

ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ ПЕРЕХОД С ДВУМЯ КОМПОНЕНТАМИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТОКА

К. В. Куликов^{a,b}, Р. Давуд^c, Э. П. Нахмедов^{d,e}, Ю. М. Шукринов^{a,b}*

^a *Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова
Объединенного института ядерных исследований
141980, Дубна, Московская обл., Россия*

^b *Государственный университет «Дубна»
141980, Дубна, Московская обл., Россия*

^c *Университет Каира, Каир, Египет*

^d *Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в Баку
AZ1144, Баку, Азербайджан*

^e *Институт физики Национальной академии наук Азербайджана
AZ1143, Баку, Азербайджан*

Поступила в редакцию 16 февраля 2017 г.

Исследованы свойства джозефсоновского перехода с 2π - и 4π -периодическими компонентами сверхпроводящего тока. Такой переход в области малых напряжений демонстрирует 4π -периодичность разности фаз даже при амплитуде майорановского тока, много меньше джозефсоновского, что позволяет наблюдать осцилляции джозефсоновского тока с дробным периодом при малой диссипации $\beta < 1$ в области гистерезиса. Влияние майорановской 4π -периодической компоненты тока проявляется также в изменении последовательности ступенек в лестничной структуре, возникающей на вольт-амперной характеристике перехода. Определен интервал амплитуд внешнего электромагнитного излучения, в котором наиболее существенно проявление на вольт-амперной характеристике дробного эффекта Джозефсона.

DOI: 10.7868/S0044451017080156

1. ВВЕДЕНИЕ

Майорановские фермионы (частицы, которые являются идентичными со своими анти-частицами и описываются реальными волновыми функциями) привлекают огромный интерес в последние годы в связи с тем, что такие фермионы могут быть использованы как кубиты в квантовом компьютере. Было выдвинуто несколько предложений по обнаружению таких фермионов в системах конденсированного состояния [1–8]. В частности, майорановские фермионы могут быть реализованы как локализованные внутрищелевые состояния в сверхпроводнике [4–8]. Такие состояния могут возникать на концах одномерной (1D) полупроводниковой проволоки с сильной спин-орбитальной связью в магнитном поле под воздействием эффекта близости s -волнового сверх-

проводника [5, 6]. В таком случае в переходе может течь как обычный 2π -периодический джозефсоновский ток, так и майорановский ток [9, 10]. Джозефсоновский переход (ДП) в присутствии майорановских связанных состояний показывает 4π -периодичность колебаний сверхпроводящего тока [11], а вольт-амперная характеристика (ВАХ) такого ДП, в отличие от его тривиальных аналогов, демонстрирует только четные ступени Шапиро. Эта особенность названа дробным эффектом Джозефсона и активно исследуется в последние годы в различных системах, так как может являться экспериментальным свидетельством образования таких фермионов. Другой возможностью обнаружить майорановские состояния является измерение пика туннельной проводимости внутри сверхпроводящей щели [12].

Проведенные до настоящего времени эксперименты по обнаружению майорановских фермионов в системах конденсированного состояния неоднозначны. Экспериментальные измерения пика проводи-

* E-mail: kulikov@theor.jinr.ru

мости [13] показали, что этот пик не приводит к ожидаемому значению $2e^2/h$ туннельной проводимости и слабо защищен от помех [14, 15]. Вследствие этого, обнаружение четных ступеней Шапиро при $V = n\hbar\omega_J/e$ (и отсутствие нечетных ступеней $(2n + 1)\hbar\omega_J/2e$, где ω_J — частота Джозефсона, n — целое число, V — приложенное внешнее напряжение) обеспечивает более надежный способ детектирования майорановских фермионов. Он представляет собой фазово-чувствительный метод, который свободен от влияния беспорядка [16]. Следовательно, дробный эффект Джозефсона в переходах с нетривиальными барьерами является одним из наиболее перспективных методов обнаружения майорановских фермионов [17, 18].

Как было показано в работе [11], на ВАХ RCSJ-перехода в присутствии майорановских связанных состояний и при наличии внешнего излучения появляются также нечетные ступени Шапиро. Они проявляются даже в отсутствие 2π -периодического члена в ток-фазовом соотношении. Нечетные ступени имеют субгармоническую природу и качественно отличаются от гармонических нечетных ступеней обычных переходов [11]. Кроме того, в джозефсоновских переходах с емкостью в присутствии майорановских связанных состояний на вольт-амперной характеристике возникает дополнительная лестничная структура.

В работе [18] был рассмотрен джозефсоновский переход в рамках RSJ-модели с двумя компонентами тока. Полученные вольт-амперные характеристики демонстрируют уменьшение размера нечетных ступеней Шапиро при уменьшении частоты внешней вынуждающей силы. Было показано, что подобное поведение вызвано наличием майорановских связанных состояний и может, в принципе, наблюдаться даже при амплитуде 2π -периодической компоненты тока, много большей амплитуды 4π -периодической.

Однако в работе [18] не учитывается влияние емкости перехода. Для того чтобы отразить экспериментальную ситуацию, мы рассмотрели джозефсоновский переход с двумя компонентами сверхпроводящего тока, описываемый в рамках RCSJ-модели. В разд. 3 мы обсуждаем влияние диссипации на проявление периодичности в динамике разности фазы и напряжения. В разд. 4 проведен сравнительный анализ лестничных структур для переходов типа s - s , p - p и перехода с двумя компонентами сверхпроводящего тока. В разд. 5 рассмотрено влияние амплитуды внешнего излучения на проявление дробного эффекта Джозефсона.

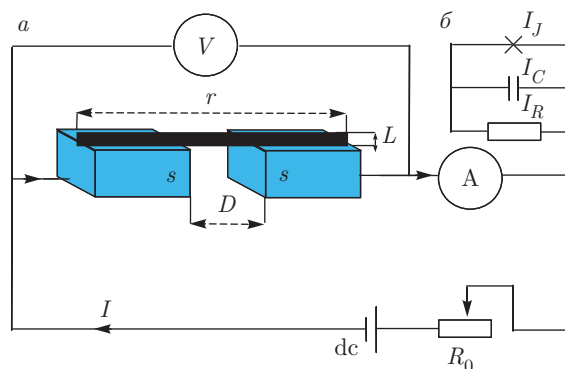


Рис. 1. а) Схематическое представление джозефсоновского RCSJ-перехода в цепи [11]. Переход состоит из двух s -волновых сверхпроводников и полупроводниковой проволоки на них. Проволока имеет диаметр L и длину r . б) RCSJ-модель, учитывающая соответственно токи Джозефсона I_J , смещения I_C и квазичастичный I_R

2. МОДЕЛЬ И МЕТОДЫ

Рассматриваемый нами джозефсоновский переход, подключенный к источнику постоянного тока, показан на рис. 1. Он состоит из двух сверхпроводников с s -спариванием и полупроводниковой проволоки. Проволока за счет эффекта близости становится сверхпроводящей с p -волновой симметрией. Ее длина $r \gg 1$, следовательно, можно пренебречь рекомбинацией майорановских состояний [18]. Отметим, что данный анализ применим для топологических сверхпроводников в $1D$ -геометрии [5, 6] при условии, что поперечный размер проволоки L меньше длины когерентности.

Джозефсоновский переход, показанный на рис. 1, поддерживает локализованные андреевские связанные состояния на краях проволоки, которые могут быть получены в виде решения уравнения Боголюбова – де Жена (BdG). Такие локализованные решения имеют спектр¹⁾ [16]

$$E = -\Delta_0 \sqrt{D} \cos(\varphi/2), \tag{1}$$

где Δ_0 — амплитуда сверхпроводящей щели, φ — разность фаз в переходе, D — параметр прозрачности барьера.

¹⁾ Дисперсия энергии остается одинаковой для одномерных джозефсоновских переходов с эффективным p -спариванием [5, 6] без поперечной импульсной зависимости χ_1 . Поэтому все наши результаты применимы к таким переходам без интегрирования по модам поперечного импульса в (2).

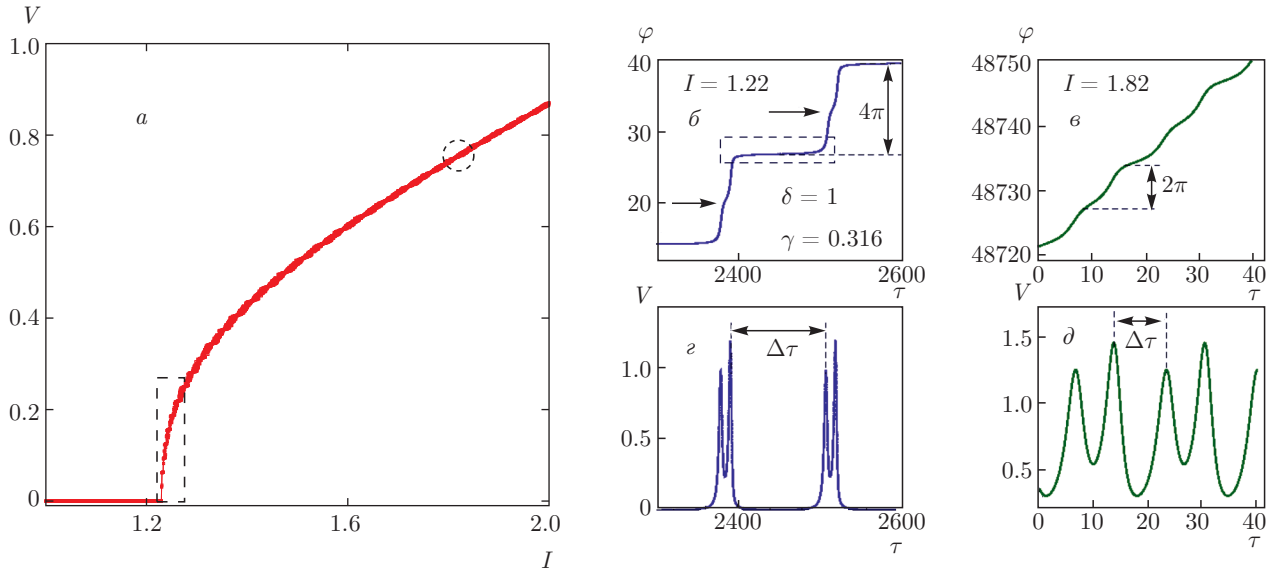


Рис. 2. а) ВАХ перехода с двумя компонентами сверхпроводящего тока при $\beta = 2, \gamma = 0.316, \delta = 1$; штриховыми линиями обозначены области расчета временных зависимостей напряжения и разности фаз. б, в) Временная зависимость фазы соответственно в областях $I = 1.22$ и $I = 1.82$. г, д) Временная зависимость напряжения; значения тока те же, что и для рис. б, в

Джозефсоновский ток можно получить дифференцированием (6)

$$I_J(\varphi) = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{e\Delta_0}{\hbar} \sqrt{D} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (2)$$

он имеет 4π -периодичность, и замена $\varphi \rightarrow 2eVt/\hbar$ в уравнении (2) при наличии базового напряжения V ведет к дробному переменному эффекту Джозефсона [16].

RCSJ-модель (см. вставку на рис. 1) включает резистивную компоненту, учитывающую процесс диссипации, которая может возникнуть при квази-частичном туннелировании, а также шунтирование емкостью C , чтобы учесть токи смещения из-за возможного накопления заряда на слоях [19]. Фазовая динамика в этой модели с учетом уравнения (2) и в присутствии внешнего излучения описывается уравнением [11, 19]

$$\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + I_J(\varphi) = I + A \sin(\omega\tau), \quad (3)$$

где A и ω — амплитуда и частота внешнего излучения, $\beta = \sqrt{\hbar/(2eI_c R^2 C_0)}$, R и C_0 — сопротивление и емкость перехода. Мы нормировали I, I_J и A на критический ток перехода I_c , время нормировано на обратную плазменную частоту $\tau = t\omega_p$, где $\omega_p = \sqrt{2eI_c/(\hbar C_0)}$. Для расчета вольт-амперной характеристики используется система уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + I_J(\varphi) &= I + A \sin(\omega\tau), \\ V &= d\varphi/d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

где V нормировано на $V_0 = \hbar\omega_p/2e$. Полученная система решается численно методом Рунге – Кутты четвертого порядка.

Возникновение майорановских состояний в системе не является помехой для протекания обычного джозефсоновского тока [9, 10], и сверхпроводящий ток может быть представлен суммой майорановского и обычного джозефсоновского токов. В нормированном виде выражение для сверхпроводящего тока принимает вид

$$I_s = I_J(\phi)/I_c = \gamma \sin(\phi/2) + \delta \sin(\phi), \quad (5)$$

где параметры γ и δ определяют вклад соответственно 4π - и 2π -периодического джозефсоновского тока. В рассматриваемых нами случаях $\delta = 0, 1$.

3. ПЕРЕХОД С ДВУМЯ КОМПОНЕНТАМИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТОКА

Анализ поведения разности фаз и напряжения для перехода с двумя компонентами сверхпроводящего тока в $1D$ -геометрии приведен в приложении к работе [18]. 4π -периодичность в динамике системы проявляется даже если величина майорановского тока на порядок меньше обычного джозефсоновского. В данной работе мы рассматриваем влияние диссипации на свойства такого перехода.

На рис. 2 приведены результаты расчетов при параметре диссипации $\beta = 2$. Рисунок демонстрирует изменение периодичности в динамике разности фаз и напряжения после перехода системы в резистивное состояние. На рис. 2а мы видим безгистерезисную ВАХ со смещением критического тока на величину $\Delta I \approx \gamma/\sqrt{2}$, что связано с увеличением суммарной амплитуды сверхпроводящего тока. Динамика разности фаз в области перехода в резистивное состояние, представленная на рис. 2б, показывает 4π -периодичность, которая размывается по мере удаления в область больших токов. Для значений тока $I = 1.82$ колебания разности фаз имеют 2π -периодичность, что отражено на рис. 2в.

Подобное изменение динамики разности фаз можно объяснить, рассмотрев временную зависимость напряжения, представленную на рис. 2г,д. Разница во времени между двойными пиками напряжения $\Delta\tau$ в области перехода ($\Delta\tau \approx 100$, см. рис. 2г) уменьшается по мере удаления от нее ($\Delta\tau \approx 10$, см. рис. 2д). Уменьшение периода осцилляций напряжения связано с изменением периода на временной зависимости разности фаз. Данные результаты, полученные при большой диссипации, хорошо согласуются с результатами, полученными в работе [18].

Уменьшение параметра диссипации $\beta = 0.8$ приводит к появлению гистерезиса на ВАХ перехода с двумя компонентами сверхпроводящего тока (см. рис. 3а). Значение среднего напряжения в области переключения в этом случае больше, а период разности фаз равен 2π , это показано на рис. 3б. Расчет временной зависимости разности фаз, проведенный в области тока возврата и представленный на рис. 3в, показывает 4π -периодичность. Отметим, что, как и в случае с $\beta = 2$, 4π -периодичность наблюдается при малых значениях напряжения.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что периодичность в динамике системы с двумя компонентами тока зависит от величины среднего напряжения на переходе. При малом значении V период равен 4π , при значениях больше $V = 1.5$ период становится 2π . Следовательно, вклад 4π -периодической компоненты тока играет существенную роль при малых значениях напряжения. Изменение диссипации же приводит к увеличению или уменьшению наклона ВАХ, в результате чего дробный эффект Джозефсона при $\beta < 1$ может проявляться только в области гистерезиса.

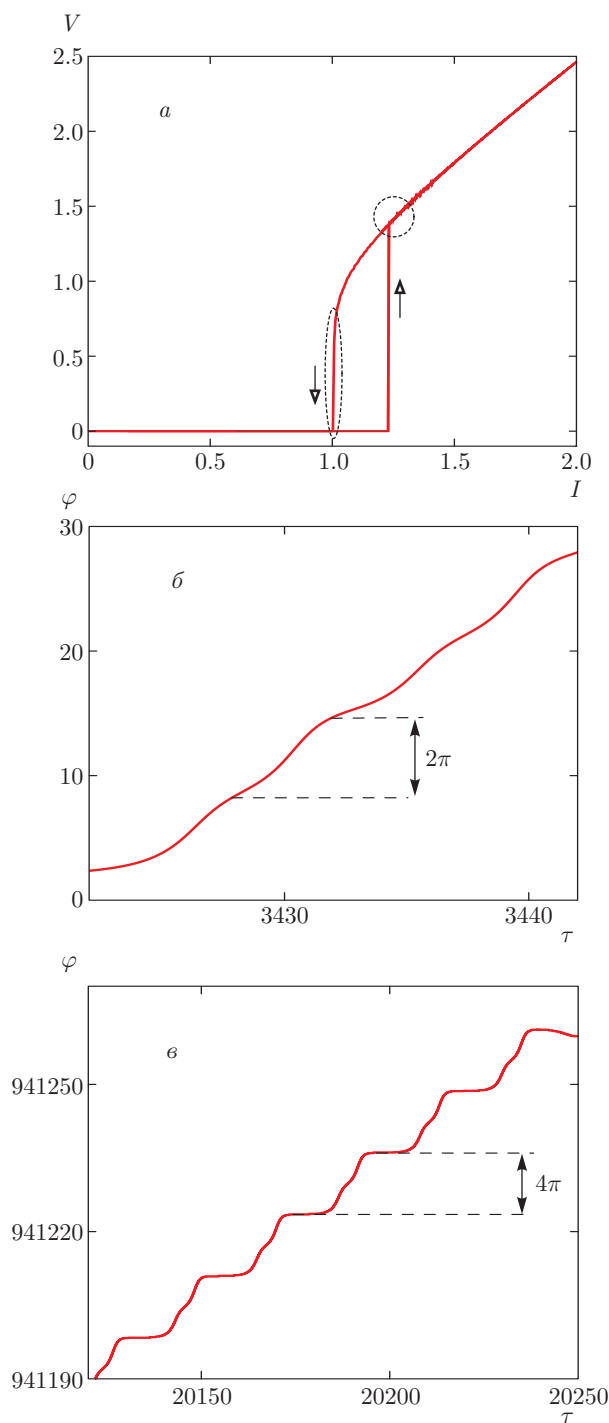


Рис. 3. а) ВАХ перехода с двумя компонентами сверхпроводящего тока при $\beta = 0.8$, $\gamma = 0.316$, $\delta = 1$; штриховыми линиями обозначены области расчета временных зависимостей разности фаз, а полые стрелки указывают направление расчета. б) Временная зависимость разности фаз в области $I = 1.22$ при $\gamma = 0.316$, $\delta = 1$. в) Временная зависимость разности фаз в области тока возврата при $I = 1$, $\gamma = 0.316$, $\delta = 1$

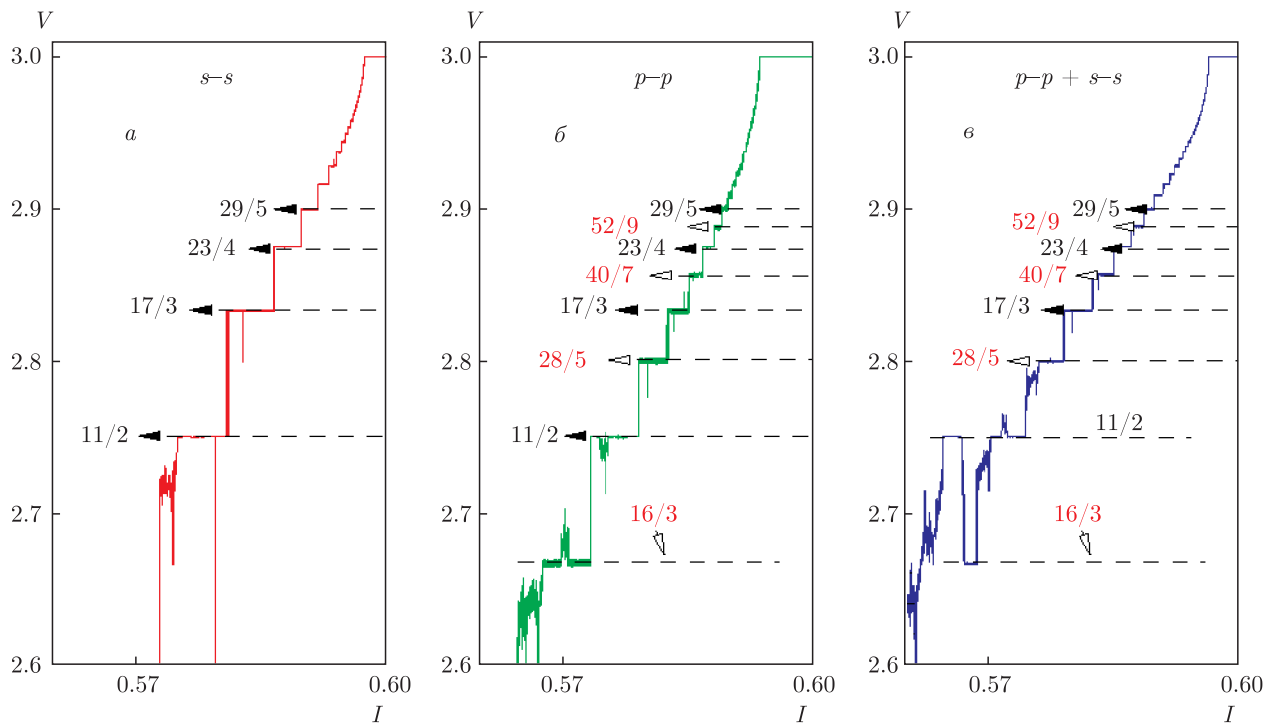


Рис. 4. Лестничные структуры на ВАХ, возникающие под действием внешнего излучения с частотой $\omega = 0.5$: а — обычный джозефсоновский переход (амплитуда внешнего излучения $A = 0.8$, $\beta = 0.2$); б — $p-p$ -переход с коэффициентом прозрачности барьера $D = 0.7$ ($A = 0.6$); в — переход с двумя компонентами тока при $\delta = 1$ и $\gamma = 0.316$ ($A = 0.72$)

4. СВЕРХПРОВОДЯЩИЙ ТОК В ОБЛАСТИ ЛЕСТНИЧНОЙ СТРУКТУРЫ

Учет емкости джозефсоновского перехода приводит к хаотическому поведению системы во внешнем электромагнитном поле в некоторой области параметров. В частности, облучение перехода электромагнитными волнами с малой частотой приводит к появлению таких эффектов, как структурный хаос, «танцующие» ступеньки Шапиро и лестничные структуры на ВАХ [20, 21]. Таким образом, наблюдать дробный эффект Джозефсона в емкостно-шунтированном переходе с двумя компонентами тока затруднительно. Одним из путей решения этой проблемы является анализ структур с непрерывными дробями, описывающих последовательности ступенек Шапиро в лестничных структурах.

Анализ различных наблюдаемых лестничных структур, проведенный в работе [20], показывает, что в общем случае положение ступенек Шапиро следует формуле для непрерывных дробей:

$$V = \left(N \pm \frac{1}{n \pm \frac{1}{m \pm \frac{1}{p \pm \dots}}} \right) \omega, \quad (6)$$

где N, n, m, p, \dots — положительные целые числа. Члены, которые включают только N , соответствуют гармоникам основной ступеньки Шапиро. Другие члены описывают субгармоники, или дробные ступеньки. Обычно в математической литературе используется положительный знак для выражения непрерывных дробей [22, 23]. Знак «минус» в формуле (6) включен только для удобства, что позволяет легко анализировать субгармоники в выбранном интервале напряжения (или частоты).

На рис. 4 приведены лестничные структуры, возникающие на ВАХ различных переходов. Лестничная структура обычного джозефсоновского перехода при амплитуде $A = 0.8$ и частоте $\omega = 0.5$ показана на рис. 4а. Порядок формирования ступеней в такой структуре может быть описан непрерывной дробью $V = (N + 1/n)\omega$. В противоположность, последовательность, возникающая в переходе, поддерживающем майорановские связанные состояния, описывается соотношением $V = (N + 2/n)\omega$ (см. рис. 4б). Как уже отмечалось в работе [11], изменения, возникающие в лестничных структурах, могут рассматриваться как проявление майорановских состояний в переходе. На рис. 4в видно, что переход с двумя компонентами сверхпроводящего тока де-

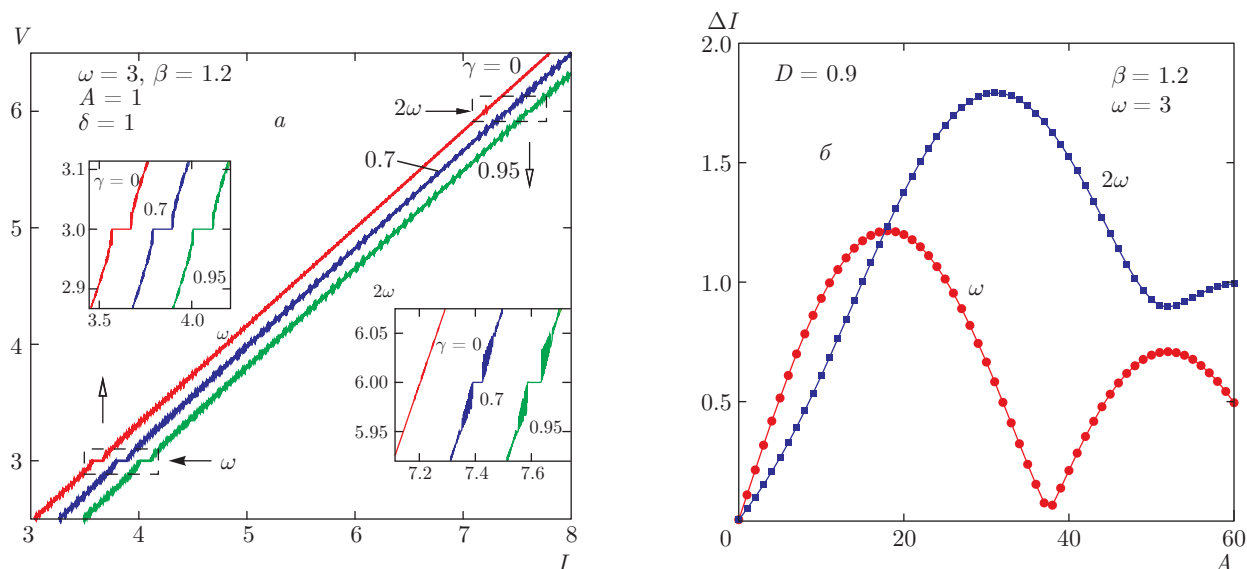


Рис. 5. а) ВАХ перехода с двумя компонентами тока при $\beta = 1.2$, $\omega = 3$, $A = 1$, $\delta = 1$; все кривые сдвинуты вправо на величину $\delta I = 0.5$, а вставки демонстрируют ω - и 2ω -ступеньки. б) Зависимость ширины 2ω - и ω -гармоник ступеньки Шапиро от амплитуды внешнего излучения A при $\gamma = 0.95$, $D = 0.9$, $\beta = 1.2$, $\omega = 3$. Кружками на рисунке отмечены данные для ω -ступеньки, квадратами — для 2ω -ступеньки

монстрирует последовательность ступенек, описываемую непрерывной дробью $V = (N + 2/n)\omega$. Следовательно, лестничная структура такого перехода, несмотря на малую величину амплитуды майорановской составляющей $\gamma = 0.316$, отражает 4π -периодичность. Таким образом, последовательность ступенек на ВАХ является универсальным методом детектирования майорановских фермионов в емкостно-шунтированном джозефсоновском переходе.

5. ВЛИЯНИЕ АМПЛИТУДЫ ВНЕШНЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ДРОБНЫЙ ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА

Интересный результат можно получить при исследовании влияния амплитуды внешнего излучения на дробный эффект Джозефсона в переходе с двумя компонентами сверхпроводящего тока. На рис. 5а показана ВАХ такого перехода при различных значениях параметра $\gamma = 0, 0.7, 0.95$. Амплитуда и частота внешнего излучения принимались равными соответственно $A = 1$ и $\omega = 3$. На вставках на рис. 5а видно, что величина ω -ступеньки не изменяется с изменением γ . В то же время ширина 2ω -ступеньки увеличивается при увеличении амплитуды майорановской компоненты. Сравнение ω - и 2ω -ступенек показывает, что величина первой гар-

моники больше второй при любых значениях амплитуды 4π -периодической компоненты тока.

С другой стороны, при расчете зависимости ширины ступенек Шапиро от амплитуды внешнего излучения, представленной на рис. 5б, мы наблюдаем изменение ситуации. На рис. 5б видно, что четные ступени преобладают над нечетными при $A > 18$. Таким образом, 4π -периодичность сверхпроводящего тока может проявлять себя при больших амплитудах внешнего излучения.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что в джозефсоновском переходе с двумя компонентами сверхпроводящего тока разность фаз при малых значениях напряжения демонстрирует 4π -периодичность и становится 2π -периодической с ростом напряжения. Следовательно, вклад майорановской компоненты тока играет существенную роль только при малых значениях напряжения. Учет емкости ведет к появлению хаоса на ВАХ при облучении перехода электромагнитными волнами с малой частотой, что делает невозможным наблюдать дробный эффект Джозефсона при малых значениях напряжения. Рассмотрение малых значений частоты внешнего излучения $\omega = 0.5$ приводит к появлению лестничной структуры на ВАХ. Последовательность ступеней в лестничной структуре перехода с двумя

компонентами сверхпроводящего тока описывается соотношением, совпадающим с таковым для перехода в присутствии майорановских связанных состояний. Таким образом, анализ бесконечной дроби, описывающей лестничную структуру, является универсальным методом детектирования майорановских связанных состояний. Мы также показали, что дробный эффект Джозефсона может проявляться в переходе с двумя компонентами тока при значениях амплитуды внешнего излучения $A > 18$, где ширина 2ω -ступеньки больше ширины ω -ступенек.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 15-51-61011, 16-52-45011), а также фонда поддержки науки при Президенте Азербайджанской Республики (проект № EIF-KETPL-2-2015-1(25)-56/01/1).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ю. Китаев, УФН **171**(10), дополнение, 131 (2001).
2. G. Moore and N. Read, Nucl. Phys. B **360**, 362 (1991); N. Read and D. Green, Phys. Rev. B **61**, 10267 (2000).
3. N. B. Kopnin and M. M. Salomaa, Phys. Rev. B **44**, 9667 (1991).
4. L. S. Levitov, T. P. Orlando, J. B. Majer, and J. E. Mooij, arXiv:cond-mat/0108266.
5. R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **105**, 077001 (2010).
6. Y. Oreg, G. Refael, and F. von Oppen, Phys. Rev. Lett. **105**, 177002 (2010).
7. L. Fu and C. L. Kane, Phys. Rev. Lett. **100**, 096407 (2008).
8. L. Fu and C. L. Kane, Phys. Rev. B **79**, 161408(R) (2009); J. D. Sau, R. M. Lutchyn, S. Tewari, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **104**, 040502 (2010); J. Alicea, Phys. Rev. B **81**, 125318 (2010); A. Cook and M. Franz, Phys. Rev. B **84**, 201105 (2011); J. D. Sau and S. D. Sarma, Nat. Comm. **3**, 10 (2012); A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, and H. Shtrikman, Nature Phys. **8**, 887 (2012); M. T. Deng, C. L. Yu, G. Y. Huang, M. Larsson, P. Caroff, and H. Q. Xu, Nano Lett. **12**, 6414 (2012); A. D. K. Finck, D. J. Van Harlingen, P. K. Mohseni, K. Jung, and X. Li, Phys. Rev. Lett. **110**, 126406 (2013); H. O. H. Churchill, V. Fatemi, K. Grove-Rasmussen, M. T. Deng, P. Caroff, H. Q. Xu, and C. M. Marcus, Phys. Rev. B **87**, 241401 (2013).
9. M. Wimmer, A. R. Akhmerov, M. V. Medvedyeva, J. Tworzydło, and C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **105**, 046803 (2010).
10. A. C. Potter and P. A. Lee, Phys. Rev. Lett. **105**, 227003 (2010).
11. M. Maiti, K. M. Kulikov, K. Sengupta, and Y. M. Shukrinov, Phys. Rev. B **92**, 224501 (2015).
12. K. Sengupta, I. Zutic, H.-J. Kwon, V. M. Yakovenko, and S. Das Sarma Phys. Rev. B **63**, 144531 (2001).
13. V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven, Science **336**, 1003 (2012); W. Chang, V. E. Manucharyan, T. S. Jespersen, J. Nygaard, and C. M. Marcus, Phys. Rev. Lett. **110**, 217005 (2013); S. Nadj-Perge, I. K. Drozdov, J. Li, H. Chen, S. Jeon, J. Seo, A. H. MacDonald, B. A. Bernevig, and A. Yazdani, Science **346**, 602 (2014); E. J. H. Lee, X. Jiang, M. Houzet, R. Aguado, C. M. Lieber, and S. D. Franceschi, Nature Nanotech. **9**, 79 (2014).
14. E. J. H. Lee, X. Jiang, R. Aguado, G. Katsaros, C. M. Lieber, and S. D. Franceschi, Phys. Rev. Lett. **109**, 186802 (2012).
15. Jie Liu, A. C. Potter, K. T. Law, and P. A. Lee, Phys. Rev. Lett. **109**, 267002 (2012); D. Bagrets and A. Altland, Phys. Rev. Lett. **109**, 227005 (2012).
16. H.-J. Kwon, K. Sengupta, and V. M. Yakovenko, Eur. Phys. J. B **37**, 349 (2004).
17. M. Houzet, J. S. Meyer, D. M. Badiane, and L. I. Glazman, Phys. Rev. Lett. **111**, 046401 (2013).
18. F. Dominguez, F. Hassler, and G. Platero, Phys. Rev. B **86**, 140503 (2012).
19. *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*, K. Likharev, Taylor and Francis, USA (1986).
20. Y. M. Shukrinov, S. Y. Medvedeva, A. E. Botha, M. R. Kolahchi, and A. Irie, Phys. Rev. B **88**, 214515 (2013).
21. A. E. Botha, Yu. M. Shukrinov, and M. R. Kolahchi, *Nonlinear Dynamics*, submitted, manuscript No. NODY-D-15-01678R1 (2015).
22. A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, University of Chicago Press, Chicago (1964).
23. A. Cuyt, V. Brevik Petersen, B. Verdonk, H. Waadeland, and W. B. Jones, *Handbook of Continued Fractions for Special Functions*, Springer-Verlag, Berlin (2008).