

РЕЖИМЫ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОБ ИНТЕНСИВНОЙ ВЕТРОВОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В ТОНКОМ СЛОЕ ВЯЗКОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

*С. В. Кострыкин**

*Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
119017, Москва, Россия*

*Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука Российской академии наук
119333, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 марта 2018 г.

Рассматривается задача о ветровой циркуляции в тонком слое однородной вязкой вращающейся жидкости. В пределе малых чисел Фруда и Бюргера она описывается двумя параметрами — числом Россби, пропорциональным величине форсинга, и числом Экмана. Для случая малых чисел Экмана и немалых чисел Россби с помощью численного моделирования течения кармановского типа исследуются режимы стационарной циркуляции жидкости. Показывается существование двух разных типов стационарных течений, и на основе простой аналитической модели предлагается их физическая интерпретация. Приводится диаграмма существования режимов на плоскости параметров задачи. При этом в некоторой области параметров оказывается возможным одновременное существование стационарных течений двух разных типов, т. е. имеется зависимость стационарного решения задачи от начальных данных. Исследуется асимптотическая зависимость характеристик стационарного течения в пределе малых чисел Экмана.

DOI: 10.1134/S0044451018070167

1. ВВЕДЕНИЕ

Влияние вязких экмановских слоев на структуру крупномасштабных течений вязкой вращающейся жидкости даже в случае очень малой вязкости является, как известно, весьма существенным [1]. Очень близкие ситуации возникают во многих задачах акустики, физики плазмы и астрофизики, где узкие вязкие слои оказывают определяющее влияние на формирование пространственных и пространственно-временных структур [2–6]. При этом, если основное квазидвумерное (в относительно тонких слоях несжимаемой жидкости) течение представляет собой совокупность вихрей с вертикальной или почти вертикальной осью, то наличие вязких слоев приводит к появлению вторичного течения, формирующего вихри с горизонтальной осью, что сопровождается вертикальным переносом потенциальной завихренности, а в случае неоднородного по плотности течения также ведет и к пере-

носу массы. Для понимания физики и количественной оценки этого явления необходим детальный анализ течений, возникающих в пограничных слоях. Такой анализ является относительно простым в предельных случаях малых чисел Экмана и Россби, когда задача допускает линеаризацию и относительно просто вводится параметр, отвечающий эффективному (линейному) трению. Значительно сложнее дело обстоит в том случае, когда задача не допускает линеаризации. В ряде случаев авторы посвященных этой теме работ прибегают к искусственному введению коэффициента трения, как говорится, «руками» [7]. Хотя на этом пути и могут быть получены определенные результаты, он не дает подхода к количественной оценке явлений, а следовательно, и к сравнению с многочисленными экспериментами.

Указанные процессы приобретают важное значение для понимания динамики течений, возникающих в океане под влиянием напряжения ветра. Подробный анализ этой задачи и сопутствующих явлений в линейном приближении, т. е. при малых числах Россби основного течения содержится в монографии [2]. В этой работе получено решение линейной задачи о течении жидкости в пограничных сло-

* E-mail: s_kostr@mail.ru

ях вблизи дна и вблизи свободной поверхности, где оно развивается под воздействием напряжения ветра. Это позволило решить задачу о параметризации влияния слоев трения на квазидвумерное основное течение и получить уравнения для потенциальной завихренности, в которые напряжение ветра входит явным образом. Такой подход, однако, не решал задачу об асимметрии в поведении циклонов и антициклонов, которая проявляется особенно отчетливо при таких нестационарных процессах как спин-ап и спин-даун. Эта асимметрия в поведении проявляется благодаря асимметрии в характеристиках вторичного течения, а следовательно, и вертикального переноса завихренности и массы. С помощью методов возмущений явление асимметрии рассматривалось в последующих работах, где были получены результаты справедливые при малых, но конечных числах Россби [8–12]. В случае, если ветровое напряжение приводит к достаточно мощному циклоническому или антициклоническому движению, проблема влияния вязких слоев до сих пор оставалась практически вне рассмотрения. Причиной этого была, конечно, значительная сложность задачи в ее достаточно полной нелинейной постановке. Однако следует иметь в виду, что и в этом случае пограничные слои могут рассматриваться полуавтономно от течения в основной области, что известно из математической теории подобных явлений [13]. Надо иметь в виду, что задача об океанических течениях как задача с двумя пограничными слоями имеет много общих черт с другими задачами о течениях различной природы, и выводы, сделанные на ее основе, имеют общезначение.

Крупномасштабные течения несжимаемой вращающейся жидкости характеризуются, в первую очередь, такими параметрами, как аспектное отношение $\alpha = h/L$, число Фруда $Fr = U/(gh)^{1/2}$, число Россби $Ro = U/Lf$ и производное от них число Бюргера $Bu = (Fr/Ro)^2 = (L/L_0)^2$, где $L_0 = (gh)^{1/2}/f$ — масштаб Россби–Обухова, L и h — горизонтальный и вертикальный масштабы течения, U — горизонтальная скорость, $f = 2\Omega$ — удвоенная угловая скорость. В случае вязкой жидкости добавляется еще параметр Экмана $E = 2\nu/(fh^2)$, где ν — кинематическая вязкость жидкости. В нашем случае, исходя из оценок, приведенных в работе [14] для мезомасштабных атмосферных вихрей, естественно предположить малость аспектного отношения, а также малость значений чисел Фруда, Бюргера и Экмана. Тогда легко видеть, что горизонтальный масштаб течений будет удовлетворять условию промежуточной асимптотики $h \ll L \ll L_0$.

Для описания течения однородной вращающейся жидкости в приближении квазистатики имеем систему уравнений для относительной горизонтальной скорости \mathbf{U} и возвышения свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ над уровнем $z = h$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + f\mathbf{e}_z \times \mathbf{U} + w\mathbf{U}_z - \nu\mathbf{U}_{zz} &= -g\nabla\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= w(h), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $d/dt = \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla$, $\nabla = \mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y$. Граничные условия для вязкой жидкости на нижней и верхней границах жидкости записываются в виде

$$\mathbf{U}(x, y, 0) = 0, \quad \mathbf{U}_z(x, y, h) = \boldsymbol{\tau}_U/\rho\nu, \quad (1.2)$$

где $\boldsymbol{\tau}_U$ — напряжение трения ветра на поверхности. Вертикальная скорость w определяется условием несжимаемости $w_z = -\nabla \cdot \mathbf{U}$ и условием $w(z=0) = 0$. При достаточно малых числах Фруда и Бюргера кинематическое граничное условие на верхней границе может быть заменено условием равенства нулю вертикальной скорости $w(z=h) = 0$.

Для оценки влияния циркуляции жидкости в вертикальной плоскости на горизонтальную скорость последнюю удобно представить в виде суммы вихревой и потенциальной составляющих:

$$\mathbf{U} = \mathbf{e}_z \times \nabla\Psi + \nabla\Phi. \quad (1.3)$$

С учетом (1.3) движение может быть описано с помощью уравнений для вертикальной компоненты относительной завихренности $\omega = \Delta\Psi$ и дивергенции горизонтальной скорости $\delta = \Delta\Phi$, которая характеризует вторичное течение. Уравнения показывают, что вязкие слои порождают циркуляцию в вертикальной плоскости, влияющую на основное вихревое течение [15]. Задача состоит в том, чтобы связать компоненты вторичного течения непосредственно с напряжением ветра и перейти к более простому описанию течения в невязкой области [12, 14, 16].

В квазидвумерном режиме течение в невязкой области определяется условием баланса, которое является обобщением условий геострофического и циклострофического равновесия

$$\begin{aligned} f\omega - Q &= g\Delta\eta, \\ Q &= \nabla \cdot [(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Величина Q аппроксимирует функцию Окубо–Вайса для вихревой компоненты течения, которая может быть записана в виде разности между квадратом деформации и квадратом завихренности:

$$Q \approx \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - \omega^2),$$

где

$$\varepsilon^2 = (u_x - \nu_y)^2 + (\nu_x + u_y)^2, \quad \mathbf{U} = (u, \nu).$$

Положительные значения функции Q соответствуют областям с гиперболическими, а отрицательные значения — с эллиптическими линиями тока [17, 18].

Уравнение баланса (1.4) нарушается вблизи границ благодаря условиям прилипания. При малых значениях числа Экмана вблизи подстилающей поверхности возникает пограничный слой толщиной $\delta_E = (2\nu/f)^{1/2}$, в котором генерируется вторичное течение, приводящее к общей спиральной трехмерной циркуляции. При этом вертикальная скорость на границе пограничного слоя $w_E \sim \Delta\Psi\delta_E$, а эффективный коэффициент рэлеевского трения равен $\lambda \sim \nu/(\delta_E h)$. Величина w_E имеет важное значение в геофизических приложениях, и ее определение имеет особый интерес для описания циркуляции атмосферы и океана в целом [19, 20].

Наибольшие трудности вызывает определение w_E при немалых числах Россби. В этом случае отчетливо проявляется циклон-антициклонная асимметрия, на что указывают многочисленные эксперименты и теоретические работы [12, 16, 20–22]. Для того чтобы выяснить характер влияния нелинейного трения в пограничном слое на особенности поведения вихревых структур, необходим анализ их зависимости от чисел Россби и Экмана в некоторых простейших ситуациях.

Первым шагом здесь, очевидно, должен быть анализ связанных с вязкостью нелинейных эффектов в задаче с наиболее упрощенной постановкой. Такой задачей является задача, основанная на подходе, впервые предложенном фон Карманом [1, 7]. При таком подходе предположение о линейной зависимости скорости от горизонтальных координат позволяет свести задачу о течении жидкости над бесконечным по горизонтали диском или между двумя дисками к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Различные варианты этих задач, включая их численное исследование, были рассмотрены во многих работах [23–25] и также продолжают рассматриваться в настоящее время [26–28].

В работах [15, 21, 29] была предложена модификация задачи Кармана, при которой в качестве верхней границы рассматривается свободная поверхность. При этом граничные условия на свободной поверхности записываются в упрощенном виде с использованием закона сохранения массы. Фактически, такая постановка применима при достаточно малых возвышениях поверхности за счет неоднородности давления в предположении малости числа Фру-

да. При такой постановке, используя численные и аналитические методы, удается проанализировать циклон-антициклонную асимметрию не только в области малых, но и больших чисел Россби.

В этих работах была исследована задача о движении вихрей, возбуждаемых в тонких слоях вращающейся жидкости под влиянием внешнего объемного форсинга как в стационарном режиме, так и в режиме затухания. Такая постановка возникла в связи с необходимостью интерпретации целого ряда экспериментов, проведенных в ИФА РАН. Как было показано [15, 21, 29], при подобной постановке течение существует в двух основных режимах. Если в верхнем и нижнем слоях вращение происходит в одном направлении, то невязкое течение имеет некоторую среднюю угловую скорость, а вертикальная скорость в невязкой области постоянна. Если сверху и снизу жидкость вращается в разных направлениях, то жидкость в середине слоя почти неподвижна, а вертикальная скорость меняется линейным образом, обращаясь в некоторой плоскости в нуль. В промежуточном случае, когда вращение одной из границ близко к нулю, могут наблюдаться решения обоих типов.

Указанные режимы в целом соответствуют режимам течения между двумя вращающимися дисками, предсказанным Бэтчелором и Стюардсоном [22]. С более общей точки зрения, им можно сопоставить режимы Россби и Хэдли, которые определены для атмосферной циркуляции в целом [30].

Реальное существование подобных режимов было качественно подтверждено экспериментальными данными, основанными на наблюдении поведения отдельных вихрей в многовихревых течениях. Можно предположить, что аналогичная картина должна наблюдаться и в том случае, когда движение жидкости возникает под влиянием напряжения ветра, т. е. при наличии двух пограничных слоев. Анализ этой ситуации и посвящена настоящая работа.

2. ЗАДАЧА О ТЕЧЕНИИ КАРМАНОВСКОГО ТИПА

Рассматривается бесконечный по горизонтали слой жидкости, расположенный над вращающимся с угловой скоростью Ω основанием и имеющий свободную границу. Предположим, что течение имеет осевую симметрию, а компоненты скорости течения (U_r, U_φ, U_z) и давление P в цилиндрической системе

координат (r, φ, z) зависят явным образом от координат (r, φ) и неявно от координат (z, t) :

$$\begin{aligned} U_r &= rF(z, t), & U_\varphi &= rG(z, t), \\ U_z &= H(z, t), & P &= -\frac{r^2}{2}p(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

В данной работе рассматривается течение с граничными условиями на свободной границе (задается напряжение трения), что является модификацией классической постановки [1], ранее использованной в работах [15, 21, 28]. Поскольку, как легко видеть из (2.1), функции $G = \omega/2$, $F = \delta/2$ с точностью до коэффициента совпадают соответственно с вертикальной компонентой завихренности и дивергенцией горизонтальной скорости, после подстановки компонент скорости (2.1) в систему (1.1) приходим к системе уравнений Навье–Стокса, записанных в терминах завихренности–дивергенции:

$$\begin{aligned} F_t + (HF)_z &= \nu F_{zz} + G^2 - 3F^2 + p(t), \\ G_t + (HG)_z &= \nu G_{zz} - 4FG, \\ 2F &= -H_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} G|_{z=0} &= \Omega, & F|_{z=0} &= \Omega, & G_z|_{z=h} &= \tau_G, \\ F_z|_{z=h} &= 0, & H|_{z=0} &= H|_{z=h} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $p(t)$ — аналог давления, ν — кинематическая вязкость, h — глубина жидкости, τ_G — сдвиг завихренности на поверхности, связанный с напряжением трения ветра на поверхности τ_U соотношением

$$\tau_G = \frac{1}{2\rho\nu} \mathbf{e}_z \cdot \text{rot } \tau_U.$$

Систему (2.2), (2.3) можно записать в безразмерном виде, если в качестве характерных длины и времени использовать h и $1/\Omega$:

$$\begin{aligned} F_t + (HF)_z &= EF_{zz} + G^2 - 3F^2 + p(t), \\ G_t + (HG)_z &= EG_{zz} - 4FG, \\ 2F &= -H_z, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} G|_{z=0} &= 1, & F|_{z=0} &= 0, & G_z|_{z=h} &= \tau_G, \\ F_z|_{z=h} &= 0, & H|_{z=0} &= H|_{z=h} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $E = 1/\text{Re} = \nu/(\Omega h^2)$ — число Экмана (обратное число Рейнольдса).

Начальные условия для системы (2.4), (2.5) задаются профилем завихренности

$$G(z, 0) = G^{ini}(z), \quad F(z, 0) = 0. \quad (2.6)$$

Хотя основной целью для нас было исследование стационарных режимов, в численных экспериментах воспроизводился и процесс их установления. При этом начальный профиль завихренности задается в виде параболического профиля

$$G^{ini}(z) = 1 + A - A(z - 1)^2, \quad (2.7)$$

для которого на верхней границе справедливы соотношения $G^{ini}(1) = 1 + A$, $G_z^{ini}(1) = 0$.

Таким образом, решение системы (2.4)–(2.7) зависит от двух основных параметров: числа Экмана (Рейнольдса) и числа Россби, вычисленного по сдвигу завихренности в поверхностном слое

$$\tau = G(1) - G(1 - \delta_E/h) \approx G_z(1)\delta_E/h = \tau_G E^{1/2}$$

(далее форсинг). Дополнительным параметром в данной задаче является амплитуда начальной относительной завихренности — $A = G^{ini}(1) - 1$.

3. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА

Основной целью данной работы является исследование стационарных решений модели кармановского течения в зависимости от параметров задачи. Для этого система уравнений (2.4)–(2.7) решается численно на сетке, состоящей из $N = 100$ узлов по вертикали, с шагом по времени достаточно малым для выполнения условия численной устойчивости схемы. Как показали численные эксперименты, дальнейшее измельчение сетки, а также уменьшения шага по времени не приводит к существенному изменению решения. Система интегрируется на промежуток времени $T_{int} \approx 48T$, где T — период вращения основания.

Для решения системы (2.4)–(2.7) применяется схема расщепления по физическим процессам, в которой интегрирование адвективной и нелинейной частей системы проводится с помощью схемы «кабаре» [31], а для интегрирования диффузионной части используется стандартная полунейная схема.

Как показали эксперименты, с течением времени возможен переход системы к стационарному режиму. Время установления системы, как правило, составляет менее $10T < T_{int}$ (рис. 1). Отметим, что стационарность решения определяется с точностью до конечного интервала времени T_{int} , что не исключает переход решения в другой режим в моменты времени, превышающие время интегрирования задачи.

Далее приводятся результаты численных экспериментов по исследованию стационарных решений

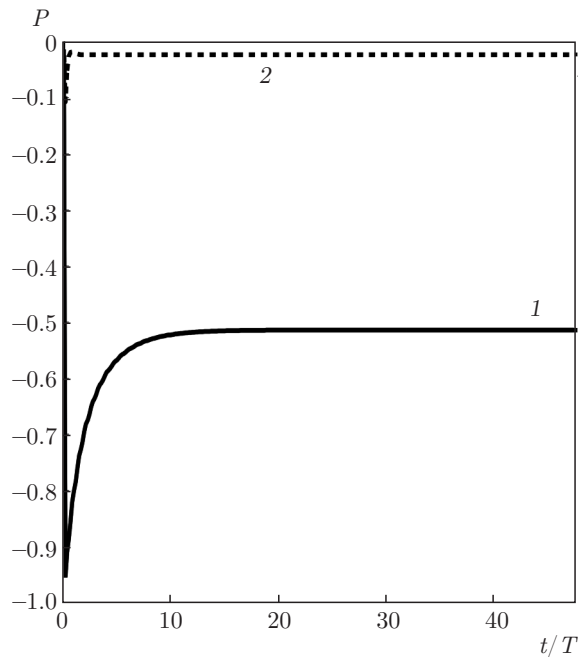


Рис. 1. Зависимость давления от времени ($Re = 100$, $\tau = -0.2$): 1 — $A = 0$, 2 — $A = -1.5$

системы (2.4)–(2.7) в зависимости от параметров Re , τ , A . При этом в численных экспериментах параметры задаются в основном из диапазонов $10 \leq Re \leq 100$, $-2 \leq \tau \leq 2$, $-2 \leq A \leq 2$. И только в некоторых случаях рассматривался расширенный диапазон $Re \leq 200$. Таким образом, мы охватываем область параметров течения, соответствующую малым числам Экмана и умеренным начальным и вынужденным числам Россби.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

4.1. Стационарные режимы в случае отсутствия форсинга

Численные расчеты, результаты которых приведены на рис. 2–4, говорят о существовании двух стационарных режимов течения, которые реализуются в зависимости от начальных условий. Если при положительной начальной завихренности стационарное вращение оказывается твердотельным, то при достаточно большой отрицательной начальной завихренности ($A = -1.5$) и достаточно больших числах Рейнольдса ($Re = 200$) возникает течение с антициклональным пограничным слоем около дна (рис. 2). Из рис. 3 следует, что антициклональное стационарное течение универсальным образом зависит от вертикальной координаты, нормированной на толщину погранслоя. При этом верти-

кальная скорость, характеризующая вторичное течение, направлена в сторону дна, достигает максимума на границе пограничного слоя и пропорциональна его толщине (рис. 3б). Из более детального анализа рис. 2, 3, следует, что при глубине больше критической, в слое, расположенном выше критической отметки, завихренность постоянна, а вертикальное и радиальное течения отсутствуют.

Таким образом, мы имеем два критических числа Рейнольдса.

1) При $Re < Re_1$ стационарное течение находится в режиме твердотельного вращения (пограничный слой отсутствует).

2) При $Re_2 > Re > Re_1$ возможен режим частично сформированного погранслоя.

3) При $Re > Re_2$ возможен режим полностью сформированного погранслоя. В этом режиме на границе придонного погранслоя возникает дополнительный малый погранслой. Особый случай, — когда этот погранслой совпадает с верхней границей жидкости.

Общая картина различных режимов в зависимости от Re показана на рис. 4, где изображены зависимости характеристик стационарного течения от числа Рейнольдса при фиксированном $A = -1.5$. На рисунке видно, что при $Re > Re_1 \approx 45.5$ возникает течение с пограничным слоем около дна. Также из рис. 3б можно оценить значение критической глубины $h_2 = \delta_E Re_2^{1/2} \approx 10\delta_E$, где $Re_2 \approx 100$.

Рассматривая зависимость характеристик течения от амплитуды начальной завихренности, можно выяснить, что погранслойный режим возникает только в случае, если $A < -1.15$. Если это условие не выполняется, то стационарное течение соответствует твердотельному вращению.

4.2. Стационарные режимы для случая с форсингом

Более разнообразное поведение системы наблюдается в случае $\tau \neq 0$. Однако и здесь имеются те же, что и без форсинга, типы стационарных режимов с разным соотношением скорости вращения центрального слоя и пограничных слоев. Как и в предыдущем случае, здесь наблюдается зависимость характеристик течения от величины Re , указывающего на степень сформированности пограничных слоев. При этом, начиная с некоторого $Re_2 \sim 100$, пограничные слои теряют между собой связь и в центральной части течения могут возникать разнообразные режимы, зависящие от начальных условий. В своем анализе мы остановимся на случае умерен-

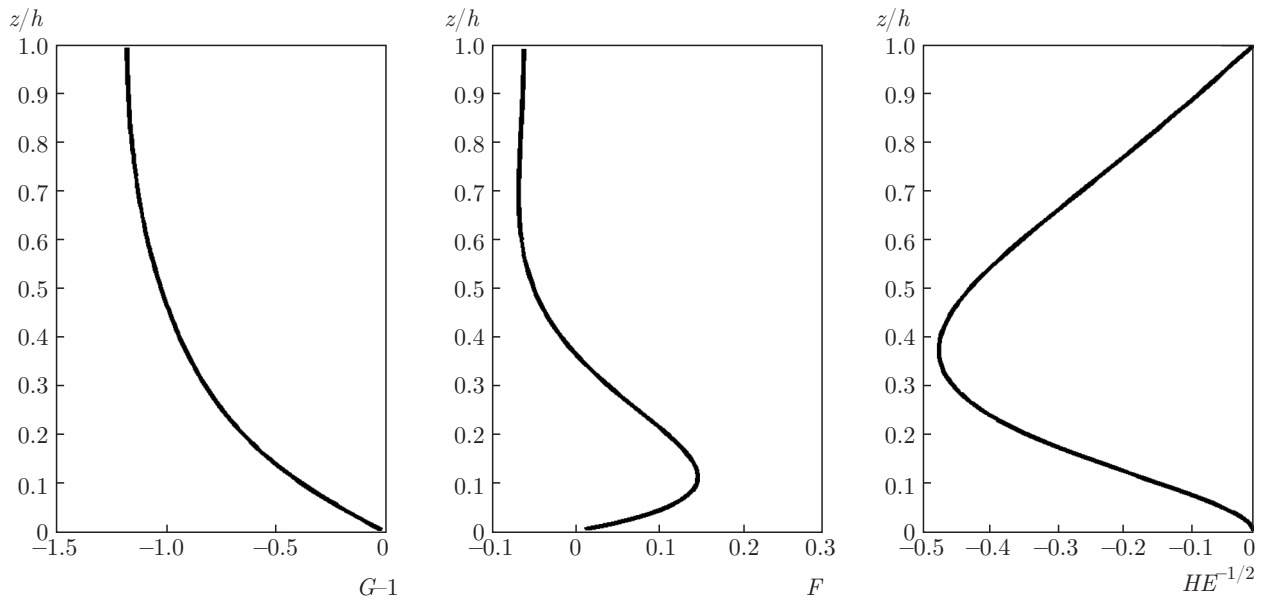


Рис. 2. Профили стационарного решения ($Re = 50, \tau = 0, A = -1.5$)

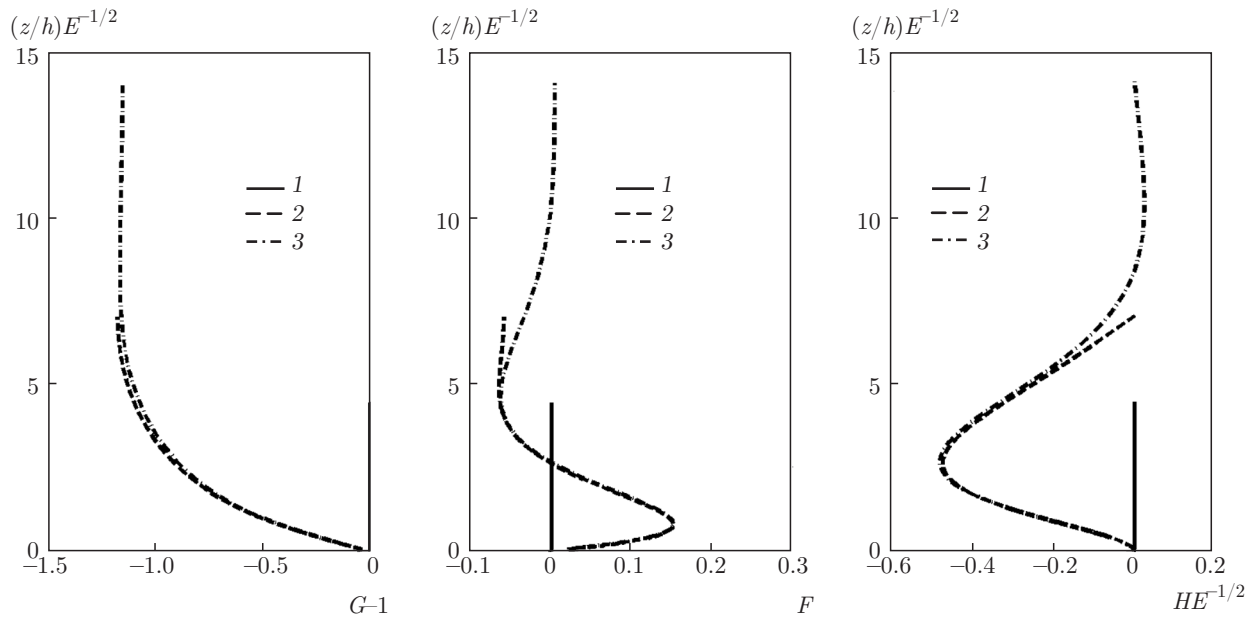


Рис. 3. Профили стационарного решения ($\tau = 0, A = -1.5$) в зависимости от нормированной координаты $(z/h)E^{-1/2}$ при разных Re : 1 — $Re = 20$, 2 — $Re = 50$, 3 — $Re = 200$

ных значений числа Рейнольдса ($Re \leq 100$), когда пограничные слои сформированы, но не потеряли между собой связи. На рис. 5, 6 приведены профили компонент течения при $Re = 50$, и при разных значениях числа Россби $\tau = \tau_G Ek^{1/2}$. Эти профили зависят также от числа Рейнольдса, т.е. от степени сформированности нижнего пограничного слоя

и величины начальной завихренности. Каждый из наблюдаемых режимов можно рассматривать как трансформацию одного из исходных режимов при $\tau = 0$, которые мы с известной степенью условности назвали режимами Бэтчелора и Стюардсона.

Как видно на рис. 5, 6, при положительных τ профиль стационарного течения соответствует ре-

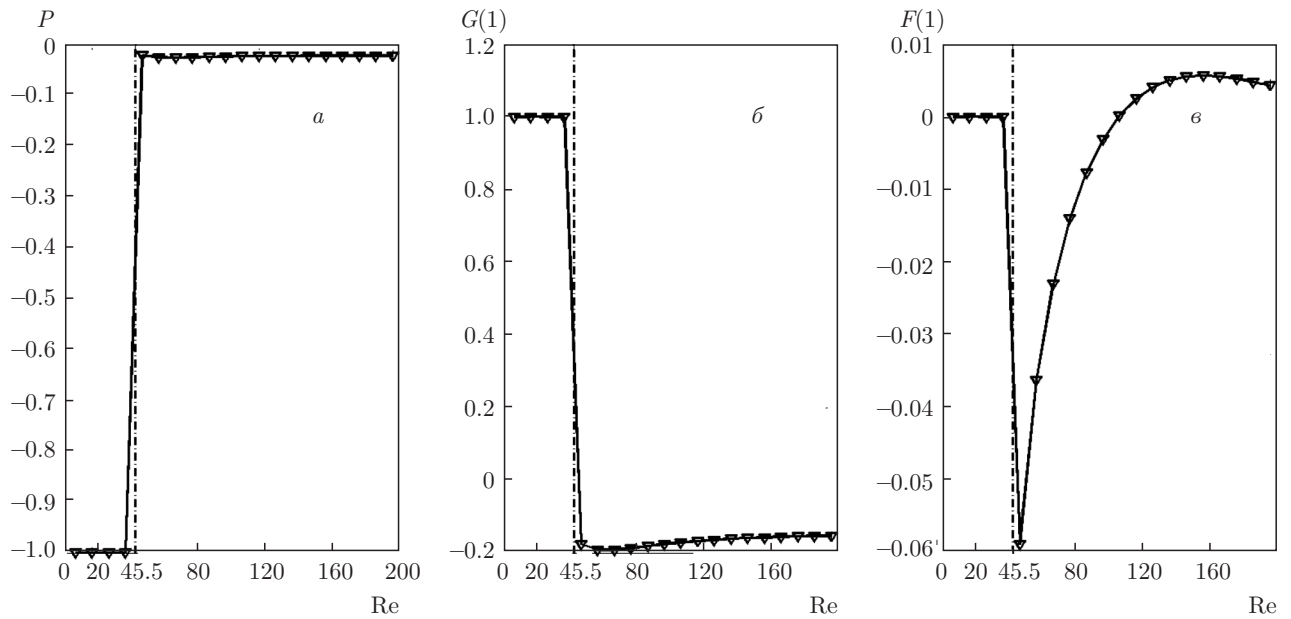


Рис. 4. Зависимость характеристик стационарного решения от Re при $\tau = 0$, $A = -1.5$: a — давление, b — завихренность на поверхности, c — дивергенция на поверхности

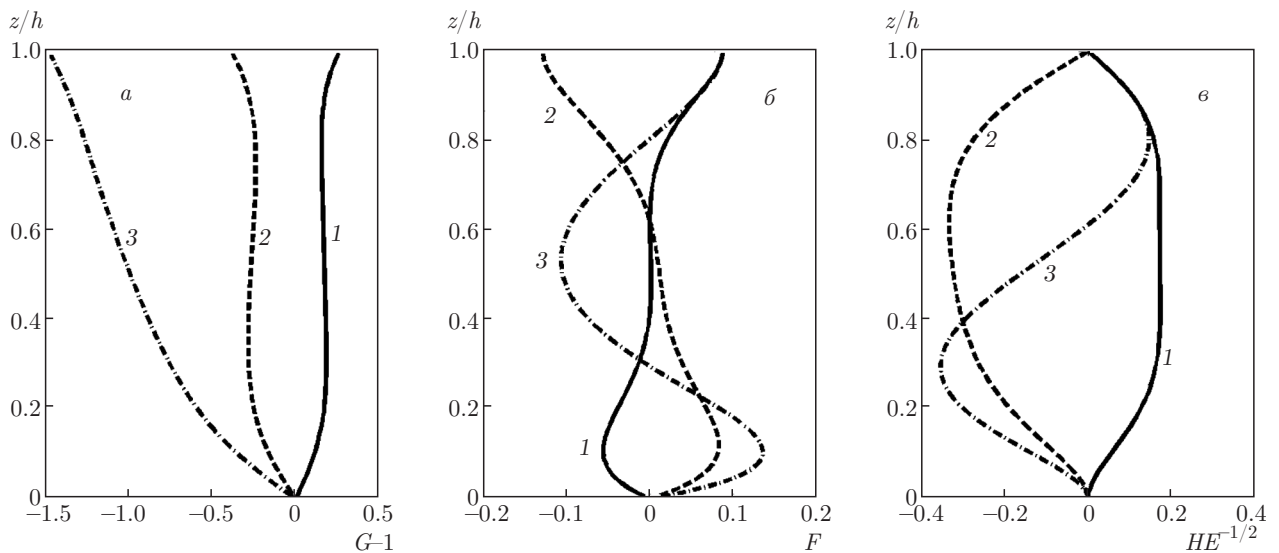


Рис. 5. Профили стационарного решения при разных τ, A ($Re = 50$): 1 — $\tau = 0.2$, $A = 0$; 2 — $\tau = -0.2$, $A = 0$; 3 — $\tau = -0.2$, $A = -1.5$

жиму Бэтчелора, для которого в невязкой области характерны постоянные вертикальная скорость и завихренность. Кроме того, знаки относительной завихренности и вертикальной скорости совпадают со знаком форсинга. Поскольку вертикальная скорость имеет постоянный знак по всему слою, вторичная циркуляция состоит из одной ячейки. Режим такого же типа только со слабой антициклональной завихренностью в центре наблюдается при малых

отрицательных числах Россби, если начальное состояние имеет малую отрицательную или положительную завихренность.

При отрицательных форсингах в большинстве случаев мы получаем другой режим (Стюардсона), который однако имеет несколько модификаций. Характерной чертой течения в этом режиме при развитии нижнем погранслое является то, что вертикальные профили абсолютной завихренности и вер-

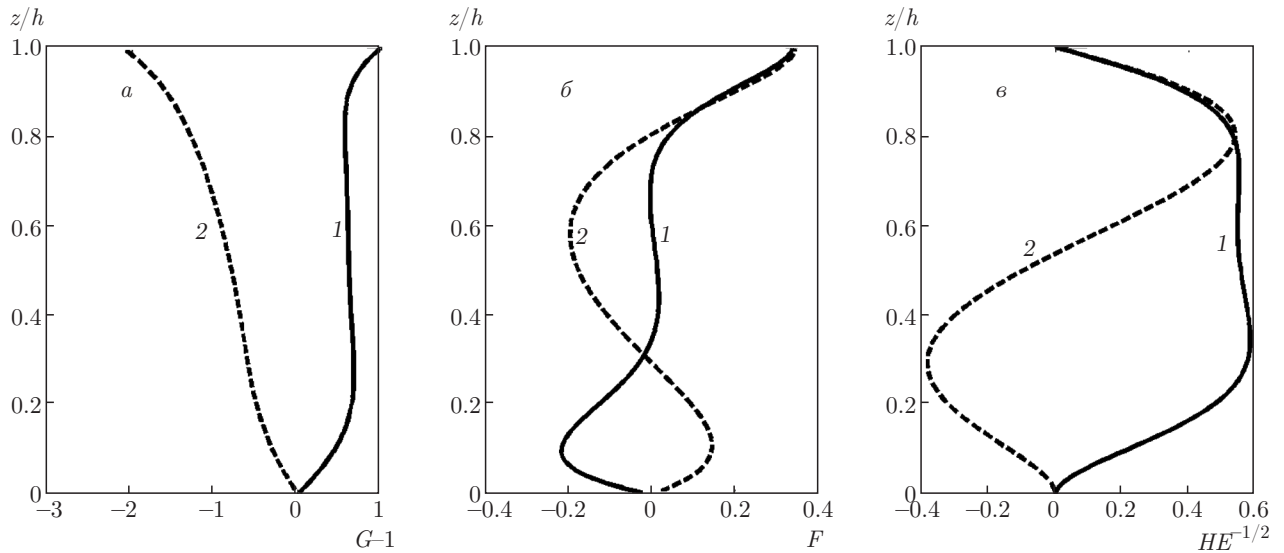


Рис. 6. Профили стационарного решения при разных τ, A ($Re = 50$): 1 — $\tau = 1, A = 0$; 2 — $\tau = -1, A = 0$

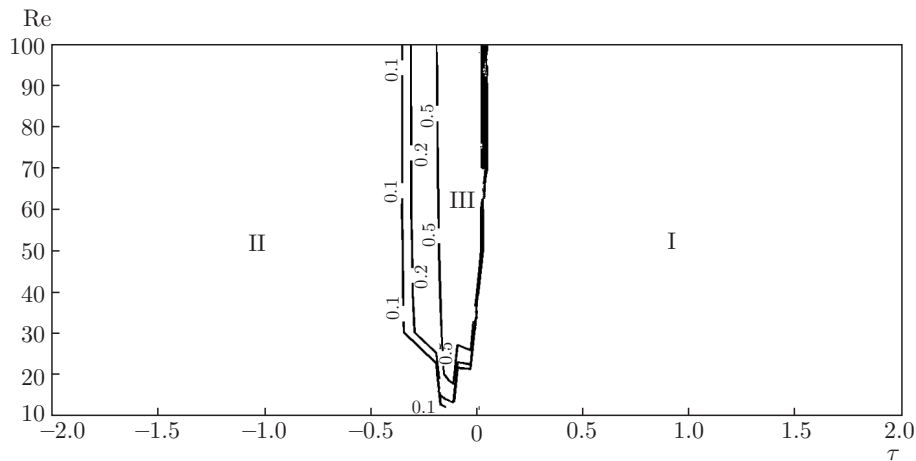


Рис. 7. Разности стационарных давлений $p(A = -1.5) - p(A = 0)$, соответствующих разным начальным амплитудам завихренности, в зависимости от параметров Re, τ : I — область существования режима Стюардсона, II — область существования режима Бэтчелора, III — область сосуществования обоих режимов

тикальной скорости переходят через нуль в некоторой внутренней точке слоя, а вторичная вертикальная циркуляция состоит из двух ячеек. В режиме Стюардсона может доминировать как нижняя, так и верхняя ячейка вторичной циркуляции.

Границы между режимами Бэтчелора и Стюардсона можно изобразить на плоскости (Re, τ) , если построить изолинии разности стационарных давлений $\Delta p = p(A = -1.5) - p(A = 0)$ (рис. 7). Мы видим, что при положительном форсинге осуществляется режим Бэтчелора, при большом отрицательном — режим Стюардсона, при малом отрицательном фор-

синге $\Delta p \neq 0$ и оба режима существуют одновременно, т. е. наблюдается зависимость стационарного решения от начального состояния. Вместе с тем, как показывают расчеты, при достаточно больших числах Рейнольдса ($Re > 110$) в области малого отрицательного форсинга возникает конкуренция между двумя режимами, что приводит к установившимся колебаниям между двумя состояниями. Однако подробное исследование этих колебаний, а также условий их возникновения выходит за рамки данной работы, поэтому мы отметим только сам факт их существования в системе.

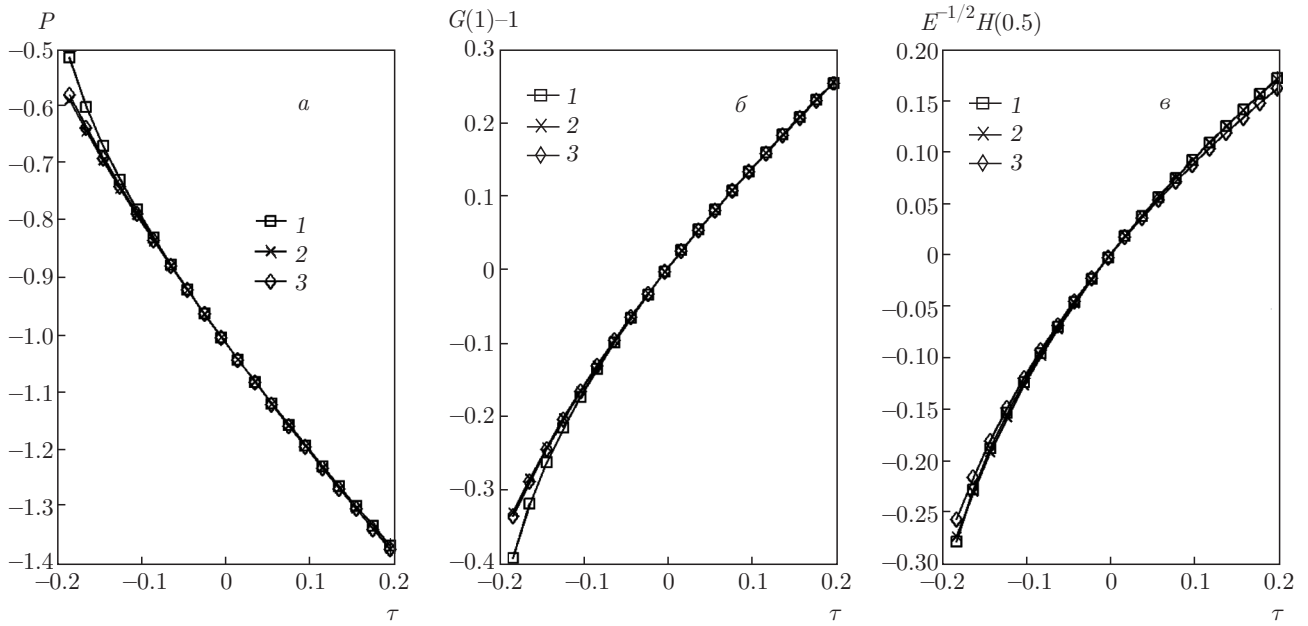


Рис. 8. Зависимости характеристик стационарных решений от малого τ при разных числах Рейнольдса ($A = 0$): a — давление, b — относительная завихренность на поверхности, v — нормированная вертикальная скорость в центре слоя; 1 — $Re = 20$, 2 — $Re = 50$, 3 — $Re = 100$

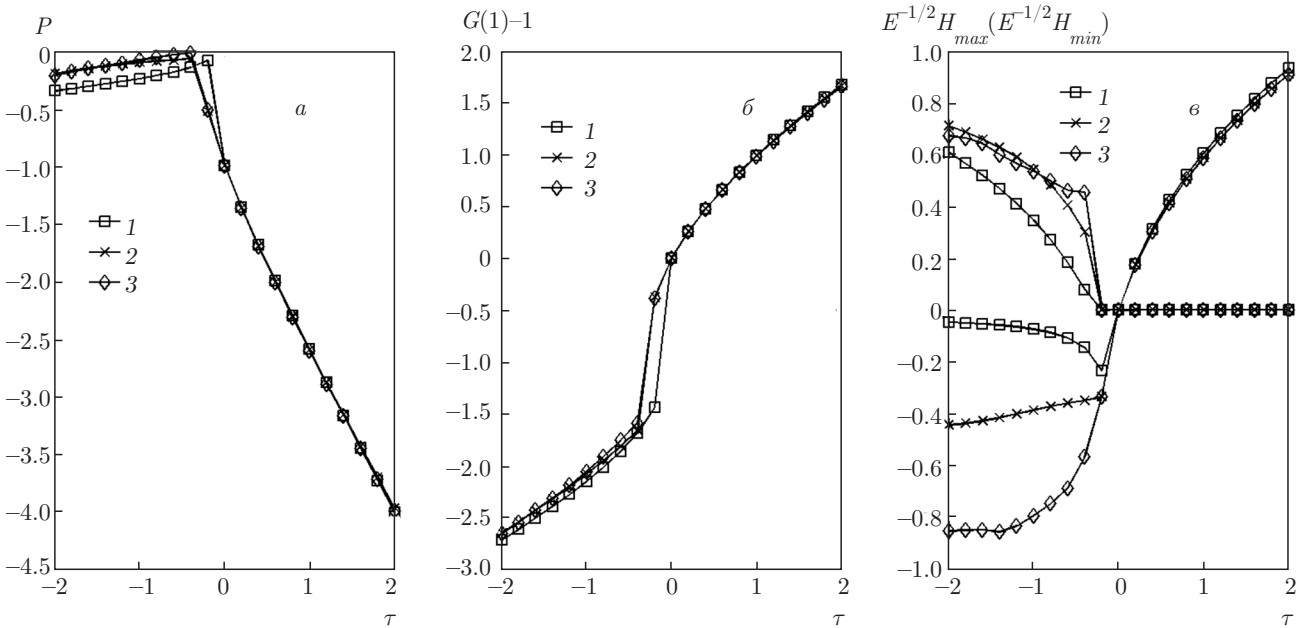


Рис. 9. Зависимости характеристик стационарных решений от τ при разных числах Рейнольдса ($A = 0$): a — давление, b — относительная завихренность на поверхности, v — максимальная и минимальная нормированные вертикальные скорости; 1 — $Re = 20$, 2 — $Re = 50$, 3 — $Re = 100$

На рис. 8, 9 показана зависимость давления и поверхностных характеристик стационарного течения в зависимости от внешнего форсинга при разных значениях числа Рейнольдса. Из рис. 8 следует,

что стационарное давление и поверхностные характеристики в области малых τ не зависят от числа Рейнольдса при достаточно больших значениях этого параметра. Также мы видим, что в этом случае

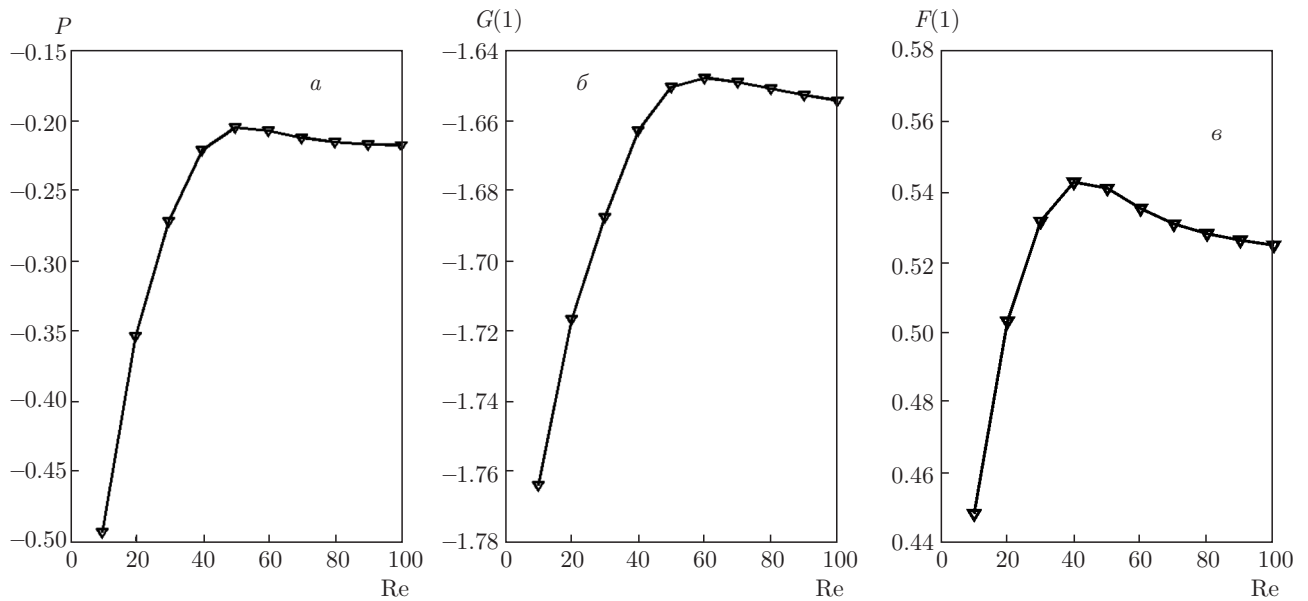


Рис. 10. Зависимости характеристик стационарных решений от Re ($\tau = -2, A = 0$): *a* — давление, *b* — относительная завихренность на поверхности, *v* — дивергенция на поверхности

Таблица. Сравнительные характеристики стационарных течений в режимах Бэтчелора и Стюардсона в рассматриваемой области параметров $Re \leq 100, |\tau| \leq 2$

| | Режим Бэтчелора | Режим Стюардсона |
|---|--|--|
| Значения форсинга, при которых реализуется режим | Положительный или слабый отрицательный форсинг | Отрицательный форсинг |
| Стационарное давление | Отрицательное и по величине порядка -1 или меньше | Слабо отрицательное |
| Количество вертикальный ячеек циркуляции | 1 | 2 1 (при достаточно малых Re, τ) |
| Зависимость характеристик течения от числа Рейнольдса | $G, F, HE^{-1/2}$ практически не зависят от Re при достаточно больших Re | Минимум $HE^{-1/2}$ зависит от Re |
| Стационарное решение в случае без форсинга | Твердотельное вращение | Сильно выраженная придонная ячейка вертикальной циркуляции |

антициклональный форсинг приводит к несколько более интенсивным основной и вторичной циркуляциям, чем аналогичный по величине циклональный форсинг. Из рис. 9 следует, что в режиме Бэтчелора даже при больших τ решение не зависит от числа Рейнольдса в пределе больших этих чисел. Также на рис. 9, 10 мы видим, что минимум вертикальной скорости, нормированной на толщину погранслоя, зависит от числа Рейнольдса (рис. 10). Таким

образом, в режиме Стюардсона при отрицательных τ нормированная вертикальная скорость зависит от числа Рейнольдса даже при больших значениях этого параметра.

Для удобства основные характерные черты стационарных течений в режимах Бэтчелора и Стюардсона, возникающих в данной задаче в области параметров $Re \leq 100, |\tau| \leq 2$, приведены в таблице.

По-видимому, для очень больших чисел Рейнольдса и больших начальных чисел Россби и форсингах и/или при других профилях начальной завихренности могут возникать и более сложные режимы с многослойным распределением завихренности по вертикали и колебаниями между ними.

5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ

Представим решение системы (2.4) в виде $K = G + iF$ и запишем систему уравнений, описывающую течение в слое жидкости, следующим образом:

$$\begin{aligned} K_t &= EK_{zz} - HK_z + i(K^2 - K_0^2), \\ H_z &= -2\Im K, \quad K_0^2 = -p, \\ K(0, t) &= 1, \quad K_z(1, t) = \tau E^{-1/2}, \\ H(0, t) &= 0, \quad H(1, t) = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Рассмотрим невязкие течения при малых числах Экмана. Как следует из первого уравнения системы (5.1)

$$K = K_0, \quad H_z = -2\Im K_0$$

— стационарное решение, которое описывает невязкое течение. Поскольку $K_0 = (-p)^{1/2}$, возможны два случая:

1) при $p < 0$

$$G(z) = G_0 = (-p)^{1/2}, \quad F(z) = 0, \quad H(z) = H_0, \tag{5.2}$$

2) при $p > 0$

$$\begin{aligned} G(z) &= 0, \quad F(z) = F_0 = p^{1/2}, \\ H(z) &= H_0 - 2F_0 z. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Как видно из расчетов при больших числах Рейнольдса течения в пограничных слоях почти независимы друг от друга и имеют вид экмановского погранслоного течения. В каждом таком слое генерируются вторичные течения, определяющие вертикальные скорости в верхней и нижней половине течения. Величина давления определяется из условий сшивки скоростей, в первую очередь, вертикальных в центральной области. Сшивка может проводиться с той или иной степенью точности.

В режиме Бэтчелора мы подбираем давление так, чтобы вертикальные скорости на границах соответствующих погранслоев были равны. Этому режиму соответствует отрицательное давление согласно уравнению (5.2). В режиме Стюардсона возможны два варианта, либо давление положительно, и тогда, согласно (5.3), имеет место переходный слой

с линейной зависимостью вертикальной скорости от глубины, либо давление может иметь небольшую отрицательную величину, и тогда течение делится на две части, в каждой из которых завихренность имеет одинаковую величину, но разный знак. В этом случае эти течения сшиваются еще одним вязким слоем.

Система уравнений (5.1) для функции K имеет малый параметр E при старшей производной, поэтому оно описывает пограничные слои вблизи границ области толщиной $|\delta_{1,2}| \sim E^{1/2}$. Предполагая, что взаимодействие пограничных слоев мало, можно рассмотреть их изолированно, используя для каждого нулевые условия на бесконечности. Тогда решение имеет вид

$$\begin{aligned} K &= K_0 + (1 - K_0)p_1(z/\delta_1) + \\ &+ \tau E^{-1/2} \delta_2 p_2((1 - z)/\delta_2), \end{aligned} \tag{5.4}$$

где $p_i(z) = \exp(z/\delta_i)$. Для профиля вертикальной скорости имеем

$$\begin{aligned} H(z) &= -2 \Im(K_0 z + \delta_1(1 - K_0)q_1(z/\delta_1) + \\ &+ \tau E^{-1/2} \delta_2^2 q_2((1 - z)/\delta_2)). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Из граничного условия для вертикальной скорости $H(1) = 0$ имеем условие для определения вторичного течения F_0 по заданному G_0 :

$$\begin{aligned} -2 \Im(K_0 + \delta_1(1 - K_0)q_1(\infty) + \\ + \tau E^{-1/2} \delta_2^2 q_2(0)) = 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

где $K_0 = G_0 + iF_0$. Вторичное течение $F_0(G_0, \tau)$, как видно из формулы (5.6), приводит к согласованию вертикальных скоростей, генерируемых пограничными слоями.

В режиме Бэтчелора $F_0 = \Im K_0 = 0$ и решение (5.6) можно записать в виде

$$G_0 - 1 = \tau \Im(E^{-1/2} \delta_2^2 q_2(0)) / \Im(\delta_1 q_1(\infty)). \tag{5.7}$$

Учитывая, что при больших числах Рейнольдса $q_1(\infty) = -1$, $q_2(0) = 1$, из (5.7) получим, что $G_0 = G_0(\tau)$, $p = p(\tau)$, т.е. первичная циркуляция не зависит от числа Рейнольдса.

В режиме Стюардсона полагаем, что решение имеет вид $K_0 = iF_0$ и из (5.6) следует, что $F_0 = O(E^{1/2})$ и, таким образом, $p = |K_0|^{1/2} \ll 1$ при достаточно малых числах Экмана. Эти аналитические оценки подтверждаются результатами численного моделирования, представленными на рис. 8, 9.

Данная однослойная теория пригодна для описания стационарных режимов при не очень больших и не очень малых числах Россби. Более точны

двух-, трех- и четырехслойные теории. Уточнение однослойной модели для больших чисел Россби дает двухслойная модель, которая предусматривает введение дополнительной границы при $z = z_1$. По обе стороны границы течение описывается как указано ранее, а на границе два решения сшиваются. Основное уравнение, которое мы используем, такое же, как в предшествующих работах (линеаризованное). При этом постоянные коэффициенты этого уравнения могут быть получены различным образом путем выбора соответствующего усреднения.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере течения кармановского типа численно исследованы стационарные течения, возникающие при постоянном вихревом ветровом воздействии на тонкий слой жидкости при разных параметрах течения: числе Экмана, начальном числе Россби, величине сдвига завихренности. В области параметров $Re \leq 100$, $|\tau| \leq 2$ показано существование двух стационарных режимов течения жидкости, которые соответствуют режимам Стюардсона и Бэтчелора для течения между двумя дисками. Получено, что в некоторой области параметров (Re, τ) возможно существование одновременно двух режимов, причем выбор конкретного режима определяется начальным состоянием системы.

С точки зрения теории кармановских течений, обнаруженные режимы вполне соответствуют двум основным типам течения, возникающим между двумя вращающимися с разными угловыми скоростями дисками — режимам Бэтчелора и Стюардсона. Возможность одновременного существования этих режимов сначала возбудила спор между двумя знаменитыми учеными, однако затем она была показана с помощью численных расчетов и экспериментально [15, 21, 23].

Надо особо отметить, что исследование задачи кармановского типа приводит к важным физическим результатам именно потому, что она является малопараметрической. Ее решение зависит только от двух параметров: числа Россби или его аналога и числа Экмана. В пределе малых чисел Экмана остается зависимость только от одного параметра, что позволяет подойти к задаче о параметризации влияния вязких слоев на невязкое течение. Этот параметр — число Россби может считаться основным, хотя в реальном течении присутствуют и другие параметры, влияющие на конечный результат. К таким параметрам безусловно относится число Фруда

да, а также функция Окубо–Вайса, указывающая на степень эллиптичности — гиперболичности течения. Кроме того, надо иметь в виду, что данный подход справедлив при малых значениях аспектного отношения, хотя оно также не должно быть слишком мало, чтобы не увеличивалось число Фруда. Таким образом, подобный подход имеет смысл промежуточной асимптотики по аспектному отношению.

Результаты данной работы, по-видимому, имеют общезначимое значение, поскольку пограничные течения являются характерной чертой течений вязкой жидкости, а также и других сред, течение которых описывается уравнениями Навье–Стокса.

Автор статьи благодарен И. Г. Якушкину за плодотворные дискуссии, возникшие в процессе работы над статьей, а также ценные советы относительно ее содержания. Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 «Нелинейная динамика: фундаментальные проблемы и приложения».

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Гринспен, *Теория вращающейся жидкости*, Гидрометеиздат, Ленинград (1975).
2. Д. Педлоски, *Геофизическая гидродинамика*, т. 1. Мир, Москва (1984).
3. М. В. Незлин, Е. Н. Снежкин, *Вихри Россби и спиральные структуры*, Наука, Москва (1990).
4. С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, И. Г. Якушкин, УФН **141**, 221 (1983).
5. С. И. Вайнштейн, А. М. Быков, И. Н. Топтыгин, *Турбулентность, токовые слои и ударные волны*, Наука, Москва (1989).
6. Н. Н. Горькавый, А. А. Фридман, *Физика планетных колец*, Наука, Москва (1994).
7. С. Н. Чефранов, ЖЭТФ **149**, 876 (2016).
8. М. В. Калашник, Изв. РАН. Физика атмосферы и океана **47**, 477 (2011).
9. J. E. Hart, Phys. Fluids **12**, 131 (2000).
10. J. Pedlosky, J. Phys. Ocean **38**, 1334 (2007).
11. J. A. Benthuisen and L. N. Thomas, Phys. Fluids **24**, 076601 (2012).
12. В. Ф. Козлов, А. Ю. Гурулев, Изв. РАН. Физика атмосферы и океана **28**, 406 (1992).

13. А. Найфэ, *Введение в методы возмущений*, Мир, Москва (1984).
14. Ф. В. Должанский, В. А. Крымов, Д. Ю. Манин, УФН **160**, 1 (1990).
15. С. В. Кострыкин, А. А. Хапаев, И. Г. Якушкин, ЖЭТФ **139**, 395 (2011).
16. В. Ф. Козлов Изв. РАН. Механика жидкости и газа №6, 49 (1992).
17. D. Elhmaili, A. Provenzale, and A. Babiano, J. Fluid. Mech. **257**, 533 (1993).
18. L. P. J. Kamp, Phys. Fluids **24**, 023601 (2012).
19. P. R. Bannon, J. Atmos. Sci. **55**, 1446 (1997).
20. В. М. Пономарев, О. Г. Чхетиани, Л. В. Шестакова, Изв. РАН. Механика жидкости и газа №4, 72 (2007).
21. S. V. Kostykin, A. A. Khapaev, and I. G. Yakushkin, J. Fluid. Mech. **753**, 217 (2014).
22. М. В. Калашник, О. Г. Чхетиани, ДАН **456**, 717 (2014).
23. P. J. Zandbergen and D. Dijkstra, Ann. Rev. Fluid. Mech. **19**, 465 (1987).
24. P. J. Zandbergen, *Lecture Notes in Mathematics 771*, Springer-Verlag, Berlin (1980).
25. R. E. Hewitt and M. Al-Azhari, J. Eng. Math. **63**, 259 (2009).
26. K. M. P. van Eeten, J. van der Schaaf, J. C. Schouten et al., Phys. Fluids **24**, 033601 (2012).
27. J. M. Lopez, F. Marques, A. M. Rubio et al., Phys. Fluids **21**, 114107 (2009).
28. M. A. Abdou, Acta Applicandae Mathematicae **111**, 7 (2010).
29. С. В. Кострыкин, А. А. Хапаев, И. Г. Якушкин, Письма ЖЭТФ **95**, 583 (2012).
30. Ф. В. Должанский, *Основы геофизической гидродинамики*, Физматгиз, Москва (2011).
31. В. М. Головизнин, С. А. Карабасов, И. М. Кобринский, Матем. моделирование **15**, 29 (2003).