

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА СМЕШИВАНИЯ АТОМНЫХ УРОВНЕЙ, ИНДУЦИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЕМ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА, НА КОСМОЛОГИЧЕСКУЮ РЕКОМБИНАЦИЮ АТОМОВ ВОДОРОДА И ОДНОКРАТНО ИОНИЗОВАННОГО ГЕЛИЯ

Т. А. Залялютдинов^{a}, Д. А. Соловьёв^a, Л. Н. Лабзовский^{a,b}*

*^a Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Петергоф, Санкт-Петербург, Россия*

*^b Петербургский институт ядерной физики
188300, Гатчина, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 5 июля 2017 г.

Исследуется эффект уширения атомных линий, индуцированный чернотельным излучением. В рамках квантовой электродинамики сравниваются два физически различных процесса, которые влияют на уширение линии: вынужденное комбинационное рассеяние и индуцированное чернотельным излучением смешивание атомных уровней. Показано, что эффект индуцированного смешивания дает наиболее значительный вклад в уширение линии. Согласно представленному анализу, в лабораторных экспериментах можно однозначно разделять вклады в уширение спектральных линий от каждого из эффектов. Также обсуждается вопрос о влиянии эффекта смешивания уровней, индуцированного излучением абсолютно черного тела, на кинетику космологической рекомбинации первичного водорода и однократно ионизованного гелия в ранней Вселенной.

DOI: 10.7868/S0044451018010029

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект смешивания атомных уровней противоположной четности, вызванный внешним электрическим полем, хорошо известен [1,2]. Интерес к этому явлению был вызван несколькими аспектами. В первую очередь, эффект смешивания атомных уровней, индуцированный внешним полем, может имитировать явления несохранения четности в атомных системах [1]. Кроме того, учет влияния внешнего электрического поля вызывает существенное изменение времен жизни и углового распределения излучаемых квантов, что, в свою очередь, приводит к возможности непосредственного измерения лэмбовского сдвига в водороде и водородоподобных атомах [3,4]. Наконец, недавно в работах [5,6] было показано, что эффект смешивания атомных уровней даже в слабом внешнем электрическом поле приводит к значительным различиям в спектрах атомов водорода и антиводорода.

Все указанные выше исследования относятся к определению влияния внешнего поля, обладающего аксиальной симметрией, на атомные характеристики. Однако хорошо известно, что внешнее поле при отсутствии какой-либо симметрии также может индуцировать подобные эффекты. Например, чернотельное излучение (ЧИ) индуцирует штарковское смещение уровней энергии и дополнительное уширение спектральных линий в атомах [7,8]. Теоретические расчеты динамических штарковских сдвигов и скоростей депопуляции уровней, индуцированных чернотельным излучением, а также соответствующие экспериментальные измерения широко обсуждались в литературе [9–12]. Основная цель этих исследований — усовершенствование и разработка оптических стандартов измерения частоты [13].

В работе [14] в рамках квантовоэлектродинамического (КЭД) подхода было показано, что в поле излучения абсолютно черного тела, помимо хорошо известного динамического штарковского сдвига уровней энергии и уширения спектральных линий в атомах, возникает также эффект квадратичного смешивания уровней противоположной четнос-

* E-mail: zalialiutdinov@gmail.com

ти. Этот эффект можно оценить, определив среднеквадратичное значение электрического поля, индуцированного чернотельным излучением (в ат. ед.):

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{8\alpha^3}{\pi} \omega^3 n_\beta(\omega) d\omega = \frac{4\pi^3}{15} \alpha^3 (k_B T_R)^4 = \\ = (8.319 \text{ В/см})^2 (T_R [\text{К}]/300)^4, \quad (1)$$

где $\langle E^2 \rangle$ — среднеквадратичная напряженность электрического поля, ω — частота падающего излучения. Планковское распределение дается выражением $n_\beta(\omega) = (e^{\beta\omega} - 1)^{-1}$, где $\beta = 1/k_B T_R$, k_B — постоянная Больцмана, T_R — температура излучения в кельвинах и α — постоянная тонкой структуры Зоммерфельда.

Эффект полного смешивания состояний $2s$, $2p$ в атоме водорода может быть достигнут в лабораторных экспериментах со статическим электрическим полем порядка 475 В/см [1, 15]. Такое поле приводит к распаду смешанного $2s$ -состояния с излучением электрического дипольного фотона (E1), сравнимого со скоростью Lu_α -перехода в атоме водорода, т. е. порядка 10^8 с^{-1} . Согласно результатам работы [14] смешивание атомных уровней в поле излучения абсолютно черного тела и соответствующее этому уширение спектральной линии может быть значительным даже при комнатной температуре. Таким образом, учет влияния теплового излучения на атомы становится чрезвычайно важным для точных лабораторных экспериментов.

Другим важным приложением эффекта смешивания является описание космического микроволнового фонового излучения (КМФ), спектр которого имеет преимущественно планковскую форму. Период формирования КМФ соответствует температуре в несколько тысяч кельвин. Следовательно, можно ожидать, что вклад эффекта смешивания в этом случае может быть даже более значительным, чем в лабораторных экспериментах. При этом самым интригующим результатом является то, что распад смешанного $2s$ -состояния происходит с испусканием электрического дипольного (E1) фотона, а соответствующее время жизни становится равным времени жизни $2p$ -состояния при температуре в несколько тысяч кельвинов, т. е. при температуре рекомбинации первичной водородной плазмы. Таким образом, необходимо подробно изучить эффект смешивания атомных уровней в процессах рекомбинации и формирования КМФ, где $2s$ -состояние играет ключевую роль [16, 17]. Для полного описания ионизационной истории первичной плазмы необходим также учет

кинетики рекомбинации атомов нейтрального гелия и однократно ионизованного гелия.

В этой статье мы приводим подробные расчеты эффекта смешивания уровней, индуцированного чернотельным излучением, для атомов водорода и однократно ионизованного гелия. Его влияние на степень ионизации первичной плазмы рассматривается только для состояний $2p_{1/2}$ и $2s_{1/2}$. Мы также пренебрегаем смешиванием состояний $2p_{3/2}$ и $2s_{1/2}$, поскольку интервал тонкой структуры $E_{2p_{3/2}} - E_{2s_{1/2}}$ намного больше чем лэмбовский сдвиг $E_{2s_{1/2}} - E_{2p_{1/2}}$ и, следовательно, эффект смешивания для состояний $2s_{1/2}$, $2p_{3/2}$ намного меньше. Статья построена следующим образом. Эффект квадратичного смешивания уровней в статическом электрическом поле с аксиальной симметрией и его влияние на вероятности однофотонных переходов в атоме водорода рассматриваются в разд. 2. Раздел 3 посвящен квантовоэлектродинамическому описанию атома в поле чернотельного излучения. В разд. 4 описывается еще один эффект уширения атомных уровней, индуцированный ЧИ, — вынужденное комбинационное рассеяние (КР). Этот эффект сравнивается с эффектом смешивания в поле излучения абсолютно черного тела. В разд. 5 рассматривается влияние эффекта смешивания уровней на кинетику космологической рекомбинации. В тексте используются релятивистские единицы (р. е.) ($\hbar = c = m = 1$, где m — масса электрона), за исключением разд. 5, где используется международная система единиц (СИ).

2. КВАДРАТИЧНОЕ СМЕШИВАНИЕ АТОМНЫХ УРОВНЕЙ В СТАТИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В данном разделе мы кратко проанализируем влияние внешнего электрического поля на состояния $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ в атоме водорода (далее будем использовать обозначения $2s$ и $2p$ соответственно). В отсутствие полей распад $2s$ -состояния происходит путем излучения одного магнитного дипольного фотона (M1) $2s \rightarrow 1s + \gamma(\text{M1})$ или двух электрических дипольных фотонов $2s \rightarrow 1s + 2\gamma(\text{E1})$ переходов. Переход M1 сильно запрещен в нерелятивистском пределе, см. работу [18]. Значение, полученное в [18], позднее было улучшено в работе [19] (см. также [20]), где были учтены все релятивистские поправки к волновым функциям Шредингера и к оператору излучения M1-фотона. Время жизни $2s$ -состояния определяется, главным образом, двухфотонным переходом $2s \rightarrow 1s + 2\gamma(\text{E1})$. Вероятность такого распа-

да в единицу времени для атома водорода составляет 8.229 с^{-1} [21]. Соответствующая релятивистская поправка может быть найдена в работе [22]. Сравнение вероятности двухфотонного перехода с любой другой скоростью распада возбужденных состояний в атоме водорода показывает, что $2s$ -состояние является метастабильным. Это основная причина особого интереса к уровню $2s$ в атомной физике и астрофизике.

Распад $2s$ -состояния в атоме водорода происходит иным образом при наличии внешнего электрического поля. В этом случае следует учитывать эффект смешивания атомных уровней [1]. Следуя работе [5], дифференциальную вероятность (в единицу времени) однофотонного распада смешанного состояния $2s$ можно выразить как

$$W_{2s1s}^{(1\gamma)}(\mathbf{k}) = W_{2s1s}^{(1\gamma)}(\mathbf{k}) \left[1 + ea_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_k \frac{|\eta|^2 \Gamma_{2p}}{w} + e^2 a_0^2 \frac{|\eta|^2 \mathbf{E}^2}{w^2} \right], \quad (2)$$

где \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля, \mathbf{n}_k — единичный вектор, соответствующий волновому вектору \mathbf{k} фотона, $w = \sqrt{W_{2s1s}^{M1}/W_{2p1s}^{E1}}$, заряд электрона e и радиус Бора a_0 выписаны в явном виде. Однофотонные полные вероятности электрического дипольного и магнитного дипольного излучения обозначаются как W_{2p1s}^{E1} и W_{2s1s}^{M1} соответственно. Γ_{2p} — ширина уровня $2p$ и $\eta = (\Delta E_{2p2s}^L - (i/2)\Gamma_{2p})^{-1}$, ΔE_{2p2s}^L — лэмбовский сдвиг между уровнями $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$. Интегрирование по направлению излучения \mathbf{n}_k и частоте испускаемого фотона $\omega = |\mathbf{k}|$ дает [5, 6]

$$W_{2s1s}^{(1\gamma)} = W_{2s1s}^{M1} + \frac{e^2 a_0^2 E_0^2}{(\Delta E_{2p2s}^L)^2 + (1/4)\Gamma_{2p}^2} W_{2p1s}^{E1}, \quad (3)$$

где E_0 — напряженность электрического поля. Это выражение показывает, что при наличии внешнего электрического поля для метастабильного $2s$ -состояния появляется дополнительный канал распада с излучением E1-фотона. Линейный по внешнему полю член исчезает после интегрирования по направлениям излучения фотона и не дает вклада в полную вероятность перехода. Квадратичный по внешнему полю член приводит к значительному увеличению ширины уровня $2s$ [5, 6]. Второй член в правой части уравнения (3) представляет интересующий нас квадратичный эффект смешивания.

Аналогичным образом можно рассматривать распад $2p$ -состояния в присутствии электрического поля. В дипольном приближении, кроме «обычного» перехода $2p \rightarrow 1s + \gamma(E1)$, существуют два

дополнительных канала распада из-за примеси $2s$ -состояния: $\overline{2p} \rightarrow 1s + \gamma(M1)$ и $\overline{2p} \rightarrow 1s + 2\gamma(E1)$. Однако соответствующие вероятности перехода намного меньше, чем вероятность Ly_α -перехода $2p \rightarrow 1s + \gamma(E1)$. Таким образом, внешнее электрическое поле существенно не меняет скорости распада $2p$ -состояния в водороде, но значительно увеличивает вероятность распада $2s$ -состояния из-за примеси к последнему $2p$. Полное смешивание состояний $2s$ и $2p$ в атоме водорода достигается при напряженности поля 475 В/см [1]. Тогда распад $2s$ -состояния происходит с излучением электрического дипольного фотона, а соответствующая вероятность перехода равна скорости распада $2p$ -состояния. При этом важно отметить, что процессы излучения фотонов $2s \rightarrow 1s + \gamma(E1)$ и $\overline{2p} \rightarrow 1s + \gamma(E1)$ происходят на различных частотах, различающихся на лэмбовский сдвиг:

$$\omega_{\overline{2p}1s} - \omega_{2s1s} = E_{2p} - E_{2s} + \delta E_{2p}^L - \delta E_{2s}^L + \Delta E_{2p}^{Stark} - \Delta E_{2s}^{Stark} \approx \Delta E_{2p2s}^L. \quad (4)$$

Здесь δE_a^L и ΔE_a^{Stark} обозначают соответственно радиационную поправку и штарковский сдвиг уровня a . Мы использовали тот факт, что штарковские сдвиги намного меньше лэмбовского сдвига в атоме водорода для всех доступных лабораторных электрических полей даже при очень высоких температурах (см. разд. 3). Следует также отметить, что другие состояния вносят гораздо меньший вклад, поскольку энергетический знаменатель в уравнении (3) в таком случае больше.

3. КЭД-ОПИСАНИЕ УШИРЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ, ИНДУЦИРОВАННОГО ЧЕРНОТЕЛЬНОМ ИЗЛУЧЕНИЕМ, ДЛЯ АТОМА ВОДОРОДА

В работе [14] в рамках КЭД была рассмотрена температурно-зависимая однопетлевая собственно-энергетическая (СЭ) поправка к связанному состоянию атомного электрона. Согласно этому подходу штарковский сдвиг возникает как вещественная часть СЭ-поправки, а ее мнимая часть соответствует скорости депопуляции, индуцированной ЧИ, для данного атомного состояния. Кроме того, в работе [14] было показано, что регуляризация расходящихся энергетических знаменателей, возникающих в СЭ-поправке, приводит к вкладу, который можно объяснить индуцированным ЧИ смешиванием уровней. Этот эффект дает более значительное ушире-

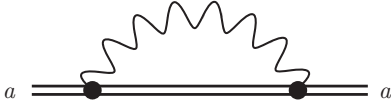


Рис. 1. Однопетлевая собственнoэнергетическая поправка для энергии атомного электрона в состоянии a . Двойная сплошная линия обозначает электронные состояния и электронный пропагатор во внешнем потенциале ядра (картина Фарри). Волнистая линия обозначает виртуальный фотон

ние спектральной линии, чем вынужденное резонансное рассеяние фотонов ЧИ [8].

В КЭД-теории при нулевой температуре однопетлевая СЭ-поправка для атомного электрона дается графиком Фейнмана на рис. 1. Тогда в формализме S -матрицы можно записать [23]

$$S_{fi} = e^2 \int dx_1^4 dx_2^4 \bar{\psi}_f(x_1) \gamma^{\mu_1} S(x_1, x_2) \times \gamma^{\mu_2} \psi_i(x_2) D_{\mu_1 \mu_2}(x_1, x_2), \quad (5)$$

где интегрирование выполняется по пространственно-временным четырехвекторам $x_1, x_2, x \equiv (t, \mathbf{r})$, \mathbf{r} — пространственный вектор и t — время. Матрицы Дирака обозначаются как γ_{μ_i} , где индекс μ_i принимает значения $\mu_i = 0, 1, 2, 3$, $\psi(x) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-iEt)$ — дираковская волновая функция электрона (E — энергия соответствующего уровня), $\bar{\psi}$ — дираковски-сопряженная волновая функция. Индексы f и i обозначают конечные и начальные состояния, а $S(x_1, x_2)$ и $D_{\mu_1 \mu_2}(x_1, x_2)$ — соответственно электронный и фотонный пропагаторы.

Стандартный (при нулевой температуре) электронный пропагатор, определяемый как вакуумное среднее от T -хронологического произведения операторов электрон-позитронного поля, может быть представлен в виде разложения [23]:

$$S(x_1 x_2) = -i \langle 0 | T [\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 \rangle = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\{-i\omega(t_1 - t_2)\} \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}_1) \bar{\psi}(\mathbf{r}_2)}{\omega - E_n(1 - i0)}. \quad (6)$$

Суммирование в (6) ведется по всему дираковскому спектру энергий. В фейнмановской калибровке стандартный фотонный пропагатор (при нулевой температуре) определяется как вакуумное среднее от T -хронологического произведения операторов электромагнитного поля и может быть представлен в следующем виде [23]:

$$D_{\mu_1 \mu_2}(x_1, x_2) = -i \langle 0 | T [A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2)] | 0 \rangle = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega I_{\mu_1 \mu_2}(|\Omega|, r_{12}) \exp(-i\Omega r_{12}), \quad (7)$$

$$I_{\mu_1 \mu_2}(\Omega, r_{12}) = \frac{g_{\mu_1 \mu_2}}{r_{12}} \exp(i\Omega r_{12}), \quad (8)$$

где $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ и $g_{\mu_1 \mu_2}$ — метрический тензор.

Поправка к уровню энергии атомного электрона a , возникающая из выражения (5), может быть разделена на две части (вещественную и мнимую) [23, 24]:

$$\Delta E_a = L^{SE} - \frac{i}{2} \Gamma_a. \quad (9)$$

Здесь L^{SE} обозначает низший порядок вклада собственной энергии электрона в лэмбовский сдвиг, а Γ_a определяет ширину уровня a . Другая радиационная поправка низшего порядка, также приводящая к сдвигу энергии, представляет собой поляризацию вакуума. Однако она не дает вклада в ширину уровня Γ_a , и мы опускаем ее описание.

В дальнейшем мы рассмотрим влияние ЧИ на атом, когда связанные электроны взаимодействуют с «тепловой баней» (окружающей средой) при устойчивом тепловом равновесии. Такой сценарий хорошо подходит для применения квантовой теории поля при конечных температурах. В соответствии с этой теорией [25], стандартный ($T_R = 0$) фотонный пропагатор $D_{\mu_1 \mu_2}$ должен быть заменен T -хронологическим произведением, усредненным по каноническому ансамблю:

$$iD_{\mu_1 \mu_2}(x_1, x_2) = \langle T [A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2)] \rangle_{\beta} = \text{Tr}(\rho \{T [A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2)]\}) = iD_{\mu_1 \mu_2}^0(x_1, x_2) + iD_{\mu_1 \mu_2}^{\beta}(x_1, x_2), \quad (10)$$

где ρ обозначает (в нулевом приближении) статистический оператор для невзаимодействующих фотонов, электронов и позитронов. След, обозначенный как Tr , в выражении (10) пробегает все (многочастичные) фокковские состояния. Согласно теореме Вика, T -хронологическое произведение операторов электромагнитного поля может быть представлено в виде суммы свертки (вакуумное среднее T -произведения) и нормально упорядоченного произведения ($:\dots:$),

$$\langle T [A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2)] \rangle_{\beta} = \langle 0 | T [A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2)] | 0 \rangle + \langle : A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2) : \rangle_{\beta}. \quad (11)$$

Таким образом, фотонный пропагатор при конечных температурах возникает как сумма части с нулевой температурой $D_{\mu_1\mu_2}^0$ и зависящей от температуры части $D_{\mu_1\mu_2}^\beta$, включающей планковское распределение фотонов «тепловой бани» $n_\beta(\omega)$ [25].

В рамках КЭД при конечных температурах газ свободных электронов (без внешнего поля) взаимодействует с фотонным газом. Обычно он рассматривается как находящийся в тепловом равновесии и определяется большим каноническим статистическим оператором, который модифицирует как электронный, так и фотонный пропагаторы. Поскольку наша задача состоит в описании влияния ЧИ на атомные уровни, где электроны являются сильно связанными кулоновским полем ядра, мы сохраняем стандартный электронный пропагатор Фейнмана, а соответствующая термальная поправка возникает из тепловой части фотонного пропагатора. Согласно [14], полная форма фотонного пропагатора (включая тепловую часть) в координатном пространстве может быть представлена следующим образом:

$$D_{\mu\nu}(x_1, x_2) = \frac{g_{\mu\nu}}{2\pi i r_{12}} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\{i|\omega|r_{12} - i\omega(t_1 - t_2)\} - \frac{g_{\mu\nu}}{\pi r_{12}} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n_\beta(|\omega|) \sin(|\omega|r_{12}) \exp\{-i\omega(t_1 - t_2)\}, \quad (12)$$

где первый член дает фейнмановский пропагатор при нулевой температуре, а второй соответствует тепловому полю фотонов. Отметим, что второе слагаемое в правой части (12) не имеет ультрафиолетовой расходимости, так как функция $n_\beta(\omega)$ обеспечивает естественное обрезание при $\omega \rightarrow \infty$.

Подстановка выражения (12) в (5) и вычисление вещественной части ΔE_a приводят к обычной СЭ-части лэмбовского сдвига и штарковского сдвига, индуцированного ЧИ. Анализ вещественной части этого выражения выходит за рамки настоящей статьи, и далее мы рассматриваем только мнимую часть. Температурно-зависимая однопетлевая СЭ-поправка может быть представлена в виде [14]

$$\Delta E_a^\beta = \frac{e^2}{\pi} \sum_n \left(\frac{1 - \alpha_1 \alpha_2}{r_{12}} I_{na}^\beta(r_{12}) \right)_{anna}, \quad (13)$$

где введено обозначение

$$I_{na}^\beta(r_{12}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n_\beta(|\omega|) \frac{\sin(|\omega|r_{12})}{E_n(1 - i0) - E_a + \omega} \quad (14)$$

и $\alpha_{1(2)}$ являются альфа-матрицами Дирака.

Для вычисления мнимой части выражения (13) может быть использовано соотношение Сохоцкого:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \text{P.V.} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \quad (15)$$

где обозначение P.V. подразумевает вычисление интеграла в смысле главного значения. Тогда зависящая от температуры мнимая часть СЭ-поправки в нерелятивистском пределе дает индуцированную ЧИ (BBR, blackbody radiation) ширину уровня Γ_a^{BBR-RS} (см. также [8, 14]):

$$\Gamma_a^{BBR-RS} = \frac{4e^2}{3} \sum_n \omega_{na}^3 |\langle a|\mathbf{r}|n\rangle|^2 n_\beta(\omega_{na}). \quad (16)$$

Здесь индекс «RS» (Raman scattering) подчеркивает тот факт, что ширина Γ_a^{BBR-RS} обусловлена вынужденным комбинационным (рамановским) рассеянием фотонов ЧИ. Суммирование в выражении (16) проводится по всему дискретному и сплошному спектру, а $\omega_{na} = E_n - E_a$. Соответствующая парциальная ширина $\Gamma_{aa_0}^{BBR-RS}$ (индуцированный переход в состояние a_0) дается выражением

$$\Gamma_{aa_0}^{BBR-RS} = \frac{4e^2}{3} \omega_{a_0a}^3 |\langle a|\mathbf{r}|a_0\rangle|^2 n_\beta(\omega_{a_0a}). \quad (17)$$

Однако в работе [14] была показана необходимость регуляризации расходящихся знаменателей в выражении (14). Эта регуляризация основана на КЭД-теории контура спектральной линии (см., например, [26]). Конечным результатом такой регуляризации для мнимой части СЭ-поправки в нерелятивистском пределе является выражение [14]

$$\Gamma_a^{BBR-QED} = \frac{2e^2}{3\pi} \sum_n |\langle a|\mathbf{r}|n\rangle|^2 \int_0^\infty d\omega n_\beta(\omega) \omega^3 \times \left[\frac{\Gamma_{na}}{(\tilde{\omega}_{na} + \omega)^2 + (1/4)\Gamma_{na}^2} + \frac{\Gamma_{na}}{(\tilde{\omega}_{na} - \omega)^2 + (1/4)\Gamma_{na}^2} \right], \quad (18)$$

где $\tilde{\omega}_{na} \equiv E_n - E_a + \Delta E_{na}^L$, ΔE_{na}^L — соответствующая СЭ-часть лэмбовского сдвига, $\Gamma_{na} \equiv \Gamma_n + \Gamma_a$. Суммирование в выражении (18) проходит по всем состояниям, четность которых противоположна четности состояния a .

Парциальная ширина $\Gamma_{aa_0}^{BBR-QED}$ может быть введена по аналогии с выражением (17):

$$\Gamma_{a a_0}^{BBR-QED} = \frac{2e^2}{3\pi} |\langle a | \mathbf{r} | a_0 \rangle|^2 \int_0^\infty d\omega n_\beta(\omega) \omega^3 \times \left[\frac{\Gamma_{a_0 a}}{(\tilde{\omega}_{a_0 a} + \omega)^2 + (1/4)\Gamma_{a_0 a}^2} + \frac{\Gamma_{a_0 a}}{(\tilde{\omega}_{a_0 a} - \omega)^2 + (1/4)\Gamma_{a_0 a}^2} \right]. \quad (19)$$

Следует отметить, что выражение (19) может быть получено также в рамках феноменологического подхода из уравнения (3) при рассмотрении системы атом + поле, когда квадрат амплитуды статического электрического поля заменяется среднеквадратичным значением напряженности, т. е. выражением (1). Аналогичным образом обычно выводится выражение для индуцированного ЧИ штарковского сдвига (см., например, [8]).

Случай, когда $a = 2s$ и $a_0 = 2p$, представляет особый интерес, так как он соответствует переходу $\overline{2s} \rightarrow 1s + \gamma(E1)$. Как и в случае квадратичного смешивания уровней в статическом электрическом поле, однофотонный переход $\overline{2s} \rightarrow 1s + \gamma(E1)$ происходит на частоте $\omega_{2s1s} = E_{2s} - E_{1s}$. Значения штарковского сдвига и соответствующих ширин, индуцированных ЧИ, для состояний $2s$ и $2p$ при различных температурах T_R может быть найдено в работе [14]. Согласно результатам [14], при температуре $T_R = 5000$ К штарковский сдвиг равен $-2.52546 \cdot 10^5$ Гц. Это на четыре порядка меньше, чем лэмбовский сдвиг в водороде. Таким образом, можно полностью пренебречь зависимостью частоты перехода от штарковского сдвига. Результаты расчета полных и частичных ширин для $2s$ -состояния в атомах водорода (HI) и однократно ионизованного гелия (HeII), вычисленных по формулам (18) и (19), соответственно представлены в табл. 1, 2 для различных температур ЧИ.

4. ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЙНИЕ ФОТОНОВ ЧЕРНОТЕЛЬНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Чтобы прояснить физическую картину эффекта смешивания, индуцированного ЧИ, далее мы сравниваем эффект смешивания (18) с процессом резонансного комбинационного рассеяния (RS): $i + \gamma \rightarrow a \rightarrow f + \gamma'$, где индексы i и f обозначают соответственно начальное и конечное состояния атома, a обозначает возбужденное промежуточное состояние, а индексам γ и γ' соответствуют поглощенный и испущенный фотоны. Такой анализ позволит нам

Таблица 1. Полные $\Gamma_{2s}^{BBR-QED}$ и частичные $\Gamma_{2s,2p \rightarrow 1s}^{BBR-QED}$ ширины смешивания, индуцированные ЧИ, для атома водорода (HI) при различных значениях красного смещения z . Соответствующая температура излучения дается выражением (33). В скобках обозначены степени десяти

z	$\Gamma_{2s}^{BBR-QED}, \text{с}^{-1}$	$\Gamma_{2s,2p \rightarrow 1s}^{BBR-QED}, \text{с}^{-1}$
1000	2.24194(9)	8.820(5)
1100	4.65398(9)	1.086(6)
1200	8.55749(9)	1.270(6)
1300	1.43341(10)	1.490(6)
1400	2.23155(10)	1.728(6)
1500	3.27682(10)	1.983(6)
1600	4.58886(10)	2.256(6)
1700	6.18058(10)	2.546(6)

Таблица 2. Полные $\Gamma_{2s}^{BBR-QED}$ и частичные $\Gamma_{2s,2p \rightarrow 1s}^{BBR-QED}$ ширины смешивания, индуцированные ЧИ, для однократно ионизованного гелия (HeII) при различных значениях красного смещения z . Соответствующая температура излучения дается выражением (33). В скобках обозначены степени десяти

z	$\Gamma_{2s}^{BBR-QED}, \text{с}^{-1}$	$\Gamma_{2s,2p \rightarrow 1s}^{BBR-QED}, \text{с}^{-1}$
5000	9.44124(9)	8.80233(7)
5200	1.20857(10)	9.52045(7)
5400	1.51962(10)	1.02667(8)
5600	1.88032(10)	1.10412(8)
5800	2.29338(10)	1.18438(8)
6000	2.76111(10)	1.26745(8)
6200	3.28547(10)	1.35334(8)
6400	3.86807(10)	1.44205(8)
6600	4.51018(10)	1.53357(8)
6800	5.21275(10)	1.62791(8)
7000	5.97644(10)	1.72506(8)

выявить возможность различать эти процессы в лабораторных экспериментах. В свою очередь, результаты таких экспериментов могут быть применимы к детальному исследованию атомных процессов, проходивших в период рекомбинации первичной плазмы в ранней Вселенной.

Элемент S -матрицы, соответствующий процессу резонансного комбинационного рассеяния, может быть представлен в виде

$$\hat{S}_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 \int dx_1 dx_2 \bar{\psi}_f(x_1) \gamma_{\mu_1} A_{\mu_1}^{*(\mathbf{k}_2, \mathbf{e}_2)}(x_1) \times \\ \times S(x_1 x_2) \gamma_{\mu_2} A_{\mu_2}^{(\mathbf{k}_1, \mathbf{e}_1)}(x_2) \psi_i(x_2), \quad (20)$$

где волновая функция фотона (вектор-потенциал электромагнитного поля) дается выражением

$$A_{\mu}^{(\mathbf{k}, \mathbf{e})}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} e_{\mu}^{(\lambda)} \exp(ik_{\mu} x_{\mu}) = \\ = A_{\mu}^{(\mathbf{k}, \mathbf{e})}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t). \quad (21)$$

Здесь введены следующие обозначения: $k \equiv (\omega, \mathbf{k})$ — четырех-вектор импульса фотона, \mathbf{k} — волновой вектор фотона, $\omega = |\mathbf{k}|$ — частота фотонов, $e_{\mu}^{(\lambda)}$ — компоненты четырех-вектора поляризации фотонов. $A_{\mu}^{(\mathbf{k}, \mathbf{e})}$ и $A_{\mu}^{*(\mathbf{k}, \mathbf{e})}$ в выражении (20) отвечают соответственно поглощенному и испущенному фотонам.

Дифференциальная абсолютная вероятность процесса излучения, возникающая из поперечного сечения резонансного рассеяния, может быть записана в виде [23, 27]

$$dw_{af}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{dW_{af}(\omega)}{(E_a - E_f - \omega)^2 + (1/4)\Gamma_a^2}, \quad (22)$$

где dW_{af} — дифференциальная вероятность перехода $a \rightarrow f$:

$$dW_{af}(\omega) = \frac{2\pi e^2}{2l_a + 1} \sum_{m_a m_f} \sum_{\mathbf{e}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left| (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})_{fa} \right|^2, \quad (23)$$

записанная в нерелятивистском дипольном приближении. В уравнении (23) m_a и m_f — проекции орбитального момента импульса электрона l_a , l_f в состояниях a и f соответственно; \mathbf{e} , \mathbf{p} — векторы поляризации фотона и импульса электрона. Предполагается, что уровень f стабильный ($\Gamma_f = 0$) или метастабильный ($\Gamma_f \ll \Gamma_a$), а a представляет собой резонансное состояние, т. е. состояние, возникающее в результате поглощения фотона с частотой, равной $\omega_{ai} = E_a - E_i$. Детали и описание резонансного приближения, использованного при выводе (22), можно найти в работах [28, 29]. Выражение (22) следует из разделения абсорбционных и эмиссионных процессов, которые становятся независимыми в резонансном приближении. Результат (22) представляет собой профиль линии для излучения фотона, которое происходит на резонансной частоте $\omega_{af} = E_a - E_f$.

Из выражения (22) может быть получена полная вероятность индуцированного перехода [8]. Для

этой цели будем использовать процедуру, описанную в работе [30]. После интегрирования по ω вероятность процесса комбинационного рассеяния принимает вид

$$w_{af} = \frac{W_{af}^{E1}(\omega_{af})}{\Gamma_a}, \quad (24)$$

где w_{af} — абсолютная вероятность перехода $a \rightarrow f$ и $W_{af}^{E1}(\omega_{af})$ — вероятность однофотонного распада (в единицу времени) с излучением E1-фотона. Выражение (24) соответствует спонтанному излучению, которое возникает при комбинационном рассеянии в резонансном приближении. Однако наличие поля фотонов (в частности, поля излучения абсолютно черного тела) индуцирует дополнительное излучение с той же частотой [31]. Индуцированная вероятность распада выражается через число фотонов:

$$W_{af}^{ind} = n_{\beta}(\omega_{af}) W_{af}^{E1}(\omega_{af}). \quad (25)$$

В нашем случае n_{β} определяется планковским распределением. Тогда полная вероятность излучения, соответствующая вынужденному резонансному рассеянию, определяется выражением

$$W_{af}(T) = (1 + n_{\beta}(\omega_{af})) W_{af}^{E1}(\omega_{af}). \quad (26)$$

Полная радиационная ширина уровня a может быть получена суммированием по всем возможным конечным состояниям в выражении (25) и в точности совпадает с результатом (16) для индуцированной ширины уровня a , см. также [8].

Таким образом, из процесса резонансного комбинационного рассеяния возникают естественная и индуцированная ЧИ ширины уровня a ; индуцированная величина определяется выражением (16). Выражение (18), полученное в рамках КЭД-подхода, является при этом более общим результатом. Оно включает оба эффекта: резонансное комбинационное рассеяние и смешивание уровней. В частности, результат (16) можно получить из (18) в пределе $\Gamma_{na} \rightarrow 0$ (монохроматическое приближение), такое приближение дает сумму двух дельта-функций: $\delta(\tilde{\omega}_{na} + \omega) + \Delta(\tilde{\omega}_{na} - \omega)$. Тогда интегрирование по ω в выражении (18) приводит к выражению (16). Однако существует важное различие между скоростью депопуляции (естественная и индуцированная ширины уровня) и эффектом смешивания. Скорость депопуляции, индуцированная ЧИ, является главным образом резонансным эффектом. В то же время нерезонансный вклад в уравнении (18) является доминирующим и может быть объяснен эффектом смешивания [14]. Рассмотрим это различие более подробно.

Квантовомеханический результат, представленный в работе [8] (см. также (16) настоящей работы), достигается в резонансном (монокроматическом) приближении. В этом случае нет перехода из состояния $2s$ в основное с излучением E1-фотона. Однако, как было показано в разд. 2, эффект смешивания уровней приводит к излучению E1-фотона. Как и в случае перехода от динамического штарковского сдвига к статическому пределу, частоту ω в знаменателях выражения (19) можно устремить к нулю [9]. Такой предельный переход может быть оправдан тем, что функция $n_\beta(\omega)$ при соответствующих температурах сосредоточена в области малых значений ω . Тогда в случае $a = 2s$ и $a_0 = 2p$ (см. выражение (19)) приходим к пределу

$$\begin{aligned} \Gamma_{2s\ 2p}^{BBR-QED} &= \frac{4e^2}{3\pi} |\langle 2s|\mathbf{r}|2p\rangle|^2 \int_0^\infty d\omega n_\beta(\omega)\omega^3 \times \\ &\times \left[\frac{\Gamma_{2s\ 2p}}{\tilde{\omega}_{2s\ 2p}^2 + (1/4)\Gamma_{2s\ 2p}^2} \right] + \text{динамические поправки} \approx \\ &\approx \frac{4e^2}{3\pi} |\langle 2s|\mathbf{r}|2p\rangle|^2 \int_0^\infty d\omega n_\beta(\omega)\omega^3 \times \\ &\times \left[\frac{\Gamma_{2p}}{(\Delta E_{2s\ 2p}^L)^2 + (1/4)\Gamma_{2p}^2} \right] + \\ &+ \text{динамические поправки.} \quad (27) \end{aligned}$$

Здесь мы приняли во внимание, что $\Gamma_{2s} \ll \Gamma_{2p}$ и $\tilde{\omega}_{2s\ 2p} = \Delta E_{2s\ 2p}^L$ (см. выражение (4)). Интегрирование по частоте в выражении (27) с учетом определения (1) приводит ко второму слагаемому в выражении (3), в котором квадрат напряженности электрического поля E_0^2 заменен среднеквадратичным значением $\langle E^2 \rangle$. В свою очередь, это означает, что вероятность перехода в виде (27) следует подставить в выражение (22). Следовательно, процесс излучения происходит на резонансной частоте ω_{2s1s} , т. е. на частоте, сдвинутой относительно частоты $\text{Ly}\alpha$ -перехода на лэмбовский сдвиг, как и в случае статического электрического поля (4).

Приведенный выше анализ позволяет однозначно различить вклады в уширение линии, индуцированные излучением абсолютно черного тела за счет смешивания уровней и за счет резонансного комбинационного рассеяния. Излучение дипольного электрического фотона происходит в обоих случаях, но на разных частотах, см. (4), что приводит к возможности наблюдать эти два эффекта в эксперименте типа [3, 4]. Как будет показано ниже, исследование этих эффектов в лабораторной плазме может иметь

важное приложение при описании кинетики космологической рекомбинации в ранней Вселенной.

5. ПРИЛОЖЕНИЕ К КИНЕТИКЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ РЕКОМБИНАЦИИ

Прецизионные измерения температурной и поляризационной анизотропии космического микроволнового фона требуют детального теоретического анализа различных атомных процессов, которые могут оказать влияние на ионизационную историю первичной плазмы [32]. Несмотря на то что индуцированные переходы (выражение (16)) учитываются во всех современных исследованиях КМФ [33], эффект смешивания уровней, индуцированный ЧИ, ранее в литературе не рассматривался. В данном разделе покажем, что эффект смешивания существенно влияет на кинетику космологической рекомбинации. Для этой цели мы рассмотрим переходы между связанными состояниями в атоме водорода H I и однократно ионизованном атоме гелия He II (водородоподобный ион с $Z = 2$) в рамках модели трехуровневого атома (основное состояние, первое возбужденное состояние и континуум), см. [33, 34]. При этом достаточно рассмотреть однофотонный $2p \rightarrow 1s + \gamma(\text{E1})$ и двухфотонный $2s \rightarrow 1s + 2\gamma(\text{E1})$ переходы наряду с соответствующими индуцированными скоростями депопуляции [35]. Для того чтобы учесть вклад эффекта смешивания, в кинетические уравнения баланса должен быть включен дополнительный канал распада $\bar{2s} \rightarrow 1s + \gamma(\text{E1})$. Далее будет использоваться международная система единиц (СИ).

5.1. Кинетические уравнения баланса для атома водорода

В первом приближении временные рамки первичной рекомбинации водорода можно оценить, рассмотрев равновесную рекомбинацию. Такой сценарий описывается уравнением Саха [35]:

$$\frac{n_{\text{H I}} n_e}{n_{\text{H I}}} = \frac{g_e g_{\text{H I}}}{g_{\text{H I}}} G_e(T_M) \exp\left(-\frac{E_{\text{H I},c}}{k_B T_M}\right), \quad (28)$$

где n_e , $n_{\text{H I}}$ и $n_{\text{H I}}$ — плотности соответственно свободных электронов, протонов и атомов водорода, g_e , $g_{\text{H I}}$ и $g_{\text{H I}}$ представляют соответствующие статистические веса, $E_{\text{H I},c}$ — энергия ионизации основного состояния атома водорода, а $G_e(T_M)$ — статистическая сумма свободных электронов, зависящая от температуры среды T_M :

Таблица 3. Параметры космологической модели, использованные в расчетах, см. также [39]

Описание	Символ	Значение
Общая плотность материи (в единицах критической плотности)	Ω_{tot}	1
Плотность темной энергии	Ω_Λ	0.6911
Плотность барионной материи	Ω_b	0.0486
Плотность темной материи	Ω_c	0.2589
Плотность нерелятивистской материи	Ω_m	0.3089
Плотность релятивистской материи	Ω_{rel}	$9.07 \cdot 10^{-5}$
Постоянная Хаббла	H_0	$67.74 \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{Мпс}^{-1}$
Температура фонового излучения	T_0	2.725 К
Массовая доля водорода	X	0.76
Массовая доля гелия	Y	0.24

$$G_e(T_M) = \frac{(2\pi m_e k_B T_M)^{3/2}}{h^3}. \quad (29)$$

Здесь m_e — масса электрона, h — постоянная Планка.

Удобно ввести относительную плотность ионов водорода НИИ в плазме:

$$x_{НИИ} = \frac{n_{НИИ}}{n_{НИ} + n_{НИИ}} = \frac{n_{НИИ}}{n_{НИ}}, \quad (30)$$

где $n_{НИ}$ — общая плотность атомов водорода и ионов. Тогда выражение (28) может быть записано в виде обычного квадратного уравнения относительно переменной $x_{НИИ}$ [34]:

$$\frac{x_{НИИ}^2}{1 - x_{НИИ}} = \frac{G_e(T_M)}{n_{НИ}} \exp\left(-\frac{E_{НИ,c}}{k_B T_M}\right). \quad (31)$$

В рамках «стандартного» подхода предполагается, что в период рекомбинации водорода, $900 < z < 1600$, рекомбинация первичного гелия уже закончена, а число свободных электронов определяется числом ионизованного водорода. Таким образом, степень ионизации водородной плазмы $x_e \equiv n_e/n_{НИ}$ для этого периода дается равенством $x_e = x_{НИИ}$ [35].

В работах [17, 35] было показано, что температура среды T_M близка к температуре излучения T_R и их различие пренебрежимо мало даже при малых значениях красного смещения z . Таким образом, в дальнейших вычислениях можно положить $T_M = T_R$ без существенной потери точности. Параметры $n_{НИ}$ и T_R связаны с красным смещением z следующими соотношениями:

$$n_{НИ} = n_{Н_0} (1 + z)^3, \quad (32)$$

$$T_R = T_0 (1 + z), \quad (33)$$

где T_0 — температура КМФ в настоящее время, $n_{Н_0} = \rho_c \Omega_b X / m_{Н} = 1.902 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-3}$ — плотность атомов и ионов водорода в настоящее время, ($\rho_c = 3H_0^2 / 8\pi G$ — критическая плотность Вселенной, $m_{Н}$ — масса атома водорода, G — гравитационная постоянная. Современные значения параметров Ω_b и X приведены в табл. 3).

Хорошо известно, что реальные условия рекомбинации далеки от локального термодинамического равновесия (ЛТР). Это происходит по следующим причинам. Во-первых, водородная плазма не является прозрачной для собственного резонансного излучения, т. е. резонансное излучение некоторого возбужденного атома немедленно (по сравнению с характерным временем рекомбинации и ионизации), перепоглощается другим атомом. Во-вторых, поскольку рекомбинационное излучение избыточно относительно фонового ЧИ, происходит избыточное заселение возбужденных состояний атомов по сравнению с равновесными значениями. Поэтому для описания космологической рекомбинации требуется рассмотрение кинетических уравнений баланса для населенностей возбужденных состояний атома водорода [16, 17].

В рамках «трехуровневой» модели атома предполагается, что распределение всех высоко-возбужденных состояний в атоме подчиняется закону Больцмана, определяемому от первого возбужденного состояния:

$$x_{nl} = x_{2s} \frac{g_{nl}}{g_{2s}} \exp\left(-\frac{E_{nl} - E_{2s}}{k_B T_M}\right). \quad (34)$$

Тогда изменение относительной плотности ионов водорода x_{HI} в однородной изотропной расширяющейся Вселенной описывается следующим дифференциальным уравнением [34]:

$$\frac{dx_{\text{HI}}}{dt} = -(\alpha_{\text{HI}} n_e x_{\text{HI}} - \beta_{\text{HI}} x_{2s}) \equiv J_{\text{HI}}, \quad (35)$$

где x_{2s} — относительная плотность атомов водорода в $2s$ -состоянии, α_{HI} и β_{HI} — полные коэффициенты рекомбинации и ионизации соответственно. Величина J_{HI} [с^{-1}] в выражении (35) есть скорость образования атомов нейтрального водорода, нормированная на плотность n_{H} . Для водородоподобного иона с зарядом ядра Z коэффициент α_{HI} может быть интерполирован в функциональной форме [36, 37]:

$$\alpha_{\text{HI}} = 10^{-19} \frac{a (t/Z^2)^b}{1 + c (t/Z^2)^d} \text{М}^3 \cdot \text{с}^{-1}, \quad (36)$$

с параметрами $a = 4.309$, $b = -0.6166$, $c = 0.6703$, $d = 0.5300$ и $t = T_M/10^4$ К. Согласно принципу детального баланса, коэффициенты α_{HI} и β_{HI} в выражении (35) связаны соотношением [35]

$$\beta_{\text{HI}} = \alpha_{\text{HI}} G_e(T_M) \exp\left(-\frac{E_{nl} - E_{2s}}{k_B T_M}\right). \quad (37)$$

Предполагая, что все нескомпенсированные переходы в основное состояние протекают через двухфотонный распад $2s \rightarrow 1s + 2\gamma(\text{E1})$, а выход Ly_α -фотонов происходит за счет космологического расширения [16, 17], приходим к условию баланса [34]:

$$J_{\text{HI}} = J_{\text{HI},2s}^{\text{E1E1}} + J_{\text{HI},2p}^{\text{E1}}, \quad (38)$$

где $J_{\text{HI},2s}^{\text{E1E1}}$ и $J_{\text{HI},2p}^{\text{E1}}$ представляют собой нескомпенсированные скорости переходов для процессов $2s \leftrightarrow \leftrightarrow 1s + 2\gamma(\text{E1})$ и $2p \leftrightarrow 1s + \gamma(\text{E1})$ соответственно, нормированные на n_{H} .

Скорость перехода $J_{\text{HI},2s}^{\text{E1E1}}$ в первом приближении может быть описана следующим выражением, [34, 35]:

$$J_{\text{HI},2s}^{\text{E1E1}} = A_{\text{HI},2s1s}^{\text{E1E1}} \left(x_{2s} - \exp\left(-\frac{E_{2s} - E_{1s}}{k_B T_M}\right) x_{1s} \right), \quad (39)$$

где x_{1s} — относительная плотность атомов водорода в $1s$ -состоянии, $A_{\text{HI},2s1s}^{\text{E1E1}}$ — коэффициент Эйнштейна для двухфотонного распада, $A_{\text{HI},2s1s}^{\text{E1E1}} \equiv W_{2s1s}^{\text{E1E1}} = 8.229 \text{с}^{-1}$. Скорость перехода $J_{\text{HI},2p}^{\text{E1}}$ для процесса

$2p \rightarrow 1s + \gamma(\text{E1})$ описывается в терминах соболевской вероятности выхода излучения [35] выражением

$$J_{\text{HI},2p}^{\text{E1}} = P_{\text{HI},2p1s} A_{\text{HI},2p1s}^{\text{E1}} \times \left(x_{2p} - \frac{g_{2p}}{g_{1s}} \exp\left(-\frac{E_{2p} - E_{1s}}{k_B T_M}\right) x_{1s} \right), \quad (40)$$

где $A_{\text{HI},2p1s}^{\text{E1}} \equiv W_{2p1s}^{\text{E1}} = 6.265 \cdot 10^8 \text{с}^{-1}$ — коэффициент Эйнштейна для перехода $2p \rightarrow 1s + \gamma(\text{E1})$. Соболевская вероятность $P_{\text{HI},2p1s}$ может быть вычислена по следующей формуле:

$$P_{\text{HI},2p1s} = \frac{1 - \exp(-\tau_\alpha)}{\tau_\alpha}. \quad (41)$$

Здесь τ_α — оптическая толщина для линии Ly_α ,

$$\tau_\alpha = \frac{A_{\text{HI},2p1s}^{\text{E1}} n_{1s} c^3}{8\pi H(z) \nu_{2p1s}^{\text{HI}} g_{1s}}, \quad (42)$$

ν_{2p1s}^{HI} — частота Ly_α -перехода, c — скорость света, $H(z)$ — постоянная Хаббла [34, 35]:

$$H(z) = H_0 (\Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_{rel}(1+z)^4)^{1/2}. \quad (43)$$

Параметры H_0 , Ω_Λ , Ω_m , Ω_{rel} , входящие в выражение (43), приведены в табл. 3. Следуя работе [35], мы рассматриваем случай $\Omega_{tot} = \Omega_\Lambda + \Omega_K + \Omega_m + \Omega_{rel} = 1$. От производной по времени в левой части уравнения (35) удобно перейти к производной по красному смещению z с помощью соотношения

$$\frac{dz}{dt} = -(1+z)H(z). \quad (44)$$

Частота Ly_α -фотонов находится в виновской части планковского распределения, поэтому индуцированными переходами в выражениях (39), (40) можно пренебречь. Поправки к величине $J_{\text{HI},2s}^{\text{E1E1}}$ за счет индуцированных двухфотонных переходов рассматривались в работе [38] и оказались также пренебрежимо малыми.

Подставляя (39), (40) в (38) и используя (44), удается выразить x_{2p} через x_{2s} . Тогда можно получить уравнение, которое содержит уже только две неизвестные: x_{1s} и x_{2s} . Решение этого уравнения относительно x_{2s} может быть получено в виде

$$x_{2s} = \frac{\alpha_{\text{HeIII}} n_e x_e + \left(\frac{g_{2p}}{g_{1s}} A_{\text{HeI},2p1s}^{r,E1} + A_{\text{HeI},2s1s}^{\text{E1E1}} \right) \exp\left(-\frac{\Delta E_{21}^{\text{HeI}}}{k_B T}\right) x_{1s}}{\beta_{\text{HeI}} + \frac{g_{2p}}{g_{2s}} A_{\text{HeI},2p1s}^{r,E1} + A_{\text{HeI},2s1s}}, \quad (45)$$

где введено обозначение $A_{\text{HeI},2p1s}^{r,E1} \equiv P_{\text{HeI},2p1s} A_{\text{HeI},2p1s}^{\text{E1E1}}$ (верхний индекс r означает redshifting). Принимая во внимание (44), (45) и $x_{1s} \simeq 1 - x_{\text{HeI}}$, окончательно приходим к уравнению

$$\frac{dx_{\text{HeIII}}}{dz} = C_{\text{HeI}} \frac{\alpha_{\text{HeIII}} n_e x_{\text{HeIII}} - \beta_{\text{HeI}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{21}^{\text{HeI}}}{k_B T_M}\right) (1 - x_{\text{HeIII}})}{(1+z)H(z)}, \quad (46)$$

$$C_{\text{HeI}} = \frac{\frac{g_{2p}}{g_{1s}} A_{\text{HeI},2p1s}^{r,E1} + A_{\text{HeI},2s1s}^{\text{E1E1}}}{\beta_{\text{HeI}} + \frac{g_{2p}}{g_{2s}} A_{\text{HeI},2p1s}^{r,E1} + A_{\text{HeI},2s1s}^{\text{E1E1}}}. \quad (47)$$

Уравнение (46) будем называть «стандартным». Отметим, что оно было получено в работе [35] в несколько иной форме. Численное решение уравнения (46) представлено на рис. 2 штриховой кривой.

5.2. Кинетические уравнения баланса для однократно ионизованного гелия

Как и в случае нейтрального водорода, период рекомбинации $\text{HeIII} \rightarrow \text{HeII}$ может быть оценен уравнением Саха:

$$\frac{n_{\text{HeIII}} n_e}{n_{\text{HeII}}} = \frac{g_e g_{\text{HeIII}}}{g_{\text{HeII}}} G_e(T_M) \exp\left(-\frac{E_{\text{HeII},c}}{k_B T_M}\right), \quad (48)$$

где n_{HeIII} — плотность ядер гелия, n_{HeII} — плотность атомов однократно ионизованного гелия, $E_{\text{HeII},c}$ — энергия ионизации иона HeII из основного состояния. Из (48) следует, что рекомбинация $\text{HeIII} \rightarrow \text{HeII}$

происходит при красных смещениях $z = 5000\text{--}7000$. Аналогично (28) введем относительную плотность ядер гелия HeIII согласно определению

$$x_{\text{HeIII}} = \frac{n_{\text{HeIII}}}{n_{\text{HeIII}} + n_{\text{HeII}} + n_{\text{HeI}}} = \frac{n_{\text{HeIII}}}{n_{\text{He}}}, \quad (49)$$

где n_{HeI} — плотность атомов гелия, n_{He} — полная плотность атомов и ионов гелия. Тогда уравнение (48) может быть записано в виде

$$\frac{x_{\text{HeIII}}(1 + f_{\text{He}}(1 + x_{\text{HeIII}}))}{1 - x_{\text{HeIII}}} = \frac{G_e(T_M)}{n_H} \exp\left(-\frac{E_{\text{HeII},c}}{k_B T_M}\right), \quad (50)$$

где $f_{\text{He}} = n_{\text{He}}/n_H$. Плотность свободных электронов n_e (и степень ионизации x_e) для данного периода может быть вычислена по формуле $n_e = n_H + n_{\text{He}}(1 + x_{\text{HeIII}})$.

Поскольку HeII является водородоподобным ионом, получаем уравнение, аналогичное (46):

$$\frac{dx_{\text{HeIII}}}{dz} = C_{\text{HeII}} \frac{\alpha_{\text{HeIII}} n_e x_{\text{HeIII}} - \beta_{\text{HeII}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{21}^{\text{HeII}}}{k_B T_M}\right) (1 - x_{\text{HeIII}})}{(1+z)H(z)}. \quad (51)$$

Здесь α_{HeIII} и β_{HeII} — соответственно полный коэффициент рекомбинации для HeIII и полный коэффициент ионизации для HeII . Величина C_{HeII} определяется выражением

$$C_{\text{HeII}} = \frac{\frac{g_{2p}}{g_{1s}} A_{\text{HeII},2p1s}^{r,E1} + A_{\text{HeII},2s1s}^{\text{E1E1}}}{\beta_{\text{HeII}} + \frac{g_{2p}}{g_{2s}} A_{\text{HeII},2p1s}^{r,E1} + A_{\text{HeII},2s1s}^{\text{E1E1}}}, \quad (52)$$

где $A_{\text{HeII},2p1s}^{r,E1} \equiv P_{\text{HeII}} A_{\text{HeII},2p1s}^{\text{E1E1}}$, $A_{\text{HeII},2p1s}^{\text{E1E1}} = 1.003 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$ и $A_{\text{HeII},2s1s}^{\text{E1E1}} = 5.2661 \cdot 10^2 \text{ c}^{-1}$. Соболевская вероятность P_{HeII} также дается выражением (41) с оптической толщиной τ_α , соответствующей Ly_α -переходу в HeII .

Численное решение уравнения (51) показывает, что рекомбинация $\text{HeIII} \rightarrow \text{HeII}$ близка к сценарию ЛТР и может быть с достаточной точностью описана уравнением Саха (50) (см. рис. 3).

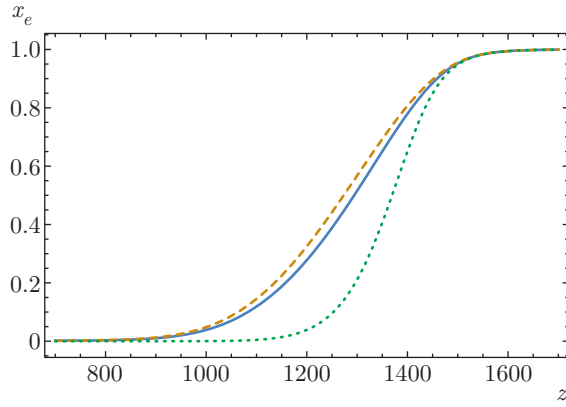


Рис. 2. Степень ионизации x_e для периода рекомбинации $\text{He III} \rightarrow \text{He II}$ в зависимости от красного смещения z . Пунктирная кривая соответствует случаю ЛТР (уравнение Саха), штриховая кривая соответствует «стандартному» уравнению баланса заселенностей, сплошная кривая соответствует решению уравнения (57)

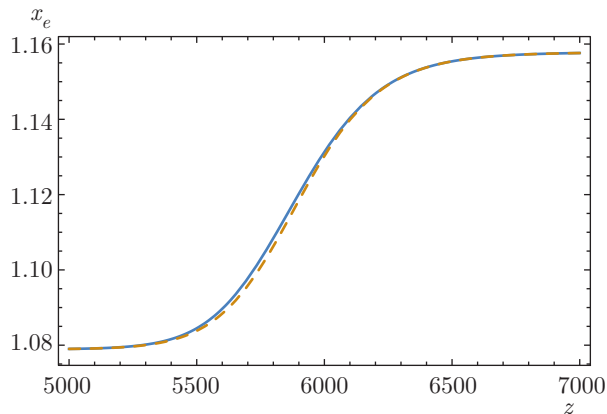


Рис. 3. Степень ионизации x_e для периода рекомбинации $\text{He III} \rightarrow \text{He II}$ в зависимости от красного смещения z . Штриховая кривая соответствует случаю ЛТР (уравнение Саха), сплошная кривая соответствует «стандартному» подходу в рамках трехуровневой модели атома

5.3. Кинетика рекомбинации с учетом эффекта смешивания уровней

Принимая во внимание результат полученный в разд. 5.1, введем в кинетическое уравнение баланса скорость нескомпенсированных переходов $J_{\text{He III}, 2s}^{\text{E1}}$, которая соответствует однофотонному распаду $2s \rightarrow 1s + \gamma(\text{E1})$ смешанного $2s$ -состояния. Тогда новое условие баланса может быть представлено равенством

$$J_{\text{He III}} = J_{\text{He III}, 2s}^{\text{E1E1}} + J_{\text{He III}, 2p}^{\text{E1}} + J_{\text{He III}, 2s}^{\text{E1}}, \quad (53)$$

где

$$J_{\text{He III}, 2s}^{\text{E1}} = P_{2s1s} A_{\text{He III}, 2s1s}^{\text{E1}} \times \left(x_{2s} - \exp\left(-\frac{E_{2s} - E_{1s}}{k_B T_M}\right) x_{1s} \right). \quad (54)$$

Отметим, что $A_{\text{He III}, 2s1s}^{\text{E1}} \equiv \Gamma_{2s, 2p \rightarrow 1s}^{\text{BBR-QED}}$ в выражении (54) зависит от красного смещения (см. табл. 1, 2). Однако порядок величины $A_{\text{He III}, 2s1s}^{\text{E1}}$ мало изменяется за период рекомбинации, поэтому приближение (54) можно считать оправданным. Соболевская вероятность, P_{2s1s} , записывается в виде, аналогичном выражению (42):

$$P_{2s1s} = \frac{1 - \exp(-\tilde{\tau}_\alpha)}{\tilde{\tau}_\alpha}, \quad (55)$$

где оптическая толщина $\tilde{\tau}_\alpha$ может быть вычислена по формуле

$$\tilde{\tau}_\alpha = \frac{A_{\text{He III}, 2s1s}^{\text{E1}} n_{1s} c^3}{8\pi H(z) \nu_{2s1s}} \frac{g_{2s}}{g_{1s}}. \quad (56)$$

Различие выражений (54)–(56) и (41), (42) заключается в разности частот переходов $E_{2s} - E_{1s}$ и $E_{2p} - E_{1s}$, отличающихся друг от друга на лэмбовский сдвиг. Принимая во внимание (53), получаем новое дифференциальное уравнение для $x_{\text{He III}}$:

$$\frac{dx_{\text{He III}}}{dz} = \tilde{C}_{\text{He III}} \times \frac{\alpha_{\text{He III}} n_e x_{\text{He III}} - \beta_{\text{He III}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{21}^{\text{He III}}}{k_B T_M}\right) (1 - x_{\text{He III}})}{H(z)(1+z)}, \quad (57)$$

$$\tilde{C}_{\text{He III}} = \frac{\frac{g_{2p}}{g_{1s}} A_{\text{He III}, 2p1s}^{r, \text{E1}} + \frac{g_{2s}}{g_{1s}} A_{\text{He III}, 2s1s}^{r, \text{E1}} + A_{\text{He III}, 2s1s}^{\text{E1E1}}}{\beta_{\text{He III}} + \frac{g_{2p}}{g_{1s}} A_{\text{He III}, 2p1s}^{r, \text{E1}} + \frac{g_{2s}}{g_{1s}} A_{\text{He III}, 2s1s}^{r, \text{E1}} + A_{\text{He III}, 2s1s}^{\text{E1E1}}}. \quad (58)$$

Здесь использовано сокращенное обозначение $A_{\text{He III}, 2s1s}^{r, \text{E1}} \equiv P_{2s1s} A_{\text{He III}, 2s1s}^{\text{E1}}$.

Аналогичное уравнение, учитывающее эффект смешивания уровней, индуцированного ЧИ, можно написать и для рекомбинации $\text{He III} \rightarrow \text{He II}$:

$$\frac{dx_{\text{He III}}}{dz} = \tilde{C}_{\text{He II}} \times \frac{\alpha_{\text{He III}} n_e x_{\text{He III}} - \beta_{\text{He II}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{21}^{\text{He II}}}{k_B T_M}\right) (1 - x_{\text{He III}})}{H(z)(1+z)}, \quad (59)$$

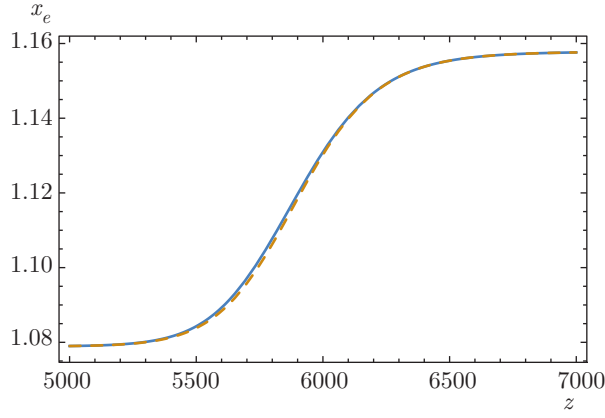


Рис. 4. Степень ионизации x_e с учетом эффекта смешивания уровней, индуцированного ЧИ, для периода рекомбинации $\text{HeIII} \rightarrow \text{HeII}$ в зависимости от красного смещения z . Штриховая кривая соответствует случаю ЛТР (уравнение Саха), сплошная кривая соответствует решению уравнения (59)

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\text{HeII}} &= \\ &= \frac{\frac{g_{2p}}{g_{1s}} A_{\text{HeII},2p1s}^{r, E1} + \frac{g_{2s}}{g_{1s}} A_{\text{HeII},2s1s}^{r, E1} + A_{\text{HeII},2s1s}^{E1E1}}{\beta_{\text{HeII}} + \frac{g_{2p}}{g_{1s}} A_{\text{HeII},2p1s}^{r, E1} + \frac{g_{2s}}{g_{1s}} A_{\text{HeII},2s1s}^{r, E1} + A_{\text{HeII},2s1s}^{E1E1}}}. \end{aligned} \quad (60)$$

Результаты численного решения уравнений (57) и (59), представлены соответственно на рис. 2 и 4. В частности, из рис. 2 следует, что степень ионизации плазмы в эпоху рекомбинации $\text{HII} \rightarrow \text{HI}$ при учете эффекта смешивания уровней становится ближе к равновесному сценарию. Однако степень ионизации плазмы в эпоху рекомбинации $\text{HeIII} \rightarrow \text{HeII}$ при учете эффекта смешивания не имеет существенных изменений и, по-прежнему, может с достаточной точностью быть описана уравнением Саха, см. рис. 4.

Чтобы проанализировать вклад от эффекта смешивания в процесс космологической рекомбинации, удобно привести относительную разницу степени ионизации, $\Delta x_e/x_e \equiv (x_e - x_e^{\text{stand}})/x_e^{\text{stand}}$, вычисленную в рамках «стандартного» подхода и с учетом эффекта смешивания для разных значений красного смещения. Относительная разница $\Delta x_e/x_e$ для периодов рекомбинации водорода и однократно ионизованного гелия представлена соответственно на рис. 5 и 6. Численные расчеты с параметрами космологической модели, приведенными в табл. 3, показывают, что относительная разница максимальна при красном смещении $z \approx 1000$ и достигает уровня 20 %.

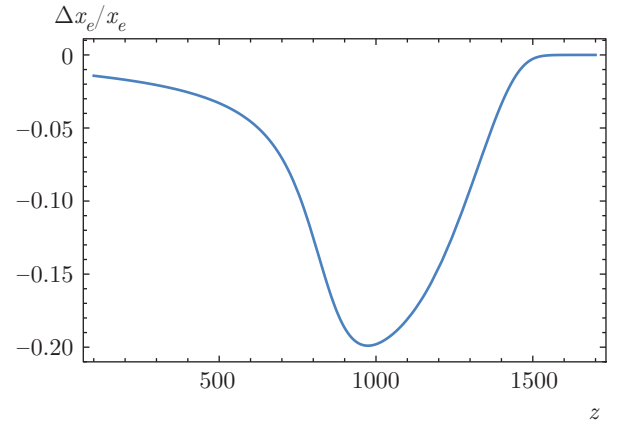


Рис. 5. Относительная разница степени ионизации, вычисленной в рамках «стандартного» подхода и с учетом смешивания уровней $\Delta x_e/x_e$, в зависимости от красного смещения z для периода рекомбинации $\text{HII} \rightarrow \text{HI}$

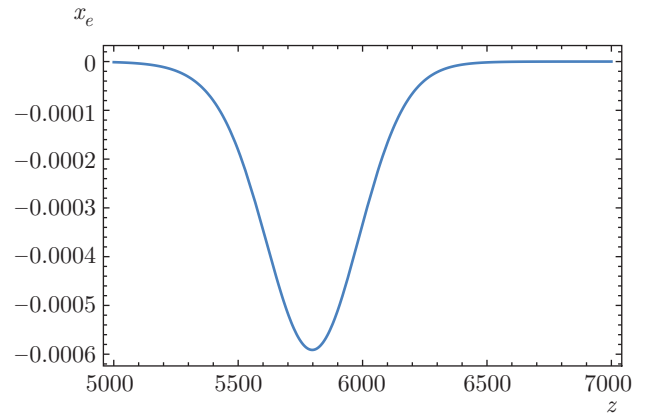


Рис. 6. Относительная разница степени ионизации, вычисленной в рамках «стандартного» подхода и с учетом смешивания уровней $\Delta x_e/x_e$, в зависимости от красного смещения z для периода рекомбинации $\text{HeIII} \rightarrow \text{HeII}$

Основной целью расчетов рекомбинации является получение точной функции прозрачности по томпсоновскому рассеянию (плотность вероятности того, что фотон будет рассеян в последний раз). Поскольку в ранней Вселенной на атом водорода приходится 92 % всех атомов, его рекомбинация значительно важнее для определения положения поверхности последнего рассеяния фотонов на временной шкале. Таким образом, период $900 < z < 1600$ представляет наибольший интерес [32]. Функция прозрачности по томпсоновскому рассеянию $g(z)$ дается выражением

$$g(z) = e^{-\tau \frac{d\tau}{dz}}, \quad (61)$$

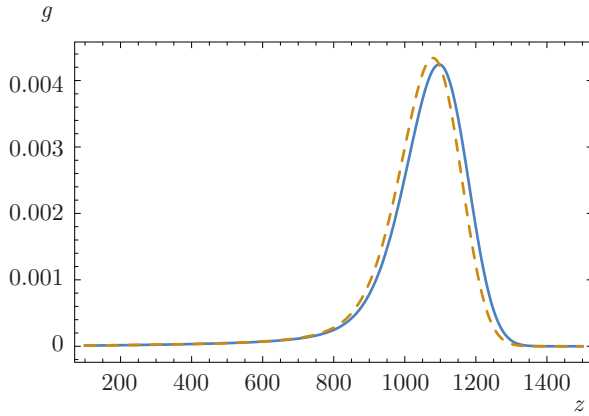


Рис. 7. Функция прозрачности $g(z)$, см. выражение (61). Штриховая линия соответствует «стандартному» трехуровневому подходу, сплошная линия соответствует расчетам с учетом смешивания уровней, индуцированного ЧИ

где τ — оптическая толщина по томпсоновскому рассеянию,

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{c \sigma_T n_e(\tilde{z})}{H(\tilde{z})(1+\tilde{z})} d\tilde{z}. \quad (62)$$

Здесь

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha \hbar c}{mc^2} \right)^2$$

— томпсоновское сечение рассеяния.

Результаты численного расчета выражения (61) представлены на рис. 7. Из рис. 7 видно, что учет смешивания уровней приводит к сдвигу максимума функции прозрачности. Как следствие, сдвиг поверхности последнего рассеяния влияет на первичную анизотропию. Тем не менее, как видно из рис. 2, период рекомбинации практически не изменяется. Таким образом, возможные изменения в спектре анизотропии можно ожидать лишь в дальнем конце мультипольного разложения.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эффект смешивания уровней, индуцированного излучением абсолютно черного тела, впервые был получен в работе [14]. В частности, было показано, что этот эффект приводит к распаду $2s$ -состояния в атоме водорода с излучением E1-фотона. Индуцированный распад $2s$ -состояния, возникающий из-за примеси $2p$ -состояния, существенно превосходит обычные индуцированные скорости депопуляции даже при комнатной температуре. В настоящей работе мы сравнили эффект смешивания уровней с

комбинационным рассеянием фотонов и продемонстрировали различие между этими двумя процессами, см. разд. 4. В свою очередь, это различие дает возможность для лабораторного наблюдения эффекта смешивания уровней, индуцированного ЧИ, в экспериментах, подобных [3, 4].

Помимо лабораторных экспериментов, эффект смешивания уровней, индуцированного ЧИ, важен для точного исследования эпохи рекомбинации в ранней Вселенной. Этот период очень чувствителен к параметрам космологической модели. Для извлечения соответствующих параметров из экспериментальных данных требуются точные теоретические расчеты. В разд. 5 мы продемонстрировали, как уширение линии $2s$ -состояния в водородоподобном атоме, вызванное смешиванием уровней, влияет на степень ионизации x_e первичной плазмы. В частности, соответствующее уменьшение времени жизни $2s$ -состояния при высоких температурах приводит к существенным изменениям степени ионизации x_e . Для периода рекомбинации атома водорода $\text{HII} \rightarrow \text{HI}$ эффект смешивания влияет на относительную разницу в степени ионизации по сравнению со «стандартным» подходом (см. рис. 5) на уровне 20% при $z \approx 1000$. Для периода рекомбинации водородоподобного гелия $\text{HeIII} \rightarrow \text{HeII}$ эффект смешивания дает вклад порядка 0.1% (см. рис. 6) при $z \approx 5800$. Тем не менее, период рекомбинации остается практически неизменным и максимум функции прозрачности по томпсоновскому рассеянию не имеет существенных изменений. Таким образом, возможные изменения в спектре анизотропии КМФ можно ожидать только в дальнем конце мультипольного разложения. Принципиально важно, что эффект смешивания уровней, индуцированного излучением абсолютно черного тела, можно проверить в лабораторных экспериментах. Соответствующие экспериментальные наблюдения могут прояснить важные детали в кинетике космологической рекомбинации.

В настоящей работе мы ограничились рассмотрением рекомбинации водорода $\text{HII} \rightarrow \text{HI}$ и однократно ионизованного гелия $\text{HeIII} \rightarrow \text{HeII}$ в рамках «трехуровневой модели» атома. Следует отметить, что смешивание уровней имеет место и в нейтральном гелии, т.е. и при рекомбинации $\text{HeII} \rightarrow \text{HeI}$. Поскольку рекомбинация $\text{HeII} \rightarrow \text{HeI}$ происходит при красных смещениях $1700 < z < 3000$, соответствующие изменения кинетики рекомбинации также могут оказаться важными. Однако численные расчеты смешивания уровней в нейтральном гелии более сложны, чем для водо-

родоподобных ионов. При этом необходимо знание точных волновых функций гелия, которые могут быть найдены, например, в рамках вариационного подхода [40]. По этой причине проблема кинетики рекомбинации нейтрального гелия с учетом смешивания уровней требует отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 17-12-01035).

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Азимов, А. А. Ансельм, А. Н. Москалев, Р. М. Рындин, ЖЭТФ **67**, 17 (1974) [Ya. I. Azimov, A. A. Ansel'm, A. N. Moskaev, and R. M. Ryndin, Sov. Phys. JETP **40**, 8 (1975)].
2. M. Hilley and P. J. Mohr, Phys. Rev. A **21**, 24 (1980).
3. G. W. F. Drake, Bull. Amer. Phys. Soc. **22**, 1315 (1977).
4. H. Gould and R. Marrus, Bull. Amer. Phys. Soc. **21**, 84 (1976).
5. D. Solov'yev, V. Sharipov, L. Labzowsky, and G. Plunien, J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **43**, 074005 (2010).
6. D. Solov'yev and E. Solov'yeva, Phys. Rev. A **91**, 042506 (2015).
7. T. F. Gallagher and W. E. Cooke, Phys. Rev. Lett. **42**, 835 (1979).
8. J. W. Farley and W. H. Wing, Phys. Rev. A **23**, 2397 (1981).
9. S. G. Porsev and A. Derevianko, Phys. Rev. A **74**, 020502(R) (2006).
10. C. Degenhardt et al., Phys. Rev. A **72**, 062111 (2005).
11. M. S. Safronova, M. G. Kozlov, and Ch. W. Clark, Phys. Rev. Lett. **107**, 143006 (2011).
12. Th. Middelmann, Ch. Lisdat, St. Falke, J. S. R. Vellore Winfred, F. Riehle, and U. Sterr, IEEE Trans. Instrum. Meas. **60**, 2550 (2011).
13. C. Lisdat et al., Nat. Commun. **7**, 12443 (2016).
14. D. Solov'yev, L. Labzowsky, and G. Plunien, Phys. Rev. A **92**, 022508 (2015).
15. P. J. Mohr Phys. Rev. Lett. **40**, 854 (1978).
16. Я. Б. Зельдович, В. Г. Курт, Р. А. Сюняев, ЖЭТФ **55**, 278 (1968) [Sov. Phys. JETP **28**, 146 (1969)].
17. P. J. E. Peebles, Astrophys. J. **153**, 1 (1968).
18. G. Breit and E. Teller, Astrophys. J. **91**, 215 (1940).
19. G. W. F. Drake, Phys. Rev. A **3**, 908 (1971).
20. J. Sucher, Rep. Progr. Phys. **41**, 1781 (1978).
21. Б. А. Зон, Л. П. Рапопорт, Письма в ЖЭТФ **7**, 70 (1968) [JETP Lett. **7**, 52 (1968)].
22. U. D. Jenschura, Phys. Rev. A **69**, 052118 (2004).
23. A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii, *Quantum Electrodynamics*, Wiley, New York (1965).
24. L. Labzowsky, G. Klimchitskaya, and Yu. Dmitriev, *Relativistic Effects in the Spectra of Atomic Systems*, Institute of Physics Publ., Bristol and Philadelphia (1993).
25. J. F. Donoghue and B. R. Holstein, Phys. Rev. D **28**, 340 (1983).
26. F. Low, Phys. Rev. **88**, 53 (1952).
27. L. Labzowsky, V. Karasiev, and I. Goidenko, J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **27**, L439 (1994).
28. L. N. Labzowsky, D. A. Solov'yev, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. Lett. **87**, 143003 (2001).
29. O. Yu. Andreev, L. N. Labzowsky, G. Plunien, and D. A. Solov'yev, Phys. Rep. **455**, 135 (2008).
30. T. Zaliutdinov, Yu. Baukina, D. Solov'yev, and L. Labzowsky, J. Phys. B **47**, 115007 (2014).
31. V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, Pergamon, Oxford (1982).
32. W. W. Wong, PhD Thesis, University of British Columbia, Canada (2008); arXiv:0811.2826 [astro-ph].
33. S. Seager, D. D. Sasselov, and D. Scott, Astrophys. J. **523**, L1 (1999).
34. E. E. Kholupenko, A. V. Ivanchik, S. A. Balashev, and D. A. Varshalovich, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **417**(4), 2417 (2011).
35. S. Seager, D. D. Sasselov, and D. Scott, Astrophys. J. Suppl. Ser. **128**, 407 (2000).
36. D. G. Hummer, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **268**, 109 (1994).
37. D. Pequignot, P. Petitjean, and C. Boisson, Astron. Astrophys. **251**, 680 (1991).
38. J. Chluba and R. A. Sunyaev, Astron. Astrophys. **446**, 39 (2006).
39. Planck Collaboration, Astron. Astrophys. A **13**, 594 (2016).
40. V. I. Korobov, Phys. Rev. A **61**, 064503 (2000).