

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ НАРУШЕНИЯ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ И ДЕКОНФАЙНМЕНТА В КЭД₃ ПРИ КОНЕЧНЫХ МАССАХ КАЛИБРОВОЧНЫХ БОЗОНОВ

Пе́й Лин Ин^{a,d*}, Хай Шао Шао^b, Хон Ши Цзун^{b,c,d**}

^a Физический факультет, Юго-восточный университет
211189, Нанкин, Китай

^b Физический факультет, Университет Нанкина
210093, Нанкин, Китай

^c Объединенный центр частиц, ядерной физики и космологии
210093, Нанкин, Китай

^d Государственная лаборатория теоретической физики, Институт теоретической физики
100190, Пекин, Китай

Поступила в редакцию 4 мая 2017 г.

(Перевод с английского)

CHIRAL AND DECONFINEMENT PHASE TRANSITIONS IN QED₃ WITH FINITE GAUGE BOSON MASS

Pei-Lin Yin, Hai-Xiao Xiao, Hong-Shi Zong

На основании экспериментальных наблюдений, согласно которым имеется сопутствующая область между антиферромагнитной (AF) фазой и d -волновой сверхпроводящей (d SC) фазой, в рамках одного подхода, а именно, с использованием уравнения Дайсона – Швингера, исследовано влияние масс калибровочных бозонов m_a на восстановление киральной симметрии и фазовые переходы деконфайнмента в КЭД₃. Оказалось, что фазовый переход восстановления киральной симметрии при наличии массы калибровочного бозона m_a является типичным фазовым переходом второго рода; киральный фазовый переход восстановления симметрии и фазовый переход деконфайнмента происходят одновременно; значение критического числа фермионных ароматов N_f^c убывает при возрастании массы калибровочного бозона m_a , откуда следует, что существует граница, которая разделяет плоскость $N_f^c - m_a$ на область значений (N_f^c, m_a), лежащих ниже нее, где киральная симметрия/конфайнмент нарушаются, и область значений (N_f^c, m_a), лежащих выше нее, где киральная симметрия/деконфайнмент восстанавливаются.

DOI: 10.7868/S0044451017110049

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая хромодинамика (КХД) обладает двумя фундаментальными свойствами: динамическое нарушение киральной симметрии (ДНКС) и конфайнмент. Их изучение способствует более глубо-

кому пониманию природы. Сейчас — это одна из главных тем исследований экспериментальной и теоретической физики. Однако, поскольку калибровочное поле SU(3) имеет сложную структуру, механизмы ДНКС и конфайнмента поняты еще не полностью. В связи с этим мы предлагаем изучать некоторые модели, схожие с КХД, но имеющие более простую структуру. Квантовая электродинамика в размерности (2+1) (КЭД₃) является как раз такой моделью. В ней проявляются ДНКС [1–13] и конфайнмент [14–18]. Поскольку постоянная взаимо-

* E-mail: yinpl1101@gmail.com

** E-mail: zonghs@nju.edu.cn

действия безразмерна, КЭД₃ является суперперенормируемой и свободной от ультрафиолетовых расходимостей. Более того, КЭД₃ также представляет интерес с точки зрения физики конденсированного состояния как эффективная низкоэнергетическая теория поля для сильно коррелированных электронных систем, таких как купратные сверхпроводники с высокой T_c [19–27] и графены [28–32].

Хорошо известно, что в киральном пределе лагранжиан системы поддерживает киральную симметрию. При этом, когда безмассовый фермион приобретает ненулевую массу, киральная симметрия вакуума динамически нарушается. Прорыв в исследованиях ДНКС в КЭД₃ был сделан авторами работы [33]. В этой работе впервые были численно решены уравнения Дайсона–Швингера (ДШ) в главном порядке разложения по $1/N_f$ и был сделан вывод, что ДНКС имеет место, только если число фермионных ароматов N_f меньше критического значения $N_f^c = 32/\pi^2$. Позже в работе [34] при рассмотрении ряда упрощенных фермион-бозонных вершин была решена система связанных интегральных уравнений для перенормировки волновой функции, функции собственной энергии и поляризации вакуума и было получено значение $N_f^c \approx 3.3$. Затем в работе [35] для исследования поведения связанных интегральных уравнений в инфракрасной области были использованы степенная перенормировка волновой функции и поляризация вакуума и было получено значение $N_f^c \approx 4$. В работе [36] были использованы эффективные модели поляризации вакуума и фермион-бозонных вершин и было получено значение $N_f^c \approx 3.24$.

Известно, что ДНКС реализуется посредством фермион-антифермионной конденсации, обусловленной сильным калибровочным взаимодействием, имеющим дальнедействующий характер. Если калибровочный бозон имеет конечную ненулевую массу, то взаимодействие между фермионами значительно ослабляется. Интуитивно ясно, что конечная масса калибровочного бозона m_a должна подавлять ДНКС. Кроме того, эксперименты, выполненные с помощью рассеяния нейтронов [37, 38], мюонного спинового резонанса (μ SR) [39] и сканирующей туннельной микроскопии [40], показали, что имеется сопутствующая область между антиферромагнитной (AF) фазой (где фермион приобретает ненулевую массу в соответствии с ДНКС) и d -волновой сверхпроводящей (d SC) фазой (где калибровочный бозон имеет конечную массу в соответствии с механизмом Андерсона–Хиггса) [22, 23, 26], это указывает на наличие некоторой

взаимосвязи между AF- и d SC-фазами. В этом случае интересно количественно исследовать влияние массы калибровочного бозона m_a на фазовые переходы восстановления киральной симметрии и деконфайнмента, особенно на роль критического числа фермионных ароматов N_f^c .

Работа построена следующим образом. В разд. 2 вводятся киральный конденсат, киральная восприимчивость, функция Швингера и параметр порядка конфайнмента, которые используются для исследования восстановления киральной симметрии и фазовых переходов деконфайнмента, соответственно. В разд. 3 вводятся уравнения Дайсона–Швингера, которым удовлетворяют три скалярные функции, возникающие в фермионных и бозонных пропагаторах. В разд. 4 уравнения ДШ решаются численно, а затем вычисляются киральный конденсат, киральная восприимчивость и параметр порядка конфайнмента для различных значений числа фермионных ароматов N_f и масс калибровочного бозона m_a . Раздел 4 содержит краткие выводы и заключение.

2. КРИТЕРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ НАРУШЕНИЯ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ И ДЕКОНФАЙНМЕНТА

Киральный конденсат определяется как вакуумное среднее скалярного оператора $\bar{\psi}\psi$. Если его значение отлично от нуля, то киральная симметрия динамически нарушается, если же оно становится равным нулю, то киральная симметрия восстанавливается. Поэтому данная величина может служить параметром порядка в фазовом переходе восстановления киральной симметрии. Киральный конденсат может быть получен путем взятия следов одетых фермионных пропагаторов $S(x)$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle(\alpha) &= -\text{Tr}[S(\alpha, x=0)] = \\ &= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}[S(\alpha, p)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Для удобства в дальнейшем мы будем использовать символ α для обозначения массы голого фермиона m_0 , массы калибровочного бозона m_a и числа фермионных ароматов N_f , а именно, $\alpha = (m_0, m_a, N_f)$. Масса голого фермиона m_0 вводится явно для получения киральной восприимчивости, т. е. уравнения (2). В действительности, вычисления в разд. 4 представлены в киральном пределе, т. е. при $m_0 = 0$.

Кроме того, ответ системы на внешнее возмущение можно использовать для изучения динамических свойств системы многих частиц. В преды-

дущих исследованиях, связанных с фазовым переходом восстановления киральной симметрии, в качестве функции отклика часто использовалась киральная восприимчивость [41–47], которая определяется как первая производная кирального конденсата по массе голого фермиона m_0 . Поскольку киральный конденсат ведет себя по-разному в фазах нарушенной и восстановленной киральной симметрии, когда происходит фазовый переход нарушения киральной симметрии, киральная восприимчивость будет демонстрировать частично сингулярное поведение. По определению, киральная восприимчивость записывается как

$$\chi^c(\alpha) = -\frac{\partial(\bar{\psi}\psi)(\alpha)}{\partial m_0} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial m_0} \text{Tr}[S(\alpha, p)]. \quad (2)$$

Отсюда следует, что киральная восприимчивость описывает отклик кирального конденсата на малое возмущение массы голого фермиона m_0 .

Известно, что уравнения ДШ в киральном пределе имеют два качественно различных решения: (а) решение Намбу описывает фазу, где фермион приобретает ненулевую массу и киральная симметрия динамически нарушается, и (б) решение Вигнера характеризует другую фазу, в которой фермион становится безмассовым и киральная симметрия восстанавливается. Если число фермионных ароматов N_f меньше критического значения N_f^c , то фаза Намбу устойчива и для описания ее природы естественно использовать киральную восприимчивость решения Намбу. Если N_f достигает значения N_f^c , то устойчивой становится фаза Вигнера, и ее природу нужно описывать с помощью киральной восприимчивости решения Вигнера. Однако, насколько нам известно, в литературе чаще всего обсуждается только киральная восприимчивость решения Намбу. В настоящей работе мы впервые вычисляем киральную восприимчивость решения Вигнера в КЭД₃ с конечной массой калибровочного бозона m_a .

Хорошо известно, что если фермионный пропагатор имеет особенность при комплексных импульсах, то фермион никогда не окажется на массовой оболочке и, таким образом, его нельзя будет наблюдать как свободную частицу [48–52]. В этом смысле аналитическая структура фермионного пропагатора может быть связана с конфайнментом. В предыдущих работах для определения фазового перехода деконфайнмента использовалась функция Швингера с евклидовым временем τ :

$$\Delta(\alpha, \tau) = \frac{1}{4} \int d^2\vec{x} \text{Tr}[S(\alpha, x)] = \frac{1}{4} \int d^2\vec{x} \times \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp(i(p_3\tau + \vec{p} \cdot \vec{x})) \text{Tr}[S(\alpha, p)], \quad (3)$$

причем евклидово время τ обычно отождествляется с x_3 .

Если использовать функцию Швингера, то можно видеть, что если имеется асимптотическое состояние с вещественной массой m , то при больших τ

$$\Delta(\tau) \propto e^{-m\tau}, \quad (4)$$

и с помощью логарифмической производной мы получаем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{d \ln \Delta(\tau)}{d\tau} = -m. \quad (5)$$

Однако при комплексно-сопряженных массах $m^* = a \pm ib$ имеется особенность, тогда мы получим осциллирующее поведение:

$$\Delta(\tau) \propto e^{-a\tau} \cos(b\tau + \varphi). \quad (6)$$

Поскольку при увеличении числа фермионных ароматов N_f положение первых колебаний смещается в сторону больших значений τ и стремится к бесконечности, если N_f близко к N_f^c , величину, обратную положению первых колебаний, можно отождествить с параметром порядка фазового перехода деконфайнмента [53, 54]:

$$\kappa(N_f) := \frac{1}{\tau_1(N_f)}, \quad (7)$$

где $\tau_1(N_f)$ — положение первых колебаний для функции Швингера.

3. УРАВНЕНИЯ ДАЙСОНА – ШВИНГЕРА ПРИ НАЛИЧИИ МАССЫ КАЛИБРОВОЧНОГО БОЗОНА

В евклидовом пространстве лагранжиан КЭД₃ с N_f ароматами массивных фермионов имеет вид

$$\mathcal{L}_F = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (\not{\partial} - ie\not{A} + m_0) \psi_i + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2, \quad (8)$$

где спинор ψ_i — фермионное поле с индексами $i = 1, \dots, N_f$, A_μ — электромагнитное векторное поле, $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженности электромагнитного поля, а m_0 — масса голого фермиона. Для заданной киральной симметрии в настоящей работе

мы будем использовать четырехкомпонентные спиноры и четырехмерное представление для γ -матриц. Вообще говоря, калибровочная инвариантность не позволяет калибровочному бозону приобрести конечную массу посредством взаимодействия между фермионным и калибровочным полями. Однако в d SC-состоянии недодопированных купратов имеется дополнительное взаимодействие между калибровочным полем и комплексным скалярным полем, и калибровочный бозон становится массивным согласно механизму Андерсона–Хиггса. Как показано в работах [55–57], низкоэнергетическая динамика калибровочного поля в d SC-состоянии, связанная с комплексным скалярным полем, описывается уравнением

$$\mathcal{L}_B = \sum_{i=1}^{N_f} [|(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi_i|^2 - \mu^2|\phi_i|^2 - \lambda|\phi_i|^4], \quad (9)$$

которое обычно называют моделью Абея–Хиггса (или релятивистской моделью Гинзбурга–Ландау). Здесь ϕ_i — комплексное скалярное поле, представляющее бозонные холоны. При $\mu^2 > 0$ система остается в нормальном состоянии, комплексное скалярное поле имеет обращаемое в нуль вакуумное среднее $\langle \phi \rangle = 0$, а лагранжиан поддерживает локальную калибровочную симметрию. При $\mu^2 < 0$ система переходит в сверхпроводящее состояние, а комплексное скалярное поле приобретает ненулевое среднее $\langle \phi \rangle \neq 0$, при этом локальная калибровочная симметрия спонтанно нарушается, а калибровочный бозон приобретает конечную массу после поглощения безмассового голдстоуновского бозона, в результате в лагранжиане появляется массовый член $m_a^2 A_\mu^2/2$, где масса калибровочного бозона

$$m_a \propto \sqrt{-\mu^2/\lambda}.$$

Поскольку масса калибровочного бозона m_a обусловлена взаимодействием между калибровочным и комплексным скалярным полями, она полностью определяется природой этого взаимодействия. Воздействие фермиона на динамику калибровочного бозона обусловлено поляризацией бозонного вакуума.

Используя методы функционального анализа, из лагранжиана можно вывести уравнения ДШ для пропагаторов. Уравнение ДШ для пропагатора одетых фермионов имеет вид

$$S^{-1}(\alpha, p) = S_0^{-1}(m_0, p) + \Sigma(\alpha, p), \quad (10)$$

где

$$S_0^{-1}(m_0, p) = i\gamma \cdot p + m_0, \quad (11)$$

и

$$\begin{aligned} \Sigma(\alpha, p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma_\mu S(\alpha, k) \times \\ \times \Gamma_\nu(\alpha, p, k) D_{\mu\nu}(\alpha, q), \quad (12) \\ q_\mu = p_\mu - k_\mu. \end{aligned}$$

Здесь $S^{-1}(\alpha, p)$ и $S_0^{-1}(m_0, p)$ — обратные пропагаторы одетого и свободного фермионов, соответственно, $\Sigma(\alpha, p)$ — собственная энергия фермиона, $\Gamma_\nu(\alpha, p, k)$ — одетая фермион-бозонная вершина, а $D_{\mu\nu}(\alpha, q)$ — пропагатор одетого фотона. С другой стороны, с помощью лоренцева структурного анализа обратный пропагатор одетого фермиона можно разложить как

$$S^{-1}(\alpha, p) = i\not{p}A(\alpha, p^2) + B(\alpha, p^2), \quad (13)$$

где $A(\alpha, p^2)$ и $B(\alpha, p^2)$ — перенормированные волновая функция фермиона и функция собственной энергии фермиона, соответственно. Подставляя уравнения (11), (12) и (13) в уравнение (10) и беря следы в обеих частях уравнения (10), после умножения на 1 и на $\gamma \cdot p$, соответственно, получаем

$$\begin{aligned} A(\alpha, p^2) = 1 - \frac{i}{4p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \times \\ \times \text{Tr}[\gamma \cdot p \gamma_\mu S(\alpha, k) \Gamma_\nu(\alpha, p, k) D_{\mu\nu}(\alpha, q)], \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\alpha, p^2) = m_0 + \frac{1}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \times \\ \times \text{Tr}[\gamma_\mu S(\alpha, k) \Gamma_\nu(\alpha, p, k) D_{\mu\nu}(\alpha, q)]. \quad (15) \end{aligned}$$

Для пропагатора одетого бозона мы также имеем уравнение ДШ, а именно,

$$D_{\mu\nu}^{-1}(\alpha, q) = D_{\mu\nu}^{0,-1}(q) + \Pi_{\mu\nu}(\alpha, q), \quad (16)$$

где

$$D_{\mu\nu}^{0,-1}(q) = q^2 \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right), \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(\alpha, q) = -N_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \times \\ \times \text{Tr}[\gamma_\mu S(\alpha, k) \Gamma_\nu(\alpha, p, k) S(\alpha, p)], \quad (18) \end{aligned}$$

здесь $D_{\mu\nu}^{-1}(\alpha, q)$ и $D_{\mu\nu}^{0,-1}(q)$ — обратные пропагаторы одетого и свободного бозонов в калибровке Ландау, соответственно, а $\Pi_{\mu\nu}(\alpha, q)$ — тензор поляризации вакуума. Кроме того, как было отмечено в работах

[58–61], тензор поляризации вакуума при наличии массы калибровочного бозона m_a имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(\alpha, q) = [q^2\Pi(\alpha, q^2) + m_a^2] \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right), \quad (19)$$

где функция $\Pi(\alpha, q^2)$ — поляризация бозонного вакуума. Подставляя уравнения (17) и (19) в уравнение (16), получаем пропагатор одетого бозона:

$$D_{\mu\nu}(\alpha, q) = \frac{\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2}{q^2[1 + \Pi(\alpha, q^2)] + m_a^2}. \quad (20)$$

Для тензора поляризации вакуума характерна ультрафиолетовая расходимость, которую можно устранить с помощью схемы калибровочно-инвариантной регуляризации. Однако, поскольку эта расходимость появляется только в продольной части, в отличие от [14],

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 3\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}, \quad (21)$$

можно получить конечную поляризацию вакуума

$$\Pi(\alpha, q^2) = \frac{\delta_{\mu\nu} - 3q_\mu q_\nu / q^2}{2q^2} \Pi_{\mu\nu}(\alpha, q). \quad (22)$$

Можно видеть, что уравнения ДШ для фермионных и фотонных пропагаторов образуют систему связанных интегральных уравнений, при этом только одетая вершинная функция является неизвестной. Для вычисления пропагаторов требуется подходящее приближение для одетой вершинной функции. Наиболее простым и естественным приближением является радужное приближение:

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu. \quad (23)$$

Поскольку радужная вершинная функция играет определяющую роль среди всех вершинных функций в области больших импульсов и существенно упрощает связанные интегральные уравнения, ее обычно используют при рассмотрении уравнения ДШ для фермионных и бозонных пропагаторов. Кроме того, ряд анзацев для одетой вершинной функции изучался в работе [35], где было показано, что критическое число фермионных ароматов N_f^c , полученное с помощью самых разработанных методов, практически равно полученному с помощью радужной вершинной функции. Поэтому в настоящей работе мы будем использовать радужное приближение вершинной функции.

Подставляя уравнения (20) и (23) в уравнения (14) и (15), а уравнения (13), (18) и (23) — в уравнение (22), получаем

$$A(\alpha, p^2) = 1 + \frac{2}{p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(p \cdot q)(k \cdot q)/q^2}{q^2(1 + \Pi(\alpha, q^2)) + m_a^2} \times \frac{A(\alpha, k^2)}{A^2(\alpha, k^2)k^2 + B^2(\alpha, k^2)}, \quad (24)$$

$$B(\alpha, p^2) = m_0 + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2(1 + \Pi(\alpha, q^2)) + m_a^2} \times \frac{B(\alpha, k^2)}{A^2(\alpha, k^2)k^2 + B^2(\alpha, k^2)}, \quad (25)$$

$$\Pi(\alpha, q^2) = \frac{4N_f}{q^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[k^2 - 2(k \cdot q) - \frac{3(k \cdot q)^2}{q^2} \right] \times \frac{A(\alpha, k^2)}{A^2(\alpha, k^2)k^2 + B^2(\alpha, k^2)} \times \frac{A(\alpha, p^2)}{A^2(\alpha, p^2)p^2 + B^2(\alpha, p^2)}. \quad (26)$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из приведенных выше обсуждений очевидно, что если получены импульсная зависимость перенормированной волновой функции фермионов, функции собственной энергии фермионов и вакуумной поляризации бозонов, то можно исследовать динамическое порождение массы фермионов, конфайнмент и влияние на них массы калибровочного бозона m_a . Ниже мы сначала численно решим связанные интегральные уравнения для $A(\alpha, p^2)$, $B(\alpha, p^2)$ и $\Pi(\alpha, p^2)$, т. е. уравнения (24)–(26).

Эти уравнения можно решать численно методом итераций. Используя вклад главного порядка для $A(\alpha, p^2)$ и пробную функцию для $B(\alpha, p^2)$, можно вычислить $\Pi(\alpha, p^2)$. После этого можно решить связанные уравнения для $A(\alpha, p^2)$ и $B(\alpha, p^2)$. А затем снова вычислить $\Pi(\alpha, p^2)$, подставляя полученные численные решения. Процедура итераций проводится до тех пор, пока $A(\alpha, p^2)$, $B(\alpha, p^2)$ и $\Pi(\alpha, p^2)$ не сойдутся к набору устойчивых решений. Зависимости функций $A(\alpha, p^2)$, $B(\alpha, p^2)$ и $\Pi(\alpha, p^2)$ от импульса для различных значений массы калибровочного бозона m_a приведены на левых панелях рис. 1.

Из зависимостей, приведенных на левых панелях рис. 1, можно сделать следующие выводы. Во-первых, для перенормировки волновой функции фермионов $A(\alpha, p^2)$ в инфракрасной области при нулевой массе калибровочного бозона решение Намбу представляет собой практически константу, а решение Вигнера стремится к нулю. При возрастании массы калибровочного бозона решение Намбу убывает, а решение Вигнера возрастает и представляет собой практически константу. В ультрафиолетовой области как решение Намбу, так и решение Вигнера стремятся к единице для всех значений массы калибровочного бозона. Во-вторых, для функции соб-

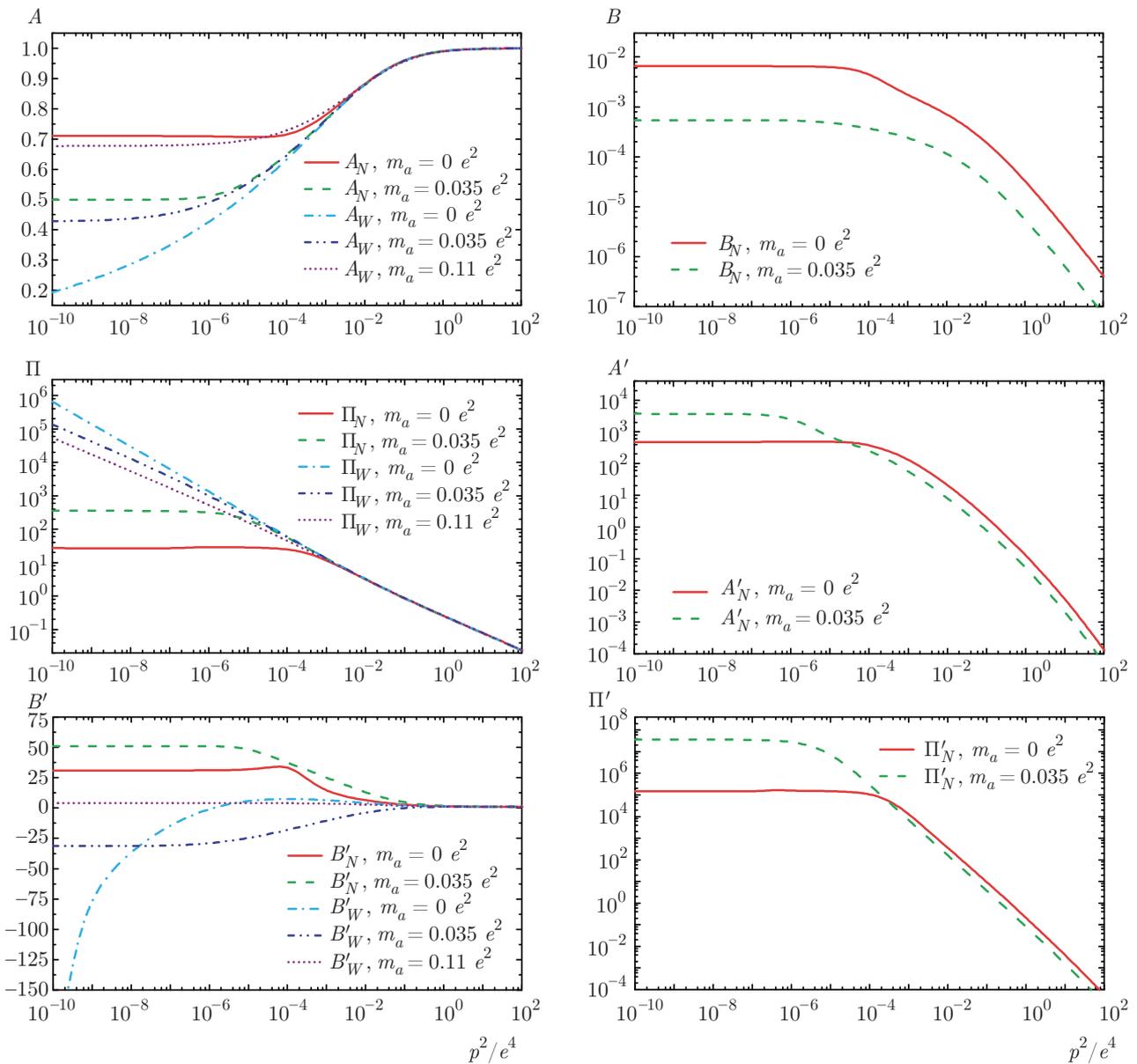


Рис. 1. Импульсные зависимости трех функций и соответствующие производные по массе голго фермиона для различных значений массы калибровочного бозона m_a при $N_f = 2$

ственной энергии фермионов $B(\alpha, p^2)$ в инфракрасной области при нулевой массе калибровочного бозона решение Намбу представляет собой практически константу, а при возрастании массы калибровочного бозона решение Намбу убывает. В ультрафиолетовой области решения Намбу стремятся к нулю для всех значений массы калибровочного бозона. В-третьих, для бозонной поляризации вакуума $\Pi(\alpha, p^2)$ в инфракрасной области при нулевой массе калибровочного бозона решение Намбу представляет собой практически константу, а решение Вигнера стремится к бесконечности, тогда как при возраста-

нии массы калибровочного бозона решение Намбу возрастает, а решение Вигнера убывает. В ультрафиолетовой области как решение Намбу, так и решение Вигнера стремятся к нулю для всех значений масс калибровочного бозона. Как было отмечено выше, КЭДз является супер-перенормируемой теорией и не страдает от ультрафиолетовых расходимостей. При достаточно большом ультрафиолетовом обрезании Λ результаты для скалярных функций фермионных и бозонных пропагаторов не будут от него зависеть.

Подставляя уравнение (13) в уравнение (1) и беря след, для кирального конденсата получаем

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle(\alpha) = -4 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{B(\alpha, p^2)}{A^2(\alpha, p^2)p^2 + B^2(\alpha, p^2)}. \quad (27)$$

Поскольку теперь нам известны импульсные зависимости перенормировки волновой функции фермиона и функции собственной энергии фермиона, киральный конденсат можно получить с помощью численных расчетов, подставляя численные решения для функций $A(\alpha, p^2)$ и $B(\alpha, p^2)$ в уравнение (27). На рис. 2 приведены зависимости кирального конденсата от числа фермионных ароматов N_f для различных значений массы калибровочного бозона m_a .

Из зависимостей, приведенных на рис. 2, можно сделать следующие выводы. Во-первых, для заданной массы калибровочного бозона m_a значение кирального конденсата, взятое с противоположным знаком, медленно убывает, если число фермионных ароматов N_f мало, и быстро стремится к нулю при приближении N_f к критическому значению N_f^c . Заметим, что значение N_f^c , полученное в настоящей

работе, существенно меньше предыдущего результата, полученного путем решения уравнения ДШ для функции собственной энергии фермионов в главном порядке разложения по $1/N_f$, см. [58]. Из сравнения этих двух результатов следует, что перенормировка волновой функции фермионов и поляризация бозонного вакуума играют важную роль в численных решениях уравнения ДШ и значении N_f^c . Во-вторых, при конечных значениях массы калибровочного бозона m_a величина кирального конденсата, взятая с противоположным знаком, в окрестности N_f^c изменяется по степенному закону, а именно, полученные точки практически лежат на прямой. Это указывает на то, что фазовый переход восстановления киральной симметрии при наличии m_a является типичным фазовым переходом второго рода [62, 63]. В-третьих, величина N_f^c убывает при возрастании m_a . Это подтверждает, что масса калибровочного бозона ослабляет калибровочное взаимодействие между фермионами и, таким образом, подавляет появление ДНКС.

Подставляя уравнение (27) в уравнение (2) и беря производную, для киральной восприимчивости получаем

$$\chi^c(\alpha) = 4 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{A^2(\alpha, p^2)B'(\alpha, p^2)p^2 - 2A(\alpha, p^2)B(\alpha, p^2)A'(\alpha, p^2)p^2 - B^2(\alpha, p^2)B'(\alpha, p^2)}{[A^2(\alpha, p^2)p^2 + B^2(\alpha, p^2)]^2} - \frac{1}{p^2} \right\}. \quad (28)$$

Функции $A'(\alpha, p^2)$ и $B'(\alpha, p^2)$ представляют собой производные результата перенормировки волновой функции фермиона $A(\alpha, p^2)$ и функции собственной энергии фермиона $B(\alpha, p^2)$ по массе голого фермиона m_0 и могут быть получены из уравнений (24)–(26):

$$\begin{aligned} A'(\alpha, p^2) = & -\frac{2}{p^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \frac{1}{[A^2(\alpha, k^2)k^2 + B^2(\alpha, k^2)]^2} \times \\ & \times \frac{1}{[q^2(1 + \Pi(\alpha, q^2)) + m_a^2]^2} \frac{(p \cdot q)(k \cdot q)}{q^2} \times \\ & \times \left\{ \left[\left(A^2(\alpha, k^2)k^2 - B^2(\alpha, k^2) \right) A'(\alpha, k^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2A(\alpha, k^2)B(\alpha, k^2)B'(\alpha, k^2) \right] \times \right. \\ & \times \left[q^2 \left(1 + \Pi(\alpha, q^2) \right) + m_a^2 \right] + A(\alpha, k^2) \times \\ & \left. \times \left(A^2(\alpha, k^2)k^2 + B^2(\alpha, k^2) \right) \Pi'(\alpha, q^2)q^2 \right\}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'(\alpha, p^2) = & 1 + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \frac{1}{[A^2(\alpha, k^2)k^2 + B^2(\alpha, k^2)]^2} \times \\ & \times \frac{1}{[q^2(1 + \Pi(\alpha, q^2)) + m_a^2]^2} \times \\ & \times \left\{ \left[\left(A^2(\alpha, k^2)k^2 - B^2(\alpha, k^2) \right) B'(\alpha, k^2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2A(\alpha, k^2)B(\alpha, k^2)A'(\alpha, k^2)k^2 \right] \times \right. \\ & \times \left[q^2 \left(1 + \Pi(\alpha, q^2) \right) + m_a^2 \right] - \\ & \left. - \left(A^2(\alpha, k^2)k^2 + B^2(\alpha, k^2) \right) \times \right. \\ & \left. \times B(\alpha, k^2)\Pi'(\alpha, q^2)q^2 \right\}, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi'(\alpha, q^2) = & \frac{4N_f}{q^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \frac{1}{[A^2(\alpha, k^2)k^2 + B^2(\alpha, k^2)]^2} \times \end{aligned}$$

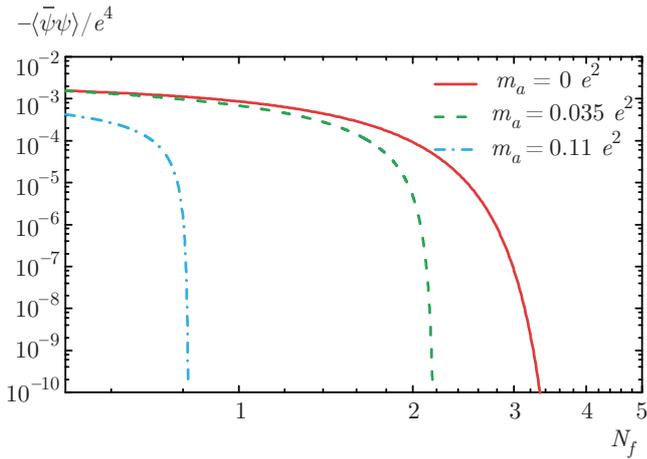


Рис. 2. Зависимости кирального конденсата $-\langle\bar{\psi}\psi\rangle(m_a, N_f)$ (взятого с обратным знаком) от числа фермионных ароматов N_f для различных значений массы калибровочного бозона m_a (в двойном логарифмическом масштабе)

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{[A^2(\alpha, p^2)p^2 + B^2(\alpha, p^2)]^2} \times \\ & \quad \times \left[k^2 - 2(k \cdot q) - \frac{3(k \cdot q)^2}{q^2} \right] \times \\ & \quad \times \left\{ \left(A(\alpha, p^2)A'(\alpha, k^2) + A(\alpha, k^2)A'(\alpha, p^2) \right) \times \right. \\ & \quad \quad \times \left(A^2(\alpha, k^2)k^2 + B^2(\alpha, k^2) \right) \times \\ & \quad \times \left(A^2(\alpha, p^2)p^2 + B^2(\alpha, p^2) \right) - 2A(\alpha, p^2)A(\alpha, k^2) \times \\ & \quad \times \left[\left(A(\alpha, k^2)A'(\alpha, k^2)k^2 + B(\alpha, k^2)B'(\alpha, k^2) \right) \times \right. \\ & \quad \quad \times \left(A^2(\alpha, p^2)p^2 + B^2(\alpha, p^2) \right) + \\ & \quad \quad \left. \left. + \left(A^2(\alpha, k^2)k^2 + B^2(\alpha, k^2) \right) \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left(A(\alpha, p^2)A'(\alpha, p^2)p^2 + B(\alpha, p^2)B'(\alpha, p^2) \right) \right] \right\}. \quad (31) \end{aligned}$$

Поскольку теперь нам известны перенормировки волновой функции фермиона, функции свободной энергии фермиона и поляризации бозонного вакуума для решений Намбу и Вигнера, подставляя численные решения для $A(\alpha, p^2)$, $B(\alpha, p^2)$ и $\Pi(\alpha, p^2)$ в уравнения (29)–(31), три приведенных выше связанных интегральных уравнения можно решить численно методом итераций. Зависимости функций $A'(\alpha, p^2)$, $B'(\alpha, p^2)$ и $\Pi'(\alpha, p^2)$ от импульсов для различных значений массы калибровочного бозона m_a приведены на правых панелях рис. 1.

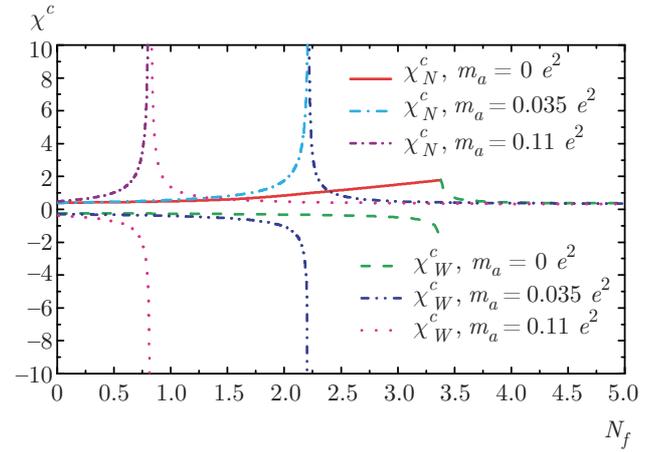


Рис. 3. Зависимости киральной восприимчивости $\chi^c(m_a, N_f)$ от числа фермионных ароматов N_f для различных значений массы калибровочного бозона m_a

Из зависимостей, приведенных на правых панелях рис. 1, можно сделать следующие выводы. Во-первых, для функции $A'(\alpha, p^2)$ в инфракрасной области при нулевой массе калибровочного бозона решение Намбу представляет собой практически константу. При возрастании массы калибровочного бозона решение Намбу возрастает. В ультрафиолетовой области решения Намбу стремятся к нулю при всех значениях массы калибровочного бозона. Во-вторых, для функции $B'(\alpha, p^2)$ в инфракрасной области при нулевой массе калибровочного бозона решение Намбу представляет собой практически константу, а решение Вигнера стремится к минус бесконечности. При возрастании массы калибровочного бозона решение Намбу возрастает, а решение Вигнера убывает и представляет собой практически константу. В ультрафиолетовой области как решение Намбу, так и решение Вигнера стремятся к единице при всех значениях массы калибровочного бозона. В-третьих, для функции $\Pi'(\alpha, p^2)$ в инфракрасной области при нулевой массе калибровочного бозона решение Намбу представляет собой практически константу. При возрастании массы калибровочного бозона решение Намбу возрастает. В ультрафиолетовой области решения Намбу стремятся к нулю при всех значениях массы калибровочного бозона.

Поскольку теперь нам известны импульсные зависимости функций $A(\alpha, p^2)$, $B(\alpha, p^2)$ и $\Pi(\alpha, p^2)$ и соответствующих производных для решений Намбу и Вигнера, можно подставить численные решения для них в уравнение (28), а затем с помощью численных расчетов получить киральную восприимчи-

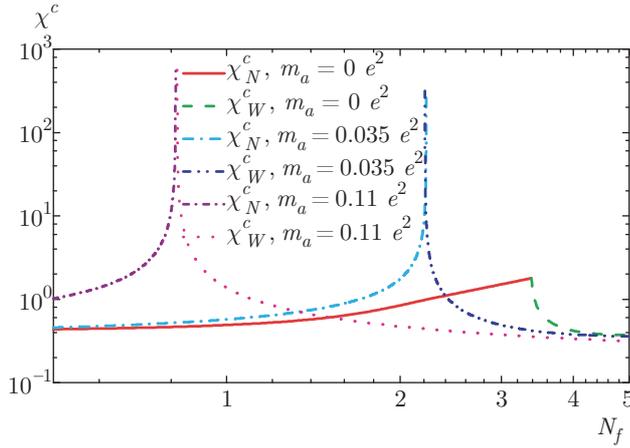


Рис. 4. Зависимости киральной восприимчивости $\chi^c(m_a, N_f)$ от числа фермионных ароматов N_f для различных значений массы калибровочного бозона m_a (в двойном логарифмическом масштабе)

вость. На рис. 3 приведены зависимости киральной восприимчивости от числа фермионных ароматов N_f для различных значений массы калибровочного бозона m_a .

Из рис. 3 можно сделать следующие выводы. Во-первых, при возрастании числа фермионных ароматов N_f восприимчивость решения Намбу постепенно возрастает и сохраняет положительное значение, тем самым, фаза Намбу является устойчивой, в то время как восприимчивость решения Вигнера медленно убывает и всегда отрицательна. Во-вторых, когда величина N_f приближается к критическому значению N_f^c , при конечных значениях массы калибровочного бозона m_a восприимчивости решения Намбу и решения Вигнера стремятся к плюс и минус бесконечности, соответственно. Это указывает на то, что фазовый переход восстановления киральной симметрии при наличии массы калибровочного бозона является типичным фазовым переходом второго рода. В свою очередь, в случае $m_a = 0$ у восприимчивости имеется конечный пик. В-третьих, когда величина N_f превышает критическое значение N_f^c , восприимчивость решения Намбу обращается в нуль, а восприимчивость решения Вигнера переключается. Это говорит о том, что фаза Вигнера становится устойчивой и постепенно убывает. В-четвертых, при возрастании m_a величина N_f^c убывает. Это подтверждает то, что масса калибровочного бозона подавляет появление ДНКС.

Для фазового перехода второго рода в окрестности точки фазового перехода киральная восприимчивость должна изменяться по степенному закону.

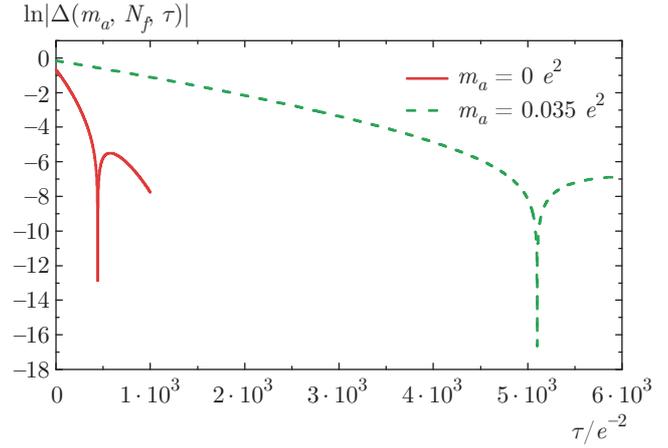


Рис. 5. Зависимости функции Швингера $\ln|\Delta(m_a, N_f, \tau)|$ от τ для различных значений массы калибровочного бозона m_a при $N_f = 2$

В связи с этим для подтверждения сделанного выше заключения на рис. 4 в двойном логарифмическом масштабе приведены зависимости киральной восприимчивости от числа фермионных ароматов N_f для различных значений массы калибровочного бозона m_a .

Как можно видеть из рис. 4, при конечной массе калибровочного бозона m_a восприимчивости как решения Намбу, так и решения Вигнера стремятся к бесконечности и изменяются в соответствии со степенным законом в окрестности критического значения N_f^c . Однако при $m_a = 0$ у восприимчивостей имеются конечные пики.

Подставляя уравнение (13) в уравнение (3) и беря след, для функции Швингера получаем

$$\Delta(\alpha, \tau) = \int \frac{dp}{(2\pi)} \cos(p\tau) \times \frac{B(\alpha, p^2)}{A^2(\alpha, p^2)p^2 + B^2(\alpha, p^2)}. \quad (32)$$

После подстановки в уравнение (32) численных решений для функций $A(\alpha, p^2)$ и $B(\alpha, p^2)$, полученных из уравнений (24)–(26), можно получить зависимости функции Швингера от евклидова времени τ . На рис. 5 приведены зависимости функции Швингера от евклидова времени τ для различных значений массы калибровочного бозона m_a .

Как можно видеть на рис. 5, для заданной массы калибровочного бозона m_a при возрастании евклидова времени функция Швингера демонстрирует осциллирующее поведение. Это указывает на то, что при комплексных импульсах пропагатор одетого фермиона имеет особенность типа массивной, и, таким образом, фермион остается в состоянии кон-

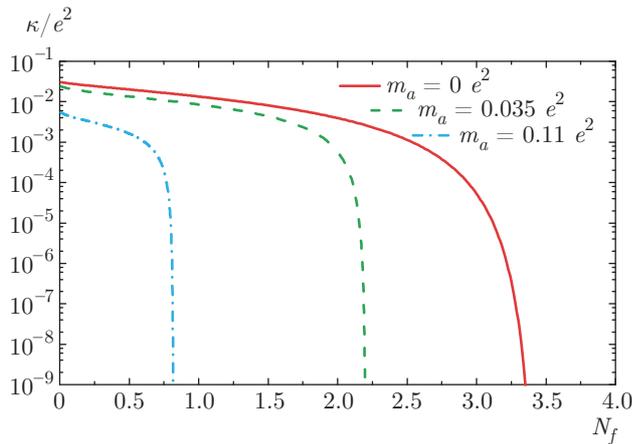


Рис. 6. Зависимости параметра порядка конфайнмента $\kappa(m_a, N_f)$ от числа фермионных ароматов N_f для различных значений массы калибровочного бозона m_a

файнмента. При возрастании массы калибровочного бозона m_a положение первых колебаний сдвигается в сторону больших значений евклидова времени.

Поскольку теперь нам известна зависимость функции Швингера от евклидова времени, из уравнения (7) можно получить параметр порядка конфайнмента. На рис. 6 приведены зависимости параметра порядка конфайнмента от числа фермионных ароматов N_f для различных значений массы калибровочного бозона m_a .

Как можно видеть на рис. 6, для заданной массы калибровочного бозона m_a параметр порядка конфайнмента медленно убывает, если число фермионных ароматов N_f мало, и быстро стремится к нулю при приближении N_f к критическому значению N_f^c , что аналогично результатам, полученным нами для кирального конденсата и киральной восприимчивости. Общее критическое значение означает, что фазовые переходы восстановления киральной симметрии и деконфайнмента происходят одновременно. Это обусловлено тем, что ДНКС и конфайнмент связаны с аналитическими свойствами пропагатора, причем при приближении N_f к критическому значению N_f^c ситуация радикально меняется [36, 54]. Эти результаты отличаются от полученных ранее [64]. Аналогично, величина N_f^c убывает при возрастании m_a . Это указывает на то, что масса калибровочного бозона также подавляет появление конфайнмента.

Для более полного исследования влияния массы калибровочного бозона m_a на фазовые переходы восстановления киральной симметрии и деконфайнмента вычислим киральный конденсат, киральную восприимчивость и параметр порядка конфайнмента для различных значений масс калибровочного бо-

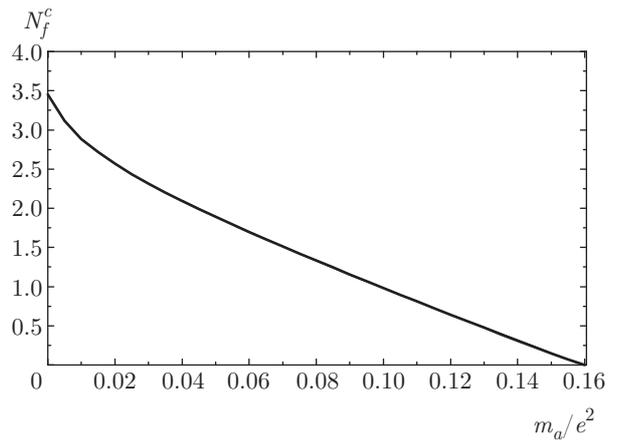


Рис. 7. Зависимость критического числа фермионных ароматов N_f^c от массы калибровочного бозона m_a

зона m_a . На рис. 7 приведена зависимость критического числа фермионных ароматов N_f^c от массы калибровочного бозона m_a .

Как можно видеть на рис. 7, критическое число фермионных ароматов N_f^c постепенно убывает при возрастании массы калибровочного бозона m_a , таким образом, имеется граница, разделяющая плоскость N_f^c - m_a на две области. Когда и число фермионных ароматов N_f , и масса калибровочного бозона m_a малы, система находится в фазе нарушенной киральной симметрии/конфайнмента. Когда и число фермионных ароматов N_f , и масса калибровочного бозона m_a превосходят критическое значение, система находится в фазе восстановленной киральной симметрии/деконфайнмента. Главную роль играет то, что ДНКС и конфайнмент представляют собой низкоэнергетические непертурбативные явления, присущие сильному калибровочному взаимодействию, имеющему дальнедействующий характер, которое переносится калибровочным бозоном. Если калибровочный бозон становится массивным, то имеющее дальнедействующий характер взаимодействие между фермионами будет ослаблено. Это можно увидеть из уравнения (25): интеграл в правой части уравнения подавляется инфракрасными вкладами, а конечная масса калибровочного бозона m_a , появляющаяся в знаменателе интегрального ядра, существенно подавляет инфракрасные вклады в интеграл. Как показано на левых панелях рис. 1, для заданного числа фермионных ароматов N_f инфракрасное значение функции собственной энергии фермионов $B(0)$ уменьшается при возрастании массы калибровочного бозона m_a . Это говорит о том, что масса калибровочного бозона m_a действительно подавляет появление ДНКС и конфайнмента.

5. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе, основанной на положении, что конечная масса калибровочного бозона m_a ослабляет имеющее дальнедействующий характер сильное калибровочное взаимодействие между фермионами, и экспериментальном наблюдении, что существует сопутствующая область между АФ фазой (где фермион приобретает ненулевую массу посредством ДНКС) и d SC-фазой (где калибровочный бозон имеет конечную массу согласно механизму Андерсона–Хиггса), проведено количественное исследование влияния массы калибровочного бозона m_a на фазовые переходы восстановления киральной симметрии и деконфайнмента в КЭД₃.

Сначала мы численно решили связанные интегральные уравнения для трех скалярных функций фермионных и бозонных пропагаторов и обсудили импульсные зависимости этих функций и соответствующих производных по массе голого фермиона для различных значений массы калибровочного бозона m_a при заданном числе фермионных ароматов N_f .

Затем мы вычислили киральный конденсат, киральную восприимчивость для решений Намбу и Вигнера и параметр порядка конфайнмента [53, 54] для различных значений числа фермионных ароматов N_f и масс калибровочного бозона m_a . Как показали результаты, и киральный конденсат, и параметр порядка конфайнмента быстро стремятся к нулю при приближении N_f к критическому значению N_f^c . Это говорит о том, что фазовые переходы восстановления киральной симметрии и деконфайнмента происходят одновременно. При стремлении N_f к критическому значению N_f^c киральные восприимчивости для решений Намбу и Вигнера демонстрируют расходящееся поведение при конечном значении m_a , однако в случае $m_a = 0$ они имеют конечный пик. Это означает, что фазовые переходы восстановления киральной симметрии при наличии массы калибровочного бозона m_a являются фазовыми переходами второго рода, а в ее отсутствие — непрерывными фазовыми переходами более высокого порядка. Кроме того, тот факт, что величина N_f^c убывает при возрастании m_a , говорит о том, что масса калибровочного бозона ослабляет калибровочное взаимодействие между фермионами и, таким образом, подавляет появление ДНКС и конфайнмента.

Наконец, мы обсудили, как связаны критическое число фермионных ароматов N_f^c и масса калибровочного бозона m_a , и нашли, что N_f^c моно-

тонно убывает при возрастании m_a . Это говорит о том, что существует граница, разделяющая плоскость N_f^c - m_a на область нарушенной киральной симметрии/конфайнмента, соответствующую значениям (N_f^c, m_a) , лежащим ниже границы, и область восстановленной киральной симметрии/деконфайнмента, соответствующую значениям (N_f^c, m_a) , лежащим выше границы.

Заметим, что предложенная в настоящей работе модель, разумеется, является схематичной и может противоречить действительности. Для подтверждения наших наблюдений в дальнейшем следует изучить проблему с помощью более реалистичных моделей.

Авторы выражают благодарность Г. З. Лиу за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (гранты №№ 11475085, 11535005) и Национального фонда естественных наук Провинции Цзянсу, Китай (гранты №№ ВК20130387, 1601170В).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. R. Pennington and D. Walsh, Phys. Lett. B **253**, 246 (1991).
2. N. Dorey and N. E. Mavromatos, Phys. Lett. B **266**, 163 (1991).
3. D. Curtis, M. Pennington, and D. Walsh, Phys. Lett. B **295**, 313 (1992).
4. I. J. R. Aitchison and M. Klein-Kreisler, Phys. Rev. D **50**, 1068 (1994).
5. D. J. Lee, Phys. Rev. D **58**, 105012 (1998).
6. G. Triantaphyllou, J. High Energy Phys. **03**, 020 (1999).
7. A. Bashir, Phys. Lett. B **491**, 280 (2000).
8. V. P. Gusynin and M. Reenders, Phys. Rev. D **68**, 025017 (2003).
9. M. He, H. T. Feng, W. M. Sun, and H. S. Zong, Mod. Phys. Lett. A **22**, 449 (2007).
10. W. Li and G. Z. Liu, Phys. Rev. D **81**, 045006 (2010).
11. A. Bashir, A. Raya, and S. Sánchez-Madriral, Phys. Rev. D **84**, 036013 (2011).
12. H. T. Feng, S. Shi, P. L. Yin, and H. S. Zong, Phys. Rev. D **86**, 065002 (2012).

13. P. L. Yin, Z. F. Cui, H. T. Feng, and H. S. Zong, *Ann. Phys.* **348**, 306 (2014).
14. C. J. Burden, J. Praschifka, and C. D. Roberts, *Phys. Rev. D* **46**, 2695 (1992).
15. P. Maris, *Phys. Rev. D* **52**, 6087 (1995).
16. Y. Hoshino, *J. High Energy Phys.* **09**, 048 (2004).
17. G. Z. Liu, H. Jiang, W. Li, and G. Cheng, *Phys. Rev. B* **79**, 014507 (2009).
18. J. Wang, J. R. Wang, W. Li, and G. Z. Liu, *Phys. Rev. D* **82**, 067701 (2010).
19. D. H. Kim, P. A. Lee, and X. G. Wen, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2109 (1997).
20. D. H. Kim and P. A. Lee, *Ann. Phys.* **272**, 130 (1999).
21. W. Rantner and X. G. Wen, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3871 (2001).
22. M. Franz and Z. Tešanović, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 257003 (2001).
23. Z. Tešanović, O. Vafek, and M. Franz, *Phys. Rev. B* **65**, 180511 (2002).
24. M. Franz, Z. Tešanović, and O. Vafek, *Phys. Rev. B* **66**, 054535 (2002).
25. I. F. Herbut, *Phys. Rev. B* **66**, 094504 (2002).
26. I. F. Herbut, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 047006 (2002).
27. P. A. Lee, N. Nagaosa, and X. G. Wen, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 17 (2006).
28. V. P. Gusynin and S. G. Sharapov, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146801 (2005).
29. V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, and J. P. Carbotte, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 256802 (2006).
30. G. Z. Liu, W. Li, and G. Cheng, *Phys. Rev. B* **79**, 205429 (2009).
31. J. E. Drut and T. A. Lähde, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 026802 (2009).
32. J. R. Wang and G. Z. Liu, *New J. Phys.* **14**, 043036 (2012).
33. T. Appelquist, D. Nash, and L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2575 (1988).
34. P. Maris, *Phys. Rev. D* **54**, 4049 (1996).
35. C. S. Fischer, R. Alkofer, T. Dahm, and P. Maris, *Phys. Rev. D* **70**, 073007 (2004).
36. A. Bashir, A. Raya, I. C. Cloët, and C. D. Roberts, *Phys. Rev. C* **78**, 055201 (2008).
37. B. Lake et al., *Nature* **415**, 299 (2002).
38. B. Lake et al., *Science* **291**, 1759 (2001).
39. R. I. Miller et al., *Phys. Rev. Lett.* **88**, 137002 (2002).
40. J. E. Hoffman et al., *Science* **295**, 466 (2002).
41. Z. F. Cui, F. Y. Hou, Y. M. Shi, Y. L. Wang, and H. S. Zong, *Ann. Phys.* **358**, 172 (2015).
42. F. Karsch and E. Laermann, *Phys. Rev. D* **50**, 6954 (1994).
43. K. Fukushima, *Phys. Lett. B* **591**, 277 (2004).
44. H. S. Zong, F. Y. Hou, W. M. Sun, J. L. Ping, and E. G. Zhao, *Phys. Rev. C* **72**, 035202 (2005).
45. Y. Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz, and K. K. Szab, *Phys. Lett. B* **643**, 46 (2006).
46. M. He, Y. Jiang, W. M. Sun, and H. S. Zong, *Phys. Rev. D* **77**, 076008 (2008).
47. I. Chang, Y. X. Liu, C. D. Roberts, Y. M. Shi, W. M. Sun, and H. S. Zong, *Phys. Rev. C* **79**, 035209 (2009).
48. J. M. Cornwall, *Phys. Rev. D* **22**, 1452 (1980).
49. V. Gogokhia and B. Magradze, *Phys. Lett. B* **217**, 162 (1989).
50. L. C. L. Hollenberg, C. D. Roberts, and B. H. J. McKellar, *Phys. Rev. C* **46**, 2057 (1992).
51. C. D. Roberts, A. G. Williams, and G. Krein, *Int. J. Mod. Phys. A* **07**, 5607 (1992).
52. C. D. Roberts and A. G. Williams, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33**, 477 (1994).
53. A. Bender, D. Blaschke, Y. Kalinovsky, and C. D. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3724 (1996).
54. A. Bashir, A. Raya, S. Sánchez-Madrigal, and C. D. Roberts, *Few-Body Syst.* **46**, 229 (2009).
55. G. Z. Liu and G. Cheng, *Phys. Rev. B* **65**, 132513 (2002).
56. H. Kleinert, F. S. Nogueira, and A. Suclbo, *Nucl. Phys. B* **666**, 361 (2003).
57. H. Jiang, G. Z. Liu, and G. Cheng, *J. Phys. A* **41**, 255402 (2008).
58. T. Pereg-Barnea and M. Franz, *Phys. Rev. B* **67**, 060503 (2003).
59. G. Z. Liu and G. Cheng, *Phys. Rev. D* **67**, 065010 (2003).

60. H. T. Feng, W. M. Sun, F. Hu, and H. S. Zong, Int. J. Mod. Phys. A **20**, 2753 (2005).
61. J. F. Li, H. T. Feng, W. M. Sun, and H. S. Zong, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 3969 (2009).
62. X. Z. Wang, J. F. Li, X. H. Yu, and H. T. Feng, Chin. Phys. Lett. **32**, 111102 (2015).
63. H. T. Feng, X. Z. Wang, X. H. Yu, and H. S. Zong, Phys. Rev. D **94**, 045022 (2016).
64. H. T. Feng, F. Y. Hou, Y. H. Xia, J. Y. Wang, and H. S. Zong, Eur. Phys. J. C **74**, 3216 (2014).