

ДВИЖЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ ВБЛИЗИ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ШВАРЦШИЛЬДА В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ

*М. Шариф**, *М. Шахзади***

*Математический факультет, Пенджабский университет
54590, Лахор, Пакистан*

Поступила в редакцию 1 марта 2018 г.

(Перевод с английского)

NEUTRAL PARTICLE MOTION AROUND A SCHWARZSCHILD BLACK HOLE IN MODIFIED GRAVITY

M. Sharif, M. Shahzadi

Исследуется круговое движение нейтральной пробной частицы в экваториальной плоскости вблизи черной дыры в скалярно-тензорно-векторной гравитации. Чтобы найти области, где такое движение возможно, рассмотрены три случая: $\alpha < G/G_N$, $\alpha = G/G_N$ и $\alpha > G/G_N$. Вычислены соответствующие эффективный потенциал, энергия, момент импульса и энергия в системе центра масс. Определены четыре различных случая при $\alpha > G/G_N$, а также области устойчивых и неустойчивых круговых орбит. Найдено, что круговые орбиты, имеющие нулевой момент импульса, существуют при $r = \alpha G_N M$ вследствие гравитационных эффектов отталкивания. Оказалось, что структура устойчивых областей в случаях $\alpha < G/G_N$ и $\alpha = G/G_N$ существенно отличается от таковой в случае $\alpha > G/G_N$.

DOI: 10.1134/S0044451018090122

1. ВВЕДЕНИЕ

Модифицированная гравитация (МОГ) или скалярно-тензорно-векторная гравитация (СТВГ) описывается с помощью действия трех скалярных полей и массивного векторного поля, действия материи и члена Эйнштейна–Гильберта. Эта теория используется при изучении кривых вращения галактик, гравитационного линзирования галактик, а также скоплений галактик и ускоренного расширения Вселенной без учета темной материи [1]. В работе [2] рассматривались кривые вращения галактик и сравнивались модифицированный закон ускорения в СТВГ с гравитацией четвертого порядка и с модифицированной ньютоновской динамикой. В работе [3] исследовалось приближение слабого поля для те-

стирования динамики скопления галактик в СТВГ. В работе [4] анализировались тени черных дыр (ЧД) в рамках той же теории и было найдено, что размер тени увеличивается при увеличении параметра α . В работе [5] исследовались точные решения в рамках подхода, основанного на симметрии Нетер для локально-вращательно-симметричной модели Бьянки типа-I. В работе [6] исследовалась термодинамика ЧД (как невращающихся, так и вращающихся) в МОГ и было обнаружено, что при увеличении параметра α изменяется энтропийный закон для площади. В этой работе также были получены логарифмические поправки для термодинамики невращающихся ЧД. В работе [7] обсуждались гравитационные волны и закономерность их возникновения с учетом данных коллаборации LIGO–VIRGO. В этой работе были получены линеаризованные полевые уравнения, а также обнаружено уменьшение радиуса бинарной системы, включающей два компактных объекта.

* E-mail: msharif.math@pu.edu.pk

** E-mail: misbahshahzadi51@gmail.com

В последнее время изучение движения частиц (нейтральных или заряженных, массивных или безмассовых) вблизи ЧД продолжает вызывать интерес ученых, работающих в области астрофизики ЧД. Геодезические помогают понять геометрическую структуру пространства-времени и высокоэнергетические явления, происходящие вблизи ЧД. В работе [8] исследовалось движение массивной пробной частицы вблизи ЧД в рамках теории Каллунца–Клейна и было показано существование устойчивых круговых орбит ниже шварцшильдовского предела ($r = 6M$, где r и M — радиус и масса ЧД). В настоящей работе мы используем геометризованные единицы ($G = c = 1$). В работе [9] исследовалось движение нейтральной частицы по круговым орбитам вблизи ЧД Райснера–Нордстрема. Оказалось, что область устойчивости круговых орбит вблизи ЧД является непрерывной, а для голой сингулярности область устойчивости разбивается на две несвязанные области. Те же авторы в работе [10], являющейся продолжением предыдущей работы, получили, что для ЧД Керра и ЧД Керра–Ньюмана для идентификации голой сингулярности достаточно наличия вращающейся в противоположном направлении пробной частицы определенного типа.

В работе [11] было показано, что для радиальных светоподобных геодезических структура ЧД Шварцшильда–анти-де Ситтера аналогична структуре ЧД Шварцшильда, в то время как для нерадиальных светоподобных геодезических при $E^2 > L^2/l^2$ существуют замкнутые орбиты. В работе было также найдено, что такие орбиты соответствуют захваченным фотонам и не существуют для ЧД Шварцшильда. В работе [12] исследовались светоподобные геодезические для экстремальной ЧД Райснера–Нордстрема и было показано существование устойчивых круговых геодезических на горизонте событий. В работе [13] обсуждались времениподобные геодезические вокруг ЧД Шварцшильда в МОГ и было получено, что самая внутренняя устойчивая круговая орбита более устойчива, чем соответствующая круговая орбита для ЧД Шварцшильда. В работе [14] были найдены области внутри эрго-области ЧД Керра и было установлено, что распределение круговых орбит зависит от параметра вращения источника. В работе [15] рассматривалось движение частицы вокруг четырехмерной асимптотически анти-де-ситтеровской ЧД со скалярными волосами и было получено, что радиальное движение эквивалентно соответствующему движению для анти-де-ситтеровской ЧД Шварцшильда. В недавней работе [16] мы исследовали динамику частицы,

движущейся вблизи ЧД Керра в МОГ, и получили, что в этом случае круговые орбиты менее устойчивы как по сравнению с ЧД Керра, так и по сравнению с ЧД Шварцшильда.

При столкновении частиц рождаются новые частицы, это требует соответствующего количества энергии, известной как энергия в системе центра масс (ЭЦМ). В работе [17] было получено, что при столкновении двух бесспиновых частиц, имеющих равные массы и ускоряющихся гравитационным полем вблизи ЧД Шварцшильда, выделяется максимальная ЭЦМ. В работе [18] было показано, что частица, рожденная в процессе столкновения, может не упасть в ЧД, но претерпевает сильный сдвиг в красную область. В работе [19] было показано, что бесконечная ЭЦМ для взаимодействующих частиц, движущихся вблизи ЧД Керра, может быть получена только на внешнем горизонте на бесконечных временах. В работе [20] рассматривалась ЭЦМ для двух нейтральных частиц вблизи горизонтов для экстремальной и неэкстремальной ЧД Керра–Ньюмана–Тауба–НУТ (Ньюман–Унти–Тамбурино) и было найдено, что высокую энергию можно получить при тех же условиях. В работе [21] было обнаружено увеличение ЭЦМ при столкновениях вращающихся массивных частиц вблизи ЧД Шварцшильда, если их спин передается в ЧД.

В настоящей работе мы рассматриваем круговое движение нейтральных пробных частиц вблизи ЧД Шварцшильда в МОГ для трех случаев, а именно, $\alpha < G/G_N$, $\alpha = G/G_N$ и $\alpha > G/G_N$. Работа построена следующим образом. В следующем разделе мы рассматриваем эффективный потенциал пробной частицы, движущейся в экваториальной плоскости вблизи ЧД Шварцшильда в МОГ для случаев $\alpha < G/G_N$, $\alpha = G/G_N$ и $\alpha > G/G_N$. Кроме того, мы выводим уравнения для круговых орбит и для последней устойчивой круговой орбиты. Также вычисляются энергия и момент импульса этих частиц. Раздел 3 посвящен исследованию ЭЦМ двух сталкивающихся частиц. Наконец, в последнем разделе приведены результаты.

2. ЧЕРНАЯ ДЫРА ШВАРЦШИЛЬДА В МОГ

Черная дыра Шварцшильда в МОГ представляет собой статическое сферически-симметричное и асимптотически плоское решение полевых уравнений МОГ. Линейный элемент, представляющий ЧД

Шварцшильда в МОГ, имеет вид [22]

$$ds^2 = -Z(r) dt^2 + Z^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1)$$

где

$$Z(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{\alpha G_N GM^2}{r^2}.$$

Здесь $G = G_N(1 + \alpha)$ — гравитационная постоянная, α — безразмерный параметр, определяющий напряженность гравитационного поля, M — масса ЧД, а G_N — ньютоновская гравитационная постоянная. При $\alpha = 0$ ЧД в МОГ редуцируется к ЧД Шварцшильда. Вычисляя корни уравнения $Z(r) = 0$, можно получить выражения для горизонтов для метрики (1):

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - \alpha G_N GM^2},$$

где знаки « \pm » относятся к внешнему и внутреннему горизонтам, соответственно.

Рассмотрим круговое движение пробной частицы, имеющей массу μ , для случая ЧД Шварцшильда в МОГ. Ограничимся случаем орбит, расположенных в экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$ и $d\theta/d\tau = 0$, τ — собственное время). 4-импульс частицы

$$p^\nu = \mu \dot{x}^\nu,$$

где \dot{x}^ν — касательная к кривой $x^\nu(\tau)$, можно нормировать как

$$g_{\nu\eta} \dot{x}^\nu \dot{x}^\eta = -k,$$

где $k = -1, 0, 1$ соответствуют пространственно-подобной, свето-подобной и времени-подобной кривым. Для случая ЧД Шварцшильда в МОГ приведенное выше уравнение дает

$$-Z(r) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{Z(r)} + r^2 \dot{\phi}^2 = -k. \quad (2)$$

Поскольку компоненты метрики не зависят от t и ϕ , 4-импульс частицы, т.е. p_t и p_ϕ , сохраняется вдоль геодезических, что дает

$$E = -g_{\nu\eta} \xi_t^\nu p^\eta = \mu \dot{t} Z(r), \quad L = g_{\nu\eta} \xi_\phi^\nu p^\eta = \mu r^2 \dot{\phi}.$$

Здесь E и L интерпретируются как энергия и момент импульса частицы, связанные с векторными полями Киллинга $\xi_t = \partial_t$ и $\xi_\phi = \partial_\phi$, соответственно.

Тогда уравнение (2) приобретает вид

$$-\frac{E^2}{\mu^2 Z(r)} + \frac{\dot{r}^2}{Z(r)} + \frac{L^2}{\mu^2 r^2} = -k,$$

что можно переписать как

$$\dot{r}^2 + U_{eff}^2 = \frac{E^2}{\mu^2}, \quad (3)$$

где

$$U_{eff} \equiv \sqrt{\left(k + \frac{L^2}{r^2 \mu^2}\right) \left\{1 - \frac{2GM}{r} + \frac{\alpha G_N GM^2}{r^2}\right\}}$$

— эффективный потенциал. Максимальное и минимальные значения U_{eff} определяют неустойчивые и устойчивые круговые орбиты, а экстремальные значения U_{eff} соответствуют $U_{eff,r} = 0$. Экстремумы эффективного потенциала связаны с круговыми орбитами ($\dot{r} = 0$) [23]. Решая уравнение $U_{eff,r} = 0$, получаем

$$\frac{L^2}{\mu^2} = \frac{k r^2 (GM r - \alpha G_N GM^2)}{r^2 - 3GM r + 2\alpha G_N GM^2}. \quad (4)$$

Подставляя приведенное выше выражение в уравнение (3), получаем

$$\frac{E^2}{\mu^2} = \frac{k (r^2 - 2GM r + \alpha G_N GM^2)^2}{r^2 (r^2 - 3GM r + 2\alpha G_N GM^2)}. \quad (5)$$

Подставляя выражение (4) в уравнение для эффективного потенциала и дифференцируя, получаем

$$GM r^3 - 6G^2 M^2 r^2 + 9GM r (\alpha G_N GM^2) - 4(\alpha G_N GM^2)^2 = 0, \quad (6)$$

где мы выбрали $k = 1$ и $\mu = 1$. С помощью этого уравнения можно получить радиус устойчивой круговой орбиты.

Для обсуждения движения частицы рассмотрим три случая: случай I, $\alpha < G/G_N$; случай II, $\alpha = G/G_N$ и случай III, $\alpha > G/G_N$.

2.1. Случай I, $\alpha < G/G_N$

Сначала рассмотрим неэкстремальный случай ЧД Шварцшильда в МОГ. Из уравнений (4) и (5) следует, что движение происходит только при

$$r > \alpha G_N M = r^*$$

и

$$r^2 - 3GM r + 2\alpha G_N GM^2 > 0,$$

т.е.

$$\tilde{r}_+ < r < \tilde{r}_-,$$

где

$$\tilde{r}_{\pm} = \frac{3GM \pm \sqrt{9G^2 M^2 - 8\alpha G_N GM^2}}{2}.$$

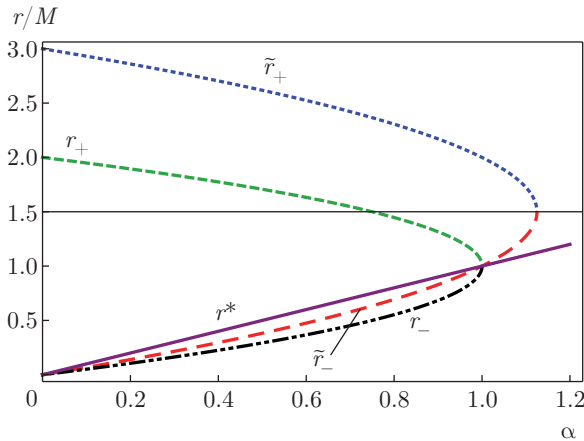


Рис. 1. Зависимости радиусов \tilde{r}_+ , \tilde{r}_- , r_+ , r_- и r^* от параметра α для случая I

Более того, движение осуществляется вдоль пространственно-подобных геодезических при $r < r^*$ и $r \in (\tilde{r}_-, \tilde{r}_+)$, а случай $r = \tilde{r}_+$ соответствует светоподобным геодезическим. Кроме того, имеем

$$r_- < \tilde{r}_- < r^* < r_+ < \tilde{r}_+ \text{ при } \alpha \neq 0,$$

$$r_+ = r_- = \tilde{r}_- = r^* \text{ при } \alpha = \frac{G}{G_N},$$

$$r_- = \tilde{r}_- = r^* \text{ при } \alpha = 0.$$

Зависимости радиусов от параметра α показаны на рис. 1.

Обсудим теперь только времени-подобные круговые орбиты ($r > \tilde{r}_+$). Графики зависимостей энергии E/μ и момента импульса $L/\mu M$ от параметра r/M для круговых орбит показаны на рис. 2. На рисунке видно, что значения энергии и момента импульса при $\alpha = 0.3$ меньше, чем соответствующие значения для ЧД Шварцшильда ($\alpha = 0$).

Чтобы найти радиус круговой орбиты r_{co} , решим уравнение $U_{eff,r} = 0$:

$$GMr^3 - \left(\frac{L^2}{\mu^2} + \alpha G_N GM^2 \right) r^2 + \frac{3GML^2}{\mu^2} r - \frac{2\alpha G_N GM^2 L^2}{\mu^2} = 0. \quad (7)$$

Вообще говоря, внутри области $r > \tilde{r}_+$ круговые орбиты существуют не всегда. При $\alpha = 0$ круговые орбиты возможны только при $|L/\mu M| > 3.47$, а при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0.3$ — при $|L/\mu M| > 2.94$ и $|L/\mu M| > 3.31$, соответственно. Поэтому было бы интересно исследовать свойства устойчивости при $r = r_{co}$. Минимальный радиус устойчивой круговой орбиты соответствует точкам перегиба функции эффективного потенциала [24]. Чтобы найти радиус последней устойчивой круговой орбиты r_{lsc0} , решим уравнение (6) относительно r , что дает

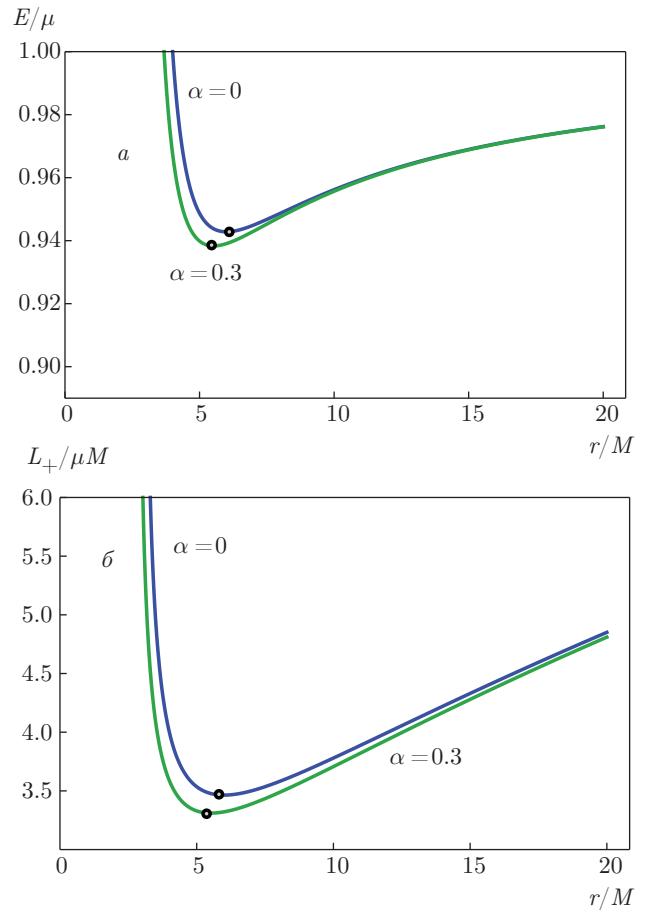


Рис. 2. Зависимости энергии E/μ (а) и момента импульса $L_+/\mu M \equiv L^*$ (б) для круговых орбит для различных значений параметра α для случая I

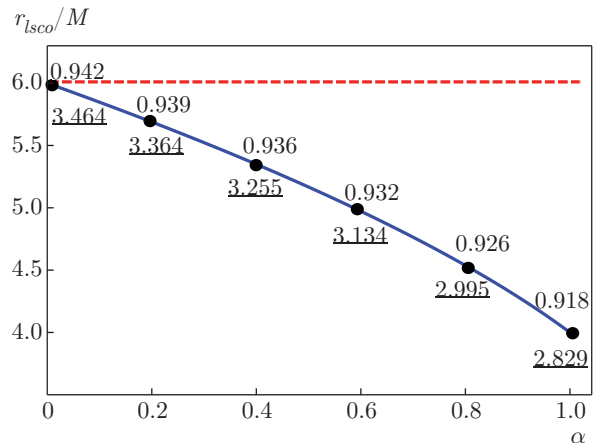


Рис. 3. Зависимости радиуса последней устойчивой круговой орбиты r_{lsc0}/M от параметра α для случая I. Предел Шварцшильда ($r_{lsc0} = 6M$) показан штриховой линией. Подчеркнутые величины соответствуют значениям момента импульса $L/\mu M$, а величины рядом с точками — значениям энергии E/μ для соответствующих орбит

$$\frac{r_{lSCO}}{M} = 2 + \frac{\left[4 - \frac{3\alpha G_N}{G} + \left[8 + 2 \left(\frac{\alpha G_N}{G} \right)^2 + \frac{\alpha G_N \left(-9 + \sqrt{5 - \frac{9\alpha G_N}{G} + \left(\frac{2\alpha G_N}{G} \right)^2} \right)}{G} \right]^{2/3} \right]}{\left[8 + 2 \left(\frac{\alpha G_N}{G} \right)^2 + \frac{\alpha G_N \left(-9 + \sqrt{5 - \frac{9\alpha G_N}{G} + \left(\frac{2\alpha G_N}{G} \right)^2} \right)}{G} \right]^{1/3}}. \quad (8)$$

При $\alpha = 0$ получаем шварцшильдовский предел

$$r_{lSCO}^{max} = 6M.$$

На рис. 3 видно, что при возрастании α радиус r_{lSCO} убывает и при $\alpha = 1$ достигает своего минимального значения

$$r_{lSCO}^{min} = 4M.$$

Следует отметить, что радиус последней устойчивой круговой орбиты лежит ниже шварцшильдовского предела, причем $r_{lSCO} < 6M$ при всех $\alpha > 0$. Круговые орбиты являются устойчивыми при $r > r_{lSCO}$ и неустойчивыми при $\tilde{r}_+ < r < r_{lSCO}$.

Выражения для энергии и момента импульса частицы для последней устойчивой круговой орбиты мы получаем, подставляя уравнение (8) в уравнения (4) и (5). Соответствующие зависимости представлены на рис. 4. Видно, что как энергия, так и момент импульса для последней устойчивой круговой орбиты убывают при возрастании α . При $\alpha > 0$ значения E_{lSCO}/M и $L_{lSCO}/\mu M$ всегда лежат ниже шварцшильдовского предела. Вообще говоря, из того, что при увеличении α значения r_{lSCO} , E_{lSCO}/M и $L_{lSCO}/\mu M$ уменьшаются, следует, что дополнительное гравитационное поле, порожденное параметром α , действует на нейтральную частицу как дополнительная притягивающая сила, уменьшающая радиус последней устойчивой круговой орбиты.

На рис. 5 представлены зависимости эффективного потенциала от параметра r/M при различных значениях $L_+/\mu M = L^*$. Видно, что минимальное значение $U_{eff}^{min} \approx 0.88$ соответствует $r_{min} \approx 5.52M$ и $L^* \approx 3.31$, а максимальное значение $U_{eff}^{max} \approx 2.97$ соответствует значениям $r \approx 2.87$ и $L^* = 8$. При подходе к внешнему горизонту $r_+ = 1.836$ эффективный потенциал достигает глобального минимума, т.е. становится равным нулю.

2.2. Случай II, $\alpha = G/G_N$

В данном разделе мы рассмотрим случай экстремальной ЧД ($\alpha = G/G_N$), для которой $\tilde{r}_+ = 2GM$. Кроме того, внутренний и внешний горизонты совпадают с $r_{\pm} = GM$. Используя уравнение (3), запишем эффективный потенциал в виде

$$U_{eff} = \sqrt{1 + \frac{L^2}{r^2 \mu^2} \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)}. \quad (9)$$

При $r \rightarrow \infty$ имеем $U_{eff} \rightarrow 1$. Зависимости эффективного потенциала от параметра r/M при различных значениях L^* для случая экстремальной ЧД приведены на рис. 6. На рисунке видно, что U_{eff} обращается в нуль на горизонте. Минимальное значение $U_{eff}^{min} \approx 0.91$ достигается при $L^* \approx 2.83$ и $r_{min} = 4M$, а максимальные $U_{eff}^{max} \approx 1.83$ и $U_{eff}^{max} \approx 2.32$ — при $L^* \approx 7$, $r \approx 2.04$ и $L^* = 9$, $r \approx 2.06$, соответственно. Используя уравнение (9), для радиуса круговой орбиты получаем

$$\frac{r_{co}}{M} = \frac{L^2 - L\sqrt{L^2 - 8G^2M^2\mu^2}}{2G^2M^2\mu^2}.$$

Соответствующие энергия и момент импульса частицы, движущейся по круговой орбите, определяются как

$$\frac{E^2}{\mu^2} = \frac{(r - GM)^3}{r^2 (r - 2GM)},$$

$$\frac{L^2}{\mu^2} = \frac{GM r^2}{r - 2GM}.$$

При $r \rightarrow 2GM$ эти величины расходятся, откуда следует, что движение происходит вдоль светоподобных геодезических только при $r = \tilde{r}_+$, так что времени-подобные круговые орбиты существуют при $r > 2GM$. На рис. 7 приведены зависимости энергии и момента импульса частицы, движущейся вблизи экстремальной ЧД Шварцшильда в МОГ. Локальный минимум соответствует радиусу последней устойчивой круговой орбиты. Видно, что при возрастании r энергия и момент импульса возрастают. При $r = r_{lSCO} = 4M$ имеем $E \approx 0.918\mu$ и $L \approx 2.82\mu M$.

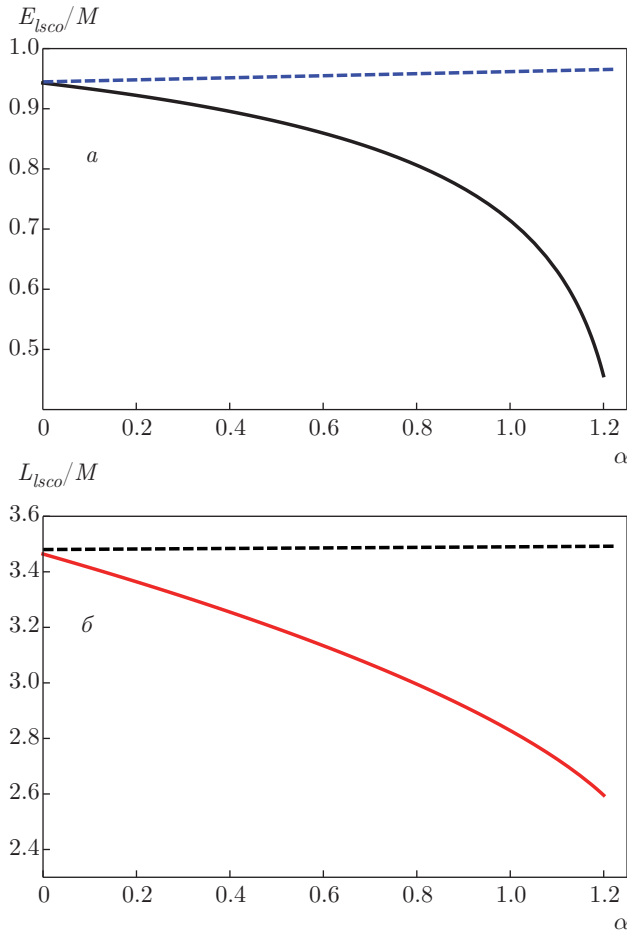


Рис. 4. Зависимости энергии E_{lSCO}/M (а) и момента импульса $L_{lSCO}/M\mu$ (б) частицы для последней устойчивой круговой орбиты от параметра α для случая I

2.3. Случай III, $\alpha > G/G_N$

В данном разделе мы рассмотрим движение нейтральной пробной частицы для случая голой сингулярности ($\alpha > G/G_N$). Можно вычислить соответствующие энергию и момент импульса частицы:

$$\frac{E}{\mu} = \frac{r^2 - 2GMr + \alpha G_N GM^2}{r\sqrt{r^2 - 3GMr + 2\alpha G_N GM^2}},$$

$$\frac{L}{\mu} = r\sqrt{\frac{GMr - \alpha G_N GM^2}{r^2 - 3GMr + 2\alpha G_N GM^2}}.$$

Основываясь на уравнениях (4) и (5), рассмотрим четыре различных случая.

- (i) $r = r^* = \alpha G_N M$,
- (ii) $1 < \alpha G_N/G < 9/8$,
- (iii) $\alpha G_N/G = 9/8$,
- (iv) $\alpha G_N/G > 9/8$.

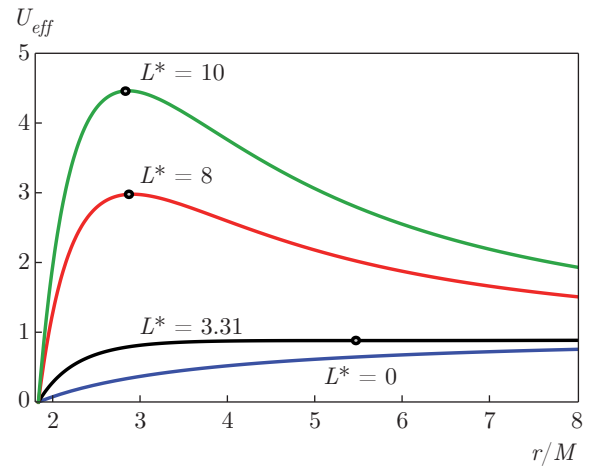


Рис. 5. Зависимости эффективного потенциала U_{eff} от параметра r/M для случая I при $\alpha = 0.3$ при различных значениях L^* . Внешнему горизонту соответствует значение $r_+ \approx 1.836$

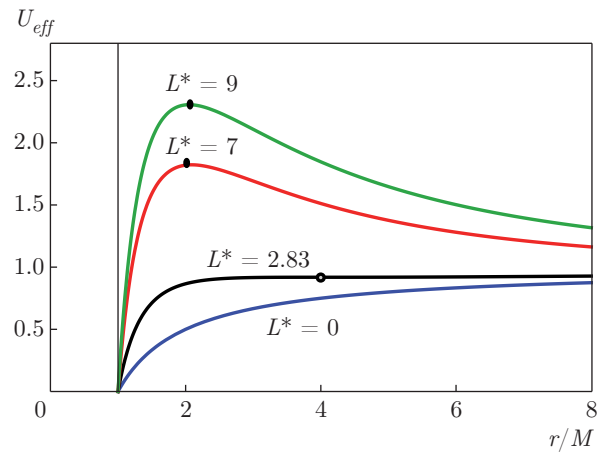


Рис. 6. Зависимости эффективного потенциала U_{eff} от параметра r/M для случая II при различных значениях L^*

Таблица. Значения момента импульса, радиуса и эффективного потенциала

α	L^*	r_{min}	U_{eff}^{min}
1.09	0	1.09	0.31
1.09	2.69	1.22	0.78
1.2	0	1.2	0.41
1.2	3.34	9	0.94
1.3	0	1.3	0.48
1.3	2	3.78	0.85

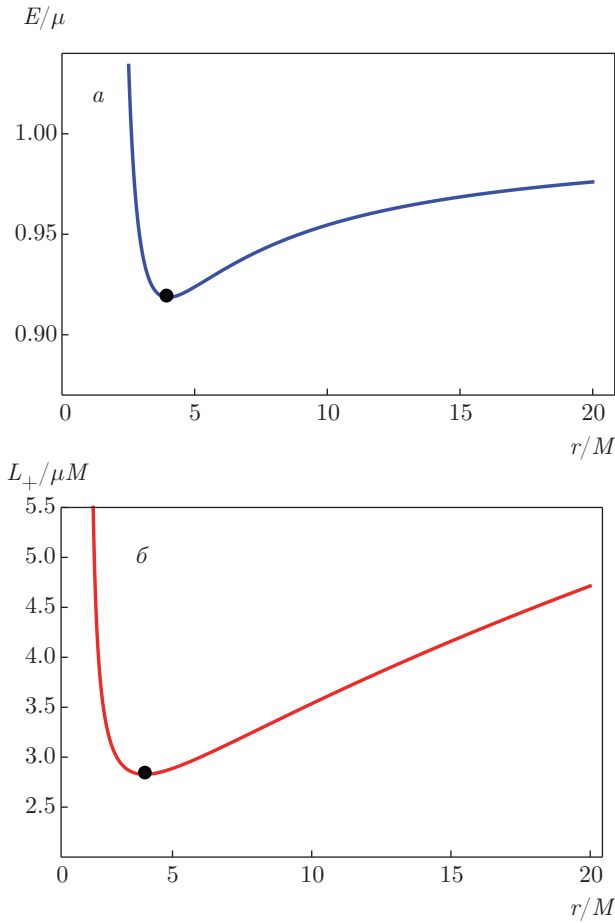


Рис. 7. Зависимости энергии E/μ (а) и момента импульса $L_+/\mu M \equiv L^*$ (б) частицы, движущейся по круговой орбите, для случая II

На рис. 8 приведены зависимости эффективного потенциала при различных значениях α . Соответствующие минимальные значения приведены в таблице. При $\alpha = 1.09$ имеем $\tilde{r}_+ \approx 1.76$ и $\tilde{r}_- \approx 1.23$. На рисунке видно, что неравенство $r^* \leq \tilde{r}_- \leq \tilde{r}_+$ выполнено при $\alpha > G/G_N$, где

$$\tilde{r}_\pm = \frac{3GM \pm \sqrt{9G^2M^2 - 8\alpha G_N GM^2}}{2}$$

— радиусы, соответствующие энергии и моменту импульса частицы [25]. Используя уравнения (4) и (5), рассмотрим четыре различных случая:

- (i) $r = r^* = \alpha G_N M$,
- (ii) $1 < \alpha G_N / G < 9/8$,
- (iii) $\alpha G_N / G = 9/8$,
- (iv) $\alpha G_N / G > 9/8$.

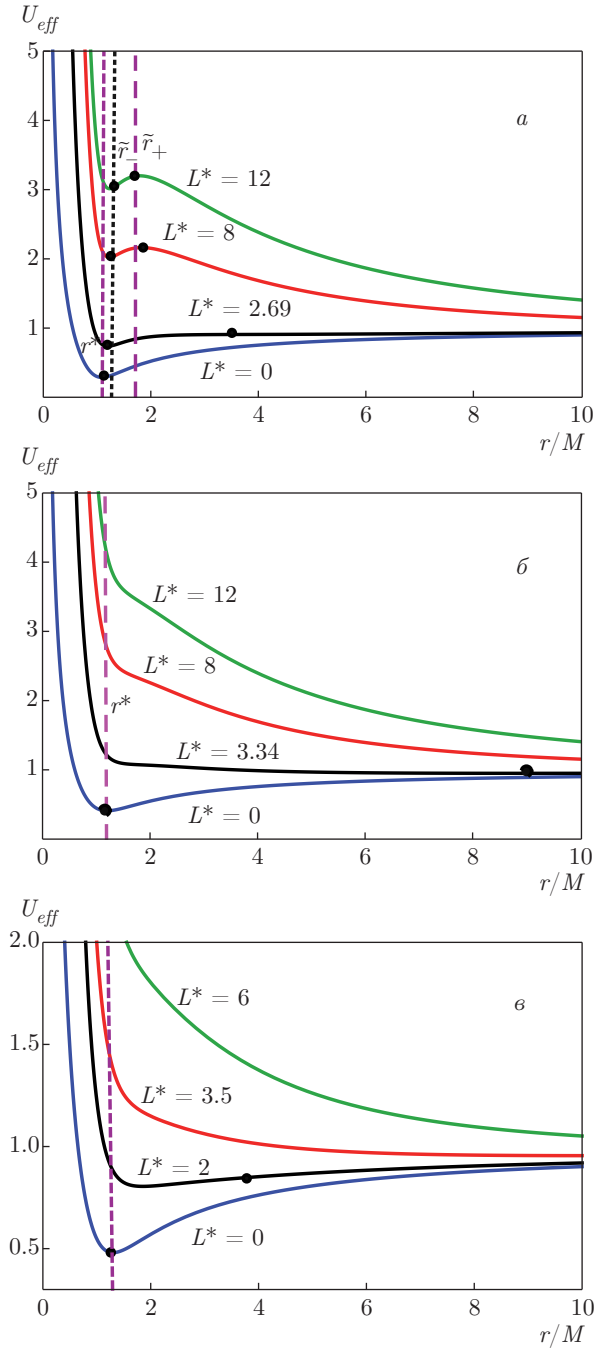


Рис. 8. Зависимости эффективного потенциала для случая III при $\alpha = 1.09$ (а), 1.2 (б) и 1.3 (в)

Случай (i), $r = r^*$

В этом случае энергия и момент импульса определяются как

$$\frac{E}{\mu} = \sqrt{1 - \frac{G^2 M^2}{\alpha G_N G M^2}}, \quad L = 0,$$

что означает, что частицы остаются статическими по отношению к наблюдателю, находящемуся на

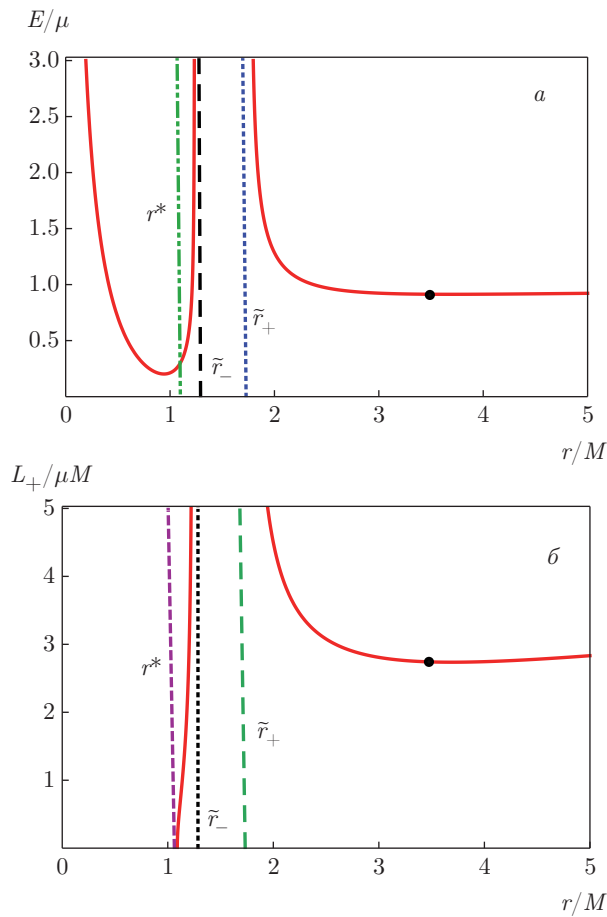


Рис. 9. Зависимости энергии E/μ (а) и момента импульса $L_+/\mu M$ (б) для случая III, $\alpha = 1.09 < 9/8$

бесконечности. Как можно видеть, частицы могут приближаться к радиусу r^* как при $\alpha < G/G_N$, так и при $\alpha = G/G_N$, при этом r^* расположен внутри внешнего горизонта и пробные частицы не могут его достичь.

Случай (ii), $1 < \alpha G_N/G < 9/8$

Для этого случая круговые орбиты могут существовать внутри областей $r^* < r < \tilde{r}_-$ и $r > \tilde{r}_+$. Светоподобные геодезические определяются границами $r = \tilde{r}_\pm$. Это указывает на то, что в областях $r \in [\tilde{r}_-, \tilde{r}_+]$ и $r < r^*$ невозможно обнаружить времени-подобные частицы. Зависимости энергии E/μ и момента импульса $L_+/\mu M$ показаны на рис. 9. При $\alpha G_N/G \rightarrow 1$ радиус r^* совпадает с радиусом \tilde{r}_- , так что частица, которая остается статической при $r = r^*$, должна быть фотоном.

Случай (iii), $\alpha G_N/G = 9/8$

В этом случае внешняя и внутренняя орбиты пробной частицы совпадают. Времени-подобные

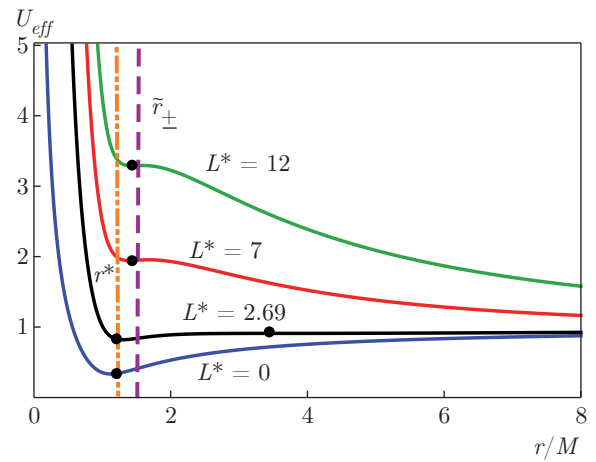


Рис. 10. Зависимости эффективного потенциала для случая III, $\alpha = 9/8$

круговые орбиты существуют при всех $r > r^*$, кроме $r = \tilde{r}_\pm = 3GM/2$ (что соответствует орбите фотона). Энергия и момент импульса круговых орбит определяются как

$$\frac{E}{\mu} = \frac{r^2 - 2GMr + \frac{9}{8}G^2M^2}{r \left(r - \frac{3}{2}GM \right)},$$

$$\frac{L_+}{\mu} = r \frac{\sqrt{GM \left(r - \frac{9}{8}GM \right)}}{r - \frac{3}{2}GM}.$$

Зависимости эффективного потенциала, энергии и момента импульса показаны на рис. 10 и 11. Из рисунков видно, что большему значению L^* соответствует большее значение эффективного потенциала. При этом значению $\tau_{min} \approx 3.55$ соответствуют значения энергии $E = 0.91\mu$ и момента импульса $L = 2.72\mu M$.

Случай (iv), $\alpha G_N/G > 9/8$

В этом случае орбиты фотонов не могут существовать, при этом времени-подобные круговые орбиты возможны для всех $r > r^*$. Зависимость эффективного потенциала такая же, как на рис. 8б и в. Зависимости энергии и момента импульса приведены на рис. 12 и 13. При $\alpha = 1.2$ минимальные значения $E_{min}/\mu \approx 0.9$ и $L_{min}^* = 2.60$ соответствуют $r_{min} \approx 3.15$. Из рисунков видно, что как энергия, так и момент импульса возрастают при возрастании радиуса орбиты, при этом $E = \mu$ при больших значениях r . Для исследования устойчивости круговых орбит вблизи ЧД Шварцшильда в МОГ при $\alpha > G/G_N$ решаем уравнение (6) и находим

$$\begin{aligned}
 r_{lsc0}^+ &= 2GM - 2\sqrt{4G^2M^2 - 3\alpha G_N GM^2} \times \\
 &\times \sin \left[\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{8G^4M^4 - 9G^2M^2(\alpha G_N GM^2) + 2(\alpha G_N GM^2)^2}{GM(4G^2M^2 - 3\alpha G_N GM^2)^{3/2}} \right) \right], \\
 r_{lsc0}^- &= 2GM + 2\sqrt{4G^2M^2 - 3\alpha G_N GM^2} \times \\
 &\times \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{8G^4M^4 - 9G^2M^2(\alpha G_N GM^2) + 2(\alpha G_N GM^2)^2}{GM(4G^2M^2 - 3\alpha G_N GM^2)^{3/2}} \right) \right], \\
 r_c &= 2GM - 2\sqrt{4G^2M^2 - 3\alpha G_N GM^2} \times \\
 &\times \sin \left[\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{8G^4M^4 - 9G^2M^2(\alpha G_N GM^2) + 2(\alpha G_N GM^2)^2}{GM(4G^2M^2 - 3\alpha G_N GM^2)^{3/2}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Эти решения существуют только в интервале

$$1 < \alpha G_N / G < 5/4.$$

Они находятся внутри радиуса

$$r_c < \alpha G_N M = r^*,$$

где не существует времени-подобных круговых геодезических. Более того, $r_{lsc0}^- < r_{lsc0}^+$ во всем интервале, кроме $\alpha G_N / G = 5/4$, для которого $r_{lsc0}^- = r_{lsc0}^+$. При $\alpha G_N / G > 5/4$ не существует решения уравнения (6) в области $r > \alpha G_N M$, а при $\alpha G_N / G > 9/8$ последней устойчивой круговой орбите соответствует значение $r = \alpha G_N M$, как показано на рис. 14. При $r = r^*$ энергия частицы возрастает с ростом α . При $1 < \alpha G_N / G < 5/4$ и $9/8 < \alpha G_N / G < 5/4$ энергия и момент импульса, соответствующие орбитам $r = r_{lsc0}^+$ и $r = r_{lsc0}^-$, убывают с ростом α . Это происходит потому, что при $\alpha G_N / G = 9/8$ радиус r_{lsc0}^- совпадает с радиусами \tilde{r}^+ и \tilde{r}^- . При $\alpha G_N / G > 5/4$ последней устойчивой круговой орбите соответствует значение $r = r^*$ и область $r > r^*$ является областью устойчивости. При $9/8 < \alpha G_N / G < 5/4$ имеются две области устойчивых орбит, $r^* < r < r_{lsc0}^-$ и $r > r_{lsc0}^+$. Эти области разделены областью неустойчивости, $r_{lsc0}^- < r < r_{lsc0}^+$. При $1 < \alpha G_N / G < 9/8$ имеются две области устойчивых орбит $r^* < r < \tilde{r}_-$ и $r > r_{lsc0}^+$, разделенные областью $\tilde{r}_- < r < \tilde{r}_+$, для которой не существует времени-подобных круговых орбит.

Заметим, что геометрия и положение областей устойчивости для движущейся вблизи ЧД нейтральной частицы существенно различаются для случаев $\alpha < G/G_N$ и $\alpha > G/G_N$. Зависимости радиуса последней устойчивой круговой орбиты приведены на рис. 15. В случае $\alpha < G/G_N$ имеется толь-

ко одна область устойчивости, которая продолжается от минимального радиуса $r_{lsc0} \in [4M, 6M]$ до бесконечности. В случае $\alpha > G/G_N$ область устойчивости продолжается от $r^* = \alpha G_N M$ до бесконечности при $\alpha G_N / G \geq 5/4$, в то время как при $1 < \alpha G_N / G < 5/4$ существуют две области устойчивости, разделенные областью неустойчивости, где не существует времени-подобных круговых орбит (запрещенная область).

3. ЭНЕРГИЯ В СИСТЕМЕ ЦЕНТРА МАСС

Энергия в системе центра масс зависит от взаимодействующих частиц и гравитационного поля вблизи астрофизического объекта. Для двух взаимодействующих частиц мы получаем ее, складывая их кинетические энергии и массы покоя. Рассмотрим столкновение двух нейтральных частиц, движущихся в одной и той же плоскости и имеющих одну и ту же массу покоя (μ_0), но различные 4-скорости (u_1^ν и u_2^η). ЭЦМ этих частиц определяется как

$$\frac{E_{cm}}{\sqrt{2}m_0} = \sqrt{1 - g_{\nu\eta}u_1^\nu u_2^\eta}, \quad (10)$$

где

$$u_i^\nu = \left(\frac{E_i}{\mu Z(r)}, -S_i, 0, \frac{L_i}{\mu r^2} \right),$$

$$S_i = \sqrt{E_i^2 - Z(r) \left(1 + \frac{L_i^2}{r^2} \right)}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь E_i и L_i — энергия и момент импульса соответствующих частиц. Для ЧД Шварцшильда в МОГ уравнение (10) приобретает вид

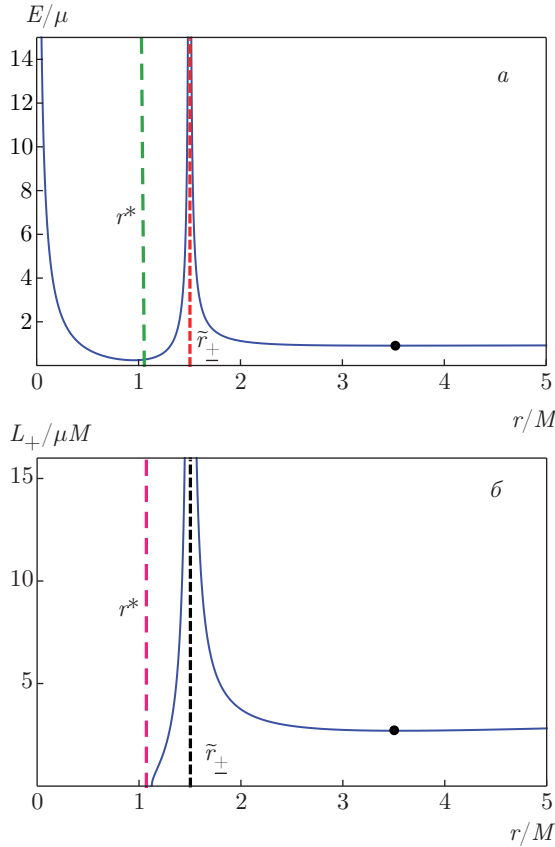


Рис. 11. Зависимости энергии E/μ (а) и момента импульса $L_+/\mu M$ (б) для случая III, $\alpha = 9/8$

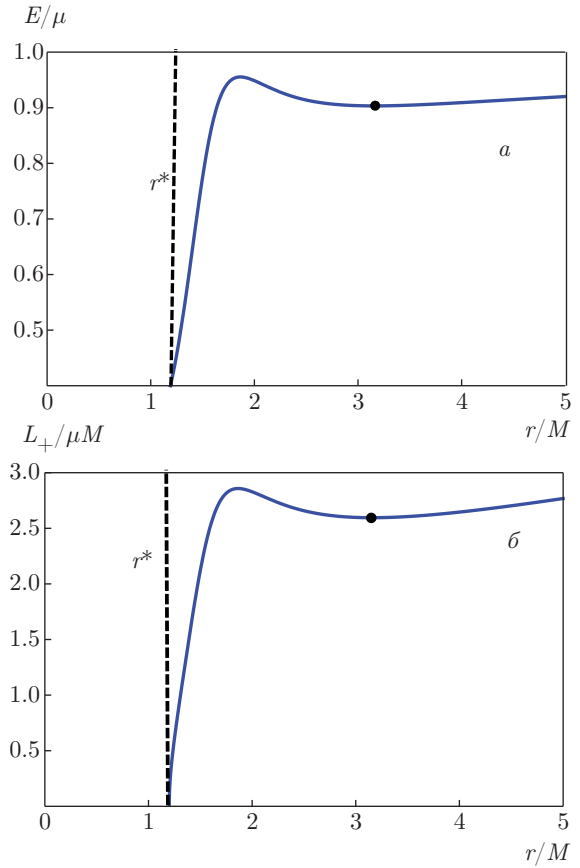


Рис. 12. Зависимости энергии E/μ (а) и момента импульса $L_+/\mu M$ (б) для случая III, $\alpha = 1.2$

$$\begin{aligned} \frac{E_{cm}}{\sqrt{2}m_0} &= \sqrt{1 + \frac{E_1 E_2}{Z(r)} - \frac{S_1 S_2}{Z(r)} - \frac{L_1 L_2}{r^2}} = \\ &= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{E_1^2 + E_2^2}{E_1 E_2} \right) - \frac{Z(r)}{2E_1 E_2 r^2} (L_1^2 + L_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{E_2^2 L_1^2 + E_1^2 L_2^2}{E_1 E_2} \right) - \frac{Z(r)}{2E_1 E_2} - \right. \\ &\quad \left. - L_1 L_2 \left(\frac{L_1 L_2 Z(r) + 2E_1 E_2 r^2}{2E_1 E_2 r^4} \right) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Вблизи горизонта событий это уравнение принимает вид

$$\frac{E_{cm}}{\sqrt{2}m_0} = \sqrt{\frac{4r_+^2 + (L_1 - L_2)^2}{2r_+^2}},$$

где для простоты мы положили $E_1 = E_2 = 1$. Зависимости ЭЦМ от параметра r/M при различных значениях α показаны на рис. 16.

В случае $\alpha = G/G_N$ ЭЦМ для двух взаимодействующих частиц меньше ЭЦМ для случая $\alpha < G/G_N$. Видно, что значения ЭЦМ убывают с ростом α и лежат ниже шварцшильдовского предела для всех $\alpha > 0$. В случае $1 < \alpha G_N/G < 9/8$ име-

ем $\tilde{r}_+ = 1.816$ и $\tilde{r}_- = 1.1837$ при $\alpha = 1.075$. Кроме того, ЭЦМ возрастает при $0.9672 \lesssim r \lesssim 1.1837$, убывает при $1.1837 \lesssim r \lesssim 1.9089$, а затем возрастает от $r = 1.9089$ до бесконечности, в то время как при $\alpha G_N/G = 9/8$ и при $\alpha G_N/G > 9/8$ она быстро возрастает. Зависимости ЭЦМ при различных значениях L_1 показаны на рис. 17. На рисунке видно, что в случае $\alpha < G/G_N$ ЭЦМ возрастает с ростом момента импульса, в то время как в случае $\alpha = G/G_N$ при возрастании r/M она сначала возрастает, а затем убывает. На рис. 18 показаны зависимости ЭЦМ при $1 < \alpha G_N/G < 9/8$, $\alpha G_N/G = 9/8$ и $\alpha G_N/G > 9/8$. Для всех этих областей ЭЦМ демонстрирует поведение, аналогичное поведению для случая $\alpha = G/G_N$.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе мы исследовали движение пробной частицы по круговым орбитам, находящим-

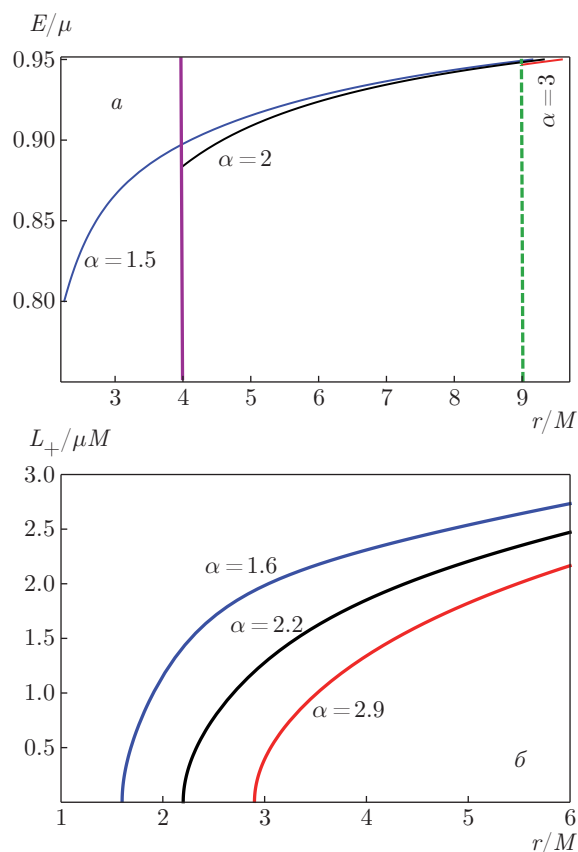


Рис. 13. Зависимости энергии E/μ (а) и момента импульса $L_+/\mu M$ (б) для случая III, $\alpha > 9/8$

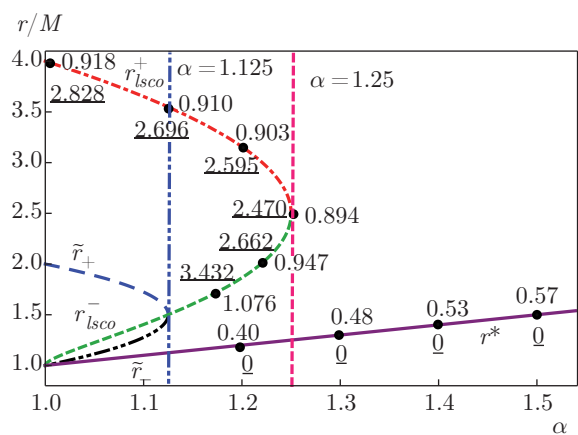


Рис. 14. Зависимости радиусов r_{lSCO}^+ , r_{lSCO}^- , \tilde{r}_+ , \tilde{r}_- и r^* от параметра α . Числа рядом с точками соответствуют значениям энергии E/μ , а подчеркнутые числа — значениям момента импульса $L/\mu M$ частицы для последней устойчивой круговой орбиты. Вертикальная штриховая линия соответствует $\alpha = 5/4 = 1.125$, а вертикальная штрихпунктирная — $\alpha = 9/8 = 1.25$

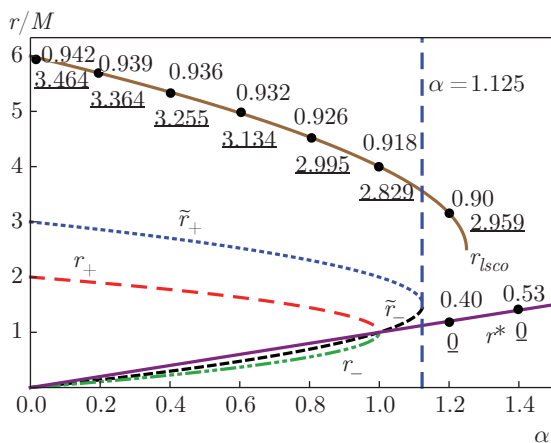


Рис. 15. Зависимости радиусов r_{lSCO}^+ , r_{lSCO}^- , \tilde{r}_+ , \tilde{r}_- , r_+ и r^* от параметра $\alpha \in [0, 1.5]$. Числа рядом с точками соответствуют значениям энергии E/μ , а подчеркнутые числа — значениям момента импульса $L/\mu M$ частицы для последней устойчивой круговой орбиты

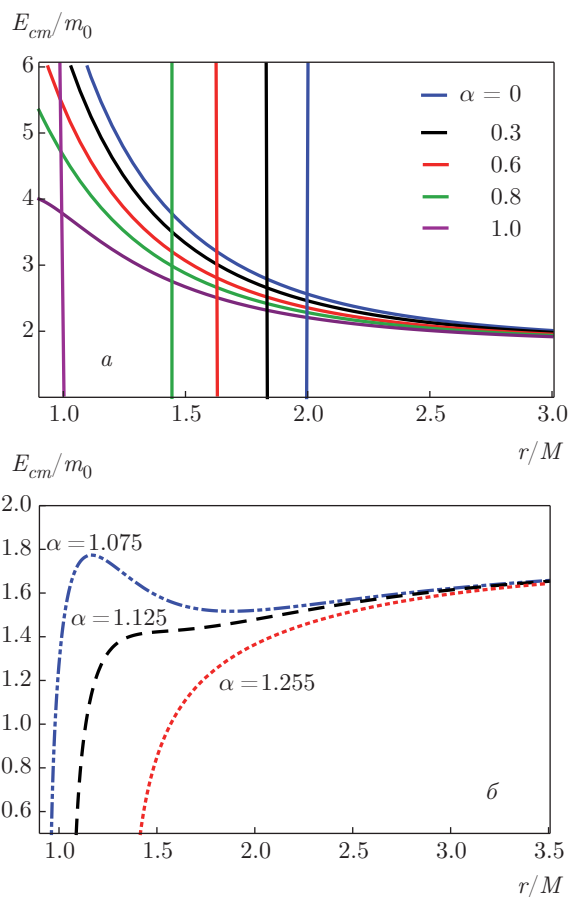


Рис. 16. Зависимости ЭЦМ от r/M при $L_1 = 4$ и $L_2 = 1$: а — случаи I и II, $\alpha \in [0, 1]$, вертикальными линиями показаны соответствующие горизонты событий; б — случай III, $1 < \alpha_{GN}/G < 9/8$ (штрихпунктир), $\alpha_{GN}/G = 9/8$ (штрихи) и $\alpha_{GN}/G > 9/8$ (пунктир)

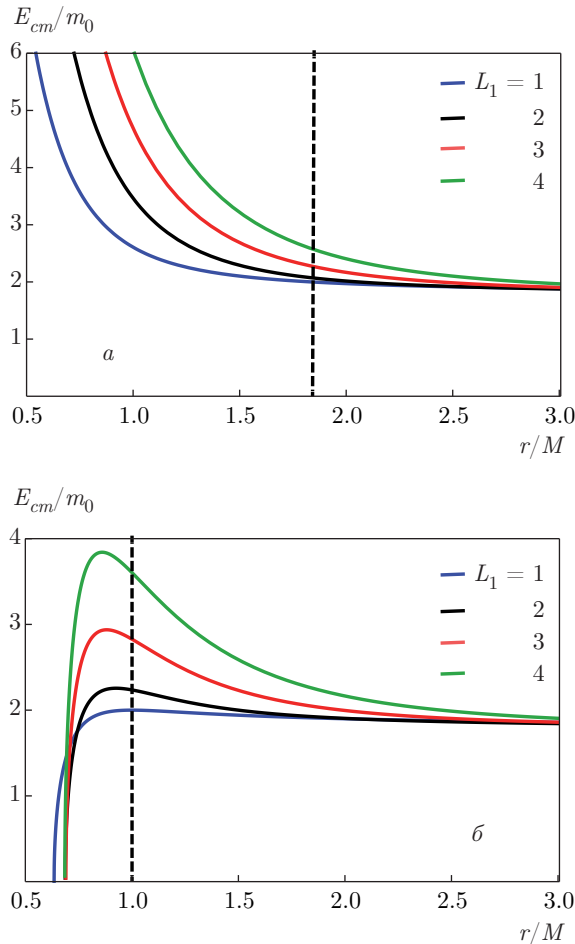


Рис. 17. Зависимости ЭЦМ для неэкстремальной ЧД при $L_2 = 1$, $\alpha = 0.3$ (а) и 1 (б), случай II

ся в экваториальной плоскости вблизи ЧД Шварцшильда в МОГ. Чтобы проанализировать области, в которых возможно круговое движение, мы рассмотрели три случая, а именно, $\alpha < G/G_N$, $\alpha = G/G_N$ и $\alpha > G/G_N$. При обсуждении положения и устойчивости круговых орбит использовался подход эффективного потенциала. Кроме того, исследовалось поведение энергии и момента импульса частиц в соответствующих областях. Оказалось, что круговые орбиты с нулевым моментом импульса существуют при $r^* = \alpha G_N M$.

Было получено, что при $\alpha < G/G_N$ радиус последней устойчивой круговой орбиты r_{lsc0} и соответствующие значения энергии E_{lsc0}/M и момента импульса $L_{lsc0}/\mu M$ существуют в области ниже шварцшильдовского предела, тогда как при $\alpha = G/G_N$ радиусу последней круговой орбиты r_{lsc0} соответствует значение $r = 4M$. Это существенно отличается от случая $\alpha > G/G_N$, когда существуют че-

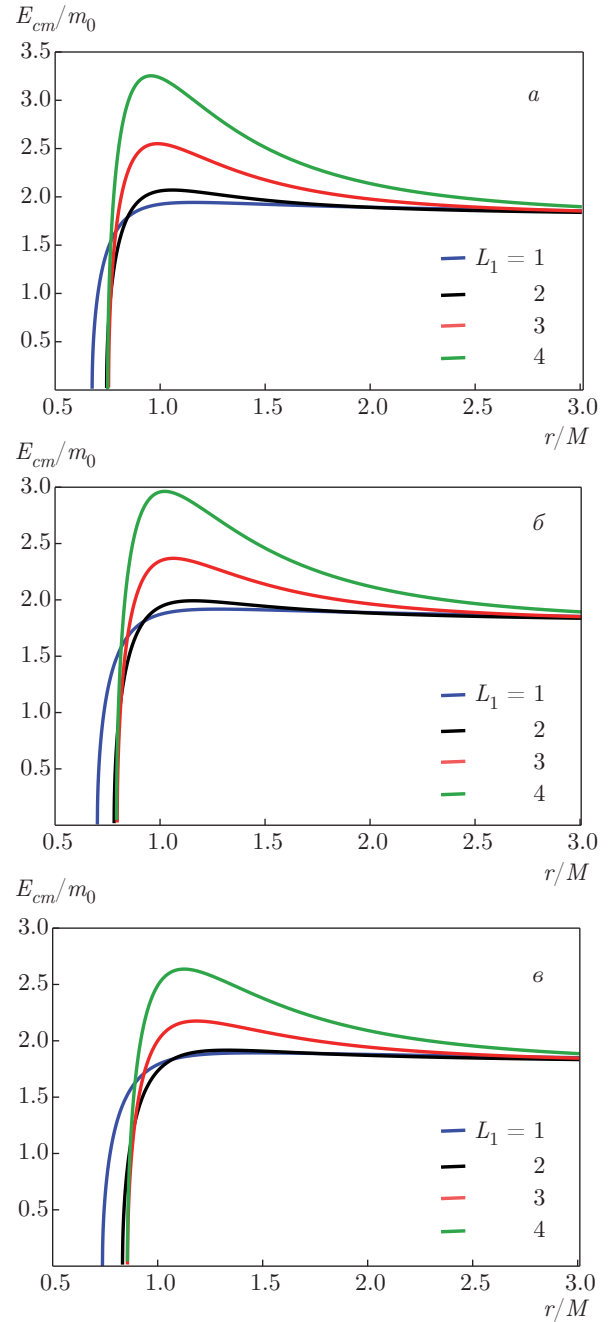


Рис. 18. Зависимости ЭЦМ при $L_2 = 1$, $1 < \alpha G_N/G < 9/8$ (а), $\alpha G_N/G = 9/8$ (б), $\alpha G_N/G > 9/8$ (е), случай III

тыре различных области кругового движения, зависящих от значения α . При $\alpha G_N/G \geq 5/4$ имеется только одна непрерывная область устойчивости, от $r^* = \alpha G_N M$ до бесконечности, в то время как при $1 < \alpha G_N/G < 5/4$ существуют две области устойчивости (либо при $9/8 < \alpha G_N/G < 5/4$, либо при $1 < \alpha G_N/G < 9/8$), разделенные областью неустойчивости. Таким образом, при $1 < \alpha G_N/G < 5/4$ об-

ласть устойчивости разбивается на две несвязанные области, что позволяет частице бесконечно двигаться вдоль орбит.

Наконец, была исследована ЭЦМ для ЧД Шварцшильда в МОГ. Оказалось, что она меньше ЭЦМ для ЧД Шварцшильда и убывает при возрастании α . В случае $\alpha < G/G_N$ значения ЭЦМ больше, чем в случае $\alpha = G/G_N$. В случае $\alpha > G/G_N$ ЭЦМ сначала возрастает, а затем убывает с ростом r/M . В случае $\alpha < G/G_N$ ЭЦМ двух взаимодействующих частиц возрастает с ростом момента импульса, в то время как в случаях $\alpha = G/G_N$ и $\alpha > G/G_N$ с ростом r/M она сначала возрастает, а затем убывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. W. Moffat, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03**, 004 (2006).
2. P. Mishra and T. P. Singh, *Phys. Rev. D* **88**, 104036 (2013).
3. J. W. Moffat and S. Rahvar, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **441**, 3724 (2014).
4. J. W. Moffat, *Eur. Phys. J. C* **75**, 130 (2015).
5. M. Sharif and A. Yousaf, *Eur. Phys. J. Plus* **131**, 307 (2016).
6. J. R. Mureika, J. W. Moffat, and M. Faizal, *Phys. Lett. B* **757**, 528 (2016).
7. J. W. Moffat, *Phys. Lett. B* **763**, 427 (2016).
8. V. Lacquaniti, G. Montani, and D. Pugliese, *Gen. Relativ. Gravit.* **43**, 1103 (2011).
9. D. Pugliese, H. Quevedo, and R. Ruffini, *Phys. Rev. D* **83**, 024021 (2011).
10. D. Pugliese, H. Quevedo, and R. Ruffini, *Phys. Rev. D* **84**, 044030 (2011); *ibid.* **88**, 024042 (2013).
11. N. Cruz, M. Olivares, and J. R. Villanueva, *Class. Quantum Grav.* **22**, 1167 (2005).
12. P. Pradhan and P. Majumdar, *Phys. Lett. A* **375**, 474 (2011).
13. S. Hussain and M. Jamil, *Phys. Rev. D* **92**, 043008 (2015).
14. D. Pugliese and H. Quevedo, *Eur. Phys. J. C* **75**, 130 (2015).
15. P. A. Gonzalez, M. Olivares, and Y. Vasquez, *Eur. Phys. J. C* **75**, 234 (2015).
16. M. Sharif and M. Shahzadi, *Eur. Phys. J. C* **77**, 363 (2017).
17. N. Baushev, *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 30 (2009).
18. M. Banados, J. Silk, and S. M. West, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 111102 (2009).
19. T. Jacobson and T. P. Sotiriou, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 021101 (2010).
20. A. Zakria and M. Jamil, *J. High Energy Phys.* **05**, 147 (2015).
21. C. Armaza, M. Banados, and B. Koch, *Class. Quantum Grav.* **33**, 105014 (2016).
22. J. W. Moffat, *Eur. Phys. J. C* **75**, 175 (2015).
23. S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press (1983).
24. J. M. Cohen and R. Gautreau, *Phys. Rev. D* **19**, 2273 (1979).
25. E. P. T. Liang, *Phys. Rev. D* **9**, 3257 (1974).