

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКРАНИРОВАНИЯ ЗАРЯДА МАКРОЧАСТИЦ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ НА ОСНОВЕ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТОЧЕЧНЫХ СТОКОВ

А. В. Филиппов^{a}, А. Г. Загородний^b, А. И. Момот^c, А. Ф. Паль^{a,d}, А. Н. Старостин^a*

^a ГИЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
108840, Троицк, Москва, Россия

^b Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Национальной академии наук Украины
03680, Киев, Украина

^c Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
01601, Киев, Украина

^d Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобелевича
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 июня 2017 г.

На основе кинетических уравнений Власова, дополненных столкновительным слагаемым в форме Бхатнагара–Гросса–Крука, и метода точечных стоков рассмотрено экранирование макрочастиц в неравновесной плазме. В методе точечных стоков поглощение электронов и ионов макрочастицей описывается введением эффективных точечных стоков в кинетические уравнения для электронов и ионов плазмы. С учетом столкновений электронов и ионов с нейтральными атомами буферного газа определены явные выражения для распределения потенциала вокруг макрочастицы и эффективных зарядов, определяющих поведение потенциала на больших расстояниях. Рассмотрены случаи постоянной частоты столкновений и постоянной длины свободного пробега электронов и ионов в буферном газе. Выполнены численные расчеты для пылевой изотермической и неизотермической плазмы в гелии, неоне, аргоне, криптоне и ксеноне при давлениях 10^{-1} – 10^4 Па, характерных для экспериментов по изучению пылевой плазмы.

DOI: 10.7868/S0044451017110244

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое исследование взаимодействия заряженных макрочастиц в плазме (электролите) все еще остается одним из самых важных вопросов в физике пылевой плазмы [1–7]. Ввиду того, что пылевые частицы или макрочастицы в плазме приобретают большие заряды, для нахождения эффективного потенциала обычно применяются численные методы решения нелинейных краевых задач или микроскопические методы типа метода молекулярной динамики. В результате таких исследований многие характерные свойства экранированного потенциала

пылевых частиц уже установлены (см., например, работы [8–21] и цитированную в них литературу). Тем не менее для описания многих интересных явлений в экспериментах по исследованию пылевой плазмы, таких как формирование пылевых кристаллов, распространение пылеакустических волн, генерация нелинейных плазменно-пылевых структур и т. д., необходимы аналитические соотношения для определения потенциала взаимодействия. Эти исследования важны также для развития теории зондов [22, 23].

В работе [24] экранирование пылевой частицы исследовалось путем численного решения уравнения Пуассона и кинетического уравнения ионов с самосогласованным полем и столкновительным членом. Задача решалась в нестационарной постановке, и функция распределения была функцией че-

* E-mail: fav@triniti.ru

тырех переменных: времени, радиальной координаты, радиальной скорости и скорости, перпендикулярной к радиальной. Эта задача является четырехмерной, следовательно, сильно времязатратной задачей и ожидать высокой точности полученных результатов не приходится. В работе [25] данный метод использовался для изучения влияния столкновений ионов на ионный ток на пылевую частицу.

В работе [26] решалось стационарное кинетическое уравнение со столкновительным членом в приближении Бхатнагара – Гросса – Крука на основе подхода, предложенного в работах [27, 28] для описания электронной компоненты плазмы тлеющего разряда. В этом подходе полагается, что функция распределения является функцией только полной энергии электронов (или ионов в [26]). Такой же подход использовался в работе [29] для рассмотрения электронной компоненты в условиях, когда длина свободного пробега электронов была много меньше характерных размеров задачи, а длина установления энергии электронов, наоборот, много больше, поэтому в работе [29], где исследовалась зарядка макрочастиц в инертных газах при повышенных давлениях, потерями энергии электронов в столкновениях с атомами буферного газа можно было пренебречь.

В работах [30, 31] был развит кинетический подход для описания распределения потенциала вокруг макрочастицы с учетом стоков электронов и ионов на нее (на основе модели точечных стоков) и с учетом столкновений электронов и ионов с атомами буферного газа (см. также [32]). В работе [33] использовался этот же подход, но в более упрощенной постановке, а именно, распределение электронов в самосогласованном электрическом поле полагалось бальцмановским, а сечение поглощения ионов макрочастицей полагалось постоянным, не зависящим от скорости ионов (см. также [34]). Отметим, что в работе [31] был также рассмотрен случай пылевой плазмы во внешнем однородном магнитном поле.

Целью настоящей работы является более подробное изложение кинетического подхода [31] для описания распределения потенциала с учетом столкновений электронов и ионов с частицами нейтрального газа. Для ограничения объема задача с внешним магнитным полем в настоящей работе не будет рассмотрена. Основная идея нашего кинетического подхода для описания зарядки макрочастиц заключается в замене краевой задачи для нахождения потенциала с граничным условием, описывающим поглощение плазменных частиц поверхностью макрочастицы, на эквивалентную задачу без такого граничного условия, но с соответствующими

сингулярными стоками в кинетических уравнениях для электронов и ионов. Эта идея была предложена в работах [20, 35] и успешно использовалась для описания распределения потенциала как в бесстолкновительной плазме на основе уравнений Власова для функций распределения электронов и ионов, так и в плазме с частыми столкновениями в рамках диффузионно-дрейфового приближения [20, 21, 36]. В работе [31] этот подход был впервые использован для описания пылевой плазмы с произвольной частотой столкновений плазменных частиц на основе приближения Бхатнагара – Гросса – Крука для описания столкновений. Были получены аналитические выражения для распределения потенциала в предельных случаях малых и больших частот столкновений электронов и ионов с атомами буферного газа. Случай промежуточных частот требует привлечения численных методов. Поэтому целью настоящей работы является также численное исследование области перехода от режима редких столкновений к режиму частых столкновений.

Основной набор уравнений столкновительной кинетической модели точечных стоков формулируется в разд. 2. В разд. 3 выводится общее решение сформулированной проблемы, в разд. 4 определяются эффективные заряды, определяющие поведение потенциала на больших расстояниях от макрочастицы, и проводится анализ стационарного экранирования в различных режимах. В разд. 5 проводится сравнение результатов численного решения задачи с аналитическими выражениями для распределения потенциала при постоянных частотах столкновений электронов и ионов с атомами буферного газа: $\nu_{e,i} = \text{const}$. Случай постоянных длин свободного пробега $l_{e,i} = \text{const}$ рассматривается в разд. 6.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТОЧЕЧНЫХ СТОКОВ

Будем рассматривать макрочастицу радиуса r_0 , находящуюся в столкновительной плазме. Полагая, что частица поглощает все падающие на нее электроны и ионы, а процессами эмиссии электронов можно пренебречь. Столкновения плазменных частиц (электронов и ионов) с нейтральными атомами будем описывать на основе простой модели Бхатнагара – Гросса – Крука (БГК) [37]. В этом приближении функция распределения (ФР) частиц плазмы $f_\sigma(X, t)$ удовлетворяет следующему кинетическому уравнению с самосогласованным полем:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\sigma}{m_\sigma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{m_\sigma} \mathbf{F}_\sigma^{ext}(X, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] f_\sigma(X, t) = -\nu_\sigma \left[f_\sigma(X, t) - \Phi_\sigma(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} f_\sigma(X, t) \right], \quad (1)$$

где σ — означает электроны ($\sigma = e$) или ионы ($\sigma = i$), $X \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v})$, \mathbf{r} — радиус-вектор в системе координат с полюсом в центре макрочастицы, \mathbf{v} — вектор скорости электронов или ионов, \mathbf{E} — напряженность самосогласованного электрического поля, m_σ — масса частиц сорта σ , ν_σ — частота столкновений электронов и ионов с атомами буферного газа, $\mathbf{F}_\sigma^{ext}(X, t)$ — внешние силы, $\Phi_\sigma(\mathbf{v})$ — функция распределения, возникающая в столкновениях с нейтральными атомами. Уравнение (1) дополняется граничным условием

$$f_\sigma(X, t) \Big|_{r=r_0, v_r > 0} = 0, \quad (2)$$

которое описывает поглощение частиц плазмы макрочастицей и отсутствие каких-либо процессов эмиссии электронов. Здесь v_r — проекция скорости плазменных частиц на радиальную ось сферической системы координат с началом в центре макрочастицы.

Будем исследовать экранирование заряда макрочастицы на основе модели точечного стока [20, 35]. В этой модели полагается, что эффекты, связанные с поглощением плазменных частиц макрочастицей, можно приближенно заменить на эффективные сингулярные стоки, т. е. вместо уравнения (1) с граничным условием (2) будем использовать уравнение

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\sigma}{m_\sigma} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{m_\sigma} \mathbf{F}_\sigma^{ext} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_\sigma(X, t) = -\nu_\sigma \left[f_\sigma(X, t) - \Phi_\sigma(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} f_\sigma(X, t) \right] - S_\sigma(\mathbf{v}, t) \delta(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где $S_\sigma(\mathbf{v}, t)$ — интенсивность точечного стока, который полагается функционалом функции распределения $f_\sigma(X, t)$, т. е.

$$S_\sigma(\mathbf{v}, t) \equiv S_\sigma(\mathbf{v}, t; \{f_\sigma(X, t)\}). \quad (4)$$

Удобно выразить эти величины в терминах сечения зарядки. Например, в случае изотропной плазмы или в случае частых столкновений, эти соотношения можно написать как

$$S_\sigma(\mathbf{v}, t) = \nu_\sigma \sigma_\sigma(q(t), v) f_\sigma(X, t), \quad (5)$$

где $\sigma_\sigma(q, v)$ — сечения зарядки, которые зависят от свойств окружающей плазмы, $q(t)$ — заряд макрочастицы. В качестве сечения зарядки мы будем использовать сечения поглощения в приближении ограниченных орбит [38]:

$$\sigma_\sigma(v) = \pi r_0^2 \begin{cases} 1 - \frac{2e_\sigma \phi_0}{m_\sigma v^2}, & v^2 > 2e_\sigma \phi_0 / m_\sigma, \\ 0, & v^2 < 2e_\sigma \phi_0 / m_\sigma, \end{cases} \quad (6)$$

где ϕ_0 — потенциал поверхности макрочастицы. Можно также учесть влияние столкновений на сечения поглощения ионов (см., например, работы [25, 26, 39–44]).

Ввиду того, что поглощение плазменных частиц значительно уменьшает эффекты нелинейности (см., например, работы [8, 11, 12, 15, 20, 35]), можно предположить, что присутствие стоков вызовет малые возмущения эффективного электрического поля, поэтому можно использовать линейризованную версию уравнения (3). Однако в этих уравнениях мы должны сохранить сечения зарядки, вычисленные с использованием невозмущенных функций распределения, поскольку как стоки, так и потенциал самосогласованного поля являются величинами первого порядка малости (как и сами поправки к невозмущенным ФР). Таким образом, для линейной поправки к невозмущенным функциям распределения имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\sigma} \mathbf{F}_\sigma^{ext} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] \delta f_\sigma(X, t) - \frac{e_\sigma}{m_\sigma} \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v}, t) \delta(\mathbf{r}) - \nu_\sigma \left[\delta f_\sigma(X, t) - \Phi_\sigma(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} \delta f_\sigma(X, t) \right], \quad (7)$$

где $f_{0\sigma}(\mathbf{v})$ — функция распределения в невозмущенной плазме, нормированная условием

$$\int f_{0\sigma}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1;$$

величина $S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v}, t)$ определена соотношением

$$S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v}, t) = S_\sigma(\mathbf{v}, t; \{f_{0\sigma}(\mathbf{v})\}) \quad (8)$$

или в случае представления (5)

$$S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v}, t) = \nu_\sigma \sigma_\sigma(q(t), v) f_{0\sigma}(\mathbf{v}). \quad (9)$$

Потенциал самосогласованного поля $\phi(\mathbf{r}, t)$ определяется уравнением Пуассона

$$\Delta \phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi e q(t) \delta(\mathbf{r}) - 4\pi \sum_\sigma e_\sigma n_\sigma \int d\mathbf{v} \delta f_\sigma(X, t). \quad (10)$$

3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТОЧЕЧНЫХ СТОКОВ

Решение уравнения (7), с использованием вероятности перехода — аналога функции Грина, можно написать в следующем виде (см., например, работы [45–47]):

$$\delta f_\sigma(X, t) = \frac{e_\sigma}{m_\sigma} \int_{-\infty}^t dt' \int dX' W_\sigma(X, X'; t - t') \times \\ \times \frac{\partial \phi(\mathbf{r}', t')}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} - \int_{-\infty}^t dt' \times \\ \times \int dX' W_\sigma(X, X'; t - t') S_\sigma^{(0)}(\mathbf{v}', t') \delta(\mathbf{r}'), \quad (11)$$

где $W_\sigma(X, X'; \tau)$ — вероятность перехода частицы из точки $X' \equiv (\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ в точку $X \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в течение временного интервала $\tau = t - t'$ в системе с выключенным самосогласованным электромагнитным взаимодействием и с выключенными стоками. Эта величина удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\sigma} \mathbf{F}_\sigma^{ext} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} W_\sigma(X, X'; \tau) = \\ = -\nu_\sigma \left[W_\sigma(X, X'; \tau) - \Phi_\sigma(\mathbf{v}) \times \right. \\ \left. \times \int d\mathbf{v} W_\sigma(X, X'; \tau) \right] \quad (12)$$

с начальным условием

$$W_\sigma(X, X'; \tau = 0) = \delta(X - X') \equiv \\ \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'). \quad (13)$$

Решение нестационарной задачи зарядки макрочастицы или протекания тока на сферический зонд приведено в Приложении А. Выражения (53), (55), (59) и (64) определяют это решение, но для полного решения требуется информация о зависимостях заряда (потенциала зонда) и стоков от времени, которая обычно недоступна. Но эти выражения позволяют нам найти стационарное решение задачи, к получению которого мы и переходим.

В стационарном состоянии $\omega = 0$ и для диэлектрической функции плазмы из (64) находим

$$\varepsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 + \sum_\sigma \frac{k_{D\sigma}^2}{k^2} \zeta_\sigma, \quad (14)$$

где $k_{D\sigma}$ — обратный дебаевский радиус или постоянная экранирования σ -компоненты плазмы:

$$k_{D\sigma}^2 = 4\pi e_\sigma^2 n_{0\sigma} / T_\sigma,$$

ζ_σ — поправка, определяемая выражением

$$\zeta_\sigma = [1 + I_{\Phi\sigma}(k)]^{-1} \int \left(1 + \frac{i\nu_\sigma}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\nu_\sigma} \right) \frac{T_\sigma}{m_\sigma \mathbf{v}} \times \\ \times \left[-\frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right] d\mathbf{v}, \quad (15)$$

$$I_{\Phi\sigma}(k) = i\nu_\sigma \int \frac{\Phi_\sigma}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\nu_\sigma} d\mathbf{v} = \\ = -\frac{4\pi}{k} \int_0^\infty \Phi_\sigma \nu_\sigma \operatorname{arctg} \left(\frac{kv}{\nu_\sigma} \right) v dv. \quad (16)$$

Здесь интегрирование по угловым переменным выполнено в предположении, что функция Φ_σ является изотропной. В случае, когда Φ_σ является максвелловской функцией с температурой T_σ , последний интеграл равен

$$I_{\Phi\sigma}(k) = -(\pi)^{1/2} \frac{k_{\nu\sigma}}{k} \operatorname{erfc} \left(\frac{k_{\nu\sigma}}{k} \right) \exp \left(\frac{k_{\nu\sigma}^2}{k^2} \right), \quad (17) \\ k_{\nu\sigma} = \nu_\sigma \sqrt{\frac{m_\sigma}{2T_\sigma}},$$

где $\operatorname{erfc}(x)$ — дополнительный интеграл ошибок (см. Приложение В).

Из (15) видно, что в общем случае неравновесной плазмы имеет место неравенство $\zeta_\sigma \neq 1$ и постоянная экранирования σ -компоненты плазмы не совпадает с дебаевской. При $\nu_\sigma \rightarrow 0$ интеграл $I_{\Phi\sigma}$ также стремится к нулю и из (15) получаем

$$\zeta_\sigma = \int \frac{T_\sigma}{m_\sigma \mathbf{v}} \left[-\frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right] d\mathbf{v}, \quad (18)$$

что находится в полном согласии с результатами [48, 49]. И только в случае, когда $f_{0\sigma}$ и Φ_σ являются максвелловскими функциями с равными температурами, из (15) вытекает равенство $\zeta_\sigma = 1$, а из (14) следует

$$\varepsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 + k_D^2 / k^2, \quad (19)$$

где $k_D^2 = \sum_\sigma k_{D\sigma}^2$. Из (60) для стационарной вероятности перехода имеем

$$W_{\sigma\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = -\frac{i\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\nu_\sigma} - \\ - \frac{\nu_\sigma \Phi_\sigma(\mathbf{v})}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\nu_\sigma)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - i\nu_\sigma)} \frac{1}{1 + I_{\Phi\sigma}(k)}. \quad (20)$$

Для стационарных поправок к невозмущенным функциям распределения из (53) находим

$$\begin{aligned} \delta f_{\sigma, \mathbf{k}}(\mathbf{v}) = & \phi_{\mathbf{k}} \frac{e_{\sigma}}{m_{\sigma}} \frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\nu_{\sigma}} + \frac{i S_{\sigma}^{(0)}(\mathbf{v})}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\nu_{\sigma}} - \\ & - i \mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}} \frac{e_{\sigma}}{m_{\sigma}} \frac{\nu_{\sigma} \Phi_{\sigma}(\mathbf{v})}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\nu_{\sigma}} \frac{1}{1 + I_{\Phi\sigma}(k)} \times \\ & \times \int \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - i\nu_{\sigma}} \frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} d\mathbf{v}' + \\ & + \frac{\nu_{\sigma} \Phi_{\sigma}(\mathbf{v})}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\nu_{\sigma}} \frac{1}{1 + I_{\Phi\sigma}(k)} \int \frac{S_{\sigma}^{(0)}(\mathbf{v}')}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - i\nu_{\sigma}} d\mathbf{v}', \quad (21) \end{aligned}$$

где $S_{\sigma}^{(0)}(\mathbf{v}')$ — стационарный сток частиц σ -компоненты плазмы на макрочастицу: $S_{\sigma}^{(0)}(\mathbf{v}) = S_{\sigma}^{(0)}(\mathbf{v}, t = \infty)$. Проинтегрируем (21) по $d\mathbf{v}$ с максвелловскими функциями распределения

$$\begin{aligned} \delta n_{\sigma, \mathbf{k}} \equiv n_{0\sigma} \int \delta f_{\sigma, \mathbf{k}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \\ = -\phi_{\mathbf{k}} \frac{e_{\sigma} n_{0\sigma}}{T_{\sigma}} + \frac{I_{S\sigma}(k)}{1 + I_{\Phi\sigma}(k)} n_{0\sigma}, \quad (22) \end{aligned}$$

где интеграл $I_{S\sigma}(k)$ определен выражением

$$\begin{aligned} I_{S\sigma}(k) = i \int \frac{S_{\sigma}^{(0)}(\mathbf{v})}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\nu_{\sigma}} d\mathbf{v} = \\ = -\frac{4\pi}{k} \int_0^{\infty} f_{0\sigma} \sigma_{\sigma} \operatorname{arctg} \left(\frac{kv}{\nu_{\sigma}} \right) v^2 dv. \quad (23) \end{aligned}$$

В работах [33, 34] утверждается, что величина $f(\theta)$ (в обозначениях этих работ), которая содержит в числителе этот интеграл, расходитя и чтобы избежать этого авторы положили постоянными, не зависящими от скорости сечения поглощения. На самом деле интеграл (23) не содержит никаких расходимостей, так как произведение $\sigma_{\sigma} v^2$ конечно при $v = 0$ и подынтегральное выражение экспоненциально стремится к нулю при $v \rightarrow \infty$. Из выражения (22) следует, что возмущения концентраций заряженных частиц плазмы вызваны как потенциалом электрического поля заряженной макрочастицы, так и стоками электронов и ионов на макрочастицу.

В стационарном режиме уравнение (55) для фурье-образа потенциала переходит в следующее:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e q_0}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} - \frac{4\pi}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, 0)} \times \\ \times \sum_{\sigma} e_{\sigma} n_{0\sigma} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\sigma \mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') S_{\sigma}^{(0)}(\mathbf{v}'), \quad (24) \end{aligned}$$

где $q_0 = q(t = \infty)$ — стационарный заряд макрочастицы. Подставив (19) и (20) в (24), в случае максвелловских функций распределения получим

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e q_0}{k^2 + k_D^2} + \frac{4\pi}{k^2 + k_D^2} \sum_{\sigma} e_{\sigma} n_{0\sigma} \frac{I_{S\sigma}}{1 + I_{\Phi\sigma}}. \quad (25)$$

После обратного фурье-преобразования (25) и (22) для стационарного распределения потенциала и возмущений концентрации частиц плазмы находим

$$\begin{aligned} \phi(r) = \frac{e q_0 e^{-k_D r}}{r} + \frac{2}{\pi r} \sum_{\sigma} e_{\sigma} n_{0\sigma} \times \\ \times \int \frac{I_{S\sigma}(k)}{1 + I_{\Phi\sigma}(k)} \frac{\sin kr}{k^2 + k_D^2} k dk, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta n_{\sigma}(r) = -n_{0\sigma} \frac{e_{\sigma} \phi(r)}{T_{\sigma}} + \frac{n_{0\sigma}}{2\pi^2 r} \times \\ \times \int \frac{I_{S\sigma}(k)}{1 + I_{\Phi\sigma}(k)} \sin(kr) k dk. \quad (27) \end{aligned}$$

Первый член в правой части выражения (27) есть просто линейный член разложения распределения Больцмана, а второй член обусловлен стоком σ -частиц плазмы на макрочастицу.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА

В случае зондовых измерений потенциал зонда может быть произвольным, но в случае макрочастицы в плазме потенциал ее поверхности определяется равенством потоков электронов и ионов на нее:

$$S_e = S_i, \quad (28)$$

где $S_{\sigma} = n_{0\sigma} \int S_{\sigma}^{(0)}(v) dv$. Используя сечения (6), в случае максвелловских функций распределения (65) для потоков находим

$$\begin{aligned} S_e = \pi r_0^2 n_{0e} \sqrt{\frac{8T_e}{\pi m_e}} \exp \frac{e\phi_0}{T_e}, \\ S_i = \pi r_0^2 z_i n_{0i} \sqrt{\frac{8T_i}{\pi m_i}} \left(1 - \frac{e z_i \phi_0}{T_i} \right), \quad (29) \end{aligned}$$

где $z_i = e_i/e$ — кратность ионизации ионов. При выполнении условия $k_D r_0 \ll 1$ для нахождения заряда макрочастицы можно использовать вакуумную связь с потенциалом поверхности $e q_0 = \phi_0 r_0$, в общем случае нужно использовать формулу $e q_0 = \phi_0 r_0 (1 + k_D r_0)$.

4.1. Редкие столкновения

Рассмотрим случай редких столкновений, когда выполнено условие: $x = kv_{T\sigma}/\nu_{\sigma} \gg 1$, где $v_{T\sigma} = (T_{\sigma}/m_{\sigma})^{1/2}$. Тогда $\operatorname{arctg} x \approx \pi/2$ и для интеграла (23) находим

$$I_{S\sigma}(k) = -\frac{k_D}{k} \frac{\pi}{z_{\sigma} n_{0\sigma}} \tilde{Q}_{\sigma}, \quad (30)$$

где \tilde{Q}_σ — эффективный заряд, определенный выражением

$$\tilde{Q}_\sigma = \frac{2\pi z_\sigma n_{0\sigma}}{k_D} \int_0^\infty f_{0\sigma} \sigma_\sigma v^2 dv. \quad (31)$$

Интегрируя (31) с сечениями (6) и максвелловскими функциями (65), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i &= \frac{z_i n_{0i} \pi r_0^2}{2k_D} \left(1 - \frac{2e z_i \phi_0}{T_i} \right), \\ \tilde{Q}_e &= \frac{z_e n_{0e} \pi r_0^2}{2k_D} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-\frac{e\phi_0}{T_e}} e^{e\phi_0/T_e} + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{2e\phi_0}{T_e} \right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{-\frac{e\phi_0}{T_e}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

В случае редких столкновений для интеграла (16) имеем

$$I_{\Phi\sigma}(k) = -\frac{\nu_\sigma}{k} \left(\frac{\pi m_\sigma}{2T_\sigma} \right)^{1/2}. \quad (33)$$

Теперь, с учетом малости $I_{\Phi\sigma}(k)$, из (26) находим

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{eq_0 e^{-k_D r}}{r} + \frac{2k_D}{r} \times \\ &\quad \times \sum_\sigma \int \left(e\tilde{Q}_\sigma + \frac{\pi k_D}{k} eQ_\sigma \right) \frac{\sin kr}{k^2 + k_D^2} dk, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$Q_\sigma = \frac{\pi \nu_\sigma}{k_D} \sqrt{\frac{\pi m_\sigma}{2T_\sigma}} \tilde{Q}_\sigma. \quad (35)$$

Окончательно для распределения потенциала в случае редких столкновений получаем (см. [50])

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{eq_0 e^{-k_D r}}{r} - \sum e\tilde{Q}_\sigma \frac{g(k_D r)}{r} - \\ &\quad - \sum \frac{eQ_\sigma}{r} (1 - e^{-k_D r}), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{-x} \operatorname{Ei}(x) - e^x \operatorname{Ei}(-x) \equiv \\ &\equiv e^{-x} \operatorname{Ei}(x) + e^x \operatorname{E}_1(x), \end{aligned} \quad (37)$$

$\operatorname{Ei}(x)$, $\operatorname{E}_1(x)$ — интегральные показательные функции (см. Приложение В). При $k_D r \gg 1$, с учетом асимптотического поведения

$$\operatorname{Ei}(x) \asymp \frac{1}{x} e^x, \quad \operatorname{E}_1(x) \asymp \frac{1}{x} e^{-x},$$

второй член (36) дает

$$\phi(r) \approx -2e\tilde{Q}/k_D r^2 \quad (38)$$

в согласии с хорошо известным результатом [12, 51]. Здесь $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_e + \tilde{\theta}_i$. Из (36) можно сделать вывод, что именно столкновения плазменных частиц с нейтральными атомами (совместно со стоками плазменных частиц, заряд Q_σ прямо пропорционален ν_σ) приводят к поведению эффективного потенциала, подобного кулоновскому на больших расстояниях $k_D r \gg 1$.

4.2. Сильностолкновительный предел

В сильностолкновительном пределе $\nu_\sigma \gg kv_{T\sigma}$ можно использовать разложение: $\operatorname{arctg} x \approx x$. В этом случае из (23) находим, что $I_{S\sigma}(k) = -S_\sigma/n_{0\sigma}\nu_\sigma$, а из (17), используя асимптотическое разложение дополнительной функции ошибок (см. Приложение В), получаем

$$1 + I_{\Phi\sigma}(k) = \left(\frac{k}{\nu_\sigma} \right)^2 \frac{2T_\sigma}{m_\sigma}. \quad (39)$$

Теперь уравнение (25) дает

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi eq_0}{k^2 + k_D^2} - \frac{4\pi}{k^2 + k_D^2} \frac{1}{k^2} \sum_\sigma \frac{e_\sigma S_\sigma}{D_\sigma}, \quad (40)$$

что находится в согласии с результатом, полученным в работах [20, 35] на основе диффузионно-дрейфового приближения. Здесь D_σ — коэффициент диффузии: $D_\sigma = v_{T\sigma}/\nu_\sigma$ (используя классическое выражение для подвижности $\mu_\sigma = |e_\sigma|/m_{n\sigma}\nu_\sigma$, где $m_{n\sigma} = m_g m_\sigma/(m_g + m_\sigma)$, m_g — масса атомов буферного газа, и соотношение Эйнштейна $\tilde{D}_\sigma/\mu_\sigma = T_\sigma/|e_\sigma|$, легко показать, что D_e действительно коэффициент диффузии, а $\tilde{D}_i = (1 + m_i/m_g)D_i$, т.е. реальный коэффициент диффузии при равных массах ионов и атомов буферного газа в два раза выше, чем по приведенной выше формуле). Выражение (39) приводит к решению

$$\phi(r) = e(q_0 + \tilde{S}) \frac{e^{-k_D r}}{r} - \frac{e\tilde{S}}{r}, \quad (41)$$

где

$$\tilde{S} = \sum_\sigma \frac{z_\sigma S_\sigma}{k_D^2 D_\sigma}. \quad (42)$$

5. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ПРИ $\nu_{e,i} = \text{const}$

С целью тестирования полученных аналитических результатов и демонстрации изменения характера распределения потенциала при изменении частоты столкновений, проведем численные расчеты

для инертных газов при давлении $0.1 - 10^4$ Па, характерных для исследований пылевой плазмы [1]. Рассмотрим изотермическую и неизотермическую плазмы с электронной частотой столкновений и с температурой, соответствующей приведенной напряженности внешнего электрического поля в плазме $E_{dis}/N = 10^{-4}$ и 1 Тд. Концентрации электронов и ионов зададим равными: $n_{0e} = n_{0i} = 10^9 \text{ см}^{-3}$ ($z_i = 1$), радиус макрочастицы $r_0 = 10$ мкм. Температуру ионов положим равной комнатной: $T_i = 0.026$ эВ.

В табл. 1 и 2 приведены параметры электронной и ионной компонент плазмы, которые использовались в расчетах в настоящей работе. Частота столкновений и температура электронов определялись на основе численного решения уравнения Больцмана программой BOLSIG++ [52] при указанных выше значениях приведенной напряженности поля. Температура электронов определялась по средней энергии электронов, так как в работе [49] было показано, что именно такое определение температуры электронов приводит к лучшему согласию значений заряда макрочастицы, рассчитанных в приближении ограниченных орбит с ФР, полученной при решении уравнения Больцмана, и с максвелловской ФР. Частота столкновений ионов с атомами буферного газа определялась по значению подвижности из классического выражения $\mu_i = e_i/m_{in}\nu_i$, где m_{in} — приведенная масса иона и атома буферного газа. В табл. 1 также приведены постоянные экранирования.

В табл. 3 и 4 приведены потенциалы поверхности макрочастиц, рассчитанные из трансцендентного уравнения (28) с потоками (29), а также заряды (в предположении вакуумной связи заряда с потенциалом поверхности) и эффективные заряды. Отметим, что незначительным изменением сечения поглощения ионов макрочастицей с изменением числа Кнудсена (l_i/r_0) пренебрегалось, поэтому значения ϕ_0 , q_0 , \tilde{Q}_e и \tilde{Q}_i от давления не зависят, а значения Q_e , Q_i и \tilde{S} прямо пропорциональны частоте столкновений и, соответственно, давлению газа.

Из табл. 3 и 4 следует, что $|Q_e| \ll Q_i$ и $|\tilde{Q}_e| \ll \tilde{Q}_i$ как в изотермической плазме, так и при $T_e \gg T_i$. Отметим также, что основной вклад в \tilde{S} вносит ионная компонента плазмы. Из сравнения значений зарядов, представленных в табл. 3 и 4, видно, что при $T_e \gg T_i$ они на порядок выше, чем при $T_e = T_i$.

На рис. 1–3 приведены распределения потенциала в аргоне при $E_{dis}/N = 1$ Тд при трех разных давлениях и, соответственно, разных частотах столкновений, полученные путем быстрого фурье-

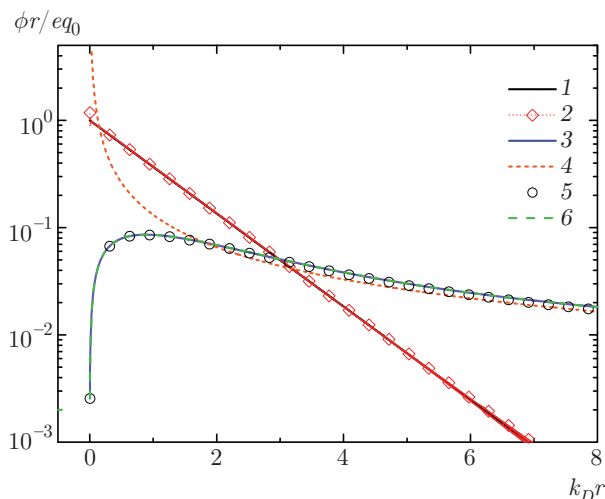


Рис. 1. Распределение потенциала самосогласованного электрического поля вокруг макрочастицы радиусом 10 мкм в неизотермической плазме при давлении 0.1 Па в аргоне: 1 — дебаевский потенциал $eq_0/r \exp(-k_D r)$, 2 — дебаевский потенциал, полученный в результате быстрого преобразования фурье-функции $4\pi eq_0/(k^2 + k_D^2)$, 3 — потенциал, полученный в результате быстрого преобразования фурье-выражения (26) без дебаевского вклада, 4 — выражение (38), 5 — $e(\tilde{Q}_e + \tilde{Q}_i)g(k_D r)/r$, 6 — $-e\tilde{S}/r(1 - e^{-k_D r})$ (выражение (41) без дебаевского вклада)

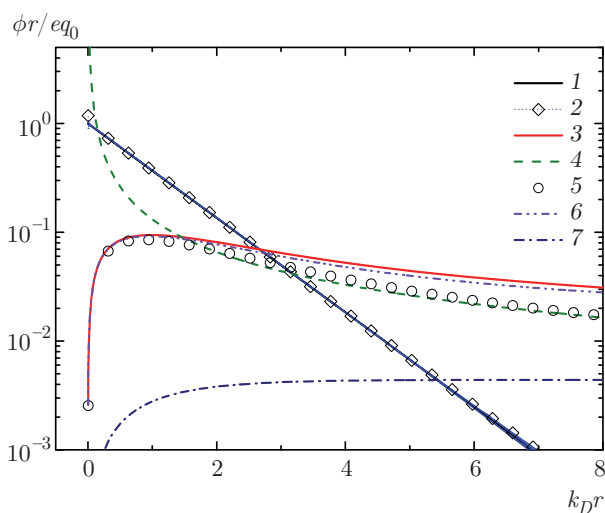


Рис. 2. Распределение потенциала самосогласованного электрического поля вокруг макрочастицы радиусом 10 мкм в неизотермической плазме при давлении 1 Па в аргоне: 7 — выражение (36) без дебаевского вклада, остальные обозначения, как на рис. 1

Таблица 1. Масса и подвижность ионов (μ_i) [53], частота столкновений ионов с буферным газом ($\nu_i = e_i/m_i\mu_i$), длина пробега (l_i) при давлении газа 1 Па, постоянная экранирования (k_D) при $E_{dis}/N = 1$ Тд. (При $E_{dis}/N = 10^{-4}$ Тд постоянная экранирования во всех газах равна $k_D = 374$ см $^{-1}$, радиус Дебая $R_D = 26.7$ мкм)

Газ	m_i , а. е. м	μ_i , см 2 /В·с	ν_i , с $^{-1}$	l_i , см	k_D , см $^{-1}$
Гелий	4.00	10.2	$4.39 \cdot 10^5$	0.541	273.4
Неон	20.179	4.2	$2.11 \cdot 10^5$	0.501	265.8
Аргон	39.948	1.61	$2.78 \cdot 10^5$	0.270	266.5
Криптон	83.80	1.0	$2.14 \cdot 10^5$	0.243	266.8
Ксенон	131.29	0.66	$2.07 \cdot 10^5$	0.201	267.3

Таблица 2. Температура (T_e), частота столкновений с буферным газом (ν_e) и длина пробега электронов (l_e) при $E_{dis}/N = 10^{-4}$ и 1 Тд, полученные в расчетах программой BOLSIG++ [52] (при давлении газа 1 Па)

Газ	$E_{dis}/N = 10^{-4}$ Тд			$E_{dis}/N = 1$ Тд		
	T_e , эВ	ν_e , с $^{-1}$	l_e , см	T_e , эВ	ν_e , с $^{-1}$	l_e , см
Гелий	0.026	$1.50 \cdot 10^6$	7.18	0.377	$7.01 \cdot 10^6$	5.86
Неон	0.026	$1.38 \cdot 10^6$	7.80	2.598	$5.61 \cdot 10^6$	19.2
Аргон	0.026	$5.81 \cdot 10^5$	18.5	1.644	$8.50 \cdot 10^6$	10.1
Криптон	0.026	$1.74 \cdot 10^6$	6.19	1.446	$1.21 \cdot 10^7$	6.67
Ксенон	0.026	$1.29 \cdot 10^7$	0.83	1.187	$1.63 \cdot 10^7$	4.46

Таблица 3. Потенциал поверхности, заряд и эффективные заряды макрочастиц в изотермической плазме при $E_{dis}/N = 10^{-4}$ Тд (при давлении газа 1 Па)

Газ	ϕ_0 , В	q_0	Q_i из (35)	Q_e из (35)	\tilde{Q}_i из (32)	\tilde{Q}_e из (32)	\tilde{S} из (42)
Гелий	-0.079	-547.9	1.75	$-2.40 \cdot 10^{-4}$	29.81	-0.103	0.807
Неон	-0.096	-666.2	2.24	$-1.07 \cdot 10^{-4}$	35.35	-0.050	1.014
Аргон	-0.103	-717.1	4.43	$-3.31 \cdot 10^{-5}$	37.72	-0.036	1.994
Криптон	-0.111	-772.8	5.26	$-7.06 \cdot 10^{-5}$	40.33	-0.026	2.354
Ксенон	-0.116	-806.9	6.62	$-4.27 \cdot 10^{-4}$	41.92	-0.021	2.951

Таблица 4. Потенциал поверхности, заряд и эффективные заряды макрочастиц в неизотермической плазме при $E_{dis}/N = 1$ Тд (при давлении газа 1 Па)

Газ	ϕ_0 , В	q_0	Q_i из (35)	Q_e из (35)	\tilde{Q}_i из (32)	\tilde{Q}_e из (32)	\tilde{S} из (42)
Гелий	-0.853	-5922.5	30.79	$-1.33 \cdot 10^{-3}$	384.5	-0.339	12.7
Неон	-5.644	-39193	230.2	$-4.75 \cdot 10^{-4}$	2584.3	-0.386	93.5
Аргон	-4.229	-29365	318.2	$-5.72 \cdot 10^{-4}$	1932.2	-0.245	129.3
Криптон	-4.179	-29019	348.8	$-6.05 \cdot 10^{-4}$	1907.5	-0.172	141.8
Ксенон	-3.718	-25818	374.3	$-6.89 \cdot 10^{-4}$	1694.5	-0.131	152.2

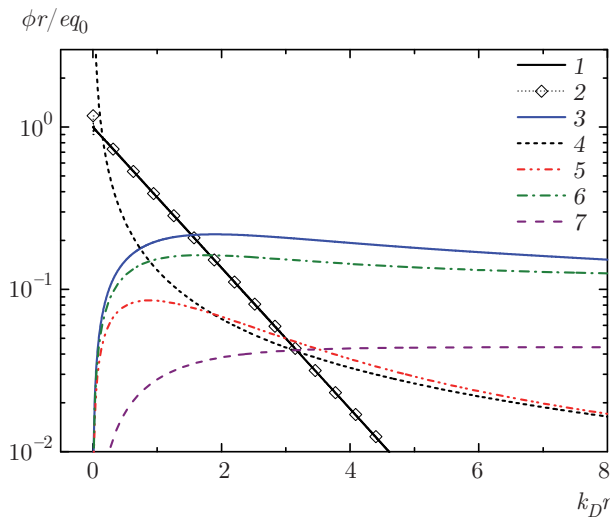


Рис. 3. Распределение потенциала самосогласованного электрического поля вокруг макрочастицы радиусом 10 мкм в неизотермической плазме при давлении 10 Па в аргоне. Обозначения, как на рис. 1 и 2

преобразования (БФП) выражения (26). Интегралы $I_{S\sigma}$ (23) вычислялись методом трапеций с адаптивным выбором шага для достижения заданной относительной точности, равной 10^{-6} .

На рис. 1 видно, что рассчитанное методом БФП распределение потенциала очень хорошо описывается выражением (36), а на больших расстояниях, $k_D r \gg 1$, распределение потенциала без дебаевской части хорошо описывается выражением (38). При давлении 0.1 Па значение эффективного заряда Q_i , связанного со столкновениями, мало, поэтому (36) практически совпадает с распределением потенциала, связанного с функцией $g(k_D r)$.

При увеличении давления, как видно на рис. 2, возросший в 10 раз заряд Q_i начинает давать вклад в распределение потенциала, а выражение (36) снова очень хорошо описывает рассчитанное методом БФП распределение потенциала. При дальнейшем увеличении давления, как видно на рис. 3, рассчитанное методом БФП из (26) распределение потенциала оказывается немного выше распределения (36), что связано с пренебрежением вкладом малых значений волнового вектора при выводе (36).

Расчеты в других газах показали аналогичное хорошее согласие рассчитанного методом БФП распределения потенциала с распределением (36), причем с ростом давления согласие, как и в аргоне, немного ухудшалось.

На рис. 4 приведены распределения потенциала самосогласованного электрического поля вокруг

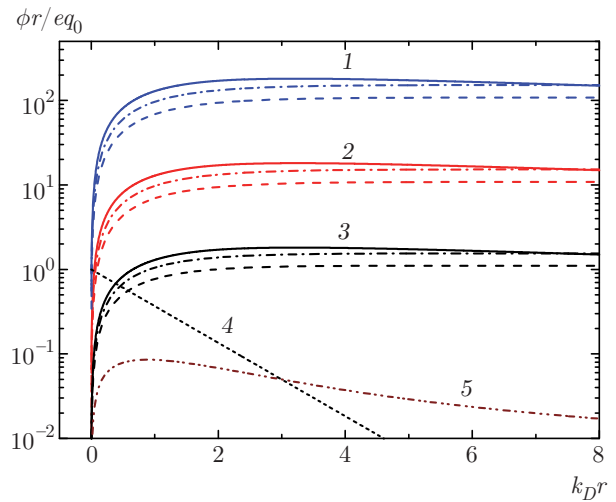


Рис. 4. Распределение потенциала самосогласованного электрического поля вокруг макрочастицы радиусом 10 мкм в неизотермической плазме в аргоне при разных давлениях: кривые 1 — 10^4 Па, 2 — 10^3 Па и 3 — 10^2 Па (сплошные кривые — потенциал, полученный в результате быстрого преобразования фурье-выражения (26) без дебаевского вклада, штриховые кривые — (36) без дебаевского вклада, штрихпунктирные кривые — (43) без дебаевского вклада), 4 — дебаевский потенциал, 5 — $e(\tilde{Q}_e + \tilde{Q}_i)g(k_D r)/r$

макрочастицы радиусом 10 мкм в неизотермической плазме в аргоне при более высоких давлениях: 10^2 , 10^3 и 10^4 Па. Видно, что выражение (36) и при этих давлениях достаточно хорошо описывает рассчитанное методом БФП распределение потенциала, а зависимость (41) оказывается немного ниже. Как следует из табл. 3, 4, значение эффективного заряда \tilde{S} во всех газах оказывается ниже, чем сумма $Q_e + Q_i$. Поскольку обе эти величины растут прямо пропорционально с давлением, при всех давлениях (36) будет идти выше, чем (41). Отношение эффективных зарядов с учетом того, что $2ez_i |\phi_0|/T_i \gg 1$, определяется выражением

$$Q_i/\tilde{S} \approx \pi^2/4z_i,$$

т. е. оказывается чуть больше двух. С учетом сказанного выше про двукратное занижение коэффициента диффузии в (42), мы можем сделать вывод о том, что именно член $(Q_i + Q_e)/r$ повторяет результаты работ [20, 35], где расчеты были проведены в столкновительном режиме с $z_i = 1$.

Из рис. 4 также видно, что распределение потенциала

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{eq_0 e^{-k_D r}}{r} - \sum e \tilde{Q}_\sigma \frac{g(k_D r)}{r} - e \left(\tilde{S} + \sum Q_\sigma \right) \frac{1 - e^{-k_D r}}{r}, \quad (43)$$

полученное комбинацией выражений (36) и (41), практически совпадает с рассчитанным методом БФП распределением потенциала. Это, вероятно, связано с частичной компенсацией выражением (41) вклада малых значений волнового вектора, который отсутствует в (36).

6. СЛУЧАЙ ПОСТОЯННЫХ ДЛИН СВОБОДНОГО ПРОБЕГА ЭЛЕКТРОНОВ И ИОНОВ

Выше были проведены расчеты для случая, когда частота столкновений ионов и электронов с атомами буферного газа не зависит от давления. Частота столкновений ионов в собственном газе при комнатной температуре, в основном, определяется процессом перезарядки, сечение которого слабо зависит от скорости иона [53]. В этом случае длина свободного пробега ионов оказывается слабо зависящей от скорости и она практически не зависит от давления буферного газа. Используя формулу для коэффициента диффузии твердых шариков в приближении Энского – Чепмена [53]

$$D_i = \frac{3\pi}{32N\sigma_{in}} \left(\frac{8T}{\pi m_{in}} \right)^{1/2}$$

и соотношение Эйнштейна, для определения длины свободного пробега по экспериментальным значениям подвижности ионов получим выражение

$$l_i = (N\sigma_{in})^{-1} = \frac{8}{3} \left(\frac{2m_{in}T}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\mu_i}{ez_i}, \quad (44)$$

где N – концентрация буферного газа, σ_{in} – сечение столкновений ионов с атомами буферного газа.

Зависимости сечения столкновения электронов от энергии в инертных газах ведут себя достаточно сложным образом, проходя через минимум Рамзауэра по мере роста энергии в тяжелых инертных газах (см., например, [54–56]), поэтому приближение постоянной длины свободного пробега для них вряд ли применимо. Но ввиду того что электронная компонента вносит пренебрежимо малый вклад в отклонение экранирования от дебаевского, это приближение для электронов практически не вносит никаких ошибок в суммарное с ионами распределение потенциала. В принципе возможно рассмотрение ионов в

приближении $l_i = \text{const}$, а электронов – $\nu_e = \text{const}$ или использовать для вычисления частоты столкновений реальные сечения, но это будет неоправданным усложнением задачи, поэтому в этом разделе используем приближение постоянной длины свободного пробега и для электронов, а в качестве оценки длины пробега используем выражение: $l_e = v_{th,e}/\nu_e$, где $v_{th,e} = (8T_e/\pi m_e)^{1/2}$. В табл. 1 и 2 приведены длины свободного пробега электронов и ионов при давлении газа 1 Па.

Полученные выше выражения (кроме явного выражения для диэлектрической функции (68) и интеграла (17)) справедливы и при $l_\sigma = \text{const}$. В этом случае из (16) и (23) находим

$$I_{S\sigma} = -\frac{2k_D}{k} \frac{\tilde{Q}_\sigma}{z_\sigma n_{0\sigma}} \text{arctg } kl_\sigma,$$

$$I_{\Phi\sigma} = -\frac{\text{arctg } kl_\sigma}{kl_\sigma}.$$

Используя эти выражения, из (26) находим

$$\phi(r) = \frac{q_0 e^{-k_D r}}{r} - \frac{4k_D}{\pi} \sum \frac{e\tilde{Q}_\sigma}{r} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{k^2 + k_D^2} \times \text{arctg } kl_\sigma \left[1 - \frac{\text{arctg } kl_\sigma}{kl_\sigma} \right]^{-1} dk. \quad (45)$$

В этом случае мы имеем явное выражение подынтегральной функции и можно обойтись без БФП, а посчитать интеграл с нужной точностью в требуемом для этого диапазоне изменения волнового вектора. На рис. 5, 6 приведены распределения потенциала в аргоне в случае постоянной длины пробега. Из сравнения данных, представленных на этих рисунках и на рис. 1–4 видно, что в случае $l_{e,i} = \text{const}$ отклонение потенциала от дебаевского оказывается заметно меньше, чем в случае $\nu_{e,i} = \text{const}$. Это связано с тем, что при $l_{e,i} = \text{const}$ столкновения медленных электронов и ионов становятся редкими ($\nu_{e,i} \rightarrow 0$ при $v \rightarrow 0$) и по этой причине вносят заметно меньший вклад в распределение потенциала, чем в случае $\nu_{e,i} = \text{const}$.

При низких давлениях, при выполнении условия $k_D l_\sigma \gg 1$, выражение в квадратных скобках под интегралом (45) можно заменить на единицу и получить следующее выражение для распределения потенциала:

$$\phi(r) = \frac{eq_0 e^{-k_D r}}{r} - \sum \frac{e\tilde{Q}_\sigma}{r} g_l(r, k_D, l_\sigma), \quad (46)$$

где

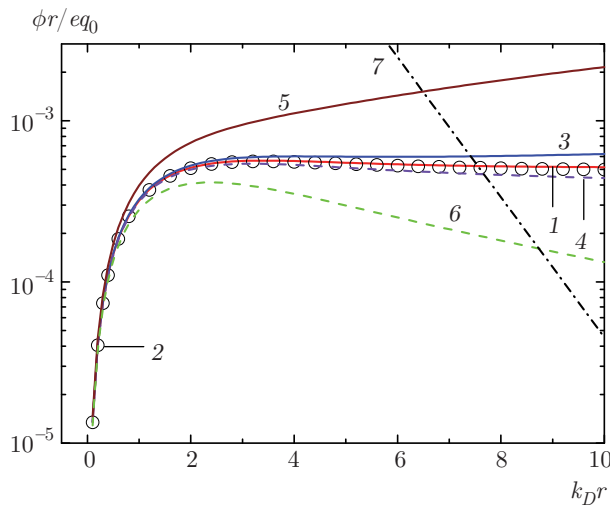


Рис. 5. Распределение потенциала самосогласованного электрического поля вокруг макрочастицы радиусом 10 мкм без дебаевского вклада в неизотермической плазме в аргоне в случае $l_{e,i} = \text{const}$ при давлении 0.1 Па (кривая 1 и символы 2), 1 Па (3,4), 10 Па (5,6); кривая 7 — дебаевский потенциал. Сплошные кривые 1–3 — расчет по формуле (45), 4–6 — расчет по (46)

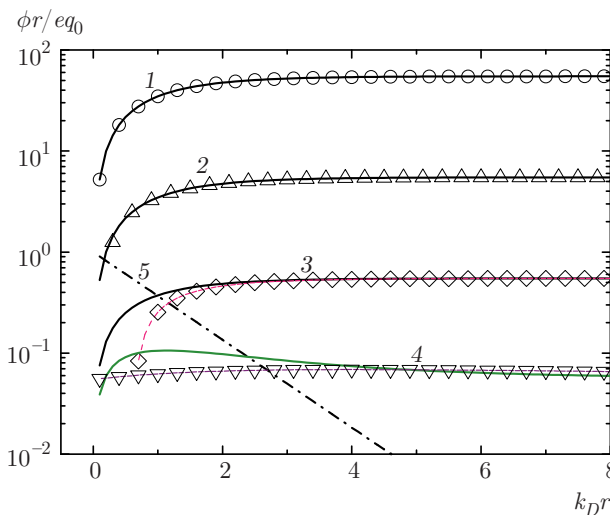


Рис. 6. Распределение потенциала самосогласованного электрического поля вокруг макрочастицы радиусом 10 мкм без дебаевского вклада в неизотермической плазме в аргоне в случае $l_{e,i} = \text{const}$ при давлении 10⁴ Па (1), 10³ Па (2), 10² Па (3), 10 Па (4); 5 — дебаевский потенциал. Сплошные кривые — расчет по формуле (45), символы — расчет по (49)

$$g_l(r, k_D, l_\sigma) = \ln \frac{k_D l_\sigma + 1}{|k_D l_\sigma - 1|} e^{-k_D r} + e^{-k_D r} \text{Ei} \left(k_D r - \frac{r}{l_\sigma} \right) + e^{k_D r} \text{E}_1 \left(k_D r + \frac{r}{l_\sigma} \right). \quad (47)$$

Отметим, что функция $g_l(r, k_D, l_\sigma)$ в пределе $k_D l_\sigma \rightarrow \infty$ переходит в функцию $g(k_D r)$, введенную выше (37). В рассматриваемом случае на больших расстояниях $k_D r \gg 1$, но при $r \ll l_\sigma$, потенциал имеет асимптотику

$$\phi(r) \approx \sum \frac{2e\tilde{Q}_\sigma}{k_D r^2} \left(1 - \frac{r}{l_\sigma} \right). \quad (48)$$

Видно, что есть связанная со столкновениями асимптотика r^{-1} , а также асимптотика r^{-2} , совпадающая с полученным выше выражением (38) для случая постоянных частот столкновений.

На рис. 5 приведены распределения потенциала, вычисленные по формуле (46) при трех давлениях: 0.1, 1 и 10 Па. Видно, что при давлении 0.1 Па кривые, рассчитанные из (45) и (46), практически сливаются. С ростом давления согласие быстро убывает.

При высоких давлениях, при выполнении условия $k_D l_\sigma \ll 1$, имеем

$$\left[1 - \frac{\arctg kl_\sigma}{kl_\sigma} \right] \approx \frac{1}{3} (kl_\sigma)^2$$

и из (45) можно получить выражение

$$\phi(r) = \frac{eq_0 e^{-k_D r}}{r} + \sum \frac{6}{k_D l_\sigma} \frac{e\tilde{Q}_\sigma}{r} \times \left[e^{-r/l_\sigma} - 1 - \frac{r}{l_\sigma} \text{E}_1 \left(\frac{r}{l_\sigma} \right) + \frac{g_l(r, k_D, l_\sigma)}{2k_D l_\sigma} \right]. \quad (49)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае $k_D l_\sigma \ll 1$ функция Ei в (47) перейдет в E_1 : $\text{Ei}(k_D r - r/l_\sigma) = -\text{E}_1(r/l_\sigma - k_D r)$. В «резонансном» случае при $k_D l_\sigma = 1$ предельным переходом из (47) находим

$$g_l^r(r, k_D) = \left[\gamma + \ln(2k_D r) \right] e^{-k_D r} + e^{k_D r} \text{E}_1(2k_D r). \quad (50)$$

На расстояниях $r \gg l_\sigma$ потенциал определяется выражением (ср. с (41))

$$\phi(r) \approx \left(q_0 + \sum \frac{6\tilde{Q}_\sigma}{k_D l_\sigma} \right) \frac{e}{r} e^{-k_D r} - \frac{6}{k_D l_\sigma} \frac{e\tilde{Q}_\sigma}{r}. \quad (51)$$

На рис. 6 приведены распределения потенциала, вычисленные по формуле (49) при давлениях 10, 10², 10³, 10⁴ Па. Видно, что при высоких давлениях данные, рассчитанные из (45) и (49), практически совпадают. С уменьшением давления появляется расхождение на малых расстояниях, но в этой области преобладающим является дебаевский член,

поэтому можно сделать вывод о том, что выражение (49) хорошо описывает распределение давления не только при выполнении условия $k_D l_\sigma \ll 1$, но даже при $k_D l_\sigma \approx 1$ (в аргоне при давлении 10 Па и $E_{dis}/N = 1$ Тд, как следует из табл. 1, $k_D l_i = 7.2$).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено подробное исследование распределения эффективного потенциала вокруг макрочастицы на основе кинетических уравнений с самосогласованным полем, дополненных столкновительными интегралами в форме Бхатнагара–Гросса–Крука и точечными стоками электронов и ионов. Рассмотрены случаи постоянной частоты столкновений электронов и ионов с атомами буферного газа и постоянной длины их свободного пробега. Установлено, что в последнем случае отклонение потенциала от дебаевского оказывается заметно меньше, чем в первом. Получены аналитические выражения, которые хорошо описывают распределение потенциала вокруг заряженной макрочастицы. Показано, что столкновения и стоки электронов вносят пренебрежимо малый вклад в распределение потенциала, а отклонения от дебаевского экранирования определяются ионной компонентой как в изотермической, так и в неизотермической плазме.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 16-12-10424).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Решение нестационарной задачи

Выполним фурье-преобразование:

$$\delta f_{\sigma, \mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \delta f_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} dt. \quad (52)$$

Умножим (11) на $e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ и проинтегрируем по $d\mathbf{r} dt$. После несложных преобразований с заменой переменных сначала t' на $\tau = t - t'$, затем t на $t - \tau$ получаем

$$\delta f_{\sigma, \mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) = i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}\omega} \frac{e_{\sigma}}{m_{\sigma}} \int W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} d\mathbf{v}' - \int S_{\sigma\omega}^{(0)}(\mathbf{v}') W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}', \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{k}\omega} &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d\mathbf{r} dt, \\ S_{\sigma\omega}^{(0)}(\mathbf{v}') &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\sigma}^{(0)}(\mathbf{v}', t) e^{i\omega t} dt, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \\ W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= \int \int_0^{\infty} W_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v}, \mathbf{v}'; \tau) \times \\ &\quad \times e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}-\omega\tau)} d\mathbf{R} d\tau. \quad (54) \end{aligned}$$

Подставив (53) в уравнение Пуассона (10), получим следующее решение для распределения потенциала в (\mathbf{k}, ω) -представлении:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{4\pi q_{\omega}}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} - \frac{4\pi}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \times \\ &\quad \times \sum_{\sigma} e_{\sigma} n_{\sigma} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') S_{\sigma\omega}^{(0)}(\mathbf{v}'), \quad (55) \end{aligned}$$

где $q_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{i\omega t} dt$, $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ — диэлектрическая функция отклика:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) &= 1 - i \sum_{\sigma} \frac{4\pi e_{\sigma}^2 n_{\sigma}}{k^2 m_{\sigma}} \times \\ &\quad \times \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \mathbf{k} \frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}. \quad (56) \end{aligned}$$

В настоящей работе мы будем рассматривать только случай изотропной плазмы без внешних полей. В этом случае уравнение (12) для вероятности перехода превращается в следующее:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right\} W_{\sigma}(X, X'; \tau) &= -\nu_{\sigma} \left[W_{\sigma}(X, X'; \tau) - \right. \\ &\quad \left. - \Phi_{\sigma}(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v} W_{\sigma}(X, X'; \tau) \right]. \quad (57) \end{aligned}$$

Умножим уравнение (57) на $e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}-\omega\tau)}$ и проинтегрируем по $d\mathbf{R}$ во всем пространстве и по $d\tau$ от 0 до ∞ . В результате после несложных преобразований находим

$$\begin{aligned} W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= \frac{i\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu_{\sigma}} + \frac{i\nu_{\sigma}\Phi_{\sigma}(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu_{\sigma}} \times \\ &\quad \times \int W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}. \quad (58) \end{aligned}$$

Проинтегрировав (58) по $d\mathbf{v}$, получим

$$\begin{aligned} \int W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') d\mathbf{v} &= \frac{i}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' + i\nu_{\sigma}} \times \\ &\quad \times \left[1 - \int \frac{i\nu_{\sigma}\Phi_{\sigma}(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu_{\sigma}} d\mathbf{v} \right]^{-1}. \quad (59) \end{aligned}$$

Подставив (59) в (58), находим решение (57):

$$W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{i\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu_\sigma} - \frac{\nu_\sigma \Phi_\sigma(\mathbf{v})}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu_\sigma)(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' + i\nu_\sigma)} \times \left[1 - i \int d\mathbf{v} \frac{\nu_\sigma \Phi_\sigma(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu_\sigma} \right]^{-1}. \quad (60)$$

Решение (57) можно также найти, используя вероятность перехода электрона или иона в предположении, что они исчезают после каждого столкновения (см., например, [57, 58]):

$$W_\sigma^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v}, \mathbf{v}'; \tau) = e^{-\nu_\sigma \tau} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}\tau) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'), \quad (61)$$

$$W_{\sigma\mathbf{k}\omega}^0(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{i\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu_\sigma}. \quad (62)$$

Решение (57) с учетом того, что электроны и ионы в столкновениях не исчезают, а формируют функцию распределения $\Phi_\sigma(\mathbf{v})$, имеет вид

$$W_{\sigma\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = W_{\sigma\mathbf{k}\omega}^0(\mathbf{v}, \mathbf{v}') + \frac{\nu_\sigma \int d\mathbf{v}' W_{\sigma\mathbf{k}\omega}^0(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \int d\mathbf{v} \Phi_\sigma(\mathbf{v}) W_{\sigma\mathbf{k}\omega}^0(\mathbf{v}, \mathbf{v}')}{1 - \nu_\sigma \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W_{\sigma\mathbf{k}\omega}^0(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \Phi_\sigma(\mathbf{v}')}. \quad (63)$$

Окончательно, используя (62), из (63) легко получить решение (60).

Теперь, используя (59), для функции диэлектрического отклика из (56) получим

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_\sigma \frac{4\pi e_\sigma^2 n_\sigma}{k^2 m_\sigma} \int \frac{\mathbf{k}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' + i\nu_\sigma} \times \frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} d\mathbf{v}' \left[1 - \int \frac{i\nu_\sigma \Phi_\sigma(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu_\sigma} d\mathbf{v} \right]^{-1}. \quad (64)$$

Далее в качестве функций распределения будем использовать максвелловские функции

$$f_{0\sigma} = \left(\frac{m_\sigma}{2\pi T_\sigma} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_\sigma u^2}{2T_\sigma}\right), \quad \Phi_\sigma = f_{0\sigma}, \quad (65)$$

где T_σ — температура σ -частиц плазмы. (В модели Бхатнагара–Гросса–Крука в результате столкновений формируется функция распределения Φ_σ с температурой

$$T_{\sigma n} = \frac{m_\sigma T + m_g T_\sigma}{m_\sigma + m_g}, \quad (66)$$

где T и m_g — температура и масса частиц нейтрального газа. Температура ионов обычно совпадает с газовой, поэтому $T_{in} = T_i \equiv T$. В изотермической плазме $T_{en} = T_e \equiv T$, а в случае неизотермической плазмы T_{en} меньше T_e на малую величину

$m_e(T_e - T)/(m_e + m_g)$, поэтому отличим T_{en} от T_e пренебрежем.) В этом случае

$$\frac{\partial f_{0\sigma}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{m_\sigma}{T_\sigma} \mathbf{v} f_{0\sigma}(\mathbf{v}) \quad (67)$$

и из (64) получим [59, 60]

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_\sigma \frac{k_{D\sigma}^2}{k^2} \frac{(\omega + i\nu_\sigma)W(z_\sigma)}{\omega + i\nu_\sigma W(z_\sigma)}, \quad (68)$$

где

$$k_{D\sigma}^2 = \frac{4\pi e_\sigma^2 n_{0\sigma}}{T_\sigma}, \quad z_\sigma = \frac{\omega + i\nu_\sigma}{kv_{T\sigma}}, \quad v_{T\sigma} = \left(\frac{T_\sigma}{m_\sigma} \right)^{1/2},$$

$n_{0\sigma}$ — концентрация σ -частиц в невозмущенной плазме, $W(z)$ — функция дисперсии плазмы [59, 61]:

$$W(z) = 1 - z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \int_0^z dt \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \quad (69)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Определение использованных в настоящей работе функций

Функция ошибок определяется интегралом [62–64]:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (70)$$

Дополнительная функция ошибок задается выражением [62–64]

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt. \quad (71)$$

Интегральные показательные функции определяются следующим образом [62–64]:

$$\operatorname{Ei}(x) = \text{V.P.} \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt, \quad (72)$$

$$\operatorname{E}_1(x) = -\operatorname{Ei}(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (73)$$

При малых значениях аргумента имеем (см. [64])

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad (74)$$

$$|x| \leq 1, \quad x^2 \neq -1,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (75) \end{aligned}$$

$$E_1(x) = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n n!}, \quad (76)$$

$$\operatorname{Ei}(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n n!}. \quad (77)$$

Здесь γ — число Эйлера: $\gamma = 0.577215664901532860606512 \dots$

При больших значениях аргумента имеют место разложения (см. [64])

$$\begin{aligned} \arctg x &= \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \\ &\quad - \frac{1}{5x^5} + \dots, \quad |x| > 1, \quad (78) \end{aligned}$$

$$E_1(x) = \frac{e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots \right), \quad (79)$$

$$\operatorname{Ei}(x) = \frac{e^x}{x} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} + \frac{3!}{x^3} + \dots \right). \quad (80)$$

В настоящей работе также использовалось асимптотическое разложение (см. [64])

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} x e^{x^2} \operatorname{erfc}(x) &= \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{(2x^2)^m}. \quad (81) \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Ivlev, H. Löwen, G. Morfill, and C. P. Royall, *Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids*, Series in Soft Condensed Matter, Vol. 5, World Scientific, Singapore (2012).
2. А. В. Филиппов, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, ЖЭТФ **148**, 1039 (2015).
3. F. Babick, *Fundamentals in Colloid Science*, in *Suspensions of Colloidal Particles and Aggregates*, Vol. 20 of the series *Particle Technology Series*, pp. 75–118, Springer International Publishing, Cham (2016).
4. H. Ohshima, *Electrostatic Interaction Between Colloidal Particles*, in *Encyclopedia of Biocolloid and Biointerface Science 2V Set*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA (2016).
5. А. В. Филиппов, И. Н. Дербенев, ЖЭТФ **150**, 1262 (2016).
6. I. N. Derbenev, A. V. Filippov, A. J. Stace, and E. Besley, *J. Chem. Phys.* **145**, 084103 (2016).
7. C. Chen and W. Huang, *Environ. Sci. Technol.* **51**(4), 2077 (2017).
8. I. B. Bernstein and I. V. Rabinovich, *Phys. Fluids* **2**, 112 (1959).
9. J. G. Laframbois and L. W. Parker, *Phys. Fluids* **15**, 629 (1973).
10. J. Goree, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 277 (1992).
11. J. E. Dougherty, R. K. Porteous, M. D. Kilgore, and D. B. Graves, *J. Appl. Phys.* **72**, 3934 (1992).
12. V. N. Tsytovich, Ya. K. Khodataev, and R. Bingham, *Comm. Plasma Phys. and Contr. Fusion* **17**, 249 (1996).
13. M. Lampe, G. Joyce, G. Ganguli, and V. Gavrishchaka, *Phys. Plasmas* **7**, 3851 (2000).
14. M. Lampe, V. Gavrishchaka, G. Ganguli, and G. Joyce, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5378 (2001).
15. T. Bystrenko and A. Zagorodny, *Phys. Lett. A* **299**, 383 (2002).
16. А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, А. В. Филиппов, *Физика плазмы* **27**, 155 (2001).
17. А. Ф. Паль, А. О. Серов, А. Н. Старостин, А. В. Филиппов, В. Е. Фортов, ЖЭТФ **119**, 272 (2001).
18. А. Ф. Паль, Д. В. Сивохин, А. Н. Старостин, А. В. Филиппов, В. Е. Фортов, *Физика плазмы* **28**, 32 (2002).
19. O. Bystrenko and A. Zagorodny, *Phys. Rev. E* **67**, 066403 (2003).
20. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, ЖЭТФ **131**, 164 (2007).
21. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, ЖЭТФ **135**, 567 (2009).
22. J. E. Allen, B. M. Annaratone, and U. de Angelis, *J. Plasma Phys.* **63**, 299 (2000).

23. X.-Z. Tang and G. L. Delzanno, *Phys. Plasmas* (1994-present) **21**, 123708 (2014).
24. I. L. Semenov, A. G. Zagorodny, and I. V. Krivtsov, *Phys. Plasmas* **18**, 103707 (2011).
25. I. L. Semenov, A. G. Zagorodny, and I. V. Krivtsov, *Phys. Plasmas* **19**, 043703 (2012).
26. A. V. Zobnin, A. D. Usachev, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, *Phys. Plasmas* **15**, 043705 (2008).
27. I. B. Bernstein and T. Holstein, *Phys. Rev.* **94**, 1475 (1954).
28. Л. Д. Цендин, *ЖЭТФ* **66**, 1638 (1974).
29. А. В. Филиппов, Н. А. Дятко, А. С. Костенко, *ЖЭТФ* **146**, 1122 (2014).
30. A. G. Zagorodny, A. V. Filippov, A. F. Pal', A. N. Starostin, and A. I. Momot, *Proc. 2nd Int. Conf. on the Physics of Dusty, Burning Plasmas* (2007), August 26–30, Odessa (Ukraine), pp. 176–181.
31. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, А. И. Момот, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 873 (2007).
32. A. G. Zagorodny, *Theor. Mathem. Phys.* **160**(2), 1100 (2009).
33. S. A. Khrapak, B. A. Klumov, and G. E. Morfill, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 225003 (2008).
34. S. Khrapak and G. Morfill, *Contrib. Plasma Phys.* **49**, 148 (2009).
35. A. G. Zagorodny, A. V. Filippov, A. F. Pal' et al., *Problems of Atomic Science and Technology (Plasma Physics Series)* № 12, 99 (2006).
36. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **132**, 949 (2007).
37. P. L. Bhatnagar, P. E. Gross, and M. Krook, *Phys. Rev.* **54**, 511 (1954).
38. H. M. Mott-Smith and I. Langmuir, *Phys. Rev.* **28**, 727 (1926).
39. А. В. Зобнин, А. П. Нефедов, В. А. Синельщиков, В. Е. Фортов, *ЖЭТФ* **118**, 554 (2000).
40. О. С. Ваулина, А. Ю. Репин, О. Ф. Петров, К. Г. Адамович, *ЖЭТФ* **129**, 1118 (2006).
41. L. G. D'yachkov, A. G. Khrapak, S. A. Khrapak, and G. E. Morfill, *Phys. Plasmas* **14**, 042102 (2007).
42. I. H. Hutchinson and L. Patacchini, *Phys. Plasmas* **14**, 013505 (2007).
43. S. A. Khrapak and G. E. Morfill, *Phys. Plasmas* **15**, 114503 (2008).
44. I. Pilch, L. Caillault, T. Minea, U. Helmersson, A. A. Tal, I. A. Abrikosov, E. P. Mürger, and N. Brenning, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **49**, 395208 (2016).
45. S. Ichimaru and I. P. Yakimenko, *Phys. Scripta* **7**, 198 (1973).
46. I. P. Yakimenko and A. G. Zagorodny, *Phys. Scr.* **10**, 244 (1974).
47. Yu. L. Klimontovich, H. Wilhelmsson, I. P. Yakimenko, and A. G. Zagorodny, *Phys. Rep.* **175**, 265 (1989).
48. А. А. Рухадзе, В. П. Силян, *УФН* **76**, 79 (1962).
49. И. Н. Дербенев, Н. А. Дятко, А. В. Филиппов, *Физика плазмы* **38**, 270 (2012).
50. Г. Бейтман, А. Эрдеи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. 1, Наука, Москва (1969).
51. Ya. L. Al'pert, A. V. Gurevich, and L. P. Pitaevskii, *Space Physics with Artificial Satellites*, Plenum Press, New York (1965).
52. G. J. M. Hagelaar and L. C. Pitchford, *Plasma Sources Sci. Technol.* **14**, 722 (2005).
53. Б. М. Смирнов, *Ионы и возбужденные атомы в плазме*, Атомиздат, Москва (1974).
54. L. C. Pitchford, L. L. Alves, K. Bartschat, S. F. Biagi, M. C. Bordage, A. V. Phelps, C. M. Ferreira, G. J. M. Hagelaar, W. L. Morgan, S. Pancheshnyi, V. Puech, A. Stauffer, and O. Zatsarinny, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **46**, 334001 (2013).
55. L. L. Alves, K. Bartschat, S. F. Biagi, M. C. Bordage, L. C. Pitchford, C. M. Ferreira, G. J. M. Hagelaar, W. L. Morgan, S. Pancheshnyi, A. V. Phelps, V. Puech, and O. Zatsarinny, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **46**, 334002 (2013).
56. M. C. Bordage, S. F. Biagi, L. L. Alves, K. Bartschat, S. Chowdhury, L. C. Pitchford, G. J. M. Hagelaar, W. L. Morgan, V. Puech, and O. Zatsarinny, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **46**, 334003 (2013).
57. T. Hagfors, *Phys. Fluids* **13**, 2790 (1970).
58. T. Hagfors and R. A. Brockelman, *Phys. Fluids* **14**, 1143 (1971).
59. В. Д. Шафранов, *Электромагнитные волны в плазме*, в сб. *Вопросы теории плазмы*, вып. 3, под ред. М. А. Леонтовича, Госатомиздат, Москва (1963).

60. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1988) [A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics*, Springer-Verlag, Heidelberg (1984)].
61. В. Н. Фадеева, Н. М. Терентьев, *Таблицы значений интеграла вероятностей*, Гостехиздат, Москва (1964) [V. N. Fadeeva and N. M. Terent'ev, *Tables of Values of the Function $w(z) = e^{-z^2} \sqrt{\pi} \int_0^z e^{t^2} dt$ for Complex Arguments*, Pergamon Press, New York (1961)].
62. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Государственное изд-во физико-математической литературы, Москва (1963).
63. E. Jahnke, F. Emde, and F. Lüscher, *Tables of Higher Functions*, McGraw-Hill, New York (1960); Nauka, Moscow (1977).
64. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ed. by M. Abramowitz and I. A. Stegun, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55 (1972).