

О СТРОГОЙ ПАРАБОЛИЧНОСТИ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО СПЕКТРА ДЛЯ ПЕРЕХОДА АНДЕРСОНА

И. М. Суслов*

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 июня 2015 г.,
после переработки 10 июня 2016 г.

Использование известной «алгебры мультифрактальности» приводит к функциональному уравнению для аномальных размерностей Δ_q , решение которого $\Delta = \chi q(q-1)$ соответствует строгой параболичности мультифрактального спектра. Этот результат является аргументом в пользу того, что соответствие нелинейных σ -моделей с исходными неупорядоченными системами не является точным.

DOI: 10.7868/S0044451016110158

В последнее время большой интерес вызывает исследование мультифрактальных свойств волновых функций, возникающих в точке перехода Андерсона (см. обзор [1]). Они проявляются в аномальном скейлинге

$$\langle P_q \rangle \sim L^{-D_q(q-1)} \sim L^{-d(q-1)+\Delta_q} \quad (1)$$

для так называемых обратных отношений участия (inverse participation ratios)

$$P_q = \int d^d r |\Psi(\mathbf{r})|^{2q}, \quad (2)$$

где $\Psi(\mathbf{r})$ — нормированная волновая функция электрона в случайном потенциале для конечной системы, имеющей форму d -мерного куба со стороной L . В металлической фазе функция $\Psi(\mathbf{r})$ распространяется по всей системе и из условия нормировки следует, что

$$|\Psi(\mathbf{r})|^2 \sim L^{-d}, \quad P_q \sim L^{-d(q-1)}.$$

Согласно (1), в критической точке вместо геометрической размерности d возникает набор фрактальных размерностей D_q , отличие которых от d определяет аномальными размерностями Δ_q .

Как отмечалось в работе [1], знание аномальных размерностей Δ_q позволяет установить поведение произвольных корреляторов вида

$$\langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^{2q_1} |\Psi(\mathbf{r}_2)|^{2q_2} \dots |\Psi(\mathbf{r}_n)|^{2q_n} \rangle, \quad (3)$$

однако конкретные результаты приведены только для $n = 2$. Ниже показано, что рассмотрение случая $n > 2$ приводит к функциональному уравнению для Δ_q , решение которого соответствует строго параболическому характеру мультифрактального спектра. Анализ основан на предположении о степенной зависимости от разности координат, которая может быть обоснована в области малых q_i .

Результат для $n = 1$ следует из (1), (2):

$$\langle |\Psi(\mathbf{r})|^{2q} \rangle = L^{-d} \langle P_q \rangle \sim L^{-dq+\Delta_q}. \quad (4)$$

Для $n = 2$ имеем в предположении степенной зависимости от $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$

$$\langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^{2q_1} |\Psi(\mathbf{r}_2)|^{2q_2} \rangle = A \left(\frac{L}{r_{12}} \right)^\alpha, \quad (5)$$

где нормировочный коэффициент A и показатель α могут быть установлены с помощью так называемой алгебры мультифрактальности [1, 2]. При $r_{12} \sim L$ функции $\Psi(\mathbf{r}_1)$ и $\Psi(\mathbf{r}_2)$ являются статистически независимыми¹⁾, так что коррелятор (5) разбивается на произведение,

$$\langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^{2q_1} \rangle \langle |\Psi(\mathbf{r}_2)|^{2q_2} \rangle \sim A \sim L^{-dq_1+\Delta_{q_1}} L^{-dq_2+\Delta_{q_2}}, \quad (6)$$

¹⁾ В локализованном режиме, когда $\xi \ll L$ (ξ — радиус локализации), функции $\Psi(\mathbf{r}_1)$ и $\Psi(\mathbf{r}_2)$ статистически независимы при $r_{12} \gtrsim \xi$, тогда как при $r_{12} \lesssim \xi$ реализуется степенное поведение коррелятора; тем самым, оба свойства приближенно справедливы при $r_{12} \sim \xi$. Такая ситуация сохраняется при увеличении ξ до величины порядка L , т. е. на границе критической области.

* E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

которое оценивается с помощью (4). При $r_{12} = 0$ расходимость в (5) обрезается на атомном масштабе a ,

$$\langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^{2q_1+2q_2} \rangle \sim A \left(\frac{L}{a}\right)^\alpha \sim L^{-d(q_1+q_2)+\Delta_{q_1+q_2}}, \quad (7)$$

и из (6), (7) получаются результаты

$$\begin{aligned} A &\sim L^{-d(q_1+q_2)+\Delta_{q_1}+\Delta_{q_2}}, \\ \alpha &= \Delta_{q_1+q_2} - \Delta_{q_1} - \Delta_{q_2} \end{aligned} \quad (8)$$

в соответствии с [1, 2].

Для случая $n = 3$ полагаем аналогично ($r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$)

$$\begin{aligned} \langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^{2q_1} |\Psi(\mathbf{r}_2)|^{2q_2} |\Psi(\mathbf{r}_3)|^{2q_3} \rangle = \\ = A \left(\frac{L}{r_{12}}\right)^\alpha \left(\frac{L}{r_{13}}\right)^\beta \left(\frac{L}{r_{23}}\right)^\gamma, \end{aligned} \quad (9)$$

и определяем A, α, β, γ из алгебры мультифрактальности. Если все $r_{ij} \sim L$, то имеем

$$\begin{aligned} \langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^{2q_1} \rangle \langle |\Psi(\mathbf{r}_2)|^{2q_2} \rangle \langle |\Psi(\mathbf{r}_3)|^{2q_3} \rangle \sim \\ \sim A \sim L^{-dq_1+\Delta_{q_1}} L^{-dq_2+\Delta_{q_2}} L^{-dq_3+\Delta_{q_3}}, \end{aligned} \quad (10)$$

тогда как для $r_{12} = 0, r_{13} \sim r_{23} \sim L$

$$\begin{aligned} \langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^{2q_1+2q_2} \rangle \langle |\Psi(\mathbf{r}_3)|^{2q_3} \rangle \sim \\ \sim A \left(\frac{L}{a}\right)^\alpha \sim L^{-d(q_1+q_2)+\Delta_{q_1+q_2}} L^{-dq_3+\Delta_{q_3}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичные соотношения верны для $r_{13} = 0, r_{12} \sim r_{23} \sim L$ и $r_{23} = 0, r_{12} \sim r_{13} \sim L$. Наконец, при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3$ имеем

$$\begin{aligned} \langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^{2q_1+2q_2+2q_3} \rangle \sim A \left(\frac{L}{a}\right)^{\alpha+\beta+\gamma} \sim \\ \sim L^{-d(q_1+q_2+q_3)+\Delta_{q_1+q_2+q_3}}, \end{aligned} \quad (12)$$

так что для четырех величин A, α, β, γ получается пять соотношений:

$$\begin{aligned} A &\sim L^{-d(q_1+q_2+q_3)+\Delta_{q_1}+\Delta_{q_2}+\Delta_{q_3}}, \\ \alpha &= \Delta_{q_1+q_2} - \Delta_{q_1} - \Delta_{q_2}, \\ \beta &= \Delta_{q_1+q_3} - \Delta_{q_1} - \Delta_{q_3}, \\ \gamma &= \Delta_{q_2+q_3} - \Delta_{q_2} - \Delta_{q_3}, \\ \alpha + \beta + \gamma &= \Delta_{q_1+q_2+q_3} - \Delta_{q_1} - \Delta_{q_2} - \Delta_{q_3}, \end{aligned} \quad (13)$$

которые не могут удовлетворяться при произвольном виде Δ_q ; необходимо выполнение условия самосогласования

$$\begin{aligned} \Delta_{q_1+q_2+q_3} = \Delta_{q_1+q_2} + \Delta_{q_1+q_3} + \Delta_{q_2+q_3} - \\ - \Delta_{q_1} - \Delta_{q_2} - \Delta_{q_3}, \end{aligned} \quad (14)$$

которое является функциональным уравнением для Δ_q . Легко проверить, что (14) выполнено для спектра $\Delta_q = aq^2 + bq$, и фактически это единственная возможная форма. Действительно, полагая $q_1 = q, q_2 = q_3 = \delta$, имеем

$$\Delta_{q+2\delta} = 2\Delta_{q+\delta} - \Delta_q + \Delta_{2\delta} - 2\Delta_\delta \quad (15)$$

и разложение до второго порядка по δ дает

$$\Delta_q'' = \Delta_0'', \quad (16)$$

где учтено условие $\Delta_0 = 0$, следующее из формул (1), (2). Поскольку Δ_0'' — это просто константа, то интегрирование (16) дает произвольный полином по q второго порядка, который сводится к виду $\Delta_q = aq^2 + bq$ при учете равенства $\Delta_0 = 0$. При отсутствии на оси q особых точек можно использовать еще одно соотношение $\Delta_1 = 0$, следующее из (1), (2), и получить окончательный результат²⁾

$$\Delta_q = \chi q(q-1), \quad \chi > 0. \quad (17)$$

Положительность χ следует из неравенства $\tau_q'' \leq 0$, где $\tau_q = D_q(q-1)$ [1].

Для общего n -точечного коррелятора имеем

$$\begin{aligned} \langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^{2q_1} |\Psi(\mathbf{r}_2)|^{2q_2} \dots |\Psi(\mathbf{r}_n)|^{2q_n} \rangle = \\ = A \prod_{i < j} \left(\frac{L}{r_{ij}}\right)^{\alpha_{ij}} \end{aligned} \quad (18)$$

и аналогично предыдущему легко получить

$$\begin{aligned} A &\sim L^{-d(q_1+q_2+\dots+q_n)+\Delta_{q_1}+\Delta_{q_2}+\dots+\Delta_{q_n}}, \\ \alpha_{ij} &= \Delta_{q_i+q_j} - \Delta_{q_i} - \Delta_{q_j}. \end{aligned} \quad (19)$$

Переписывая произведение (18) в виде, выявляющем зависимость от $r_{i,n}$ и $r_{i,n-1}$,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \left(\frac{L}{r_{ij}}\right)^{\alpha_{ij}} = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{L}{r_{i,n}}\right)^{\alpha_{i,n}} \times \\ \times \prod_{i=1}^{n-2} \left(\frac{L}{r_{i,n-1}}\right)^{\alpha_{i,n-1}} \prod_{i=1}^{n-3} \prod_{j=i+1}^{n-2} \left(\frac{L}{r_{ij}}\right)^{\alpha_{ij}} \end{aligned} \quad (20)$$

²⁾ Отсутствие особых точек в интервале (0, 1), необходимое для справедливости (17), подтверждается численными экспериментами для размерностей $d = 2, 3, 4$. В общем случае нужно использовать форму $\Delta_q = aq^2 + bq$ в каждом из интервалов регулярности, так что зависимость Δ_q может состоять из нескольких параболических или линейных участков. Имеются указания на то, что такой вариант реализуется в высоких размерностях.

и полагая $\mathbf{r}_{n-1} = \mathbf{r}_n$, имеем

$$\begin{aligned} \langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^{2q_1} |\Psi(\mathbf{r}_2)|^{2q_2} \dots |\Psi(\mathbf{r}_{n-1})|^{2q_{n-1}+2q_n} \rangle \sim \\ \sim A \left(\frac{L}{a}\right)^{\alpha_{n-1,n}} \prod_{i=1}^{n-2} \left(\frac{L}{r_{i,n-1}}\right)^{\alpha_{i,n-1}+\alpha_{i,n}} \times \\ \times \prod_{i=1}^{n-3} \prod_{j=i+1}^{n-2} \left(\frac{L}{r_{ij}}\right)^{\alpha_{ij}}, \quad (21) \end{aligned}$$

что должно совпадать с результатом для $(n-1)$ -точечного коррелятора, следующего из (18) в результате замены $n \rightarrow n-1$ и $q_{n-1} \rightarrow q_{n-1} + q_n$. Условие совпадения сводится к равенству

$$\begin{aligned} \Delta_{q_i+q_{n-1}+q_n} = \Delta_{q_i+q_{n-1}} + \Delta_{q_i+q_n} + \Delta_{q_{n-1}+q_n} - \\ - \Delta_{q_i} - \Delta_{q_{n-1}} - \Delta_{q_n}, \quad (22) \end{aligned}$$

которое аналогично (14) и выполняется для параболического спектра. Таким образом, функциональная форма (17) обеспечивает самосогласованность результатов (18), (19) для произвольных n -точечных корреляторов.

Выше предполагалось, что коррелятор (3) определяется единственным произведением от степеней r_{ij} . В общем случае в правой части (18) могут содержаться менее сингулярные члены, определяемые показателями $\tilde{\alpha}_{ij}$, сумма которых меньше суммы α_{ij} . Если окажется, что некоторые $\tilde{\alpha}_{ij}$ больше, чем α_{ij} , то проведенный анализ будет несправедливым. В отсутствии таких членов можно убедиться при достаточно малых q_i . Действительно, разложение (18) по q_i при $\Delta_q = aq^2 + bq$ показывает, что для справедливости (19) следует положить

$$\begin{aligned} \langle \ln |\Psi(\mathbf{r}_i)|^2 \rangle &= (b-d) \ln L, \\ \langle \ln^2 |\Psi(\mathbf{r}_i)|^2 \rangle &= (b-d)^2 \ln^2 L + 2a \ln L, \\ \langle \ln |\Psi(\mathbf{r}_i)|^2 \ln |\Psi(\mathbf{r}_j)|^2 \rangle &= \\ &= (b-d)^2 \ln^2 L + 2a \ln(L/r_{ij}). \quad (23) \end{aligned}$$

Принимая степенное поведение коррелятора (5), получим выполнение этих соотношений при $n=2$, после чего они автоматически выполняются при произвольных n , обеспечивая справедливость представления (18). При наличии в (18) дополнительных членов аналогичные соотношения могут быть справедливыми лишь при выполнении определенных соотношений между показателями α_{ij} и $\tilde{\alpha}_{ij}$. Из вильсоновской многопараметрической ренормгруппы ясно, что основной скейлинг и поправки к нему³⁾ возник-

³⁾ Произвольность выбора q_i позволяет не рассматривать исключительных ситуаций, когда сумма α_{ij} равна сумме $\tilde{\alpha}_{ij}$, и разделить вклады на главный и поправочные.

ают из разных источников и являются независимыми: поэтому существование жестких соотношений между α_{ij} и $\tilde{\alpha}_{ij}$ было бы невероятной случайностью⁴⁾. Таким образом, при достаточно малых q_i дополнительные члены в (18) отсутствуют, так что строго параболический спектр справедлив в некоторой окрестности точки $q=0$ и может быть аналитически продолжен на любой интервал, не содержащий особых точек⁵⁾. Последняя оговорка является существенной, так как строгая параболическость при произвольных q , по-видимому, невозможна [1] (см. ниже).

Использованная структура корреляторов может быть обоснована с помощью известного операторного разложения [3]

$$A_l(\mathbf{r}_1) A_m(\mathbf{r}_2) = \sum_k C_{lm}^k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) A_k(\mathbf{r}_2), \quad (24)$$

которое позволяет провести последовательное понижение порядка коррелятора

$$\langle A_1(\mathbf{r}_1) A_2(\mathbf{r}_2) \dots A_n(\mathbf{r}_n) \rangle \quad (25)$$

и представить его в виде суммы произведений коэффициентов функций $C_{lm}^k(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. Последние в критической точке естественно считать степенными, что и приводит к представлению корреляторов в виде суммы произведений степеней r_{ij} . Такое представление является неоднозначным, так как пара операторов в (24) может быть выбрана различными способами и результат зависит от последовательности выбора операторов при приведении коррелятора. Это дает функциональные соотношения между $C_{lm}^k(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, позволяющие переходить от одного представления к другому. На примере конформных теорий можно проследить [3], каким образом получается представление, главный член которого содержит произведение всех r_{ij} ; такое представление и используется в работе.

Существование такого представления не связано со спецификой конформной теории. Действительно, рассмотрим для примера случай $n=3$. Проведем сближение точек \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j , применим операторное раз-

⁴⁾ Такие соотношения возможны в конформных теориях, обладающих глубокой внутренней симметрией. Однако в конформных теориях соотношение (9) для $n=3$ является точным [3].

⁵⁾ При конечных L аналитичность P_q и Δ_q следует из определения (2) по теореме об аналитичности интегралов, зависящих от параметра (см., например, книгу [4]). В пределе $L \rightarrow \infty$ могут возникать изолированные особые точки по причинам, аналогичным явлению Стокса (изменение топологии линий наискорейшего спуска); такие сингулярности обсуждаются в разд. П.С.7 работы [1].

ложение к паре операторов (i, j) и сохраним главные по r_{ij} члены; тогда для коррелятора $K\{\mathbf{r}_i\}$ получим

$$\begin{aligned} K\{\mathbf{r}_i\} &= (r_{12})^{-\alpha} f_1(r_{13}, r_{23}), \\ & \quad r_{12} \ll r_{13} \approx r_{23}, \\ K\{\mathbf{r}_i\} &= (r_{13})^{-\beta} f_2(r_{12}, r_{23}), \\ & \quad r_{13} \ll r_{12} \approx r_{23}, \\ K\{\mathbf{r}_i\} &= (r_{23})^{-\gamma} f_3(r_{12}, r_{13}), \\ & \quad r_{23} \ll r_{12} \approx r_{13}. \end{aligned} \tag{26}$$

Правильный вид функций f_i установить не удастся, так как соответствующие два аргумента в этом приближении неразличимы; при совпадающих аргументах функции f_i имеют степенное поведение, которое частично связано с первым, а частично — со вторым аргументом:

$$\begin{aligned} K\{r_{ij}\} &= (r_{12})^{-\alpha} (r_{13})^{-\beta'} (r_{23})^{-\gamma'}, \\ & \quad r_{12} \ll r_{13} \approx r_{23}, \\ K\{r_{ij}\} &= (r_{13})^{-\beta} (r_{12})^{-\alpha'} (r_{23})^{-\gamma''}, \\ & \quad r_{13} \ll r_{12} \approx r_{23}, \\ K\{r_{ij}\} &= (r_{23})^{-\gamma} (r_{12})^{-\alpha''} (r_{13})^{-\beta''}, \\ & \quad r_{23} \ll r_{12} \approx r_{13}. \end{aligned} \tag{27}$$

Если все три конфигурации различны, то в операторном разложении имеются три существенно различных члена с одинаковой суммой показателей (это ясно из согласования выражений при одинаковых r_{ij}). Такое вырождение является естественным для случая $q_1 = q_2 = q_3$; при несовпадающих индексах оно с неизбежностью возникает в результате симметризации по r_{ij} . Но в настоящей работе (в отличие от предыдущей [8]) рассматриваются конфигурации $\{q_i\}$ общего положения; тогда подобное вырождение не поддерживается симметрией и является совершенно невероятным. А стало быть в (27) мы имеем дело с одной и той же конфигурацией, т. е.

$$K\{\mathbf{r}_i\} \sim (r_{12})^{-\alpha} (r_{13})^{-\beta} (r_{23})^{-\gamma} \tag{28}$$

в соответствии с формулой (9). Для показателей α, β, γ неизбежно получаются результаты, соответствующие второй формуле в (19); полагая в (28) все $r_{ij} \sim a$ и все $r_{ij} \sim L$, получим еще два соотношения, что в совокупности дает требуемые уравнения (13). Из сказанного ясно, что для справедливости проведенного анализа вовсе не требуется выполнение соотношения (9) в строгом смысле, так как оно все равно возникает эффективно как следствие условий сшивки трех выражений (26).

Параболический спектр (17) соответствует логарифмически нормальному распределению для величины $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ [5]. Если последнее распределение принято аксиоматически, то результат (17) справедлив при произвольных q . Утверждение работы [1] о невозможности такой ситуации относится к решеточным моделям, для которых координата \mathbf{r} дискретна и справедливо неравенство $|\Psi(\mathbf{r})|^2 \leq 1$ (равенство $|\Psi(\mathbf{r}_0)|^2 = 1$ соответствует локализации волновой функции на одном узле \mathbf{r}_0). Следствием этого является ограничение $\alpha \geq 0$ для области определения сингулярного спектра $f(\alpha)$ и невозможность убывающего поведения для $\tau_q = D_q(q-1)^6$, что делает неизбежным существование особой точки q_c , ограничивающей область применимости параболического спектра. Для континуальных моделей эти ограничения несущественны и параболический спектр возможен при произвольных q .

Тем не менее существование особых точек нельзя считать исключенным, так как алгебра мультифрактальности заведомо нарушается при больших положительных q_i . Действительно, полагая в (5) $q_2 = 1$ и интегрируя по \mathbf{r}_2 , легко убедиться, что результаты (8) справедливы лишь при условии $\alpha \leq d$, что сводится к $q_1 \leq d/2\chi$ для спектра (17). Нарушение алгебры связано с тем, что при больших q_i функции $|\Psi(\mathbf{r}_i)|^{2q_i}$ быстро убывают при удалении от своих «центров» и их статистическая независимость возникает на масштабе r_{ij} меньшем L .

В подходе, основанном на использовании нелинейных σ -моделей [6], параболический спектр имеет место в низших порядках по ϵ для размерности пространства $d = 2 + \epsilon$ [1, 6], но нарушается на четырехпетлевом уровне. Такая ситуация не является неожиданной: вывод σ -моделей обоснован только при малых ϵ и вопрос о точности их соответствия с исходной неупорядоченной системой всегда оставался открытым. В частности, сомнения вызывала ситуация с верхней критической размерностью [7]. В работе [8] предложено объяснение, почему дефектность σ -моделей для ортогонального ансамбля возникает именно на четырехпетлевом уровне⁷⁾. В использованной Вегнером «минимальной» σ -модели проводится ограничение низшими (вторыми) степенями градиентов, что соответствует пренебрежению пространственной дисперсией коэффициента диф-

⁶⁾ Функция $f(\alpha)$ связана с τ_q преобразованием Лежандра $\tau_q = q\alpha - f(\alpha)$, $q = f'(\alpha)$. В частности, $f(\alpha) = d - (\alpha - \alpha_0)^2/4(\alpha_0 - d)$ с $\alpha_0 = d + \chi$ для спектра (17).

⁷⁾ Для унитарного ансамбля работа [8] дает простое и строгое доказательство дефектности σ -моделей, основанное на неравенстве для Δ_q .

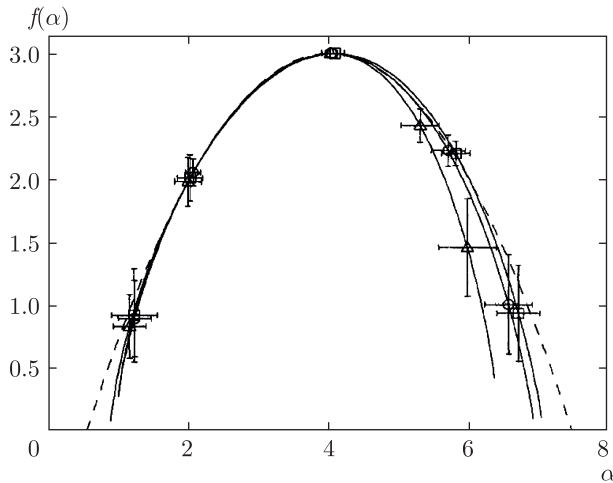


Рис. 1. Сингулярный спектр $f(\alpha)$ для модели Андерсона с прямоугольным (\circ), гауссовым (\square) и бинарным (Δ) распределениями [13]. Штриховой линией показан однопетлевой результат Вегнера

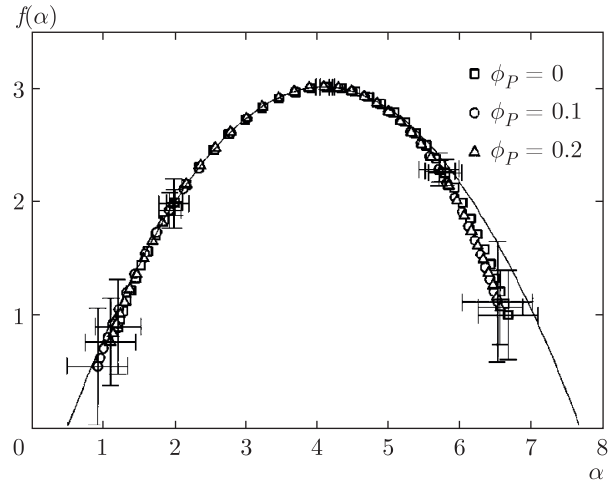


Рис. 2. Сингулярный спектр $f(\alpha)$ при отсутствии магнитного поля ($\phi_P = 0$) и для двух различных значений поля [14]. Сплошная линия соответствует параболическому спектру с $\alpha_0 = 4.1$

фузии $D(\omega, q)$. В первых трех порядках по ϵ это приближение является самосогласованным, но его самосогласованность нарушается на четырехпетлевом уровне. Поэтому необходим учет членов с высшими градиентами, что приводит к неустойчивости ренормгруппы из-за «градиентной катастрофы» [9]. Для устранения неустойчивости необходимо введение дополнительных контрчленов, что приводит к существенной модификации лагранжиана σ -модели. Это приведет к изменению четырехпетлевых вкладов и может устранить их противоречие с самосогласованной теорией Вольхардта – Вольфле [10] или ее более строгой версией [11].

Удивительная точность однопетлевого результата Вегнера [6] (соответствующего (17) с $\chi = \epsilon$ для размерности $d = 2 + \epsilon$) в применении к случаям $d = 3$ и $d = 4$ неоднократно отмечалась в численных экспериментах [12–16], хотя и декларировалось наличие отклонений за пределами вычислительной ошибки (рис. 1–3). Так, положение максимума функции $f(\alpha)$ (который имеет место при $\alpha_0 = d + \epsilon$ в однопетлевом приближении [1, 6]) оценивалось как $\alpha_0 = 4.03 \pm 0.05$ [12], $\alpha_0 = 4.048 \pm 0.003$ [15]⁸⁾ при $d = 3$ и $\alpha_0 = 6.5 \pm 0.2$ [12] при $d = 4$. Значение α_0 соответствует максимуму функции распределения для $\ln |\Psi|^2$ и определяется наиболее точно, тогда как на хвостах распределения надежность результатов существенно ухудшается (рис. 1, 2). В целом параболическая форма спектра подтвержда-

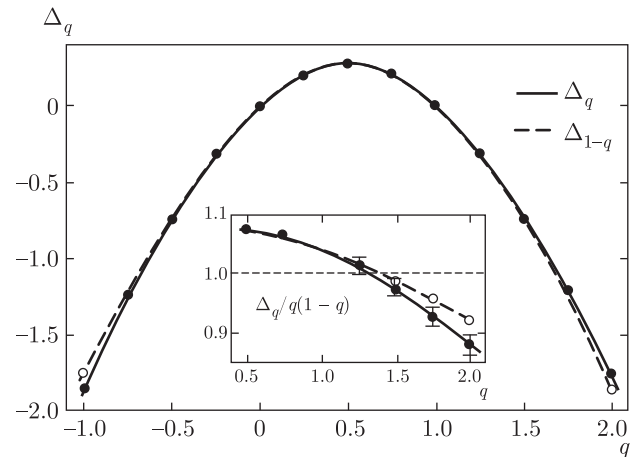


Рис. 3. Мультифрактальные экспоненты Δ_q (определенные с противоположным знаком), полученные из конечно-размерного скейлинга [15]. На вставке показаны при введенные показатели $\Delta_q/q(1-q)$, а горизонтальная штриховая линия соответствует однопетлевому результату Вегнера

ется на уровне 10%. В работе [8] продемонстрирована крайне медленная сходимость корреляторов (3) к термодинамическому пределу, так что систематическая ошибка для фрактальных размерностей может достигать десятков процентов. Поэтому наблюдаемые отклонения от параболичности (рис. 3) заведомо в пределах ожидаемого.

В режиме квантового эффекта Холла параболичность спектра имеет место на уровне 10^{-3} и имеются теоретические аргументы в пользу строгой па-

⁸⁾ Оценка точности в работе [15] вызывает большие сомнения (см. примечание 12 в [8]).

раболичности [17–19], основанные на связи с конформной теорией поля. Тем не менее в работе [16] утверждалось о существовании малых, но статистически значимых отклонений. Столь ничтожные отклонения выглядят неестественно ввиду отсутствия в системе малых параметров. Более вероятно, что эти отклонения связаны с медленной сходимостью к пределу $L \rightarrow \infty$, хотя результаты [8] в данном случае непосредственно не применимы⁹⁾.

Проведенное рассмотрение не применимо к так называемой модели PRBM [1], в которой сильные отклонения от параболичности получены аналитически и подтверждены численным моделированием. Эта модель соответствует неупорядоченной системе со степенным убыванием корреляций случайного потенциала. Как ясно на примере ферромагнетиков с дальним действием, подобные модели обладают множеством патологических свойств, которые могут проявляться в разных местах и требуют специального анализа для их выявления. В данном случае неясен вопрос, можно ли (и на каком масштабе) считать волновые функции статистически независимыми, если случайный потенциал сильно скоррелирован во всей системе. Ответ же на этот вопрос необходим для установления справедливости «алгебры мультифрактальности» (см. примечание 1).

Таким образом, использование «алгебры мультифрактальности» [1, 2] приводит к параболическому спектру аномальных размерностей и указывает на то, что соответствие нелинейных σ -моделей с исходными неупорядоченными системами не является точным.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Evers and A. D. Mirlin, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1355 (2008).
2. M. V. Feigelman, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. Cuevas, *Ann. Phys. (NY)* **325**, 1368 (2010).
3. А. Б. Замолодчиков, Ал. Б. Замолодчиков, *Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах*, МЦНМО, Москва (2009).
4. М. А. Евграфов, *Аналитические функции*, Наука, Москва (1968), с. 79.
5. M. Janssen, *Int. J. Mod. Phys. B* **8**, 943 (1994); *Phys. Rep. B* **295**, 1 (1998).
6. F. Wegner, *Nucl. Phys. B* **316**, 663 (1989).
7. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **146**, 1272 (2014).
8. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **148**, 1012 (2015).
9. В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, В. И. Юдсон, *ЖЭТФ* **94**, 255 (1988).
10. D. Vollhardt and P. Wölfle, *Phys. Rev. B* **22**, 4666 (1980); *Phys. Rev. Lett.* **48**, 699 (1982).
11. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **108**, 1686 (1995).
12. A. M. Mildenerger, F. Evers, and A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B* **66**, 033109 (2002).
13. H. Grussbach and M. Schreiber, *Phys. Rev. B* **51**, 663 (1995).
14. T. Terao, *Phys. Rev. B* **56**, 975 (1997).
15. A. Rodriguez, L. J. Vasquez, K. Slevin, and R. A. Romer, *Phys. Rev. B* **84**, 134209 (2011).
16. F. Evers, A. M. Mildenerger, and A. D. Mirlin, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 116803 (2008).
17. M. Zirnbauer, arXiv:hep-th/9905054.
18. M. J. Bhasen et al., *Nucl. Phys. B* **580**, 688 (2000).
19. A. M. Tselik, *Phys. Rev. B* **75**, 184201 (2007).
20. R. Bondesan, D. Wiczorec, and M. R. Zirnbauer, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 186083 (2014).

⁹⁾ Эта точка зрения подтверждается М. Р. Цирнбауэром (частное сообщение): отклонения от параболичности, обнаруженные в [20], при ближайшем рассмотрении оказываются конечно-размерными эффектами.