rho) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{d^2 \psi_G(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^G(\rho)) \psi_G(\rho) = 0. \quad (18)$$

В формулах (17), (18)

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1), \quad (19)$$

$$\psi_F(\rho) = g_F(\rho)F(\rho), \quad (20)$$

$$\psi_G(\rho) = g_G(\rho)G(\rho). \quad (21)$$

Явный вид $U_{eff}(\rho)$ и $g(\rho)$ приведен в Приложении В.

Уравнения (17), (18) переходят друг в друга при $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$, $\kappa \rightarrow -\kappa$. Отсюда следует, что уравнения (17), (18) описывают движение частиц и античастиц. В данной работе для частиц используется уравнение (17) для функции $\psi_F(\rho)$ с эффективным потенциалом U_{eff}^F . Основанием для этого может служить нерелятивистский предел уравнения Дирака с исчезающим при нулевом импульсе частицы ($\mathbf{p} = 0$) нижним спинором, пропорциональным $G(\rho)$. Аналогично нижний спинор с функцией $G(\rho)$ исчезает для частицы при преобразовании Фолди – Ваутхайзена с любым значением импульса \mathbf{p} [30]. Наоборот, для античастицы в нерелятивистском пределе $\mathbf{p} = 0$ и при преобразовании Фолди – Ваутхайзена исчезает верхний спинор дираковской биспинорной волновой функции, пропорциональный $F(\rho)$.

3.1. Стационарное решение $\varepsilon = 0$

3.1.1. Асимптотики эффективного потенциала

Эффективный потенциал $U_{eff}^F(\rho)$ при $\varepsilon = 0$ можно представить в виде (см. Приложение В)

$$U_{eff}^F(\rho, \varepsilon = 0) = -\frac{3}{8} \frac{\alpha^2}{\rho^2(\rho - 2\alpha)^2} + \frac{1}{\rho - 2\alpha} \times \left(-\frac{\alpha}{2\rho^2} + \frac{\rho}{2} + \frac{\kappa^2}{2\rho} \right) + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\rho^{3/2}(\rho - 2\alpha)^{1/2}} - \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Эффективный потенциал является вещественным вне горизонта событий ($\rho > 2\alpha$) и комплексным (из-за предпоследнего слагаемого) под горизонтом событий ($\rho < 2\alpha$). Эффективный потенциал сингулярен на горизонте событий ($\rho = 2\alpha$). Ведущая особенность потенциала (22) по обе стороны горизонта событий равна

$$U_{eff}^F(\varepsilon = 0)|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - 2\alpha)^2} + O\left(\frac{1}{|\rho - 2\alpha|}\right). \quad (23)$$

Коэффициент в правой части (23) $3/32 < 1/8$ свидетельствует об отсутствии режима «падения» частиц на горизонт событий [31, 32] и о возможности существования стационарного связанного состояния с $\varepsilon = 0$.

Асимптотика потенциала (22) при $\rho \rightarrow \infty$ имеет классический ньютоновский вид:

$$U_{eff}^F(\varepsilon = 0)|_{\rho \rightarrow \infty} = \alpha/\rho. \quad (24)$$

При $\rho \rightarrow 0$ асимптотика эффективного потенциала имеет вид отталкивающего барьера:

$$U_{eff}^F(\varepsilon = 0)|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{5}{32} \frac{1}{\rho^2}. \quad (25)$$

3.1.2. Квадратичная интегрируемость радиальных волновых функций

Рассмотрим проблему квадратичной интегрируемости волновых функций на примере уравнения (17). Первоначально рассмотрим поведение волновой функции уравнения (17) в окрестности горизонта событий $\rho \rightarrow 2\alpha$. Пусть

$$\psi_F(\rho)|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = \nu^s \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \nu^k, \quad (26)$$

где $\nu = |\rho - 2\alpha|$.

Определяющее уравнение для (17) с учетом (23) записывается как

$$s(s - 1) + 3/16 = 0. \quad (27)$$

Решения (27) имеют вид $s_1 = 3/4, s_2 = 1/4$.

Оба решения приводят к регулярным квадратично-интегрируемым решениям для волновой функции $\psi_F(\rho, \varepsilon = 0)$. Для однозначного выбора решения обратимся к асимптотике (14) для радиальной функции уравнения Дирака $F(\rho)$ с $s = -1/2$ при $\varepsilon = 0$ и к преобразованию (20):

$$g_F|_{\rho \rightarrow 2\alpha} \sim \rho^{3/4}. \quad (28)$$

В результате получаем

$$\psi_F(\varepsilon = 0)|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = C_3 |\rho - 2\alpha|^{1/4}. \quad (29)$$

Асимптотика (29) соответствует представлению (26) с решением определяющего уравнения (27) $s_2 = 1/4$.

Аналогично рассмотрение при $\rho \rightarrow \infty$ с учетом асимптотики (13) и $g_F|_{\rho \rightarrow \infty} \sim \rho$ приводит к асимптотике

$$\psi_F|_{\rho \rightarrow \infty} = C_1 \varphi_1(\rho) \rho e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \quad (30)$$

Формально при $\rho \rightarrow 0$ определяющее уравнение для (17) с учетом асимптотики (25) приводит к двум решениям $s_1 = 5/4, s_2 = -1/4$. Оба решения соответствуют квадратично-интегрируемым волновым функциям $\psi_F(\varepsilon = 0)|_{\rho \rightarrow 0}$.

3.1.3. Область определения радиальной волновой функции $\psi_F(\rho)$

Наше рассмотрение привело к разбиению первоначальной области определения $\psi_F(\rho), \rho \in (0, \infty)$, на две области:

$$\rho \in [2\alpha, \infty), \quad (31)$$

$$\rho \in (0, 2\alpha]. \quad (32)$$

Области (31), (32) на горизонте событий $\rho = 2\alpha$ отделены друг от друга бесконечно глубокими потенциальными ямами

$$U \sim -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - 2\alpha)^2}$$

(см. (23)). Волновые функции на горизонте событий равны нулю (см. (29)). В области (31) эффективный потенциал (22) и радиальная волновая функция $\psi_F(\rho)$ являются вещественными. В области (32), наоборот, эти величины становятся комплексными. В области под горизонтом событий отсутствует возможность постановки краевой задачи существования стационарных связанных состояний частиц с полуплоским спином из-за наличия двух решений определяющего уравнения для (17) при $\rho \rightarrow 0$. Оба решения соответствуют квадратично-интегрируемым решениям для волновой функции $\psi_F(\varepsilon = 0)|_{\rho \rightarrow 0}$.

Ниже мы будем рассматривать область (31) с $\rho \geq 2\alpha$. Для этой области вне горизонта событий решению уравнения второго порядка $\varepsilon = 0$ соответствуют регулярные вещественные квадратично-интегрируемые радиальные волновые функции $\psi_F(\varepsilon = 0, \rho)$, которые обращаются в нуль при $\rho = 2\alpha$. Ниже мы продемонстрируем это численными решениями уравнения (17).

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для решения уравнения (17) используем преобразование Прюфера [25–28].

4.1. Преобразование Прюфера

Пусть

$$\begin{aligned} \psi_F(\rho) &= P(\rho) \sin \Phi(\rho), \\ \frac{d\psi_F(\rho)}{d\rho} &= P(\rho) \cos \Phi(\rho). \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда

$$\frac{\psi_F(\rho)}{\psi_F(\rho)/d\rho} = \operatorname{tg} \Phi(\rho) \quad (34)$$

и уравнение (17) можно записать в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \cos^2 \Phi + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F) \sin^2 \Phi, \quad (35)$$

$$\frac{d \ln P}{d\rho} = (1 - 2(E_{Schr} - U_{eff}^F)) \sin \Phi \cos \Phi. \quad (36)$$

Отметим, что уравнение (36) должно решаться после определения собственных значений ε_n и собственных функций $\Phi_n(\rho)$ из уравнения (35).

4.2. Асимптотика функций $\Phi(\rho)$, $P(\rho)$

4.2.1. Для связанных состояний и $\rho \rightarrow \infty$ с учетом (30) и (34) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi|_{\rho \rightarrow \infty} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ \Phi|_{\rho \rightarrow \infty} &= -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi. \end{aligned} \quad (37)$$

Для экспоненциально растущих решений в асимптотике (13) $C_2 \neq 0$ и с учетом (34) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi|_{\rho \rightarrow \infty} &= \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ \Phi|_{\rho \rightarrow \infty} &= \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + k\pi. \end{aligned} \quad (38)$$

В формулах (37), (38) $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4.2.2. Пусть при $\rho \rightarrow 2\alpha$

$$\Phi|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = k\pi + A(|\rho - 2\alpha|). \quad (39)$$

Тогда $\sin \Phi|_{\rho \rightarrow 2\alpha} \simeq A(|\rho - 2\alpha|)$, $\cos \Phi|_{\rho \rightarrow 2\alpha} \simeq 1$.

Из совместности (39) с уравнением (35) с учетом ведущей особенности

$$U_{eff}^F(\varepsilon = 0)|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{3}{32} \frac{1}{(\rho - 2\alpha)^2}$$

(см. (23)) получаем

$$1 + \frac{3}{16} A^2 = A \quad (40)$$

с решениями $A_1 = 4$, $A_2 = 4/3$.

Далее интегрируем уравнение (36) при $\rho \rightarrow 2\alpha$ с учетом ведущей особенности эффективного потенциала (23). В результате с учетом (33) получаем

$$P|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = C_4 \begin{cases} |\rho - 2\alpha|^{-3/4}, & A_1 = 4, \\ |\rho - 2\alpha|^{-1/4}, & A_2 = 4/3, \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon = 0)|_{\rho \rightarrow 2\alpha} &= \\ &= C_4 \begin{cases} 4|\rho - 2\alpha|^{1/4}, & A_1 = 4, \\ \frac{4}{3}|\rho - 2\alpha|^{3/4}, & A_2 = 4/3. \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

Сравнение с выражением (29) показывает, что для нашего рассмотрения приемлемыми являются решения (39), (41), (42) с решением уравнения (40) $A_1 = 4$ и $C_3 = 4C_4$.

4.3. Численный метод решения уравнений (35), (36). Общие свойства фазовых функций $\Phi(\rho)$

При численном решении уравнений (35), (36) необходимо иметь в виду, что точки $\rho = \infty$, $\rho = 2\alpha$ являются особыми точками. Поведение интегральных кривых уравнения (35) в окрестностях особых точек приводит к тому, что единственно верным является интегрирование уравнений «справа налево»

(от $\rho = \rho_{max}$ до $\rho = \rho_{min}$). В этом случае при задании начальных условий (37), (38) при интегрировании фазовая функция $\Phi(\rho)$ достигает окрестности горизонта событий с асимптотикой (39) с $A_1 = 4$. Хорошую сходимость численных результатов обеспечивает выбор $\rho_{max} = 10^7$ и $\rho_{min} = 2\alpha + 10^{-8}$.

В данной работе применен следующий численный способ решения уравнения (35). Для разрешенного набора значений $-1 < \varepsilon < 1$ численно решается задача Коши с начальными условиями (37), (38) при $\rho \rightarrow \infty$. Для решения задачи Коши используется неявный метод Рунге – Кутты пятого порядка с контролем размера шага (схема Ила трехстадийного метода Радо ПА [33]). Определив спектр ε_n и собственные функции $\Phi_n(\rho)$ и интегрируя уравнение (36), можно определить функции $P_n(\rho)$ и с учетом (33) – волновые функции $(\psi_F)_n(\rho)$. Далее можно определить плотность вероятности обнаружения частиц на расстоянии ρ в сферическом слое $d\rho$:

$$w(\rho) = P_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n(\rho), \quad (43)$$

и вероятность обнаружения частиц в интервале $[2\alpha, \rho]$:

$$W(\rho) = \int_{2\alpha}^{\rho} P_n^2(\rho) \sin^2 \Phi_n(\rho) d\rho. \quad (44)$$

В задачах с определением спектра ε_n целесообразно использовать функцию $\Phi(\varepsilon, \rho_{min}) = \Phi(\varepsilon)|_{\rho=\rho_{min}}$.

Численные эксперименты показали наличие следующих важных свойств функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{min})$ (подобные свойства функции Φ для более простых потенциалов, не зависящих от ε , строго доказаны в работах [25–27]).

1. Функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{min})$ монотонна по ε .

2. В случае существования связанных состояний с $|\varepsilon| < 1$ поведение функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{min})$ носит скачкообразный характер. В задачах с хорошо определенными граничными условиями при достижении собственного значения ε_n функция $\Phi(\varepsilon, \rho_{min})$ изменяется скачком на π :

$$[\Phi(\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon, \rho_{min}) - \Phi(\varepsilon_n + \Delta\varepsilon, \rho_{min})]|_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} = \pm n\pi. \quad (45)$$

3. В случае отсутствия связанных состояний изменение функции $\Phi(\varepsilon, \rho_{min})$ во всем интервале $|\varepsilon| < 1$ меньше величины π .

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ $\varepsilon = 0$

5.1. Анализ границ физической приемлемости решения $\varepsilon = 0$

Решение $\varepsilon = 0$ формально справедливо для любого значения гравитационной константы связи α . Однако для достижения столь сильной связи $\varepsilon_b = 1$ необходимы достаточно большие значения $\alpha \geq \alpha_{min}$. Например, энергия связанного электрона $\varepsilon_e = 0$ в кулоновском поле ядра с числом протонов Z в состоянии $1S_{1/2}$ достигается при значении электромагнитной константы связи $\alpha_{fs}Z \approx (1/137)Z \approx 1.06(Z \approx 140)$. Для $2S_{1/2}$ - и $3S_{1/2}$ -состояний аналогичные значения $\alpha_{fs}Z \approx 1.42$ и 1.9 [34].

Для установления величины α_{min} обратимся к стационарному регулярному решению для метрики Керра (см. разд. 6)

$$\varepsilon_K = \frac{\alpha_a m_\varphi}{2\alpha(\rho_+)_k}. \quad (46)$$

Здесь $(\rho_+)_k = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}$, $\alpha_a = a/l_c = J/Mcl_c$, $\alpha^2 > \alpha_a^2$.

В отсутствие вращения $\alpha_a = 0$, метрика Керра переходит в метрику Шварцшильда с решением (46) $\varepsilon_S = 0$.

Максимальное значение α_a соответствует экстремальному полю Керра: $\alpha_a^2 = \alpha^2$. В этом случае

$$\varepsilon_K^{extr} = m_\varphi/2\alpha. \quad (47)$$

Для достижения максимальной энергии связанного состояния вблизи $\varepsilon_{max} \sim 1$ (при этом $\varepsilon_{max} < 1$) минимальное значение α_{min} в (47) должно подчиняться условию

$$\alpha_{min} > m_\varphi/2, \quad m_\varphi > 0. \quad (48)$$

При уменьшении α_a от $\alpha_a = \alpha_{min}$ до $\alpha_a = 0$ энергия связанного состояния в (46) со значением α_{min} из (48) уменьшается от ε_K^{extr} (экстремальное поле Керра) до $\varepsilon_S = 0$ (поле Шварцшильда). Минимальное значение α_{min} в (48) соответствует минимальному значению $(m_\varphi)_{min} = 1/2$, т.е. $\alpha_{min} > 0.25$.

5.2. Результаты численных расчетов

В таблице для различных значений α , j , l приведены определенные из расчетов расстояния ρ_m от максимумов плотностей вероятности до горизонтов событий. На рис. 1, 2 для некоторых значений α , j ,

Таблица. Значения ρ_m в зависимости от $\kappa (j, l)$ и α

κ	-1	+1	-2	+2	-3	+3
(j, l)	$(j = 1/2, l = 0)$	$(j = 1/2, l = 1)$	$(j = 3/2, l = 1)$	$(j = 3/2, l = 2)$	$(j = 5/2, l = 2)$	$(j = 5/2, l = 3)$
α	0.25	0.5	0.9	1	1.4	1.5
ρ_m	0.043	0.028	0.017	0.015	0.011	0.01

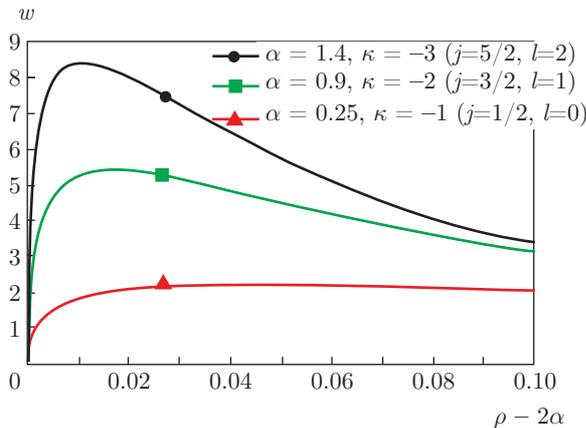


Рис. 1. Нормированная плотность вероятности $w(\rho - 2\alpha)$ при $\varepsilon = 0$

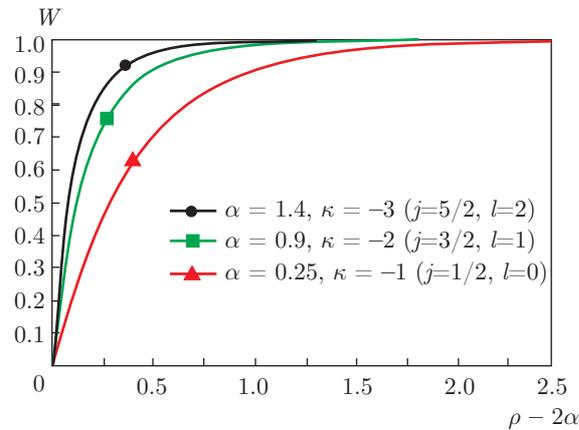


Рис. 2. Интегральная вероятность $W(\rho - 2\alpha)$ при $\varepsilon = 0$

l приведены нормированные плотности вероятности (43) и интегральные вероятности (44).

Видно, что в отличие от электронной структуры атомов периодической системы локализация частиц вблизи горизонта событий увеличивается по мере увеличения j, l .

Для $\alpha_{min} \approx 0.25$ приведем примеры допустимых значений масс коллапсара и частицы со спином $1/2$. Из соотношения (2) видно, что для электрона с мас-

сой $m = m_e \approx 0.5$ МэВ минимально возможная масса коллапсара должна быть равна $M \approx 10^{17}$ г. Для нейтрино с массой $m = m_\nu \approx 1$ эВ минимально возможная масса коллапсара $M \approx 0.6 \cdot 10^{25}$ г. Естественно, большие массы коллапсаров также обеспечивают достижение связи $\varepsilon_b = 1$.

6. СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2 ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ РАЙССНЕРА – НОРДСТРЕМА, КЕРРА, КЕРРА – НЬЮМЕНА

Ниже представлены энергии связанных состояний дираковских частиц в полях Шварцшильда, Райсснера – Нордстрёма, Керра, Керра – Ньюмена. Решения для последних трех полей получены методологически, таким же образом, как и для поля Шварцшильда в данной работе.

6.1. Поле Шварцшильда

$$\varepsilon_S = 0. \tag{49}$$

6.2. Поле Райсснера – Нордстрёма

$$(\rho_+)_{RN} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}, \quad (\rho_-)_{RN} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2},$$

$$\alpha^2 > \alpha_Q^2,$$

$$\varepsilon_{R-N} = \alpha_{em} / (\rho_+)_{RN}, \quad \rho \in [\rho_+, \infty), \tag{50}$$

$$\varepsilon_{R-N} = \alpha_{em} / (\rho_-)_{RN}, \quad \rho \in (0, \rho_-]. \tag{51}$$

6.3. Поле Керра

$$(\rho_+)_{K} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}, \quad (\rho_-)_{K} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2},$$

$$\alpha^2 > \alpha_a^2,$$

$$\varepsilon_K = \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + (\rho_+)^2_K}, \quad \rho \in [\rho_+, \infty), \quad (52)$$

$$\varepsilon_K = \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + (\rho_-)^2_K}, \quad \rho \in (0, \rho_-]. \quad (53)$$

6.4. Поле Керра – Ньюмена

$$(\rho_+)_{KN} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2},$$

$$(\rho_-)_{KN} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}, \quad \alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2,$$

$$\varepsilon_{K-N} = \frac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{em} (\rho_+)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_+)_{KN}^2}, \quad \rho \in [\rho_+, \infty), \quad (54)$$

$$\varepsilon_{K-N} = \frac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{em} (\rho_-)_{KN}}{\alpha_a^2 + (\rho_-)_{KN}^2}, \quad \rho \in (0, \rho_-]. \quad (55)$$

В формулах (50)–(55) введены новые обозначения:

$$\alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c}, \quad r_Q = \frac{\sqrt{G} Q}{c^2}, \quad \alpha_{em} = \frac{eQ}{\hbar c},$$

$$\alpha_a = \frac{a}{l_c}, \quad a = \frac{J}{Mc}.$$

Всюду разрешенным интервалом энергии частицы в связанном состоянии является интервал

$$-1 < \varepsilon < 1. \quad (56)$$

Для каждого из решений (50)–(55) существует квадратично-интегрируемая собственная волновая функция, являющаяся решением уравнения типа Шредингера с эффективным потенциалом. Обоснование указанных решений, а также поиск интервалов изменения α , α_Q , α_{em} , α_a , m_φ , при которых возможно существование стационарных связанных состояний исследуемых фермионов, требует отдельного рассмотрения.

7. СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ЧАСТИЦЫ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

Атомные системы со стационарными связанными состояниями частиц со спином 1/2 в полях коллапсаров, определяемыми решениями (49)–(55), могут являться кандидатами на роль частиц темной материи. Действительно, рассмотрим, например, решение (49) $\varepsilon_S = 0$ для поля Шварцшильда. В этом случае для коллапсара Шварцшильда с массой M

возможна атомная система со связанной частицей со спином 1/2 и $\varepsilon_S = 0$.

Атомная система — коллапсар Шварцшильда с незаряженной дираковской частицей с $\varepsilon_S = 0$ — взаимодействует с другими объектами лишь гравитационным образом. Из-за отсутствия квантовых переходов между состояниями с различными j, l такая система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. Обнаружить такую систему можно только через гравитационное взаимодействие. Массы таких систем при $\alpha \geq \alpha_{min}$ ограничены соотношением $Mm/M_p^2 \geq \alpha_{min}$ (см. (2)) и должны выбираться из условия наилучшего согласия со Стандартной космологической моделью.

Другие решения (50)–(55) применительно к проблеме темной материи здесь не обсуждаются.

8. ПЕРЕХОД ОТ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ К КЛАССИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ

Квантовая механика неиспаряющихся коллапсаров и черных дыр вблизи горизонтов событий не имеет классических аналогов, так как рассматриваемые объекты являются проявлением чрезвычайно сильных гравитационных полей. Связанные состояния фермионов с $\varepsilon = 0$ и локализацией частиц вблизи горизонтов событий коллапсаров, так же как для черных дыр резонансные состояния фермионов, распадающиеся со временем [8–13], сами по себе не могут иметь классических аналогов. Однако атомные системы, рассмотренные в разд. 7, с достаточно большим количеством связанных частиц со спином 1/2 могут привести к их классическому описанию. Рассмотрим атомную систему с коллапсаром Шварцшильда массой M , связанным фермионом с массой m_1 , $\varepsilon_1 = 0$ и константой гравитационного взаимодействия α_1 . Следующий фермион с массой m_2 будет находиться в гравитационных полях, генерируемых метрикой Шварцшильда с массой M и фермионом с массой m_1 . Эффективная константа взаимодействия для массы m_2 будет больше, чем первоначально для массы m_1 ($\alpha_2 > \alpha_1$) и второй фермион также может быть связан с энергией $\varepsilon_2 = 0$. Этот процесс может быть продолжен, и в случае $\sum m_i \gg M$ в условиях самосогласованного гравитационного поля влияние горизонта событий на вновь присоединяемые фермионы будет практически отсутствовать. В этом случае рассматриваемая система может описываться классической небесной механикой, и для тестовых частиц будут существовать замкнутые кеплеровы орбиты.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пределах применимости одночастичной квантовой механики в работе доказано существование стационарного решения уравнения второго порядка для частиц со спином 1/2 в поле Шварцшильда. Решение соответствует энергии состояния $E = 0$ (энергия связи $E_b = mc^2$). Для каждого из значений квантовых чисел j, l решение реализуется при значении гравитационной константы связи $\alpha > 0.25$. Связанные частицы с $E = 0$ с подавляющей вероятностью находятся на расстоянии от горизонта событий в интервалах от нуля до долей комптоновской длины волны фермиона в зависимости от величин α, j, l .

Сингулярность эффективного потенциала в окрестности горизонта событий при $\varepsilon_S = 0$ ($\sim -(3/32)/(\rho - \rho_+)^2$) допускает существование связанных состояний фермионов. Для решения $\varepsilon_S = 0$ важным является сохранение этой особенности потенциала при координатных преобразованиях метрики Шварцшильда к другим статическим, стационарным метрикам, предложенным в свое время с целью устранения координатной сингулярности исходной метрики на горизонте событий.

В работе [35] сохранение особенности эффективного потенциала (23) доказано для статической метрики Шварцшильда в изотропных координатах [36], для стационарной метрики Эддингтона–Финкельштейна [37, 38], для стационарной метрики Пенлеви–Гуллстранда [39, 40].

В работе обращается внимание на возможность использования в Стандартной космологической модели в качестве частиц темной материи коллапсаров Шварцшильда с фермионами, находящимися в связанных состояниях с $\varepsilon_S = 0$. Атомные системы такого типа не поглощают и не испускают свет и другие излучения и взаимодействуют с окружающей средой только гравитационным образом.

В итоге наше рассмотрение показывает, что использование самосопряженного уравнения второго порядка расширяет возможности получения регулярных решений квантовой механики движения частиц со спином 1/2 во внешних гравитационных и электромагнитных полях.

Авторы благодарят В. Е. Шемарулина за плодотворные дискуссии и А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Самосопряженное уравнение второго порядка для частиц со спином 1/2 в гравитационном поле Шварцшильда

Уравнение Дирака (6) с гамильтонианом (5) для стационарных состояний $\psi_\eta(t, \rho, \theta, \varphi) = e^{-i\varepsilon t} \psi_\eta(\rho, \theta, \varphi)$ можно записать в виде

$$(\varepsilon - H_\eta)\psi_\eta(\rho, \theta, \varphi) = 0. \tag{A.1}$$

Умножим слева равенство (A.1) на оператор $(\varepsilon + H_\eta)$:

$$(\varepsilon + H_\eta)(\varepsilon - H_\eta)\psi_\eta(\rho, \theta, \varphi) = 0. \tag{A.2}$$

С учетом (5) получаем

$$\left\{ \varepsilon^2 - f_S + \left(f_S \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) \left(f_S \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) + \frac{f_S}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i \Sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] - i \gamma^0 \gamma^3 f_S \frac{d}{d\rho} (\sqrt{f_S}) + f_S \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_S} \frac{1}{\rho} \right) \left[i \Sigma^3 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) - i \Sigma^1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\} \psi_\eta(\rho, \theta, \varphi) = 0. \tag{A.3}$$

В формуле (A.3), как и ранее в разд. 2.1, проведена эквивалентная замена матриц (9);

$$\Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}.$$

Уравнения Дирака для верхних и нижних компонент биспинора

$$\psi_\eta(\rho, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} U(\rho, \theta, \varphi) \\ W(\rho, \theta, \varphi) \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t} \tag{A.4}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} (\varepsilon - \sqrt{f_S}) U &= \left(-i\sigma^3 \left(f_S \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) - i\sigma^1 \sqrt{f_S} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) - i\sigma^2 \sqrt{f_S} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) W, \\ (\varepsilon + \sqrt{f_S}) W &= \left(-i\sigma^3 \left(f_S \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) - i\sigma^1 \sqrt{f_S} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) - i\sigma^2 \sqrt{f_S} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) U. \end{aligned} \tag{A.5}$$

В результате с учетом (A.5) уравнение (A.3) можно записать для одного из спиноров $U(\rho, \theta, \varphi)$ или $W(\rho, \theta, \varphi)$. Для спинора $U(\rho, \theta, \varphi)$ уравнение (A.3) имеет вид

$$\left\{ \varepsilon^2 - f_S + \left(f_S \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right)^2 + \frac{f_S}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + f_S \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_S} \frac{1}{\rho} \right) \times \right. \\ \times \left[i\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) - i\sigma^1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + f_S \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_S} \right) \frac{1}{\varepsilon + \sqrt{f_S}} \times \\ \left. \times \left[-f_S \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho^2} - i\sigma^2 \sqrt{f_S} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + i\sigma^1 \sqrt{f_S} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\} U(\rho, \theta, \varphi) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Далее можно провести разделение переменных. Из представления (7) следует

$$U(r, \theta, \varphi) = F(\rho) \xi(\theta) e^{im_\varphi \varphi}. \quad (\text{A.7})$$

Используя уравнение Брилла–Уилера (8) и его квадрированное представление [41]

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i\sigma^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \times \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \xi(\theta) e^{im_\varphi \varphi} = -\kappa^2 \xi(\theta) e^{im_\varphi \varphi}, \quad (\text{A.8})$$

можно получить уравнение второго порядка для радиальной функции $F(\rho)$:

$$\left\{ \varepsilon^2 - f_S + \left(f_S \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right)^2 - \frac{f_S \kappa^2}{\rho^2} + f_S \kappa \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_S} \frac{1}{\rho} \right) - f_S \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_S} \right) \frac{1}{\varepsilon + \sqrt{f_S}} \times \right. \\ \times \frac{\kappa \sqrt{f_S}}{\rho} - f_S \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f_S} \right) \frac{1}{\varepsilon + \sqrt{f_S}} \times \left. \times \left(f_S \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) \right\} F(\rho) = 0. \quad (\text{A.9})$$

В уравнении (A.9) третье и последнее слагаемые не являются самосопряженными. Для самосопряженности (A.9) проведем неунитарное преобразование подобия

$$F(\rho) = g_F^{-1}(\rho) \psi_F(\rho). \quad (\text{A.10})$$

Если обозначить в уравнениях (12)

$$A(\rho) = -\frac{1}{f_S} \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_S}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad (\text{A.11})$$

$$B(\rho) = \frac{1}{f_S} (\varepsilon + \sqrt{f_S}), \quad (\text{A.12})$$

$$C(\rho) = -\frac{1}{f_S} (\varepsilon - \sqrt{f_S}), \quad (\text{A.13})$$

$$D(\rho) = -\frac{1}{f_S} \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_S}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) \quad (\text{A.14})$$

и кроме этого ввести обозначения

$$A_F(\rho) = -\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} - A - D, \quad (\text{A.15})$$

$$A_G(\rho) = -\frac{1}{C} \frac{dC}{d\rho} - A - D, \quad (\text{A.16})$$

то искомое преобразование запишется как

$$g_F(\rho) = \exp \left(\frac{1}{2} \int A_F(\rho') d\rho' \right). \quad (\text{A.17})$$

В результате, если мы представим уравнение (A.9) в виде

$$\hat{M}F(\rho) = 0,$$

то преобразованное самосопряженное уравнение имеет вид

$$g_F \hat{M} g_F^{-1} \psi_F(\rho) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Уравнение (A.18) можно записать в виде уравнения второго порядка типа Шредингера с эффективным потенциалом $U_{eff}^F(\rho)$:

$$\frac{d^2 \psi_F}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F) \psi_F = 0, \quad (\text{A.19})$$

где

$$E_{Schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1), \quad (\text{A.20})$$

$$U_{eff}^F = -\frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} (A - D) \frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho} (A - D) + \frac{1}{8} (A - D)^2 + \frac{1}{2} BC + E_{Schr}. \quad (\text{A.21})$$

В уравнении (A.19) выделено и одновременно добавлено в (A.21) слагаемое E_{Schr} (A.20). Это сделано, с одной стороны, для придания уравнению (A.19) вида уравнения типа Шредингера, а с другой стороны, для обеспечения классической асимптотики эффективного потенциала при $\rho \rightarrow \infty$.

Для нижнего спинора $W(\rho, \theta, \varphi)$ с радиальной функцией $G(\rho)$ соответствующие формулы имеют вид

$$G(\rho) = g_G^{-1} \psi_G(\rho), \quad (\text{A.22})$$

$$g_G(\rho) = \exp\left(\frac{1}{2} \int A_G(\rho') d\rho'\right), \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{d^2 \psi_G}{d\rho^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^G) \psi_G = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$U_{eff}^G = -\frac{1}{4} \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\rho^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{C} \frac{dC}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{A-D}{C} \frac{dC}{d\rho} - \frac{1}{4} \frac{d}{d\rho}(A-D) + \frac{1}{8}(A-D)^2 + \frac{1}{2} BC + E_{Schr}. \quad (\text{A.25})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Эффективный потенциал поля Шварцшильда в уравнении типа Шредингера

В соответствии с (A.11)–(A.14), (A.21) можно получить

$$\frac{3}{8} \frac{1}{B^2} \left(\frac{dB}{d\rho}\right)^2 = \frac{3}{8} \left(\frac{2\alpha}{\rho(\rho-2\alpha)} - \frac{\alpha}{\varepsilon\rho(\rho-2\alpha)^{1/2} + \rho(\rho-2\alpha)}\right)^2, \quad (\text{B.1})$$

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\rho^2} = -\frac{2\alpha^2}{\rho^2(\rho-2\alpha)^2} - \frac{\alpha}{\rho^2(\rho-2\alpha)} + \frac{5}{4} \frac{\alpha^2}{\varepsilon\rho^{5/2}(\rho-2\alpha)^{3/2} + \rho^2(\rho-2\alpha)^2} + \frac{\alpha}{2[\varepsilon\rho^{5/2}(\rho-2\alpha)^{1/2} + \rho^2(\rho-2\alpha)]}, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d\rho}(A-D) = \frac{\kappa(\rho-\alpha)}{2\rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2}}, \quad (\text{B.3})$$

$$-\frac{1}{4} \frac{A-D}{B} \frac{dB}{d\rho} = -\frac{\alpha\kappa}{\rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2}} + \frac{\alpha\kappa}{2[\varepsilon\rho^2(\rho-2\alpha) + \rho^{3/2}(\rho-2\alpha)^{3/2}]}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{1}{8}(A-D)^2 = \frac{\kappa^2}{2\rho(\rho-2\alpha)}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{2} BC = -\frac{1}{2} \frac{\rho^2 \varepsilon^2}{(\rho-2\alpha)^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho-2\alpha}. \quad (\text{B.6})$$

Сумма выражений для E_{Schr} и (B.1)–(B.6) приводит к искомому выражению для эффективного потенциала U_{eff}^F . Асимптотика для него имеет вид

$$U_{eff}^F(\varepsilon=0)|_{\rho \rightarrow 2\alpha} = -\frac{3}{32(\rho-2\alpha)^2}. \quad (\text{B.7})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Forth edition, Clarendon Press, Oxford (1958).
2. Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, УФН **105**, 403 (1971) [Ya. B. Zeldovich and V. S. Popov, *Sov. Phys. Usp.* **14**, 673 (1972)].
3. K. Schwarzschild, *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin* **189–196** (1916).
4. N. Deruelle and R. Ruffini, *Phys. Lett. B* **52**, 437 (1974).
5. T. Damour, N. Deruelle, and R. Ruffini, *Lett. Nuovo Cim.* **15**, 257 (1976).
6. И. М. Тернов, В. П. Халилов, Г. А. Чижев, А. Б. Гаина, *Изв. вузов, физика* №9, 109 (1978).
7. А. Б. Гаина, Г. А. Чижев, *Изв. вузов, физика* №4, 120 (1980).
8. I. M. Ternov, A. B. Gaina, and G. A. Chizhov, *Sov. Phys. J.* **23**, 695 (1980).
9. D. V. Galtsov, G. V. Pomerantseva, and G. A. Chizhov, *Sov. Phys. J.* **26**, 743 (1983).
10. I. M. Ternov and A. B. Gaina, *Sov. Phys. J.* **31**(2), 157 (1988).
11. A. B. Gaina and O. B. Zaslavskii, *Class. Quant. Grav.* **9**, 667 (1992).
12. A. B. Gaina and N. I. Ionescu-Pallas, *Rom. J. Phys.* **38**, 729 (1993).
13. A. Lasenby, C. Doran, J. Pritchard, A. Caceres, and S. Dolan, *Phys. Rev. D* **72**, 105014 (2005).
14. D. Batic, M. Nowakowski, and K. Morgan, *Universe* **2**, 31 (2016), doi:10.3390/universe2040031.
15. F. Finster, J. Smoller, and S.-T. Yau, *J. Math. Phys.* **41**, 2173 (2000).
16. F. Finster, N. Kamran, J. Smoller, and S.-T. Yau, *Comm. Pure Appl. Math.* **53**, 902 (2000).
17. F. Finster, N. Kamran, J. Smoller, and S.-T. Yau, *Comm. Pure Appl. Math.* **53**, 1201 (2000).

18. H. Reissner, *Ann. Phys.* **50**, 106 (1916); C. Nordström, *Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam* **20**, 1238 (1918).
19. R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963).
20. E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence, *J. Math. Phys.* **6**, 918 (1965).
21. L. Parker, *Phys. Rev. D* **22**, 1922 (1980).
22. M. V. Gorbatenko and V. P. Neznamov, *Phys. Rev. D* **83**, 105002 (2011); arxiv:1102.4067v1 (gr-qc).
23. M. V. Gorbatenko and V. P. Neznamov, *Phys. Rev. D* **82**, 104056 (2010); arxiv:1007.4631 (gr-qc).
24. M. V. Gorbatenko and V. P. Neznamov, *J. Mod. Phys.* **6**, 303 (2015); arxiv:1107.0844 [gr-qc].
25. H. Pruefer, *Math. Ann.* **95**, 499 (1926).
26. I. Ulehla and M. Havlíček, *Appl. Math.* **25**, 358 (1980).
27. I. Ulehla, M. Havlíček, and J. Hořejší, *Phys. Lett. A* **82**, 64 (1981).
28. I. Ulehla, Rutherford Laboratory preprint RL-82-095 (1982).
29. D. R. Brill and J. A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 465 (1957).
30. L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950); В. П. Незнамов, *ЭЧАЯ* **37**, 10, 152 (2006) [*Part. Nucl.* **37**(1), 86 (2006)]; V. P. Neznamov and A. J. Silenko, *J. Math. Phys.* **50**, 122301 (2009).
31. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматгиз, Москва (1963) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford (1965)].
32. M. V. Gorbatenko, V. P. Neznamov, and E. Y. Popov, *Gravitation and Cosmology* **23**(3), 245 (2017), DOI:10.1134/S0202289317030057; arxiv:1511.05058 (gr-qc).
33. E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer-Verlag (1996); Э. Хайпер, Г. Ваннер, *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, Москва (1999).
34. W. Pieper and W. Griener, *Zs. Phys.* **218**, 327 (1969).
35. М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов, ВАНТ, сер. Теоретическая и прикладная физика, вып. 1, с. 62 (2018).
36. A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1924).
37. A. S. Eddington, *Nature* **113**, 192 (1924).
38. D. Finkelstein, *Phys. Rev.* **110**, 965 (1958).
39. P. Painleve, *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **173**, 677 (1921); A. Gullstrand, *Arkiv. Mat. Astron. Fys.* **16**, 1 (1922).
40. A. Gullstrand, *Arkiv. Mat. Astron. Fys.* **16**, 1 (1922).
41. S. R. Dolan, Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Lab., Dissertation (2006).