

ТЕРМОДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛОВ ${}^4\text{He}$

А. Ф. Андреев*, Л. А. Мельниковский**

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 января 2017 г.

На основе анализа экспериментальных данных изучен вопрос об условиях применимости теории среднего поля для описания термодинамики поверхности кристаллов ${}^4\text{He}$. Оказывается, что хотя сам фазовый переход ограничения относится к типу Березинского–Костерлица–Таулеса, термодинамический потенциал вне узкой окрестности температуры перехода можно разлагать в ряд в духе теории Ландау фазовых переходов второго рода.

DOI: 10.7868/S0044451017060098

$$\lambda z(x) = \tilde{f}(-\lambda x). \quad (1)$$

Термодинамически равновесная огранка кристаллов возникает при понижении температуры в результате фазовых переходов типа Березинского–Костерлица–Таулеса (БКТ) [1]. Одним из авторов [2] была предложена теория «среднего поля» переходов ограничения, аналогичная теории Ландау переходов второго рода. Высказывалось мнение [3, 4], что теория среднего поля не имеет области применимости из-за существенной роли флуктуаций.

В настоящей работе на основе анализа экспериментальных данных о свойствах поверхности кристаллов ${}^4\text{He}$ показано, что область применимости теории среднего поля, напротив, весьма широка. Она неприменима лишь в весьма узкой области вблизи критической температуры. Соотношение теории БКТ и теории среднего поля аналогично соотношению теории БКТ и теории Гинзбурга–Ландау для сверхпроводящих пленок (см., например, работу [5]).

В простейшей одномерной геометрии в теории среднего поля вводится поверхностный термодинамический потенциал f , связанный с поверхностной энергией α единицы площади поверхности соотношением $f = \alpha\sqrt{1+h^2}$, где $h = dz/dx = \text{tg } \theta$ — угловая переменная, θ — угол между поверхностью и базисной плоскостью кристалла, $z = z(x)$ — уравнение поверхности кристалла. В равновесии оно связано с поверхностной энергией следующим образом:

Здесь $\tilde{f} = \tilde{f}(\eta) = f - \eta h$ — преобразование Лежандра от потенциала $f(h)$, $\eta = \partial f / \partial h$, а λ — постоянная.

Теория среднего поля основана на разложении потенциала \tilde{f} для вицинальных поверхностей ($h \ll 1$) по степеням параметра η :

$$\tilde{f} = -\frac{a}{2}\eta^2 - \frac{b}{4}\eta^4, \quad (2)$$

где $a = a(T)$ — функция температуры, а b — постоянная. Для выяснения условия применимости разложения (2) перейдем к безразмерным величинам

$$\tilde{f}' = b^{1/3}\tilde{f}, \quad \eta' = b^{1/3}\eta.$$

Имеем

$$\tilde{f}' = -\frac{1}{2}(ab^{-1/3})\eta'^2 - \frac{1}{4}\eta'^4. \quad (3)$$

Угловой параметр равен

$$h = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} = a\eta + b\eta^3 = (ab^{-1/3})\eta' + \eta'^3. \quad (4)$$

Если выполнено условие

$$|ab^{-1/3}| \ll 1, \quad (5)$$

то разложение (3) справедливо при $\eta' \ll 1$ или, эквивалентно, при $h \ll 1$.

Прямым способом нахождения коэффициентов разложения (2) является наблюдение за формой равновесной поверхности $h(x)$. Из соотношения (1) следует

$$h(x) = -a\lambda x - b(\lambda x)^3. \quad (6)$$

* E-mail: andreev@kapitza.ras.ru

** E-mail: leva@kapitza.ras.ru

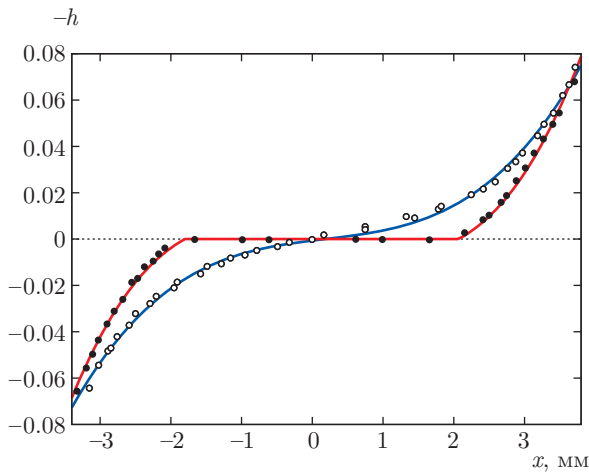


Рис. 1. Равновесная форма кристалла $h(x)$ при $T > T_R$ (○) и $T < T_R$ (●) по данным работы [6] (см. рис. 3а). Кривые проведены в соответствии с выражением (6), причем наилучшее согласие достигается при $a\lambda|_{T>T_R} = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-1}$, $b\lambda^3|_{T>T_R} = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-3}$, $a\lambda|_{T<T_R} = -8.3 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-1}$, $b\lambda^3|_{T<T_R} = 2.2 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-3}$

Такие измерения для вицинальных направлений были проведены Бабкиным, Копелиовичем и Паршиным [6] вблизи температуры T_R фазового перехода ограничения (roughening transition) как выше, так и ниже этой температуры. Оказывается, что вне весьма узкой области $\delta T \lesssim 0.01 \text{ К}$ вблизи критической температуры форма кристаллов от температуры не зависит (при этом, конечно, выше и ниже критической температуры форма разная). Это означает, что коэффициент a зависит от температуры только в этой области, будучи постоянным положительным $a = a_h$ при $T > T_R$ и постоянным отрицательным $a = -a_l$ при $T < T_R$. Данные по некоторым двум образцам приведены на рис. 1, при этом

$$a_h b^{-1/3} = 0.03, \tag{7}$$

$$a_l b^{-1/3} = 0.06. \tag{8}$$

Покажем, что разложение (2) можно использовать для описания особенностей угловой зависимости поверхностной жесткости γ (рис. 2), которые наблюдались в экспериментах Андреевой и Кешишева [7] вблизи особых граней (0001) и (10 $\bar{1}$ 0) при низких по сравнению с T_R температурах и объяснение которых отсутствует.

Рассмотрим базисную грань (0001) кристалла ⁴He, перпендикулярную оси симметрии шестого порядка. Сама температура ограничения $T_R \approx 1.28 \text{ К}$ определяется универсальным соотношением теории фазовых переходов БКТ,

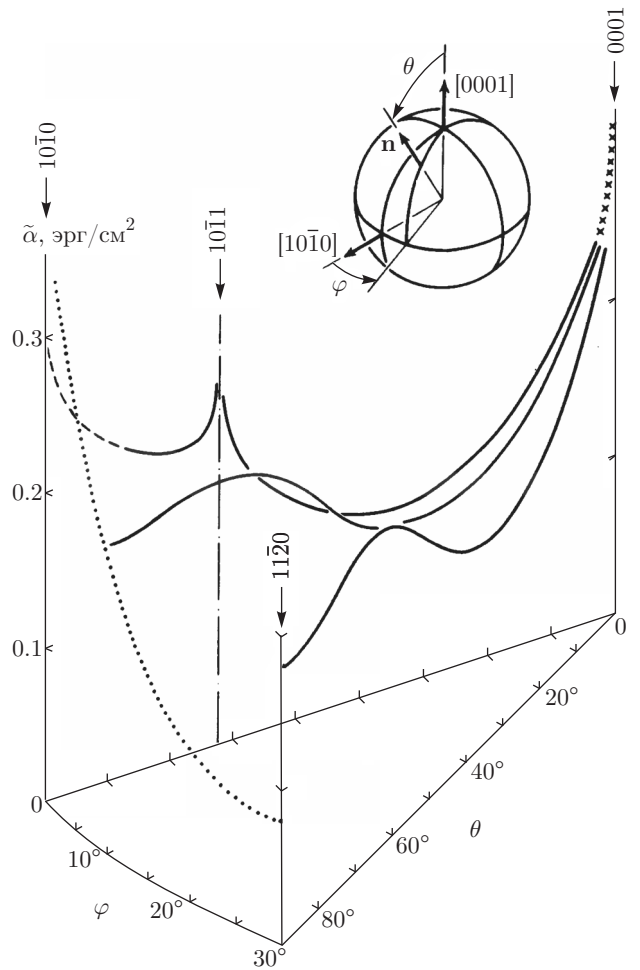


Рис. 2. Угловая зависимость поверхностной жесткости из работы [7]

$$T_R = (2/\pi) \gamma d^2, \tag{9}$$

где $d \approx 3 \text{ \AA}$ — период решетки вдоль нормали к грани, γ — значение поверхностной жесткости,

$$\gamma = \alpha + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = \frac{\partial \eta}{\partial h} \tag{10}$$

при $T = T_R$ и $h = \theta = 0$. Критическая температура T_c теории среднего поля определяется условием обращения в нуль коэффициента в разложении (2) перед членом второго порядка, $a(T_c) = 0$, так что при температурах, достаточно близких к критической, $|T - T_c| \ll \delta T$, имеем $a = a_0 t$, где $t = (T - T_c)/T_c$.

Предполагая, что значение T_R близко к T_c , из (2) находим $\gamma = (a_0 t)^{-1}$ и

$$t_R = \frac{T_R - T_c}{T_c} = \frac{2}{\pi} \frac{d^2}{a_0 T_c}.$$

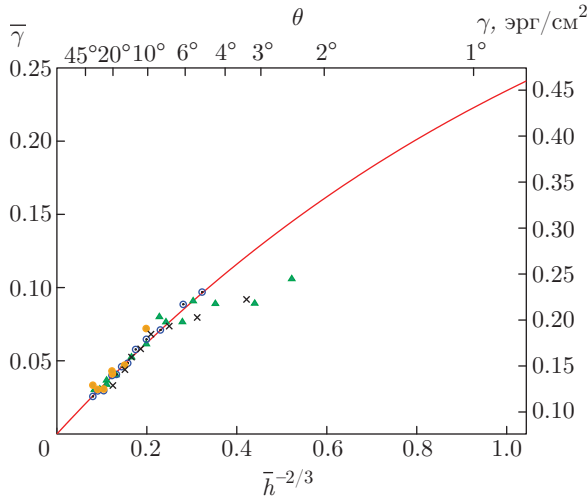


Рис. 3. Угловая зависимость поверхностной жесткости для четырех образцов по экспериментальным данным Андреевой и Кешишева ([8], рис. 19) и теоретическая кривая (13); $\bar{\gamma} = \gamma / (1.6 \text{ эрг/см}^2) - 0.048$; $\bar{h}^{-2/3} = (a_i^3/b)^{1/3} \text{tg}^{-2/3} \theta$

Таким образом, условием применимости излагаемой теории является $t > t_R$, а параметр

$$Gi \equiv t_R = \frac{2d^2}{\pi a_0 T_c} \ll 1 \quad (11)$$

играет роль параметра Гинзбурга–Леванюка теории фазовых переходов второго рода [5].

В диссертации [8] приведены подробные экспериментальные данные по угловой зависимости поверхностной жесткости (10) при низких температурах $T < T_R$. Разложение (4) позволяет вычислить эту зависимость:

$$\gamma = (\partial h / \partial \eta)^{-1} = (3b\eta^2 - a_l)^{-1}. \quad (12)$$

Из выражений (12) и (4) находим связь между γ и угловым параметром h :

$$\bar{h} = \left(\frac{\bar{\gamma} + 1}{3\bar{\gamma}} \right)^{3/2} - \left(\frac{\bar{\gamma} + 1}{3\bar{\gamma}} \right)^{1/2}, \quad (13)$$

где $\bar{h} = (a_i^3/b)^{-1/2} h$ и $\bar{\gamma} = a_l \gamma$. При $\bar{h} \ll 1$ имеем $\bar{\gamma} \approx 1/2 - 3/4 \bar{h}$; при $\bar{h} \gg 1$ жесткость убывает пропорционально $h^{-2/3}$: $\bar{\gamma} \approx 1/3 \bar{h}^{-2/3}$.

Для $T < T_R$ значение $(a_i^3/b)^{-1/2} = 62.5$ известно из (8). Параметр

$$a_l^{-1} = 1.6 \text{ эрг/см}^2 \quad (14)$$

определяется наилучшим согласием с экспериментальными данными. Соответствующая зависимость

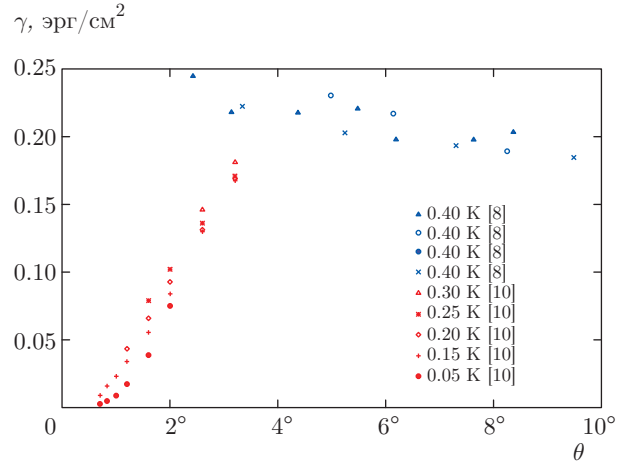


Рис. 4. Угловая зависимость поверхностной жесткости для вицинальных направлений при низкой температуре по данным из [8, 10]

(13) построена на рис. 3. Отметим, что минимальный угол, при котором экспериментальные точки хорошо ложатся на кривую (13), как раз соответствует ограничению (16) на область применимости теории среднего поля (см. также рис. 5 ниже).

Указанное отсутствие температурной зависимости поверхностной жесткости вне непосредственной окрестности критической температуры означает, что параметр a зависит от температуры лишь в этой области, где он меняется на величину порядка a_l , т. е. $a_0 \gtrsim a_l(T_c/\delta T)$. Используя (14), из (11) можно оценить значение Gi :

$$Gi \lesssim \frac{2d^2 \delta T}{\pi a_l T_c^2} \sim 0.1.$$

Вицинальная поверхность кристалла в пределе нулевой температуры образована редкими ступенями высотой d на симметричной грани [9]. Следствием этого является стремление поверхностной жесткости к нулю при $\theta \rightarrow 0$ (рис. 4). Такая картина разрушается, если на поверхности флуктуации «размывают» дискретность кристаллической решетки и само понятие ступени конечной высоты теряет смысл. В соответствии с универсальным соотношением (9) следует считать, что это происходит при

$$T \gtrsim T_R(\theta) \equiv \frac{2d^2 \gamma(\theta)}{\pi}, \quad (15)$$

где d не зависит от θ , а поверхностную жесткость $\gamma(\theta)$ можно определить из (13). Таким образом, ниже температуры ограничения область применимости рассматриваемой теории определяется условием

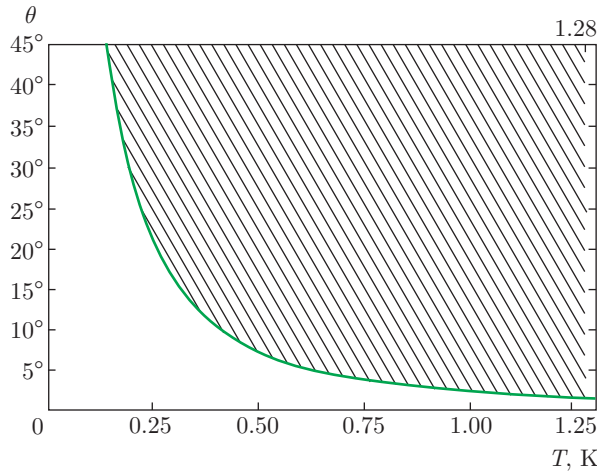


Рис. 5. Ограничение на область применимости теории среднего поля в соответствии с уравнением (16)

$$\begin{aligned} \bar{h} &\gtrsim \left(\frac{\bar{\gamma}+1}{3\bar{\gamma}}\right)^{3/2} - \left(\frac{\bar{\gamma}+1}{3\bar{\gamma}}\right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{2d^2}{3\pi a_l T}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2d^2}{3\pi a_l T}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Соответствующее множество на плоскости (T, θ) заштриховано на рис. 5.

Интересно рассмотреть также грань $(10\bar{1}0)$ с критической температурой $T_R \approx 1$ К. В данном случае рост жесткости $\gamma = (a_0 t)^{-1}$ имеет место лишь для одного из двух собственных значений тензора жесткости, второе собственное значение γ_0 остается конечным при $t \rightarrow 0$. Критическая температура БКТ равна [1] $T_R = (2/\pi)\sqrt{\gamma\gamma_0} d^2$, она близка к T_c при условии

$$t_R = \frac{T_R - T_c}{T_c} = \frac{\gamma_0}{a_0} \left(\frac{2d^2}{\pi T_c}\right)^2 \ll 1.$$

В теории среднего поля предсказывалась цилиндрическая огранка кристаллов, когда кривизна

поверхности становится равной нулю лишь в одном из двух направлений. Тот факт, что фактически фазовый переход БКТ происходит при температуре T_R , несколько более высокой, чем T_c , означает невозможность цилиндрической огранки. Однако вблизи температуры перехода $t \gtrsim t_R$ поверхность кристалла почти цилиндрическая.

Мы благодарны К. О. Кешишеву за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. S. Fisher and J. D. Weeks, Phys. Rev. Lett. **50**, 1077 (1983).
2. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ **80**, 2042 (1981).
3. С. В. Иорданский, С. Е. Коршунов, ЖЭТФ **87**, 927 (1984).
4. S. Balibar, H. Alles, and A. Ya. Parshin, Rev. Mod. Phys. **77**, 317 (2005).
5. E. J. König, A. Levchenko, I. V. Protopopov, I. V. Gornyi, I. S. Burmistrov, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. B **92**, 214503 (2015).
6. А. В. Бабкин, Д. Б. Копелиович, А. Я. Паршин, ЖЭТФ **89**, 2288 (1985).
7. О. А. Андреева, К. О. Кешишев, Письма в ЖЭТФ **52**, 799 (1990).
8. О. А. Андреева, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, ИФП АН СССР (1990).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1995), § 155.
10. E. Rolley, C. Guthmann, E. Chevalier, and S. Balibar, J. Low Temp. Phys. **99**, 851 (1995).