

АНАЛИЗ ПЛАЗМОНОВ И ГОМОГЕНИЗАЦИЯ В ПЛОСКОСЛОИСТЫХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ

*М. В. Давидович**

*Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, Россия*

Поступила в редакцию 6 февраля 2016 г.

Получены дисперсионные уравнения, проведен анализ и гомогенизация в периодических и квазипериодических плоскостойких структурах с чередованием диэлектрических слоев, металлических и диэлектрических слоев, а также графеновых листов и слоев диэлектрика (SiO_2). Рассмотрены случаи, когда указанные структуры приобретают свойства гиперболических метаматериалов, т. е. имеющих разные знаки реальных частей компонент тензора эффективной диэлектрической проницаемости. Показано, что использование только диэлектрических слоев более перспективно в плане снижения потерь.

DOI: 10.7868/S0044451016120026

1. ОБОСНОВАНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При рассмотрении гиперболических метаматериалов (ГММ) их свойства обычно связывают с действительным тензором эффективной диэлектрической проницаемости и не учитывают диссипацию. Идеальный (недиссипативный) ГММ является одноосным фотонным кристаллом и характеризуется тензором эффективной диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

при этом $\varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel} < 0$ [1, 2]. Здесь ось фотонного кристалла совпадает с осью z . Впервые электромагнитные свойства такой среды рассмотрены в [3]. Отсутствие диссипации приводит к действительным значениям компонент тензора (1). Тогда уравнение Френеля [4]

$$\varepsilon_{\parallel}^{-1}k_{\perp}^2 + \varepsilon_{\perp}^{-1}k_{\parallel}^2 = k_0^2 \quad (2)$$

демонстрирует (если ε_{\perp} и ε_{\parallel} — константы) гиперболический закон дисперсии необыкновенной волны, поскольку компоненты волновых чисел также

действительные и неограниченные. Формально возможны условия $k_{\perp}^2 \gg k_0^2$ и $k_{\parallel}^2 \gg k_0^2$, а получение неограниченных значений определяет ряд интересных свойств ГММ [1–3], таких как эффект Парселла, возможность анизотропного отражения (включая сверхмалое отражение), получение неизотропного теплового излучения и переноса тепла, а также ряд других, что позволяет использовать их для нанолитографии, ближнепольной микроскопии и передачи изображений с субволновым разрешением, создания линз и маскирующих покрытий. Предполагается, что в ГММ, в частности, возможны неограниченные значения поперечных компонент волнового вектора. Однако временная (частотная) и пространственная дисперсии приводят к зависимости тензора (1) от волнового числа k_0 и волнового вектора \mathbf{k} : $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(k_0, \mathbf{k})$, а также к комплексным величинам в левой части уравнения (2). Диссипация ограничивает значения компонент волнового вектора и связана с дисперсией, включая пространственную; при этом поверхность изочастот уже не является гиперболоидом вращения и замкнута. Например, учет диссипации может приводить к почти полностью поглощающим ГММ. Заметим, что дисперсия и диссипация — явления, связанные в силу принципа причинности (соотношений Крамерса–Кронига) [4].

В работе рассмотрен простейший ГММ в виде периодической плоскостойкой среды, на примере которого анализируется возможность получения гиперболическости в виде $\varepsilon'_{\perp}\varepsilon'_{\parallel} < 0$ (далее одинарный

* E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

и двойной штрихи везде означают соответственно действительную и отрицательную мнимую части), а также влияние потерь, частотной и пространственной дисперсий на свойства ГММ. Имеется огромное количество работ по анализу плоскостойких структур, начиная с работ Рытова (1955) вплоть до последних лет. Большое число работ в последние годы (большую часть которых мы не приводим) посвящено гомогенизации плоскостойких ГММ. Тем не менее проблемы определения волн в ГММ и гомогенизации до конца не решены в силу неоднозначности последней.

Важно также корректно учитывать пространственную дисперсию. Обозначим

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel},$$

$$k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad k_z = k_{\parallel}.$$

В плоскостойкой среде (путем поворота вокруг оси C_{∞}) выбираем поляризацию плоской волны так, что $k_y = 0$, $k_{\perp} = k_x$. При диссипации все величины в левой части уравнения (2) комплексные, что приводит к двум действительным уравнениям:

$$\frac{(k_x'^2 - k_x''^2)\varepsilon'_{zz} + 2k_x'k_x''\varepsilon''_{zz}}{|\varepsilon_{zz}|^2} + \frac{(k_z'^2 - k_z''^2)\varepsilon'_{xx} + 2k_z'k_z''\varepsilon''_{xx}}{|\varepsilon_{xx}|^2} = k_0^2, \quad (3)$$

$$\frac{(k_x'^2 - k_x''^2)\varepsilon''_{zz} - 2k_x'k_x''\varepsilon'_{zz}}{|\varepsilon_{zz}|^2} + \frac{(k_z'^2 - k_z''^2)\varepsilon''_{xx} - 2k_z'k_z''\varepsilon'_{xx}}{|\varepsilon_{xx}|^2} = 0. \quad (4)$$

Отметим, что уравнение (2) обычно справедливо в низкочастотном пределе, когда можно считать, что плоская волна с зависимостью $\exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ распространяется в однородной анизотропной среде, т.е. когда характерные размеры d существенно меньше длины волны λ . Интересен, однако, и резонансный случай $\lambda \sim d$.

Наиболее простой ГММ можно реализовать как одномерно-периодический плоскостойкий фотонный кристалл (рис. 1). Он может быть выполнен, например, в виде тонких металлических или графеновых листов между слоями диэлектрика (например, SiO_2). Рассмотрим простейший случай двух слоев с ε_1 , d_1 и ε_2 , d_2 в периоде $d = d_1 + d_2$, $d \ll \lambda$. Гомогенизация в нулевом квазистатическом приближении без пространственной дисперсии дает [5]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_1 d_1/d + \varepsilon_2 d_2/d, \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{\parallel} = (\varepsilon_1^{-1} d_1/d + \varepsilon_2^{-1} d_2/d)^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

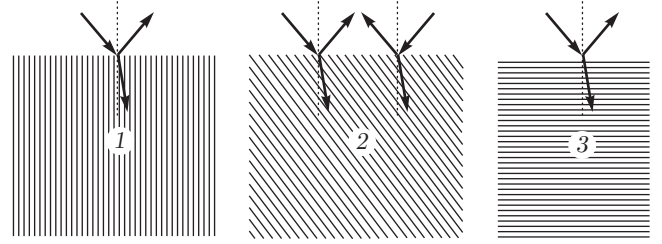


Рис. 1. Падение плоской волны на границу ГММ, в плоскости которой лежит ось вращательной симметрии (1), на ГММ с границей, к которой ось направлена под углом (2) и на ГММ 3 с границей, к которой ось перпендикулярна

Соотношения (5) не содержат пространственной дисперсии, которая появляется в следующих порядках разложения по малому параметру d/λ [5], однако величины ε_k могут зависеть от частоты. Для ГММ слои могут быть как диэлектрическими, так и чередующимися диэлектрическими и металлическими, скажем $\varepsilon_1 = \varepsilon_m$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_d$. Для диэлектрической проницаемости металла используем формулу Друде-Лоренца

$$\varepsilon_m = \varepsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\omega_c}, \quad (6)$$

где ε_L — лоренцев член, соответствующий диэлектрической проницаемости кристаллической решетки и межзонным переходам (в инфракрасной и терагерцевой областях его можно считать действительным), ω_p — плазменная частота, ω_c — частота столкновений. Условию $\varepsilon'_m < 0$ соответствует

$$\varepsilon'_L - \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\omega^4 + \omega^2 \omega_c^2} < 0.$$

Если в выражении (6) пренебречь диссипацией, то в области частот $\omega < \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L}$ имеем $\varepsilon_m < 0$. Соотношения (5) приводят к условию $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{xx} < 0$, если $|\varepsilon_m| > \varepsilon_d d_2/d_1$, что легко реализуется для не слишком тонких пленок металла и не очень больших ε_d . Указанный случай реализуется при $\omega_c \ll \omega < \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L + \varepsilon_d d_2/d_1}$. В этом случае $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel} > 0$, если $|\varepsilon_m| > \varepsilon_d d_1/d_2$, т.е. имеем ГММ с дополнительным условием $\omega < \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L + \varepsilon_d d_1/d_2}$. Если $d_1 < d_2$, то ГММ реализуется в области $\omega_c \ll \omega < \omega_{1h}$, где $\omega_{1h} = \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L + \varepsilon_d d_1/d_2}$, а если $d_1 > d_2$, — то в области $\omega_c \ll \omega < \omega_{2h}$, где $\omega_{2h} = \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L + \varepsilon_d d_2/d_1}$. Максимальная полоса частот будет при $d_1 = d_2$. При этом на частоте $\omega_p/\sqrt{\varepsilon_L + \varepsilon_d}$ выполнено $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = 0$, а случай с $\varepsilon_{xx} > 0$ и $\varepsilon_{zz} < 0$ возможен при $\varepsilon_m > -\varepsilon_d$. Для хороших металлов при комнатной температуре $\omega_p \sim 10^{16}$ Гц, $\omega_c \sim 10^{14}$ Гц, $\varepsilon_L \sim 10$.

Для диэлектрической проницаемости $\varepsilon_d \sim 3$ и $\omega \geq 10\omega_c$ отношение верхней и нижней частот области гиперболичности порядка 3. Для ее расширения следует понижать ω_c , например, используя сверхчистые материалы и низкие температуры.

2. ВОЛНЫ В ГММ И ПЛОСКОСЛОИСТЫХ СТРУКТУРАХ

Для бесконечного идеального плоскостойкого ГММ

$$k_z^2 = k_x^2 |\varepsilon_{xx}| / \varepsilon_{zz} - k_0^2,$$

поэтому распространение волны вдоль оси происходит, если $k_z^2 > 0$, что накладывает ограничения на компоненту k_x . Если плоская волна падает из вакуума на ГММ, как в случае 3 (см. рис. 1), то $k_x < k_0$ и должно быть

$$\frac{|\varepsilon_{xx}|}{\varepsilon_{zz}} > \frac{k_0^2}{k_x^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi}.$$

Такие полубесконечные ГММ и ГММ с большим конечным числом периодов следует рассматривать как квазипериодические структуры. Если угол падения $\varphi = 0$, то $k_x = 0$, а величина k_z мнимая. В таких структурах возможны и поверхностные волны. В запрещенной зоне идеального фотонного кристалла при нормальном распространении волны как раз реализуется этот случай, при этом $\varepsilon_{xx} < 0$ [6].

В отличие от приведенного выше примера ($\lambda \ll \ll d$), это — резонансный случай с условием $\lambda \sim d$. Для падающего луча на рис. 1 углом падения задается величина k_z , и тогда распространение волны определяется условием $k_x^2 \geq k_0^2 \varepsilon_{zz} / |\varepsilon_{xx}|$. Эти условия характерны для падения плоской волны из вакуума. Однако плоская волна может падать и из среды с большими материальными параметрами ε и μ . Правда, для образования такой волны источник должен быть расположен в среде и на весьма большом удалении от границы, что трудно реализуемо практически. Случаи $k_z > k_0$, $k_x > k_0$ могут реализовываться для затухающих (эванесцентных) мод. Эти моды возникают вблизи границ раздела сред (структур), например, вблизи апертуры прямоугольного волновода с фланцем [7]. В приведенном примере им соответствуют затухающие от апертуры плотности поверхностных токов на проводящих элементах структуры (на фланце).

Для неоднородных диэлектрических структур эванесцентные моды могут поддерживаться токами поляризации. Случай $k_x \gg k_0$ реализуется, например, в фотонном кристалле при большом замедле-

нии вдоль оси x . Если в таком кристалле возбудить соответствующим образом волну и наложить его на ГММ, в последнем можно получить условие $k_x \gg k_0$. Из уравнения (2) видно, что как раз условие $k_x^2 > k_0^2 \varepsilon_{zz}$ приводит к получению гиперболичности. Однако такое возбуждение, как и возбуждение источниками с эванесцентными модами, не является возбуждением плоской волной.

Ясно, что рассмотренные приближения без диссипации дают качественную картину. Для уточнения следует использовать соотношения (3) и (4). Выражая k_z'' из квадратного уравнения (4) и подставляя в (3), получим уравнение для изочастот в трехмерном пространстве k_x' , k_x'' , k_z' . Нетрудно видеть, что неограниченные значения компонент невозможны, т.е. поверхность замкнута и, естественно, не является гиперболоидом. Более строгая гомогенизация приводит к пространственной дисперсии, которая совсем усложняет построение такой поверхности.

Для металла с законом дисперсии $\mathbf{k}^2 = k^2 \varepsilon_m$ и диэлектрической проницаемостью (6), выбрав движение волны вдоль оси z , получаем

$$k_x = k_y = 0, \quad k_z' = k_0 \sqrt{\left(\sqrt{\varepsilon_m'^2 + \varepsilon_m''^2} + \varepsilon_m' \right) / 2},$$

$$k_z'' = k_0 \sqrt{\left(\sqrt{\varepsilon_m'^2 + \varepsilon_m''^2} - \varepsilon_m' \right) / 2}.$$

На частоте, где $\varepsilon_m' = 0$, имеем $k_z' = k_z'' = k_0 \sqrt{\varepsilon_m''/2}$, а ниже нее $k_z' < k_z''$. В системе координат, произвольно повернутой относительно исходной (знак «тильда»), имеются все три комплексные компоненты $\tilde{\mathbf{k}}$ ($\tilde{\mathbf{k}}^2 = k_z^2 = k_0^2 \varepsilon_m$). В уравнении для изочастот только пять независимых действительных величин, причем три соответствуют углам, образованным направлением распространения $\tilde{\mathbf{k}}'$ с осями координат. Исключая из шести величин одну (например, \tilde{k}_z'' из $\text{Im}(\tilde{\mathbf{k}}^2 - k_0^2 \varepsilon_m) = 0$), получим уравнение для изочастот в пятимерном пространстве, которое уже не является сферой.

В общем случае уравнения типа (5) могут быть получены на основе разных методов гомогенизации. В частности, из решения уравнений Максвелла можно найти дисперсию в фотонном кристалле, т.е. зависимость $f(k_0, \mathbf{k}) = 0$ или $k_0 = \psi(\mathbf{k})$, а затем вычислить усредненную поляризацию ячейки периодичности. В этом случае условие $d \ll \lambda$ уже налагать не обязательно. При $d \sim \lambda$ поля сильно изменяются на периоде, но эти изменения строго учтены в эффективных параметрах усреднением по периоду.

Полученные гомогенизацией два комплексных уравнения типа (5) и комплексное дисперсионное уравнение для блоховских волн в фотонном кристалле налагают шесть действительных условий для определения четырех комплексных величин: $k_x, k_z, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}$. Уравнение Флоке–Блоха, которому удовлетворяют такие волны, имеет вид

$$k_z d = \Psi = \pm i \ln \left(X \pm \sqrt{X^2 - 1} \right). \quad (7)$$

Дисперсионное уравнение (7) получено наложением условий Флоке с использованием матрицы передачи и определяет прямые и обратные волны. Знаки следует брать независимо, при этом число ветвей в области $-\pi < \Psi' < \pi$ удваивается в силу многозначности логарифма. Уравнение (7) также можно записать в виде

$$\cos(k_z d) = \pm X,$$

где $X = (a_{11} + a_{22})/2$, a_{mn} — матричные элементы классической матрицы передачи ячейки периодичности (двух слоев), Ψ — фазовый сдвиг на ячейку. Величина X зависит от k_{\perp} , а ее вид — от модели плоскостной среды и типа волны. Для волны E (TM) нормированные импедансы слоев имеют вид $\rho_l^E = k_{lz}/(k_0 \varepsilon_l)$, а для волны H (TE) — $\rho_l^H = k_0/k_{lz}$, где $k_{lz} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_l - k_x^2}$. Поэтому в нашем простейшем случае

$$X = \cos(k_{1z} d_1) \cos(k_{2z} d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1^{(E,H)}}{\rho_2^{(E,H)}} + \frac{\rho_2^{(E,H)}}{\rho_1^{(E,H)}} \right) \times \sin(k_{1z} d_1) \sin(k_{2z} d_2). \quad (8)$$

При наличии тонкой проводящей пленки, например, листа графена, это соотношение следует модифицировать. Такая пленка (двумерный электронный газ) не может быть описана объемной диэлектрической проницаемостью, но характеризуется поверхностной проводимостью σ . В случае графена σ задается формулой Кубо [8,9], квантуется, имеет сильную зависимость от температуры и электрохимического потенциала. Методом транспортного уравнения Больцмана в приближении Бхатнагара–Гросса–Крука получена тензорная проводимость [10].

Пусть индекс «1» соответствует диэлектрику, $\varepsilon_1 = \varepsilon_d$, а индекс «2» — пленке. Тогда

$$X = \cos(k_{1z} d_1) + \frac{1}{2} \left(i \sigma \rho_1^{(E,H)} \right) \times \sin(k_{1z} d_1) \sin(k_{2z} d_2). \quad (9)$$

Очевидно, выражения (8) и (9) не зависят от порядка расположения слоев. Дисперсионное уравнение (7) приводит к комплексным k_z . Однако при

диссипации величина k_x — комплексная, поскольку в бесконечной структуре волна в направлении движения (вдоль \mathbf{k}) затухает. Для определения двух комплексных величин кроме уравнения (7) необходимо еще одно уравнение. Для волны в направлении \mathbf{k} с некоторой величиной k_x в каждой плоскости $z = \text{const}$ можно определить входной импеданс $Z_{in}(z)$ как отношение соответствующих компонент полей, при этом $Z_{in}(z+d) = Z_{in}(z)$, т. е. входной импеданс — периодическая функция, поскольку поля удовлетворяют условиям Флоке, а входные импедансы есть отношения компонент электрического и магнитного полей. Для E -волны это E_x/H_y , а для H -волны соответственно $-E_y/H_x$, где поля также периодические функции.

В бесконечном недиссипативном фотонном кристалле волны с \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$ неразличимы, но в случае потерь одна из волн убывает, а вторая возрастает вдоль заданных направлений осей. Например, первая волна убывает вдоль положительного направления оси z , если \mathbf{k} образует с ней острый угол. Направление убывания и определяет направление движения энергии в диссипативной структуре, при этом волна может быть прямой или обратной. Пусть z_{in} есть нормированный входной импеданс на границе слоев 2 и 1. Равенство импедансов означает согласование, т. е. волну, идущую слева направо без отражения. Тогда

$$z'_{in} = \rho_2^{(E,H)} \frac{z_{in} + i \rho_2^{(E,H)} \text{tg}(k_{2z} d_2)}{\rho_2^{(E,H)} + i z_{in} \text{tg}(k_{2z} d_2)}$$

есть импеданс на границе слоев 1 и 2, смещенной влево на d_2 . Второе условие, означающее периодичность импеданса, есть

$$z_{in} = \rho_1^{(E,H)} \frac{z'_{in} + i \rho_1^{(E,H)} \text{tg}(k_{1z} d_1)}{\rho_1^{(E,H)} + i z'_{in} \text{tg}(k_{1z} d_1)}. \quad (10)$$

Здесь индексы « E, H » у z_{in} опущены. Это опять импеданс на границе слоев 2 и 1, только смещенной влево на d .

Естественно, можно записать условие периодичности при пересчете импедансов справа налево, а также при сдвиге исходной плоскости на один слой. Удобно записать условие (10) с помощью матрицы передачи ячейки периодичности. Связь касательных компонент полей в плоскостях, разделенных n периодами, имеет вид

$$\mathbf{E}_{\perp}^{(E,H)}(z + nd) = \exp(-in\Psi^{(E,H)}) \mathbf{E}_{\perp}^{(E,H)}(z),$$

$$\mathbf{H}_{\perp}^{(E,H)}(z + nd) = \exp(-in\Psi^{(E,H)}) \mathbf{H}_{\perp}^{(E,H)}(z).$$

Если \hat{a} — классическая матрица передачи периода структуры (соответственно $\hat{a}^{(n)} = \hat{a}^n$ — матрица n периодов), то условие имеет вид

$$z_{in} = \frac{a_{11}z_{in} + a_{12}}{a_{21}z_{in} + a_{22}},$$

или

$$z_{in}(k_x, z) = \frac{a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{21}a_{12}}}{2a_{21}Z_0} = \frac{a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4}}{2a_{21}Z_0}, \quad (11)$$

поскольку $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$. Здесь $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. Очевидно, матрица зависит от k_x и не зависит от k_z , а периодическая функция (11) явно зависит от k_x и от z , т.е. от расположения референсной плоскости. Явная зависимость от k_z в (11) исключена, поскольку был исключен фазовый сдвиг. Дисперсионные уравнения (10), (11) определяют зависимость $k_x(k_0)$, по которой можно из (7) определить k_z .

Кроме формулы (11) можно получить другое выражение для $z_{in}(k_x, z)$. Действительно, пусть для данного k_0 известны k_x и k_z . Тогда известны импедансы ρ_l слоев и поперечные компоненты полей в них:

$$E_l = A_l^+ \exp(-ik_{lz}z) + A_l^- \exp(ik_{lz}z),$$

$$H_l Z_0 = \frac{1}{\rho_l} [A_l^+ \exp(-ik_{lz}z) - A_l^- \exp(ik_{lz}z)].$$

Сшивание полей проведем при $z = d_1$ и $z = d$. Во втором случае накладываем условия Флоке:

$$E_2(d) = E_1(0) \exp(\pm ik_z d),$$

$$H_2(d) = H_1(0) \exp(\pm ik_z d).$$

Поскольку $k_z'' > 0$, верхний знак определяет прямую волну, а нижний — обратную. Существование нетривиального решения приводит к дисперсионному уравнению в виде равенства нулю определителя четвертого порядка.

Ниже будут получены более простые формы этого уравнения. Для определения неизвестных коэффициентов в этих однородных уравнениях выкинем одно из них и положим для простоты $A_1^+ = 1$. Тогда

все остальные коэффициенты численно определены, т.е. определены и входные импедансы в любой точке. Введем обозначения

$$\tilde{A}_2^\pm = A_2^\pm \exp(\mp ik_{2z}d_1), \quad \psi_\pm = \exp(\pm ik_z d).$$

Пусть неиспользованное уравнение

$$1 - A_1^- = \psi_\pm \frac{\rho_1}{\rho_2} [\tilde{A}_2^+ \exp(-ik_{2z}d_2) - \tilde{A}_2^- \exp(ik_{2z}d_2)].$$

После подстановки значений коэффициентов оно и есть дисперсионное уравнение. Можно использовать и такое уравнение

$$1 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) A_2^+ \exp(-i(k_{2z} \mp k_z)d) + \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) A_2^- \exp(i(k_{2z} \pm k_z)d) \right].$$

Оно есть сумма двух уравнений при сшивании при $z = d$. Для разности уравнений имеем

$$A_1^- = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) A_2^+ \exp(-i(k_{2z} \mp k_z)d) - \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) A_2^- \exp(i(k_{2z} \pm k_z)d) \right].$$

Для первого слоя $0 \leq z \leq d_1$ получаем следующий вид входного импеданса:

$$z_{in}(k_x, k_z, z) = \rho_1 \frac{\exp(-ik_{1z}z) + A_{1z}^- \exp(ik_{1z}z)}{\exp(-ik_{1z}z) - A_{1z}^- \exp(ik_{1z}z)}.$$

Все введенные коэффициенты определены соотношениями

$$\tilde{A}_2^+ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \exp(-ik_{1z}d_1) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \exp(ik_{1z}d_1) A_1^-, \quad (12)$$

$$\tilde{A}_2^- = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \exp(-ik_{1z}d_1) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \exp(ik_{1z}d_1) A_1^-, \quad (13)$$

$$A_1^- = \frac{\psi_\pm \exp(-ik_{1z}d_1) [\rho_1 \cos(k_{2z}d_2) - i\rho_2 \sin(k_{2z}d_2)] - \rho_1}{\psi_\pm \exp(ik_{1z}d_1) [\rho_2 \cos(k_{2z}d_2) + i\rho_1 \sin(k_{2z}d_2)] + \rho_1}. \quad (14)$$

Заметим, что можно получить несколько эквивалентных форм представления коэффициентов, импеданса и дисперсионного уравнения. В приведенных выше соотношениях нельзя осуществить предельный переход к однородной среде ($\rho_1 \rightarrow \rho_2$), поскольку в этом случае волны обоих направлений становятся несвязанными, а формально построенный с их комбинациями импеданс может быть любым. Имеем

$$z_{in}(k_x, k_z, 0) = \rho_1(1 + A_{1z}^-)/(1 - A_{1z}^-).$$

Частный случай $z_{in} = \rho_1$ выполняется, если

$$\psi_{\pm} = \frac{\exp(ik_{1z}d_1)}{\rho_1 \cos(k_{2z}d_2) - i\rho_2 \sin(k_{2z}d_2)}.$$

Условия $A_1^- = \pm 1$ для диссипативной структуры невозможны. Сдвигая область рассмотрения на один слой или на любую часть периода, получаем уравнение (11) с измененными матрицей и импедансом. Очевидно, можно использовать матрицу для нескольких периодов, т.е. любую степень матрицы \hat{a} , при этом, согласно (10), решение не изменяется. Для двух слоев в периоде всегда матрицу \hat{a} можно сделать симметричной, выбрав референсные плоскости в центре любого из слоев. Два решения уравнения (11) соответствуют тому, что возможен пересчет импедансов как справа налево (10), так и слева направо, что соответствует прямой и обратной волнам.

Предположим, что известен импеданс $z_{in}(k_x, k_z, z)$. Тогда по формулам типа (10) получим импеданс $z_{in}(k_x, k_z, z - d)$. Метод прямой итерации позволяет получить итерационное решение с использованием формулы

$$k_x = k_x - \alpha k_x \left[\frac{z_{in}(k_x, k_z, z - d)}{z_{in}(k_x, k_z, z)} - 1 \right]. \quad (15)$$

Для начала итераций нужно приближенно задать k_x . Затем следует из выражения (7) вычислить k_z и затем $z_{in}(k_x, k_z, z)$. Далее импеданс пересчитывается и определяется уточненное значение k_x из (15). Процесс продолжается до сходимости. Сходимость сильно зависит не только от начального выбора, но и от выбора параметра итераций α .

Рассмотрим метод получения дисперсионного уравнения для полубесконечного фотонного кристалла, граничащего со средой с диэлектрической проницаемостью ε_h . Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_d$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_m$. Если $z_{in}(k_x, k_z)$ — периодический импеданс E -волны на границе металл–диэлектрик, пересчитанный через n периодов к границе, то отсутствие отражения соответствует условию

$$k_x = k_0 \sqrt{\varepsilon_h [1 - z_{in}^2(k_x, k_z)]}.$$

Аналогичное условие согласования для H -волны есть

$$k_x = k_0 \sqrt{\varepsilon_h - z_{in}^{-2}(k_x, k_z)}.$$

Здесь $z_{in}(k_x, k_z)$ и все импедансы при пересчете уже соответствуют H -волне. Если $\varepsilon_h = 1$, то получаем дисперсионное уравнение для поверхностных плазмонов на границе вакуум–полубесконечный фотонный кристалл. Уравнения удобно решать методом итераций, при этом при большом n и при сходимости итераций результат не зависит от начального выбора $z_{in}(k_x, k_z)$. Для оценки такого n заметим, что для получения периодических свойств в фотонном кристалле достаточно учесть несколько десятков периодов [11]. Решение дисперсионного уравнения зависит от порядка расположения слоев у границы. Если $\varepsilon_h = \varepsilon_d$, то фактически фотонный кристалл начинается с металлического слоя у границы, т.е. решение такое же, как при $\varepsilon_1 = \varepsilon_m$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_d$. При всех других значениях порядок расположения слоев влияет на результат. Более хорошей сходимостью обладает итерационный алгоритм

$$k_x = \frac{1}{2} \left[k_x + k_0 \sqrt{\varepsilon_h (1 - z_{in}^2(k_x, k_z))} \right]. \quad (16)$$

Другой способ получения дисперсионного уравнения, основанный на методе сшивания, состоит в представлении полных полей внутри фотонного кристалла и в вакууме. В кристалле конечной, но большой толщины

$$E_z = A^+ \exp(-ik_x x - ik_z z) + A^- \exp(-ik_x x + ik_z z),$$

т.е. поле представляется двумя противоположно распространяющимися волнами. В полубесконечном фотонном кристалле следует положить $A^- = 0$ (считаем $k_z'' > 0$). В вакууме ($z < 0$) также нужно использовать одну волну:

$$E_z = A \exp(-ik_x x - ik_{0z} z).$$

Для нее $k_{0z} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$, что приводит к системе двух однородных алгебраических уравнений и к приближенному дисперсионному уравнению $k_x = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$. Это нулевое приближение, поскольку оно не зависит от того, каким из слоев фотонный кристалл контактирует с вакуумом, не учитывает возмущения волн у поверхности кристалла, но позволяет сделать выводы о том, когда поверхностная волна медленная. Очевидно, это так, когда число k_{0z} мнимое (т.е. в запрещенных зонах фотонного кристалла), а также когда блоховская волна быстрая, что имеет место для высших по частоте ветвей

(волн). На самом деле следует учесть возмущения в нескольких прилегающих к границе слоях и диссипацию. Простейший результат получается при учете их только в одном приповерхностном слое. Записывая в нем

$$E_z = A_1^+ \exp(-ik_x x - ik_{1z} z) + A_1^- \exp(-ik_x x + ik_{1z} z)$$

и сшивая поля на двух границах, получаем дисперсионное уравнение в следующем приближении:

$$2 \exp(ik_{1z} d_1) = \frac{(k_{1z} + k_{0z})(k_{1z} - k_z)}{(k_{1z} - k_{0z})(k_{1z} + k_z)}.$$

Более точные уравнения, учитывающие возмущения в n слоях, сводятся к равенству нулю определителя порядка $2(n+1)$ и достаточно громоздки. Все эти уравнения следует решать совместно с (7), откуда определяется в общем случае комплексная величина k_x .

Задача дифракции содержит падающую и отраженную волны, система уравнений неоднородная, а k_x — действительное число. Без диссипации для медленной волны $k_{0z} = i|k_{0z}|$ (поверхностная волна), а для быстрой волны $k_{0z} = |k_{0z}|$, т. е. волна вытекающая (см. [12], стр. 219) и может существовать только при наличии потерь, хотя бы малых. Во вытекающей волне энергия движется под углом, но слева направо. В вытекающей волне энергия идет справа налево, поэтому такой волны в полубесконечной структуре быть не может: в противном случае, допуская наличие бесконечно малых потерь, получаем экспоненциальный рост мощности при $z \rightarrow \infty$. Однако для структуры фотонного кристалла конечной толщины вытекание энергии возможно. Дисперсионное уравнение такой структуры получается с учетом четырех волн: двух в фотонном кристалле и по одной в вакууме слева и справа. Оно определяет две связанные волны. Естественно, следует учесть возмущения вблизи границ, при этом слой кристалла должен содержать много периодов.

На рис. 2 и 3 приведены результаты итерационного решения уравнений (15), (16) при $\varepsilon_h = 1$ для чередующихся со слоями SiO_2 металлических слоев с разными ω_p, ω_c при использовании матрицы с \hat{a}^n для большого числа периодов до получения сходящихся результатов. При $n = 1$ результаты также сходятся, но при большем числе итераций. Дисперсионные кривые имеют узкие полосы разрывов, где итерации не сходятся. Для диэлектрической проницаемости SiO_2 взято значение $3.2 - 0.001i$, а $\varepsilon_L = 10$. Дисперсионные кривые на этих рисунках образованы точками, каждая из которых суть сходящееся ре-

шение. Сходимость означает получение невязки менее 10^{-6} . В существенной части областей решения почти налагаются друг на друга. В ряде областей сходимость не наблюдается (во всяком случае, за максимальное число итераций, которое было равно 900). В областях с хорошей сходимостью число итераций не превышало нескольких десятков.

Наиболее просто получить z_{in} перед бесконечно тонкой импедансной пленкой с нормированной проводимостью $y_0 = Z_0 \sigma$. Входная проводимость за пленкой равна $\tilde{y} = y_0 + y_{in}$. Трансформируя ее на период влево, имеем уравнение

$$y_{in}^2 + y_0 y_{in} + \frac{i y y_0}{\text{tg}(k_{1z} d)} - y^2 = 0,$$

в которое введена волновая проводимость. Для каждой из волн полученные уравнения типа (11) необходимо решать совместно с дисперсионным уравнением (7), из которого k_z определено с точностью до $2m\pi/d$. Ясно, что возможны значения $\pm k_x$. При заданном k_0 оба значения, k_z и k_x , можно определить методом одновременных итераций из двух уравнений, например (7) и (11). Тогда получаем многозначные функции $k_x = f_1(k_0)$ и $k_z = f_2(k_0)$. Вектор \mathbf{k} определяется с точностью до вектора обратной решетки $2m\pi d^{-1} \mathbf{z}_0$, при этом независимо имеют место корни $\pm k_z$ и $\pm k_x$. Удобно ввести компоненты $K_{zm} = k_z + 2m\pi/d$. Действительные части \mathbf{k}/k_0 определяют замедления по соответствующим осям.

Для одномерно-периодической структуры уравнение (7) уже получено методом сшивания плоских волн, т. е. нормальные волны близки по структуре к пространственным гармоникам (плоским волнам $\exp[-i(k_x x + K_{zm} z)]$). Обычно берут границу зоны в виде $|k'_z| \leq \pi/d$. Уравнение (2) при заданной частоте уже не определяет поверхность, в том числе и гиперболоид вращения, а соответствует только некоторым точкам в \mathbf{k} -пространстве, зависящим от способа гомогенизации. Так, если пренебречь дисперсией диэлектрической проницаемости в слоях и использовать выражения (5), то компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости будут константами. Более точные методы делают их функциями k_0 и \mathbf{k} . Само уравнение Френеля также можно рассматривать как условие гомогенизации, считая, что на k_x никаких условий не наложено и эта величина действительная [13]. Так, для ГММ с графеновыми листами в слоях диэлектрика, согласно (5), $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_d$, $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_d - i\sigma/\varepsilon_0 \omega d$ [13]. Для тонкой проводящей пленки малой толщины d_2 имеем $\varepsilon_2 = \varepsilon_h - i\sigma_0/\omega \varepsilon_0$, где σ_0 — объемная проводимость, а $\varepsilon_1 = \varepsilon_d$. Поверхностная проводимость определяет-

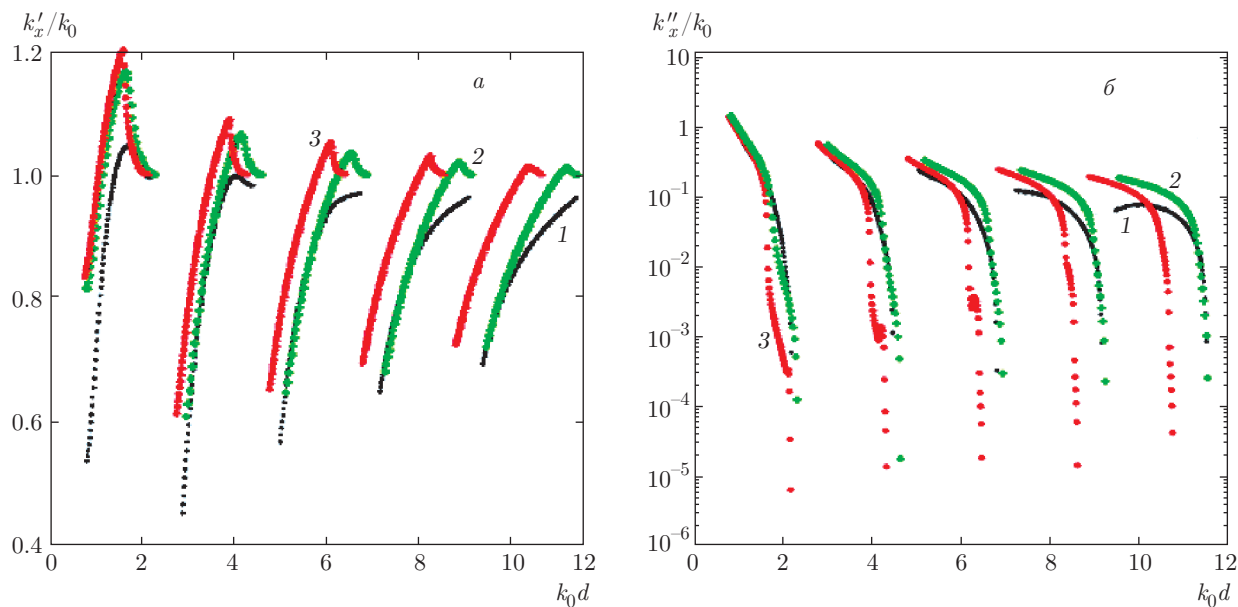


Рис. 2. (В цвете онлайн) Дисперсия замедления $n' = k'_x/k_0$ (а) и нормированные потери (б) в метаматериале с $d = 1$ мкм из металлических слоев с $\omega_p = 2 \cdot 10^{16}$ Гц толщиной d_1 и слоев SiO_2 : $\omega_c = 2 \cdot 10^{16}$ Гц, $d_1 = 100$ нм (1); $\omega_c = 10^{15}$ Гц, $d_1 = 50$ нм (2); $\omega_c = 10^{14}$ Гц, $d_1 = 20$ нм (3)

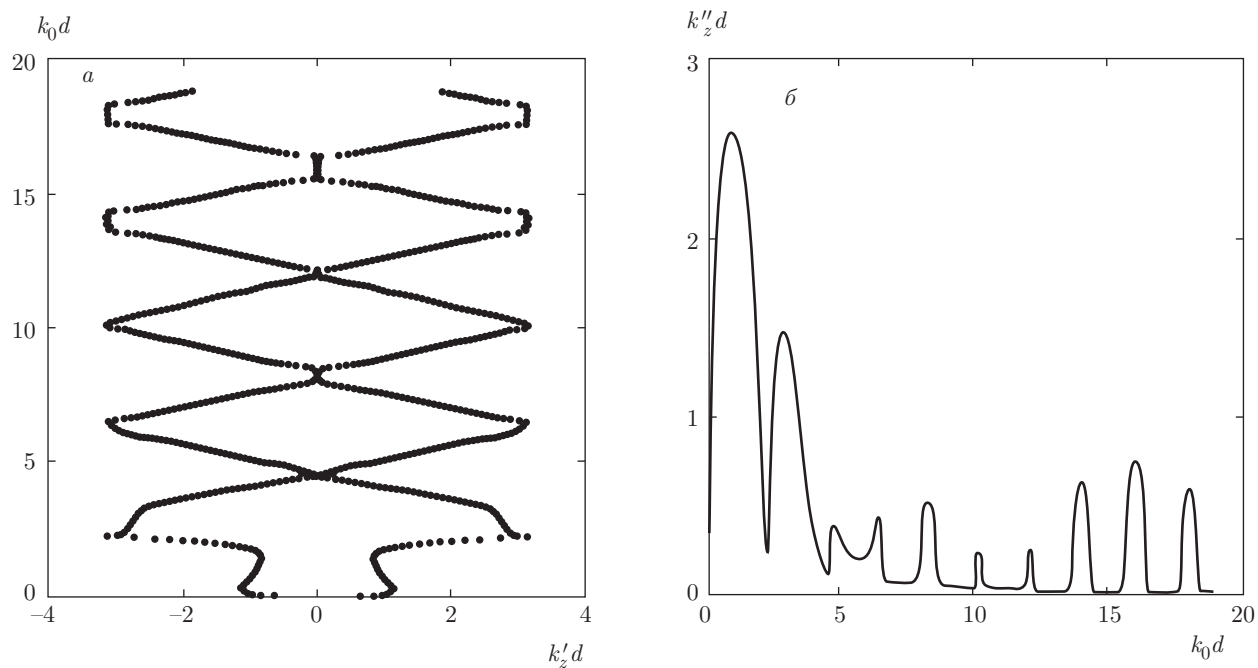


Рис. 3. Дисперсия (а) и нормированные потери (б) в одномерном фотонном кристалле с металлическими слоями толщиной 20 нм, диэлектрическими слоями с $\epsilon_d = 2$ толщиной 180 нм (период $d = 200$ нм): $\epsilon_L = 9.8 - 0.001i$, $\omega_p = 2.2 \cdot 10^{16}$ Гц, $\omega_c = 1.35 \cdot 10^{15}$ Гц

ся как $\sigma = \lim_{d_2 \rightarrow 0} (\sigma_0 d_2)$. В этом случае в нулевом приближении $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_d - i\sigma/\varepsilon_0 \omega d$, $\varepsilon_{zz} \approx \varepsilon_d$, поэтому

$$\frac{k_z^2}{\varepsilon_d - i\sigma/\varepsilon_0 \omega d} = \frac{k_0^2 \varepsilon_d - k_x^2}{\varepsilon_d}. \quad (17)$$

Обозначая $\delta = d_2/d$, имеем первое приближение:

$$\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_d - \frac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega d} + \delta(\varepsilon_h - \varepsilon_d), \quad \varepsilon_{zz} \approx \varepsilon_d(1+\delta).$$

Зависимость ε_{zz} от ε_h появляется в третьем приближении по δ .

Если $k_x^2 > k_0^2 \varepsilon_d$, то правая часть уравнения (17) отрицательная, при обратном условии — положительная. Однако при действительной компоненте k_x величина k_z удовлетворяет комплексному дисперсионному уравнению (7), а левая часть уравнения (17) всегда комплексная с комплексной проводимостью, т. е. для действительного значения k_x уравнение (17) выполняться не может. Если взять только условие $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_d$, то (17) приводит к условию $\varepsilon'_\perp < 0$, если $k_x^2 > k_0^2 \varepsilon_d$. Последнее соответствует медленным плазмонам (поляритонам) вдоль слоев с бесконечно малыми потерями. В случае малой диссипации в зонах пропускания величина k_z имеет малую мнимую часть, а в запрещенных зонах она практически мнимая. Возникают вопросы: можно ли считать k_x действительной и когда, а также какими уравнениями следует пользоваться (или лучше пользоваться) для гомогенизации и определения свойств гиперболичности плоскостойких сред (ГММ), памятуя о том, что гомогенизация — процедура неоднозначная? Эти вопросы далее затронуты в работе.

3. ДИСПЕРСИОННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В \mathbf{k} -ПРОСТРАНСТВЕ

В однородной изотропной недисперсивной (соответственно, недиссипативной) среде с диэлектрической проницаемостью ε дисперсионная поверхность есть сфера в трехмерном \mathbf{k} -пространстве, при этом нормированный импеданс $\rho = \varepsilon^{-1/2}$. Квадрат любой компоненты ограничен величиной $k_0^2 \varepsilon$. В изотропных неоднородных (ограниченных) структурах, однако, можно рассматривать эванесцентные волны с мнимыми компонентами. При дисперсии всегда есть диссипация: $\varepsilon(k_0) = \varepsilon'(k_0) - i\varepsilon''(k_0)$. Введем единичный вектор в направлении распространения волны: $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}'/|\mathbf{k}'|$. Тогда $k^2 = (k' - ik'')^2 = k_0^2(\varepsilon' - \varepsilon'')$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 k = \mathbf{k}_0 |\mathbf{k}|$,

$$\begin{aligned} k' &= k_0 \sqrt{(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + \varepsilon')/2}, \\ k'' &= k_0 \sqrt{(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} - \varepsilon')/2}, \end{aligned} \quad (18)$$

при этом $k_l = k \cos \alpha_l$, где $l = x, y, z$, а α_l — соответствующие углы между \mathbf{k}_0 и осями. Теперь

$$\begin{aligned} k_x'^2 - k_x''^2 + k_y'^2 - k_y''^2 + k_z'^2 - k_z''^2 &= k_0^2 \varepsilon', \\ 2(k_x' k_x'' + k_y' k_y'' + k_z' k_z'') &= k_0^2 \varepsilon''. \end{aligned}$$

Две величины с двумя штрихами можно исключить в силу условий $k_x''/k_x' = k_y''/k_y' = k_z''/k_z' = k''/k'$, поэтому дисперсионную поверхность изочастот следует рассматривать в четырехмерном пространстве. Она уже не является сферой. Даже если не учитывать потери, но считать, что имеет место дисперсия, то сферическая поверхность искажается. В случае бесконечной периодической плоскостойкой среды дополнительно имеем два уравнения, что приводит к тому, что гиперповерхности вращения нет, а имеем только набор точек, расположенных на окружностях вокруг оси k_z . Заметим, что если рассматривать трехмерный фотонный кристалл, описываемый только дисперсионным уравнением $f(k_0, \mathbf{k}) = 0$, то без диссипации имеем поверхность в трехмерном \mathbf{k} -пространстве, а при диссипации пространство становится уже шестимерным.

В общем случае диссипация различна по различным направлениям [14]. Разрешая дисперсионное уравнение в виде $k_0 = \varphi(\mathbf{k})$, имеем действительную трехмерно-периодическую (с периодом действительного вектора обратной решетки) четную функцию. Конечно, можно рассмотреть уравнения гомогенизации и, в частности, уравнения Френеля. Например, для бианизотропного метаматериала [15]

$$\begin{aligned} \det \left[\left(k_0^{-1} \hat{k} + \hat{\xi} \right) \hat{\mu}^{-1} \left(k_0^{-1} \hat{k} - \hat{\zeta} \right) + \hat{\varepsilon} \right] &= 0, \\ \det \left[\left(k_0^{-1} \hat{k} - \hat{\zeta} \right) \hat{\varepsilon}^{-1} \left(k_0^{-1} \hat{k} + \hat{\xi} \right) + \hat{\mu} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Усредненные по ячейке поля (с чертой сверху) и поляризации связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^e &= \varepsilon_0 \left(\hat{\varepsilon} - \hat{I} \right) \overline{\mathbf{E}} + c^{-1} \hat{\xi} \overline{\mathbf{H}} = \\ &= \varepsilon_0 \left[\left(\hat{\varepsilon} - \hat{I} \right) \overline{\mathbf{E}} + Z_0 \hat{\xi} \overline{\mathbf{H}} \right], \\ \mathbf{P}^m &= \mu_0 \left(\hat{\mu} - \hat{I} \right) \overline{\mathbf{H}} + c^{-1} \hat{\zeta} \overline{\mathbf{E}} = \\ &= \mu_0 \left[\left(\hat{\mu} - \hat{I} \right) \overline{\mathbf{H}} + Z_0^{-1} \hat{\zeta} \overline{\mathbf{E}} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где \hat{I} — единичный тензор, а \hat{k} — с точностью до i есть матрица оператора «ротор», действующего на плоскую волну $\mathbf{A} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ и состоящая из компонент вектора \mathbf{k} [15]. Уравнения (19) вторичны по отношению к первичному уравнению $f(k_0, \mathbf{k}) = 0$. Входящие в них тензоры проницаемостей и кросс-поляризаций зависят от k_0 и \mathbf{k} . Эти зависимости

определяются методами гомогенизации. Они неоднозначные, поэтому наилучшим критерием следует считать наименьшее расхождение закона дисперсии (19) с основным дисперсионным уравнением $f(k_0, \mathbf{k}) = 0$, полученным электродинамически строгим методом. Сами уравнения типа (19) зависят от модели поляризации. Можно, например, не вводить \mathbf{P}^m [4] или не учитывать мультипольные моменты [16]. В трехмерном фотонном кристалле в общем случае однозначно ввести импедансы нельзя, но отношения компонент полей являются трехмерно-периодическими функциями.

4. ДИФРАКЦИЯ НА КОНЕЧНЫХ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ПЛОСКОСЛОИСТЫХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

Задача дифракции плоской волны на полуплоскости (задача Френеля) определяется углом падения $\text{tg } \varphi = k_x/k_{0z}$, где величины относятся к вакууму и являются вещественными, даже если полуплоскость диссипативная. При этом существенно наличие отраженной волны. Отраженная волна отсутствует при падении E -волны под углом Брюстера на плоскую границу недиссипативного полупространства, при этом вдоль нее распространяется волна [12]. Для волны TE (или H) отсутствие отражения возможно при наличии у среды магнитных свойств. При диссипации $k_x = k'_x - ik''_x$ и угол становятся комплексным, а волна втекающей [12, 17]. Это известная поверхностная втекающая волна Ценнека, которая может быть как быстрой, так и медленной и является плазмон-поляритоном (очень медленную волну обычно называют плазмоном) [17]. Групповая скорость быстрого поляритона может превышать фазовую скорость и скорость света. Итак, условием получения дисперсионного уравнения (перехода от задачи дифракции к задаче о волнах) является условие равенства нулю коэффициента отражения $R = 0$ [12, 17] (или совпадения волнового импеданса падающей волны с входным импедансом структуры). Волна Ценнека является несобственной.

Если вместо полуплоскости имеет место ограниченный по толщине слой или несколько слоев, то задача Френеля несколько усложняется. Усложняется и задача об определении волн. Структура может поддерживать бесконечное число волн, которые могут быть поверхностными и вытекающими, причем переходящими друг в друга. Поверхностная волна

существует за счет внутреннего отражения и для идеального диэлектрика является собственной (для нее краевая задача самосопряженная). Она может перейти в вытекающую несобственную волну при уменьшении частоты. Диссипация приводит к тому, что поверхностная волна становится слаботекающей квазисобственной.

В общем случае на волновое движение оказывают влияние обе поверхности, что для одиночного слоя приводит к четному и нечетному распределению полей внутри него. Если толщина слоя растет и есть диссипация, то связь поверхностей пропадает и остается один четный плазмон. Если слева и справа от пластины находятся различные среды (например, вакуум и диэлектрик), то с одной стороны возможно втекание волны, а в другом — вытекание. Эти условия надо накладывать при нахождении дисперсионного уравнения методом шивания или методом матриц передачи.

Выше на рис. 3 приведены результаты решения дисперсионного уравнения (7) для нормального распространения волны ($k_x = 0$) в фотонном кристалле с наноразмерными металлическими пленками. На сверхнизких частотах дисперсия нормальная, переходящая затем в аномальную. Если величина $k_x > 0$ и фиксирована, то на низких частотах появляется запрещенная зона, а кривые сдвигаются вверх по нормированной частоте k_0d . Однако всегда k_x зависит от k_0 .

При возбуждении плоской волной $k_x = k_0 \sin \varphi$. Дисперсия для продольного волнового числа при разных углах падения приведена на рис. 4. Вдали от границы фотонного кристалла этот угол определяет распространение волны, что и объясняет возможность построения дисперсионных кривых. В области сверхнизких частот дисперсия аномальна и связана с большой диссипацией. Затем она переходит в нормальную вплоть до первой запрещенной зоны (точнее — до полосы с большим и потерями). Большие потери приводят к распространению с малой фазовой скоростью и к аномальной дисперсии. Далее имеют место несколько узких запрещенных зон. Почти полное исчезновение запрещенных зон связано с потерями. В ультрафиолетовой области металлы по свойствам близок к диэлектрику, потери падают, а запрещенные зоны вновь проявляются (см. рис. 3, 4).

Рассмотрим влияние пространственной дисперсии на гомогенизацию. Для простоты воспользуемся вторым уравнением (5), а гомогенизацию проведем на основе уравнения Френеля (2). При одинаковых толщинах $\varepsilon_{zz} = 2\varepsilon_m \varepsilon_d / (\varepsilon_m + \varepsilon_d) \approx 2\varepsilon_d$, поскольку

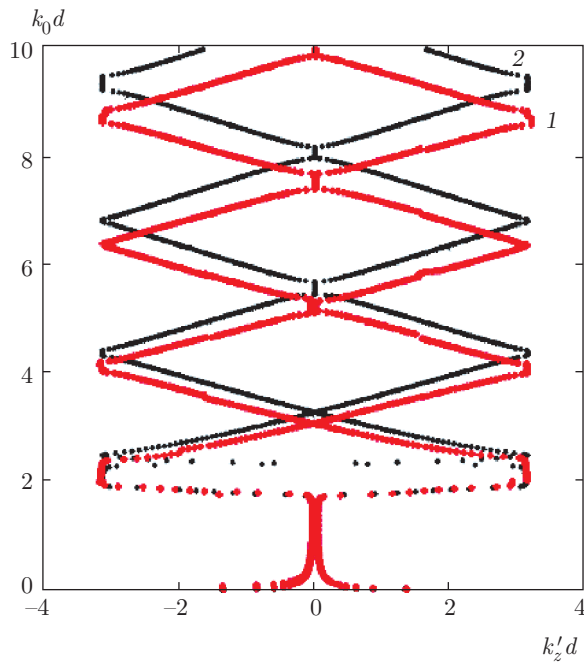


Рис. 4. Дисперсия при $\varphi = 0$ (1) и $\sin \varphi = 0.9$ (2) при $\varepsilon_L = 10.0 - 0.0001i$, $\varepsilon_d = 3.9 - 0.0001i$, $\omega_p = 2.2 \cdot 10^{16}$ Гц, $\omega_c = 0.5 \cdot 10^{14}$ Гц, толщины металлических и диэлектрических слоев $d_1 = d_2 = 50$ нм

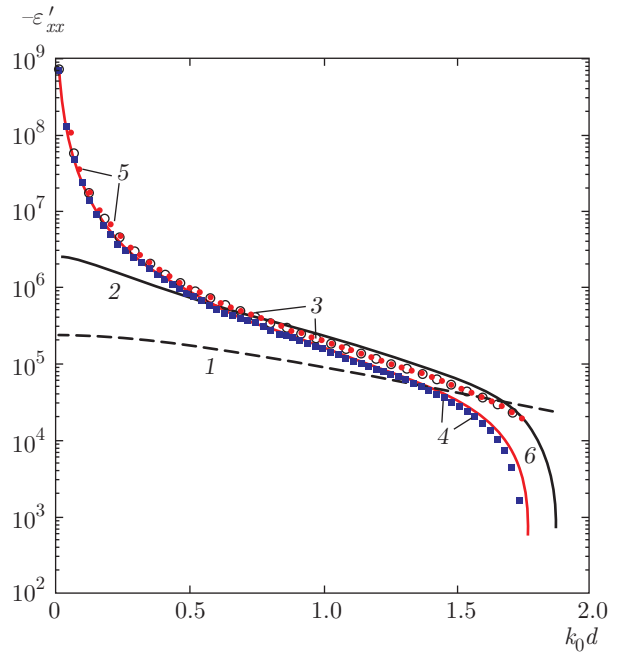


Рис. 5. (В цвете онлайн) Отрицательная действительная часть диэлектрической проницаемости на основе модели (5) — результаты 1, 3, 5 с множителем 10^5 , и на основе уравнения Френеля (2) — 2, 4, 6. Результаты 1, 2 соответствуют структуре для рис. 3, результаты 3–6 — структуре для рис. 4, причем $\sin \varphi = 0$ для 3 и 4 и $\sin \varphi = 0.9$ для 5 и 6

диэлектрическая проницаемость металла большая. Первое уравнение (5) дает $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_m/2$, а из (2) имеем $\varepsilon_{xx} = k_z^2 / (k_0^2 - k_x^2 / \varepsilon_{zz})$. Поскольку выражение в скобках в знаменателе положительное, ГММ возникает, когда k_z^2 имеет отрицательную действительную часть. Это имеет место во всех запрещенных зонах (зонах с большими потерями). Результаты приведены на рис. 5, 6. Хотя значения компоненты ε_{xx} в обоих моделях разнятся на порядки, ее обращение в нуль происходит на частотах, примерно соответствующих условию $k_0 d = 2$, т.е. условие квазистатики $\lambda \gg d$ выполняется. Заметим, что приводящая к пространственной дисперсии гомогенизация позволяет определить дисперсионное уравнение объемных плазмонных волн, $\varepsilon_{xx}(k_0, \mathbf{k}) = 0$, которое в нашем случае сводится к $k_z^2 \varepsilon_{zz} = 0$. Очевидно, плазменные колебания ($\varepsilon_m = 0$) следует исключить из рассмотрения волн, поэтому имеем дисперсионное уравнение $k_z(k_0, k_x) = 0$. При наличии волны в бесконечном фотонном кристалле в зоне распространения величина k_x^2 должна иметь большую действительную часть, т.е. волна в направлении x должна быть медленной. Такие результаты для действительной неограниченной компоненты k_x и ГММ с графеновыми листами приведены в работе [13].

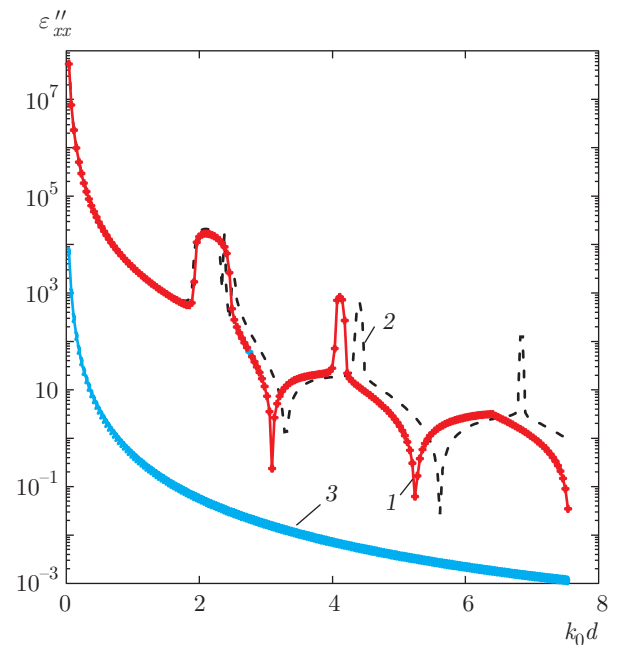


Рис. 6. Эффективные диэлектрические потери для структуры, соответствующей рис. 4, на основе модели (5) — результаты 1, 2, и модели (2) — 3

Итак, задача об определении квазисобственных волн и несобственных волн приводит к комплексным $k_x = k'_x - ik''_x$, тогда как задача о падении плоской волны — задача Френеля (и вообще задача дифракции) — решается при действительных k_x . Для выполнения граничных условий при этом существенно наличие отраженной волны. Для толстой диссипативной структуры отражением от второй границы можно пренебречь. Реально плоскостойкие структуры (включая квазипериодические) имеют не только конечное число слоев или периодов, но и конечные размеры вдоль оси x . В этом случае рассмотрение квазипериодических структур как бесконечного фотонного кристалла является приближенным. Например, имеет место пропускание в запрещенных зонах даже для модели без диссипации (что связано с радиационными потерями). Им можно пренебречь, если число периодов весьма большое.

Рассматривать волны вдоль слоев также нельзя, поскольку есть отражения от границы и возбуждение краевых волн. В этом случае удобно считать величину k_x действительной и совпадающей со значением в плоской возбуждающей волне, а дисперсионное уравнение взять для периодического фотонного кристалла, получить эффективную диэлектрическую проницаемость и решение задачи с ее использованием. В случае малого числа периодов (порядка десятков) можно использовать точное решение задачи дифракции на многослойной бесконечной по x структуре. Это, в частности, позволяет

определить поля в слоях и провести гомогенизацию. Она важна для получения эффективных параметров (1), которые в принципе позволят решить задачу для дифракции на плоскостойкой структуре любой формы. В этом случае как раз следует использовать дисперсионное уравнение (2) и уравнения (3), (4) для построения поверхности дисперсии в \mathbf{k} -пространстве.

5. ВОЛНЫ В ПЛОСКОСЛОИСТЫХ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОНЕЧНЫХ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

В силу сказанного для получения свойств гиперболичности рассматриваем бесконечные по x квазипериодические структуры с большим числом периодов, считая k_x заданным и действительным. Для простоты ограничимся двумя слоями в периоде, но считаем, что слои могут обладать и магнитными свойствами, т.е. $k_{lz} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_l \mu_l - k_x^2}$. Тогда $\rho_l^E = k_{lz}/k_0 \varepsilon_l$, $\rho_l^H = k_0 \mu_l / k_{lz}$. Исследование плоскостойких структур удобно проводить методом матриц передачи. Рассмотрим вектор-столбец $F_l = (E_l, H_l)$. Кроме классической матрицы передачи, связывающей поля в соседних слоях, $F_l = \hat{a}_l F_{l+1}$, используем еще волновые матрицы. Представляя поля через падающие и отраженные волны в слое с амплитудами A_l^\pm и сшивая их на границе слоев l и $l+1$, получаем связь

$$\begin{pmatrix} A_{l+1}^+ \\ A_{l+1}^- \end{pmatrix} = \hat{t}_l^{-1} \begin{pmatrix} A_l^+ \\ A_l^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\exp(-ik_l t_l)(\rho_l + \rho_{l+1})}{2\rho_l} & \frac{\exp(ik_l t_l)(\rho_l - \rho_{l+1})}{2\rho_l} \\ \frac{\exp(-ik_l t_l)(\rho_l - \rho_{l+1})}{2\rho_l} & \frac{\exp(ik_l t_l)(\rho_l + \rho_{l+1})}{2\rho_l} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_l^+ \\ A_l^- \end{pmatrix}. \quad (21)$$

$$\hat{t}_l = \begin{bmatrix} \frac{\exp(ik_l t_l)(\rho_l + \rho_{l+1})}{2\rho_{l+1}} & \frac{\exp(ik_l t_l)(\rho_{l+1} - \rho_l)}{2\rho_{l+1}} \\ \frac{\exp(-ik_l t_l)(\rho_{l+1} - \rho_l)}{2\rho_{l+1}} & \frac{\exp(-ik_l t_l)(\rho_l + \rho_{l+1})}{2\rho_{l+1}} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Здесь индекс моды у импеданса и индекс « z » у постоянной распространения опущены, а t_l — толщины слоев. Определитель матрицы \hat{a} есть единица, тогда как $\det \hat{t}_l^{-1} = \rho_{l+1}/\rho_l$. Эта волновая матрица отличается от классической волновой матрицы, поскольку последняя связывает волны полей слева и справа от слоя, и имеет вид [18]

$$\hat{t}_l = \begin{bmatrix} \exp(i\theta_l)\rho_{11}^+ + \exp(-i\theta_l)\rho_{11}^- & \exp(i\theta_l)\rho_{12}^+ + \exp(-i\theta_l)\rho_{12}^- \\ \exp(i\theta_l)\rho_{21}^+ + \exp(-i\theta_l)\rho_{21}^- & \exp(i\theta_l)\rho_{22}^+ + \exp(-i\theta_l)\rho_{22}^- \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где $\theta_l = k_l t_l$ и обозначены «импедансы», удовлетворяющие следующим соотношениям симметрии: $\rho_{11}^+ = \rho_{22}^-$, $\rho_{11}^- = \rho_{22}^+$, $\rho_{12}^+ = \rho_{21}^-$, $\rho_{12}^- = \rho_{21}^+$, причем

$$\begin{aligned} \rho_{11}^+ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\rho_l}{\rho_{l+1}} + \frac{\rho_{l-1}}{\rho_l} + \frac{\rho_{l-1}}{\rho_{l+1}} \right), \\ \rho_{11}^- &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_{l+1}} - \frac{\rho_{l-1}}{\rho_l} + \frac{\rho_{l-1}}{\rho_{l+1}} \right), \\ \rho_{12}^+ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_{l+1}} + \frac{\rho_{l-1}}{\rho_l} - \frac{\rho_{l-1}}{\rho_{l+1}} \right), \\ \rho_{12}^- &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\rho_l}{\rho_{l+1}} - \frac{\rho_{l-1}}{\rho_l} - \frac{\rho_{l-1}}{\rho_{l+1}} \right). \end{aligned}$$

Имеем $\det \hat{t}_l = \sqrt{\rho_{l-1}/\rho_{l+1}}$. Нормированные волновые матрицы для (21) вводятся как $\hat{T}_l = \sqrt{\rho_{l+1}/\rho_{l-1}} \hat{t}_l$, т.е. $\det \hat{T}_l = 1$. Матрицы передачи можно использовать для моделирования квазипериодических структур. Используя матрицы \hat{T}_l , следует вводить матрицы скачков волновых сопротивлений [18]. Желательно использовать для улучшения устойчивости алгоритмов перемножения матриц рекуррентные итерационные формулы для цепочки четырехполюсников (см. формулы (2.45)–(2.48) из [18]).

Бесконечные периодические структуры будем моделировать как конечные с большим числом периодов. Рассмотрим полубесконечный фотонный кристалл с матрицей передачи \hat{a}^n первых n периодов. Поле вблизи границы возмущено, однако вглубине можно наложить условия Флоке. Тогда

$$\begin{aligned} [\hat{a}^{-n} - \exp(i\Psi)\hat{a}^{-n-1}] \begin{pmatrix} 1 + R \\ (1 - R)/Z_0 \end{pmatrix} = \\ = \hat{q}^{(n)} \begin{pmatrix} 1 + R \\ (1 - R)/Z_0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Коэффициент отражения определяется из уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{q}_{11}^{(n)}(1 + R) + \hat{q}_{12}^{(n)}(1 - R) &= 0, \\ \hat{q}_{21}^{(n)}(1 + R) + \hat{q}_{22}^{(n)}(1 - R) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Одно из следующих отсюда соотношений имеет вид $\det \hat{q}^{(n)} = 1$, а второе определяет искомый коэффициент:

$$y^2 = \left(\frac{1 - R}{1 + R} \right)^2 = \frac{\hat{q}_{11}^{(n)} \hat{q}_{21}^{(n)}}{\hat{q}_{22}^{(n)} \hat{q}_{12}^{(n)}}. \quad (26)$$

Аналогичный результат может быть получен и с использованием матриц (22). Пусть \hat{t}_0 — матрица

скачка волновых сопротивлений от полупространства слева (скажем, вакуума) к первому слою полубесконечной структуры. Очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \hat{u}^{(n)} \begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} &= [\hat{t}^{-n} - \exp(i\Psi)\hat{t}^{-(n+1)}] \times \\ &\times \hat{t}_0^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

отсюда $R = -u_{11}^{(n)}/u_{12}^{(n)} = -u_{22}^{(n)}/u_{21}^{(n)}$. Здесь также $\det u^{(n)} = 1$. Дисперсионное уравнение для плазмонов вдоль границы полубесконечной структуры есть $R = 0$. Если использовать входной импеданс z_{in} периодической структуры на границе n периодов, то дисперсия также может быть получена путем решения уравнения

$$Z_{0in} = \frac{\hat{a}_{11}^n Z_{in} + \hat{a}_{12}^n}{\hat{a}_{21}^n Z_{in} + \hat{a}_{22}^n},$$

где Z_{0in} — входной импеданс для соответствующей волны (E или H) в вакууме, $Z_{in} = Z_0 z_{in}$.

Еще один метод получения дисперсионного уравнения можно описать следующим образом. Поперечные компоненты E_1, H_1 на границе при $z = 0$ связаны с соответствующими компонентами E_n, H_n при $z = nd$ матрицей \hat{a}^n . Если это граница структуры, то компоненты на ней связаны неким условием типа условия излучения. Это относится и к первой границе. В конечной структуре эти условия могут быть двух типов: поверхностная втекающая волна и антиповерхностная вытекающая волна [12]. В первом случае на первой границе имеем

$$E_x = E_0 \exp(-ik_{0z}z), \quad H_y = Z_{0in}^{-1} E_0 \exp(-ik_{0z}z).$$

Здесь $k_{0z} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$, причем $\text{Im} k_{0z} > 0$ для поверхностной волны. Она медленная, а при наличии диссипации втекающая: $\text{Re}(k_{0z}) > 0$. Случай $\text{Im} k_{0z} > 0$ реализуется для быстрой вытекающей волны ($k'_x < k_0$). Если поверхность $z = nd$ граничит со средой, описываемой ε и μ , то $k_{(n+1)z} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon \mu - k_x^2}$ и возможны оба случая: вытекания из среды и втекания в среду.

Таким образом, могут быть реализованы четыре режима. Моделировать полубесконечный фотонный кристалл можно, увеличивая n , но при этом следует рассматривать только втекающие волны. Вытекание требует наличия запасенной энергии, что в бесконечных диссипативных структурах невозможно. Так, невозможна вытекающая волна в вакуум из диссипативного полупространства, например, заполненного плазмой с $\varepsilon' < 1$. Для него имеется только втекающая волна Ценнека, хотя для плазменного

волновода (слоя) вытекающая волна возможна. Рассмотрим E -волну. Для полубесконечного фотонного кристалла можно записать

$$E_{(n+1)x} = E_n \exp[-ik_z(z - nd)],$$

$$H_{(n+1)y} = (Z_0 z_{in}^E)^{-1} E_n \exp[-ik_z(z - nd)].$$

Сшивая поля на границах имеем

$$E_0 = E_1, \quad (Z_0 z_0^E)^{-1} E_1 = H_1, \quad H_n = (Z_0 z_{in}^E)^{-1} E_n,$$

$$E_1 = a_{11}^{(n)} E_n + a_{12}^{(n)} H_n, \quad H_1 = a_{21}^{(n)} E_n + a_{22}^{(n)} H_n,$$

откуда получаем дисперсионное уравнение

$$z_0^E = \sqrt{1 - k_x^2/k_0^2} = \frac{a_{11}^{(n)} + a_{12}^{(n)}(Z_0 z_{in}^E)^{-1}}{Z_0 a_{21}^{(n)} + a_{22}^{(n)}/z_{in}^E}. \quad (28)$$

Оно тем точнее, чем больше n . Для его решения удобно использовать итерационную формулу $k_x = \sqrt{1 - (z_0^E)^2}$ совместно с формулой (7) и вычислением \hat{a}^n и z_{in}^E .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере простейшей плоскостройной среды, состоящей из двух чередующихся слоев, описываемой матричными соотношениями и достаточно простыми и точными дисперсионными уравнениями, рассмотрен вопрос о ее гиперболичности. Гиперболичность может проявляться в бесконечных фотонных кристаллах и конечных образцах ГММ, причем постановки соответствующих задач различны. В первом случае — это задачи о собственных (квазисобственных) волнах, а во втором — задачи дифракции. Волны в плоскостройных фотонных кристаллах с диссипацией комплексные (квазисобственные) с частотной дисперсией, причем пространственная дисперсия проявляется как взаимосвязь поперечной и продольной компонент в виде зависимости зонной структуры $k_z(k_0)$ от k_x и от номера зоны Бриллюэна. При этом k_x зависит от k_z .

Интересен идеальный случай отсутствия диссипации, когда имеются зависящие от k_x запрещенные зоны, но сам этот параметр является независимым. В этом случае при падении плоской волны поле в глубине от границы раздела вакуум–ГММ слабо отличается от поля соответствующей собственной волны фотонного кристалла. Слабо различаются и результаты гомогенизации, выполненные путем усреднения поляризации. Но для гомогенизации можно использовать и результаты решения задач дифракции, например, определив коэффициент отражения

от полубесконечной структуры [19], в том числе при разных углах падения.

Гомогенизация как в бесконечном фотонном кристалле, так и в конечном ГММ — процедура неоднозначная. Можно использовать уравнения (2), (7), (10), (12) и с ними прямые уравнения типа (5) [5]. В частности, вычислив дисперсию и поля, можно найти усредненные поля и поляризации:

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{Ld} \int_0^d \int_0^L \mathbf{E}(x, z) dx dz,$$

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{Ld} \int_0^d \int_0^L \mathbf{H}(x, z) dx dz,$$

$$\langle \mathbf{P}^e \rangle = \frac{\varepsilon_0}{Ld} \int_0^d \int_0^L [\varepsilon(z) - 1] \mathbf{E}(x, z) dx dz,$$

$$\langle \mathbf{P}^m \rangle = \frac{\mu_0}{Ld} \int_0^d \int_0^L [\mu(z) - 1] \mathbf{H}(x, z) dx dz,$$

соответственно определив далее

$$\langle \mathbf{P}^e \rangle = \varepsilon_0 (\hat{\varepsilon} - \hat{I}) \langle \mathbf{E} \rangle, \quad \langle \mathbf{P}^m \rangle = \mu_0 (\hat{\mu} - \hat{I}) \langle \mathbf{H} \rangle.$$

Результат зависит от выбора длины усреднения L .

Получены дисперсионные уравнения и приведены результаты их решений для волн в бесконечной диссипативной плоскостройной периодической структуре, а также для поверхностных волн на границе полубесконечной структуры и на границах структуры с конечным числом слоев. Дисперсионные уравнения для бесконечной и полубесконечной структур совпадают, если диэлектрическая проницаемость граничащего с последней полупространства совпадает с диэлектрической проницаемостью одного из слоев. Это характерно только для структур с чередованием двух слоев. Например, полубесконечная структура, граничащая с вакуумом, должна иметь слои (например, металлические), разделенные вакуумными промежутками.

При рассмотрении дифракции поперечное волновое число следует брать действительным, при этом получается другая эффективная диэлектрическая проницаемость. В этом случае, выполнив гомогенизацию, можно с учетом полученной дисперсии построить гиперповерхности (3), (4) с учетом того, что они зависят от зоны Бриллюэна. В принципе, возможны ГММ только с диэлектрическими слоями,

если их проницаемости сильно различаются, а потери малы. Возбуждать такой ГММ следует эванесцентными модами, для которых $k_x > k_0$. В пренебрежении потерями тогда можно получить условия $k_0^2 \varepsilon_1 - k_x^2 > 0$ и $k_0^2 \varepsilon_2 - k_x^2 < 0$, при которых возможно распространение блоховских волн [20]. В простейшей модели $d_1 = d_2$, $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ имеем $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_2$, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_1/2$. Однако учет пространственной дисперсии по формуле (2) приводит к ГММ с $\varepsilon_{xx} < 0$, если $k_x^2 > 2k_0^2 \varepsilon_2$ при $k_z^2 > 0$. ГММ имеет место и при условиях $k_x^2 < 2k_0^2 \varepsilon_2$ и $k_z^2 < 0$, т. е. в запрещенной зоне. Пример показывает важность учета пространственной дисперсии.

Гиперболичность — свойство не только среды, но и волны (ее частоты и волнового вектора) [14], в силу чего это свойство зависит, например, от угла падения и ориентации образца [13]. Для экспериментального подтверждения или использования свойства гиперболичности можно рассматривать только дифракцию. В частности, подтверждением гиперболичности может служить сильная и несимметричная экспериментальная зависимость коэффициента отражения от угла падения и ориентации поляризации для ГММ со срезом под углом к оси (см. рис. 1 (2)). В частности, возможно почти полное поглощение [13]. Волны в диссипативном ГММ важны при построении теории излучателей внутри больших образцов таких материалов. Возбуждение и исследование распространения плазмонов вдоль границы вакуум–ГММ большой толщины также представляет теоретический и экспериментальный интерес, поскольку можно связать их параметры с параметрами ГММ. Исследуя свойства плазмонов в ГММ на основе графена, можно делать выводы об усредненной проводимости графеновых листов с учетом влияния слоев диэлектрика. Рассмотренные структуры (см. рис. 1) могут быть использованы как волноводы для терагерцевого и инфракрасного диапазонов.

Другие конфигурации ГММ (например, проводящие фотонные кристаллы) требуют для анализа их свойств более сложных подходов, в частности, использования интегральных уравнений [14]. Для получения качественных ГММ следует всеми мерами снижать потери. В [14] введен связанный с потерями коэффициент негиперболичности.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (№ 3.1155.2014/К) и Российским научным фондом (проект № 16-19-10033).

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Guo, W. Newman, C. L. Cortes, and Z. Jacob, *Adv. Optoelectron.* **2012**, ID 452502 (2012).
2. P. Shekhar, J. Atkinson, and J. Zubin, *Hyperbolic Metamaterials: Fundamentals and Applications*, Nano Convergence, 1–14 (2014).
3. Л. Фелсен, Н. Маркувиц, *Излучение и рассеяние волн*, Мир, Москва (1978).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
5. A. V. Chebykin, A. A. Orlov, C. R. Simovski et al., *Phys. Rev. B* **86**, 115420 (2012).
6. М. В. Давидович, Ю. В. Стефюк, П. А. Шилковский, *ЖТФ* **82**, 7 (2012).
7. М. В. Давидович, О. Ю. Алексеев, *Радиотехн. и электрон.* **49**, 665 (2004).
8. G. W. Hanson, *J. Appl. Phys.* **103**, 064302 (2008).
9. G. Ya. Slepian, S. A. Maksimenko, L. Lakhtakia et al., *Phys. Rev. B* **60**, 17136 (1999).
10. G. Lovat, G. W. Hanson, R. Araneo, and P. Burghignoli, *Phys. Rev B* **87**, 115429 (2013).
11. M. V. Davidovich, J. V. Stephuk, and I. V. Shilin, *Proc. SPIE* **6537**, 65370F-65370K (2007).
12. Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны, Радио и связь, Москва* (1988).
13. I. S. Nefedov, C. A. Valagiannopoulos, and L. Melnikov, *J. Opt.* **15**, 114003 (2013).
14. М. В. Давидович, И. С. Нефедов, *ЖЭТФ* **118**, 673 (2014).
15. R. D. Graglia, P. L. E. Uslenghi, and R. E. Zich, *IEEE Trans. Antennas and Propagation* **39**, 83 (1991).
16. R. E. Raab and O. L. Lange, *Multipole Theory in Electromagnetism: Classical, Quantum, and Symmetry Aspects with Applications*, Kings Lynn: Clarendon Press, Oxford (2005).
17. М. В. Давидович, *Втекающие и вытекающие несобственные моды — анализ диссипативных дисперсионных уравнений и волна Ценнека*, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов (2014).
18. Л. А. Фельдштейн, Л. Р. Явич, *Синтез четырехполосников и восьмиполосников на СВЧ*, Радио и связь, Москва (1971).
19. L. Levin, *J. Inst. Electr. Eng.* **94**, 27, 111 (1947).
20. Е. Ю. Альтшулер, И. С. Нефедов, *Радиотехн. и электрон.* **53**, 67 (2008).