

О РОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР ИЗ ВАКУУМА ПОЛЕМ ИНТЕНСИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. С. Попов^a, В. Д. Мур^b, Н. Б. Нарожный^b, С. В. Попруженко^{b}*

^a *Институт теоретической и экспериментальной физики
117218, Москва, Россия*

^b *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 августа 2015 г.

Дан обзор работ, посвященных теории рождения e^+e^- -пар из вакуума под действием интенсивного лазерного излучения. Рассмотрены следующие вопросы: образование пар в постоянном электрическом поле \mathcal{E} и в переменном во времени однородном поле $\mathcal{E}(t)$; зависимость числа $N_{e^+e^-}$ родившихся пар от формы лазерного импульса (динамический эффект Швингера); реалистическая трехмерная модель фокусированного лазерного импульса, основанная на точном решении уравнений Максвелла и содержащая параметры: радиус фокального пятна R , дифракционную длину L , параметр фокусировки Δ , длительность импульса τ и его форму. В рамках этой модели вычислены значения $N_{e^+e^-}$ как для одиночного лазерного ($n = 1$) импульса, так и в случае нескольких ($n \geq 2$) когерентных импульсов с фиксированной общей энергией, одновременно «сталкивающихся» в лазерном фокусе. Показано, что при $n \gg 1$ число пар возрастает на несколько порядков по сравнению со случаем одиночного импульса. Рассмотрена экранировка лазерного поля рождающимися из вакуума парами, его «истощение» и предельные значения полей, достижимых в лазерных экспериментах. Обсуждается связь проблемы рождения пар с задачей о квантовом осцилляторе с переменной частотой и с теорией групп $SU(1, 1)$ и $SU(2)$. В расчетах используется релятивистская версия «метода мнимого времени», в рамках которой развита релятивистская теория туннелирования и получено обобщение теории Келдыша на случай ионизации релятивистских связанных систем — атомов и ионов. Вычислена скорость ионизации водородоподобного иона с зарядом $1 \leq Z \leq 92$ в зависимости от интенсивности \mathcal{I} и эллиптичности ρ лазерного излучения.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 85-летию Л. В. Келдыша

DOI: 10.7868/S0044451016030147

1. ВВЕДЕНИЕ

Основное уравнение релятивистской квантовой механики — уравнение Дирака — было открыто в 1928 г. [1, 2] и тогда же применено Гордоном [3] и Дарвином [4] для объяснения тонкой структуры водородоподобных атомов [5], а уже через 3 года рождение e^+e^- -пар из вакуума электрическим полем обсуждалось Заутером [6] в связи с так называемым парадоксом Клейна (см., например, работу [7]). В присутствии постоянного и однородного поля \mathcal{E} вероятность перехода вакуум–вакуум отлична от единицы; впервые она была вычислена Гейзенбергом и

Эйлером [8] в главном приближении, точные формулы получили Швингер [9] для частиц со спином $s = 0$ и $s = 1/2$ и Ваняшин и Терентьев [10] в случае векторных бозонов, $s = 1$, (см. также [11]).

До недавнего времени считалось, что эффект рождения пар в сильном поле представляет чисто теоретический интерес, поскольку для его наблюдения требуются электрические поля, сравнимые по величине с «критическим» полем [8] квантовой электродинамики (см. ниже формулу (1)), что на много порядков превышает возможности эксперимента. Однако быстрый прогресс лазерной физики и техники привел к существенному росту достижимой интенсивности \mathcal{I} лазерного излучения. Получение сверхсильных полей достигается при сжатии (укорочении) лазерных импульсов, длительность τ которых становится уже сравнимой с оптическим пе-

* E-mail: sergey.popruzhenko@gmail.com

риодом ($\tau \sim 10^{-15}$ с для фемтосекундных импульсов инфракрасного диапазона длин волн), а форма далека от идеальной синусоиды.

Импульсы сверхвысокой интенсивности генерируются при помощи твердотельных лазеров ближнего инфракрасного и оптического диапазонов длин волн; наиболее часто используются неодимовый (длина волны $\lambda = 1064$ нм) и титан-сапфировый ($\lambda \approx 800$ нм) лазеры, а также их вторые гармоники. Современные лазерные установки позволяют получать импульсы интенсивностью до $\mathcal{I} \approx \approx 2 \cdot 10^{22}$ Вт/см² [12] (при этом напряженность электрического поля $\mathcal{E}_0 \approx 10^{12}$ В/см на 2–3 порядка превосходит атомную, а длительность импульсов такой интенсивности составляет десятки фемтосекунд). Введение в эксплуатацию мощных лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) открыло новые возможности для экспериментов по нелинейному взаимодействию лазерного излучения с веществом в ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах длин волн. Установки такого типа в настоящее время работают в Германии [13], Японии [14] и США [15, 16]. Достигнутые на сегодняшний день на ЛСЭ рекордные интенсивности лазерных импульсов составляют 10^{16} Вт/см² при длине волны $\lambda \approx 13$ нм (лаборатория DESY, Германия), 10^{14} Вт/см², $\lambda \approx 50$ нм (установка SPRING-8, Япония) и 10^{18} Вт/см², $\lambda \approx 1.2$ нм (ЛСЭ на установке SLAC, Стенфорд, США). Нелинейный характер взаимодействия мощного электромагнитного излучения с веществом проявляется при существенно меньших интенсивностях.

В настоящее время существуют технически обоснованные проекты [17–20] создания новых лазеров, обещающие увеличение максимально достижимой интенсивности еще на несколько порядков, вплоть до величин 10^{25} – 10^{26} Вт/см² [20–23]. Новые возможности эксперимента стимулировали рост интереса к теоретическим исследованиям эффекта рождения частиц из вакуума интенсивным электромагнитным полем (см., в частности, работы [22–26] и ссылки в них). Это оправдывает появление данной статьи, которая является продолжением обзора [27] и охватывает в основном работы авторов.

В заключение этого раздела приведем числовые значения интенсивности и напряженности электромагнитных полей, характеризующие процесс рождения пар из вакуума и нелинейной ионизации атомных систем, а также некоторых других величин, часто используемых в данной работе. Здесь мы используем те же обозначения, что в работах [27–33]. Критическое поле квантовой электродинамики [8] и соответствующая интенсивность линейно поляризо-

ванной плоской волны даются выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{cr} &= m^2 c^3 / e \hbar = 1.32 \cdot 10^{16} \text{ В/см}, \\ \mathcal{I}_{cr} &= c \mathcal{E}_{cr}^2 / 8\pi \approx 2.3 \cdot 10^{29} \text{ Вт/см}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m и $-e$ — масса и заряд электрона, c — скорость света. Критическое поле определяется условием $e \mathcal{E}_{cr} l_C = m c^2$, где

$$l_C = \hbar / m c = 3.86 \cdot 10^{-11} \text{ см} \quad (2)$$

— комптоновская длина. Выражения для атомного поля и соответствующей интенсивности имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a &= m^2 e^5 / \hbar^4 = \alpha^3 \mathcal{E}_{cr} \approx 5.1 \cdot 10^9 \text{ В/см}, \\ \mathcal{I}_a &= c \mathcal{E}_a^2 / 8\pi \approx 3.5 \cdot 10^{16} \text{ Вт/см}^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha = e^2 / \hbar c \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры.

2. МЕТОД МНИМОГО ВРЕМЕНИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В основе аналитического описания процессов ионизации атомов, ионов и твердых тел под действием интенсивного лазерного излучения лежит фундаментальная работа Келдыша [34], 50-летию публикации которой посвящены обзор [27] и специальный выпуск Journal of Physics B [35]. Развитие предложенного в этой работе подхода привело к разработке нескольких эффективных методов аналитического расчета вероятностей нелинейных квантовых процессов, индуцированных сильным электромагнитным полем, включая ионизацию атомов и ионов, генерацию гармоник лазерного излучения, рождение электрон-позитронных пар лазерным полем из вакуума и др.

Метод мнимого времени (ММВ) в настоящее время широко применяется в физике сильных лазерных полей. Этот метод, по-видимому, впервые был развит в теории многофотонной ионизации атомов интенсивным лазерным светом [36–38]. Он является обобщением, на случай переменных во времени полей, известного метода комплексных классических траекторий Ландау (см. [39] и [40, §§ 51, 52]). Конкретные примеры использования ММВ в квантовой механике и теории поля, в том числе в проблеме рождения e^+e^- -пар лазерным излучением из вакуума, можно найти в работах [28, 29, 41, 42]. За подробным описанием метода и его приложений мы

отсылаем читателя к обзорам [27, 31, 43]. В [27] обсуждается, в частности, метод мнимого собственного времени (метод Фока) в приложении к задаче о рождении пар из вакуума постоянными и однородными взаимно перпендикулярными электрическим и магнитным полями. В ММВ используются классические уравнения движения, но с мнимым «временем» ($t \rightarrow it$), решение которых позволяет определить подбарьерную траекторию частицы (электрона), вдоль которой совершается туннелирование. Учитывая соотношение Фейнмана $\Psi \propto \exp(iS/\hbar)$, где S — классическое действие, набираемое частицей при движении вдоль подбарьерной траектории, и вычисляя $\text{Im } S$, находим вероятность туннелирования (в данном случае — ионизации атомного уровня или рождения пар из вакуума сильным лазерным полем).

В последние годы, благодаря развитию лазерной физики и технологии, достигнуты интенсивности [12] $\mathcal{I} \approx 2 \cdot 10^{22}$ Вт/см² и планируется повышение их еще на несколько порядков. В столь сильных полях движение электрона (в том числе и под барьером) становится релятивистским, и требуется соответствующая модификация ММВ и теории ионизации Келдыша. Эти вопросы рассматривались в литературе, часть полученных результатов излагается ниже (в основном мы следуем работам [42, 43]).

2.1. Релятивистская теория туннелирования

Рассмотрим приложение ММВ к задаче об ионизации релятивистского связанного состояния водородоподобного иона. В случае монохроматической волны с частотой ω и эллиптичностью ρ , распространяющейся в вакууме вдоль оси x , имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x = \mathcal{H}_x = 0, \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \cos \theta, \quad \mathcal{E}_z = \rho \mathcal{E}_0 \sin \theta, \\ \mathcal{H}_y = -\rho \mathcal{E}_0 \sin \theta, \quad \mathcal{H}_z = \mathcal{E}_0 \cos \theta, \\ \theta = \omega(t - x), \quad -1 \leq \rho \leq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь \mathcal{E}_0 — амплитуда волны и θ — переменная светового фронта ($\hbar = c = 1$).

Применение ММВ дает подбарьерную траекторию, связывающую начальное состояние электрона в дискретном спектре с конечным состоянием в континууме, в виде

$$\begin{aligned} x = -i \frac{e^2 \mathcal{E}_0^2}{J^2 \omega^3} \left\{ \frac{1}{8} (1 - \rho^2) \left[\text{sh } 2\eta - \eta \frac{\text{sh } 2\eta_0}{\eta_0} \right] + \right. \\ \left. + \rho^2 \left(\frac{\text{sh } \eta_0}{\eta_0} \left[\text{sh } \eta - \eta \frac{\text{sh } \eta_0}{\eta_0} \right] \right) \right\}, \\ y = \frac{e \mathcal{E}_0}{J \omega^2} (\text{ch } \eta_0 - \text{ch } \eta), \\ z = -i \rho \frac{e \mathcal{E}_0}{J \omega^2} \left[\text{sh } \eta - \eta \frac{\text{sh } \eta_0}{\eta_0} \right], \quad t = x(\eta) + i \omega^{-1} \eta, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\eta = -i\theta$,

$$J = \left(\sqrt{p^2 + m^2} - p_x \right) / m \quad (6)$$

— интеграл движения [44]. Как видно из (5), переменные x и z (а также p_y) — чисто мнимые под барьером, поэтому такая траектория невозможна в классической механике, однако в квантовой механике именно она определяет вероятность туннелирования, т. е. скорость w ионизации атомов лазерным излучением.

Вычисление функции укороченного действия [43, 45] вдоль траектории (5)

$$\text{Im } W = \text{Im} \int_{t_0}^0 \left\{ -\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} + e \mathbf{A} \mathbf{v} + \epsilon_0 \right\} dt, \quad (7)$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал поля (4), \mathbf{v} — скорость электрона, $m \epsilon_0 \equiv E_0 = m \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}$ — начальная энергия уровня, дает для вероятности ионизации релятивистского s -уровня при условии $\omega \ll m$

$$w_r \propto \exp \left\{ -2 \text{Im } W \right\} = \exp \left\{ -\frac{2m}{\omega} \eta_0 (J - \epsilon_0) \right\}. \quad (8)$$

Значения параметров η_0 и J , отвечающие моменту выхода электрона из-под барьера, следуют из граничных условий ММВ и определяются уравнениями, приведенными в работе [42]. В итоге получаем

$$w_r \propto \exp \left\{ -\frac{2}{3F} g(\gamma_R, \epsilon, \rho) \right\}, \quad (9)$$

где $F = \mathcal{E}/\mathcal{E}_{ch}$ — приведенное поле, \mathcal{E}_{ch} — характерное поле

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ch} = (\sqrt{3}\xi)^3 (1 + \xi^2)^{-1} \mathcal{E}_{cr} = \\ = \begin{cases} Z^3 \mathcal{E}_a, & Z \ll 137, \\ 2.60 \mathcal{E}_{cr}, & Z = 137, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

близкое по величине к электрическому полю на K -оболочке водородоподобного атома (иона) с зарядом Z , γ_R — релятивистский аналог параметра адиабатичности Келдыша,

$$\gamma_R = \frac{m\omega}{e\mathcal{E}_0} \sqrt{\frac{3\xi^2}{1 + \xi^2}} \equiv \frac{\gamma_r}{\sqrt{1 - \xi^3/3}}, \quad (11)$$

ξ — удобная вспомогательная переменная, естественным образом возникающая в ММВ,

$$\xi(\epsilon) = \left[1 - \frac{1}{2}\epsilon \left(\sqrt{\epsilon^2 + 8} - \epsilon \right) \right]^{1/2} = \begin{cases} 3^{-1/2}\alpha\kappa, & \epsilon = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2\kappa^2 \rightarrow 1, \\ 1 - 2^{-1/2}\epsilon, & \epsilon \rightarrow 0, \end{cases} \quad (12)$$

а $\kappa = \sqrt{-2\epsilon_0}$. Физический смысл параметров γ_R и γ_r и соотношение между ними обсуждается в Приложении В. Известным в настоящее время атомам соответствуют значения $Z < 137$ и $1 > \epsilon > 0$, или $0 < \xi < 1$; при этом можно использовать приближение точечного заряда ядра. Формула (9) определяет, с точностью до предэкспоненциального множителя, скорость ионизации релятивистского s -уровня при любых значениях ϵ и ρ .

Для лазеров оптического и инфракрасного диапазонов длин волн $\hbar\omega/mc^2 \approx 10^{-5}$, поэтому функция g в (9) может быть разложена по параметру $\gamma_r \ll 1$:

$$w_r \propto \exp \left\{ -\frac{2\kappa^3}{3\mathcal{E}_0} \left[1 - \frac{1 - \rho^2/3}{10(1 - \xi^2/3)} \gamma_r^2 + \mathcal{O}(\gamma_r^4) \right] \right\}. \quad (13)$$

Формулы (9)–(13) дают релятивистское обобщение теории ионизации Келдыша. Предэкспоненциальный и кулоновский факторы вычислены в работах [46, 47]. В нерелятивистском пределе $\epsilon_0 = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2} \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow 0$ и $\gamma_r \rightarrow \gamma$ (γ — параметр Келдыша [27, 34]). При этом формула (13) в случае линейной ($\rho = 0$) и циркулярной ($\rho = \pm 1$) поляризации совпадает с результатами, полученными в работах [36, 37, 48]. Приведем в заключение результаты численных расчетов, в которых использовалась модель водородоподобного атома (иона) с зарядом $Z < 137$.

Как видно из приведенных в табл. 1 значений, зависимость скорости ионизации от интенсивности \mathcal{I} и заряда Z является чрезвычайно резкой функцией интенсивности лазерного излучения: при возрастании интенсивности на 2 порядка вероятность ионизации растет на 20–25 порядков, а при увеличении заряда ядра от 20 до 40 (при фиксированном значении интенсивности) убывает более чем на 16 порядков.

2.2. Постоянные и низкочастотные поля

ММВ позволяет решить задачу об ионизации s -уровня, связанного короткодействующими силами, в постоянных и однородных полях \mathcal{E} и \mathcal{H} . В

нерелятивистском пределе $\epsilon_0 = 1 - \alpha^2\kappa^2/2 \rightarrow 1$, $\kappa = \sqrt{-2\epsilon_0} \approx 1$ при этом получаются известные формулы для скорости ионизации отрицательных ионов (H^- , Na^- и т. д.) [49]:

$$w_0 = \frac{1}{2}|A_\kappa|^2\kappa^2 F \exp\left(-\frac{2}{3F}\right), \quad F = \frac{\mathcal{E}}{\kappa^3}, \quad (14)$$

где A_κ — асимптотический (при $r \rightarrow \infty$) коэффициент волновой функции связанного состояния в отсутствие поля. В случае взаимно перпендикулярных полей, $\mathcal{E} \perp \mathcal{H}$, имеем [48]

$$w_0 = \frac{1}{2}|A_\kappa|^2\kappa^2 F \times \exp\left\{-\frac{2}{3F}\left[1 + \frac{\alpha^2\kappa^2}{30\mathcal{E}^2}\left(\mathcal{H}^2 - \frac{9}{4}\mathcal{E}^2\right)\right]\right\}, \quad (15)$$

что дает вероятности ионизации отрицательных ионов с учетом поправок порядка α^2 . Наконец, в пределе $\epsilon_0 \rightarrow -1$ (т. е. при приближении энергии E_0 к границе нижнего континуума) получаем [46]

$$w_0(\mathcal{E}, \mathcal{H}) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\mathcal{E}\mathcal{H}}{\text{sh}(\pi\mathcal{H}/\mathcal{E})} \times \exp\left(-\frac{\pi\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}}\right), \quad \mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{cr}. \quad (16)$$

В частности, при $\mathcal{H} = 0$ эта формула определяет скорость ионизации релятивистского s -уровня в постоянном электрическом поле:

$$w_0(\mathcal{E}) = k_0 \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{cr}}\right)^2 \exp\left(-\frac{\pi\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}}\right), \quad (17)$$

$$\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{cr}, \quad k_0 = \frac{1}{2\pi^2} \frac{c}{l_C}.$$

Отметим, что это выражение только размерным множителем $K^{(0)} = k_0/4\pi l_C^3$ ($K^{(1/2)} = 2K^{(0)}$) отличается от вероятности рождения одной пары скалярных (спинорных) частиц в единицу времени [54].

В задаче о движении электрона в постоянных или низкочастотных скрещенных полях ($\mathcal{E} = \mathcal{H}$, $\mathcal{E} \perp \mathcal{H}$, $\omega \ll \kappa^2$) экстремальная подбарьерная траектория определяется аналитически¹⁾. В начальный момент $t = t_0$ подбарьерного движения «время» — чисто мнимое,

$$t_0 = i\sqrt{\frac{3\xi^2}{1 + \xi^2}} \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}}, \quad (18)$$

и $\mathbf{r}(t_0) = 0$ в соответствии с тем, что электрон находится внутри атома. На выходе из-под барьера $t = 0$,

¹⁾ См., например, уравнения (2.2)–(2.8) в работе [47]. Для общего случая монохроматической электромагнитной волны с частотой ω и эллиптической поляризацией ρ формулы имеют более сложный вид [42, 50].

Таблица 1. Скорость ионизации w_r для $1s_{1/2}$ -уровня водородоподобного атома с зарядом Z

$Z = 20, \epsilon_0 = 0.989, \mathcal{E}_{ch} = 4.13(13)$			$Z = 40, \epsilon_0 = 0.956, \mathcal{E}_{ch} = 3.38(14)$		
$\lg \mathcal{I}$	$F \cdot 100$	w_r	$\lg \mathcal{I}$	$F \cdot 100$	w_r
20.5	1.18	1.5(-4)	22.0	0.81	-
21.0	2.10	6.4(6)	22.5	1.44	12
21.5	3.73	5.4(12)	23.0	2.56	6.2(9)
22.0	6.63	1.0(16)	23.5	4.55	4.3(14)
22.5	11.8	6.4(17)	24.0	8.09	2.1(17)
$Z = 60, \epsilon_0 = 0.899, \mathcal{E}_{ch} = 1.19(15)$			$Z = 92, \epsilon_0 = 0.741, \mathcal{E}_{ch} = 4.82(15)$		
$\lg \mathcal{I}$	$F \cdot 100$	w_r	$\lg \mathcal{I}$	$F \cdot 100$	w_r
23.5	1.30	0.120	24.5	1.01	4.7(-8)
24.0	2.30	6.0(8)	25.0	1.80	1.6(5)
24.5	4.10	1.6(14)	25.5	3.20	1.8(12)
25.0	7.29	1.6(17)	26.0	5.68	1.7(16)
25.5	9.72	6.5(18)	26.5	10.1	2.9(18)

Примечание. Интенсивность \mathcal{I} выражена в $\text{Вт}/\text{см}^2$, скорость ионизации w_r — в с^{-1} , $F = \mathcal{E}/\mathcal{E}_{ch}$, \mathcal{E}_{ch} — характерное поле (10). Используется обозначение $a(b) \equiv a \cdot 10^b$. Более подробная таблица приведена в работе [42].

$$r(t=0) = \frac{3\xi^2}{2m\sqrt{1+\xi^2}} \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}}, \quad (19)$$

$$p(t=0) = \frac{m\xi^2}{2\sqrt{1+\xi^2}},$$

причем ширина барьера $r(0) \gg 1/m$, а импульс $\mathbf{p}(0)$ перпендикулярен полям \mathcal{E} и \mathcal{H} (в отличие от одномерной квазиклассики, точка выхода из-под барьера уже не является точкой остановки частицы). Скорость ионизации релятивистского s -уровня равна (с точностью до предэкспоненты)

$$w_R \propto \exp\left(-\frac{2\sqrt{3}\xi^3}{1+\xi^2} \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}}\right). \quad (20)$$

В то время как скрещенное поле не рождает пар, вероятность w_R отлична от нуля, поскольку в данном случае имеется выделенная система отсчета, в которой атом покоится.

3. РОЖДЕНИЕ ПАР ИЗ ВАКУУМА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

3.1. Рождение пар в постоянном электрическом поле

Процесс рождения пары можно наглядно интерпретировать как туннелирование электрона с занятого уровня, лежащего в нижнем континууме («море Дирака» [1], заполненное электронами с отри-

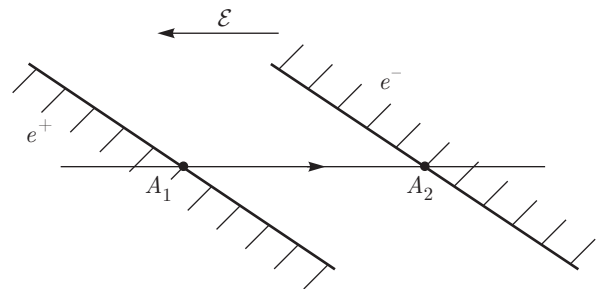


Рис. 1. Верхний и нижний континуумы для уравнения Дирака в присутствии постоянного электрического поля \mathcal{E} . Подбарьерный участок траектории отвечает линии, соединяющей точки поворота A_1A_2

цательной энергией), через щель $2mc^2$ в одно из вакантных состояний верхнего континуума (путь A_1A_2 на рис. 1). В постоянном электрическом поле \mathcal{E} сохраняется энергия $E = (p^2 + m^2)^{1/2} - e\mathcal{E}x$ и поперечный к внешнему полю импульс \mathbf{p}_\perp . Спектр возможных значений E показан на рис. 1.

Движение релятивистской заряженной частицы определяется формулами [44]

$$p = e\mathcal{E}t, \quad x = (p^2 + m^2)^{1/2}/e\mathcal{E} + \text{const}, \quad (21)$$

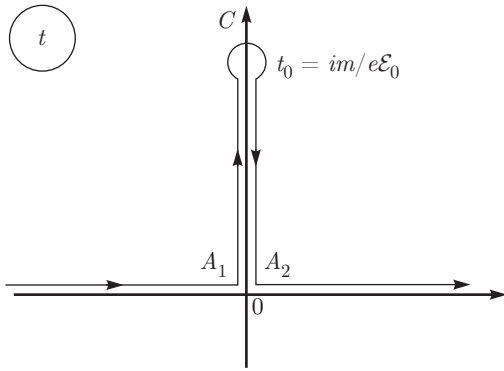


Рис. 2. Изменение мнимого времени при движении электрона вдоль подбарьерной траектории между точками A_1 и A_2 . Стрелками указано направление изменения комплексного времени в процессе туннелирования

$$S = \int_0^t \left(-m\sqrt{1-v^2} + e\mathcal{E}x \right) dt = \frac{1}{2e\mathcal{E}} \times \left\{ p(p^2+m^2)^{1/2} - m^2 \ln \left[p + (p^2+m^2)^{1/2} \right] \right\}, \quad (22)$$

где S — функция действия. Энергия электрона $(p^2 + m^2)^{1/2}$ равна $-m$ в точке A_1 и $+m$ в точке A_2 . Луч времени $(0, +\infty)$ на рис. 2 соответствует вылетающим электронам, луч $(0, -\infty)$ — позитронам (движущимся, согласно теории Дирака, в обратном направлении по времени), а подбарьерному участку траектории между точками A_1 и A_2 отвечает изменение «мнимого времени» t вдоль петли C , охватывающей точку ветвления t_0 функции действия, $p(t_0) = \pm im$.

Приращение мнимой части действия вдоль C равно

$$\Delta S = S_2 - S_1 = i\pi m^2 / 2e\mathcal{E} \quad (23)$$

(вклад в ΔS дает только член с логарифмом в формуле (22)). В итоге, для вероятности туннелирования, т. е. образования e^+e^- -пары постоянным электрическим полем из вакуума, получаем известную [8, 9] оценку

$$w \propto \exp \left(-\frac{2}{\hbar} Im \Delta S \right) = \exp \left(-\frac{\pi m^2}{e\mathcal{E}} \right) \equiv \exp \left(-\frac{\pi \mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}} \right). \quad (24)$$

При $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{cr}$ ширина барьера (т. е. расстояние между точками A_1 и A_2) составляет

$$b = 2m/e\mathcal{E} \sim l_C \mathcal{E}_{cr} / \mathcal{E} \gg l_C = 1/m, \quad (25)$$

поэтому вероятность (24) экспоненциально мала. После выхода e^+ и e^- из-под барьера в точках A_1 и

A_2 они разгоняются электрическим полем в разные стороны, $\mathbf{p}_{e^+} = -\mathbf{p}_{e^-}$.

3.2. Рождение пар в переменном электрическом поле

Постоянные электрические поля, сравнимые по величине с \mathcal{E}_{cr} , вряд ли будут когда-нибудь получены в лаборатории. Поэтому авторы многих работ [28, 29, 32, 51] рассматривали (теоретически) рождение пар в переменном линейно поляризованном поле вида

$$\mathcal{E}(\theta) = \{ \mathcal{E}_0 \varphi(\theta), 0, 0 \}, \quad \mathcal{H}(\theta) \equiv 0, \quad \theta = \omega t, \quad (26)$$

в частности, для $\varphi(\theta) = \cos \theta$ (см. работы [28, 29, 51]) и $\varphi(\theta) = 1/\text{ch}^2 \theta$ [52]. Здесь \mathcal{E}_0 — амплитуда поля, t — время, θ — безразмерное время, ω — характерная частота, а функция $\varphi(\theta)$ задает форму лазерного импульса.

Для расчета вероятности w в модели (26) удобно использовать ММВ. Подбарьерная траектория электрона в вакууме, соединяющая верхний и нижний континуумы, в случае поля (26) находится в квадратурах. Используя ее, нетрудно получить [28, 29] вероятность рождения пары e^+e^- с импульсами $\pm \mathbf{p}$:

$$w(\mathbf{p}) \propto \exp \left\{ -\frac{\pi}{\epsilon} \left[\tilde{g}(\gamma_0) + \tilde{b}_{||}(\gamma_0) \frac{p_{||}^2}{m^2} + \tilde{b}_{\perp}(\gamma_0) \frac{p_{\perp}^2}{m^2} \right] \right\}, \quad (27)$$

где $\epsilon = \mathcal{E}_0 / \mathcal{E}_{cr}$ — приведенное электрическое поле, γ_0 — релятивистский параметр адиабатичности, аналогичный параметру Келдыша в нерелятивистской теории ионизации,

$$\gamma_0 = \frac{\omega}{\omega_t} = \frac{mc\omega}{e\mathcal{E}_0} = \frac{\hbar\omega}{e\mathcal{E}_0 l_C} = \frac{\hbar\omega}{mc^2} \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}_0}. \quad (28)$$

Здесь $\omega_t \sim 1/T_t$ и $T_t \sim b/c$ — характерные частота и время туннелирования электрона. Функция $\tilde{g}(\gamma)$ и коэффициенты $\tilde{b}_{||}$, \tilde{b}_{\perp} импульсного спектра определяются формой импульса $\varphi(\theta)$; соответствующие формулы можно найти в работах [27–29, 32]. Мы приведем их для нескольких простейших случаев.

1. Для монохроматического поля с линейной поляризацией $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \theta$ имеем

$$\tilde{g}(\gamma_0) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 du \sqrt{\frac{1-u^2}{1-\gamma_0^2 u^2}} = \frac{4}{\pi \sqrt{1+\gamma_0^2}} \mathbf{D}(q), \quad (29)$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{\parallel}(\gamma_0) &= \frac{\pi\gamma_0^2}{2(1+\gamma_0^2)}\tilde{g}(\gamma_0) = \frac{2\gamma_0^2}{(1+\gamma_0^2)^{3/2}}\mathbf{D}(q), \\ \tilde{b}_{\perp}(\gamma_0) &= \frac{2}{\pi\sqrt{1+\gamma_0^2}}\mathbf{K}(q), \quad q = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1+\gamma_0^2}},\end{aligned}\quad (30)$$

где \mathbf{K} и \mathbf{D} — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода [53]. Полная вероятность рождения пар в инвариантном комптоновском 4-объеме $l_C^4/c \sim 10^{-53} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ получается интегрированием выражения (27) по d^3p и по длительности импульса τ , с учетом предэкспоненты и закона сохранения энергии в n -фотонном поглощении [31].

В настоящее время для оптических (и даже для рентгеновских) лазеров $\hbar\omega \ll mc^2$, поэтому процесс рождения пар возможен только в адиабатической области $\gamma_0 \ll 1$, в которой формулы упрощаются и близки к случаю постоянного поля:

$$\begin{aligned}w &= 3.6 \cdot 10^{-3} m^4 \epsilon^{5/2} \exp\left\{-\frac{\pi}{\epsilon}\tilde{g}(\gamma_0)\right\}, \\ &\quad \epsilon \ll 1, \\ \tilde{g}(\gamma_0) &= 1 - \frac{1}{8}\gamma_0^2 + \frac{3}{64}\gamma_0^4 + \dots, \\ \tilde{b}_{\parallel}(\gamma_0) &= \frac{1}{2}\gamma_0^2, \quad \tilde{b}_{\perp} = 1 - \frac{1}{4}\gamma_0^2.\end{aligned}\quad (31)$$

Противоположный случай, $\gamma_0 \gg 1$, может быть реализован только после создания γ -лазеров (что, по видимому, не является делом ближайшего будущего). При этом $\tilde{g}(\gamma_0) = 4(\ln 4\gamma_0 - 1)$, а вероятность рождения пар представляется в виде суммы вероятностей n -фотонных процессов:

$$w = \sum_{n=K_0}^{\infty} w_n, \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} \sim \gamma_0^{-2K_0}, \quad (32)$$

где $K_0 = 2m/\omega$ — параметр многоквантовости, т. е. минимальное число поглощенных квантов, необходимое для рождения e^+e^- -пары.

2. Для импульсного поля вида $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(1 + \theta^2)^{-3/2}$ имеем

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\gamma_0) &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 du \frac{\sqrt{1-u^2}}{(1+\gamma_0^2 u^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{4}{\pi\sqrt{1+\gamma_0^2}} [\mathbf{K}(q) - \mathbf{D}(q)],\end{aligned}\quad (33)$$

при этом

$$\tilde{g}(\gamma_0) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{8}\gamma_0^2 + \frac{15}{64}\gamma_0^4 + \dots, & \gamma_0 \ll 1, \\ \frac{4}{\pi\gamma_0} [1 - \ln(4e\gamma_0)/2\gamma_0^2], & \gamma_0 \gg 1. \end{cases}\quad (34)$$

3. Еще одним примером, допускающим аналитическое решение при помощи ММВ, является «солитоноподобный» импульс $\varphi(t) = 1/\text{ch}^2\theta$ [52], для которого

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\gamma_0) &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 du \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+\gamma_0^2 u^2} = \frac{2}{1+\sqrt{1+\gamma_0^2}} = \\ &= 1 - \frac{1}{4}\gamma_0^2 + \frac{1}{8}\gamma_0^4 + \dots,\end{aligned}\quad (35)$$

$$\tilde{b}_{\parallel} = \frac{\gamma_0^2}{(1+\gamma_0^2)^{3/2}}, \quad \tilde{b}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_0^2}}.\quad (36)$$

Отметим, что в квазиклассическом пределе

$$\epsilon \ll 1, \quad \omega \ll m, \quad b \gg l_C \quad (37)$$

выражения (35), (36), полученные с помощью ММВ, согласуются с точным решением [54] уравнения Дирака. Другие примеры вычисления входящих в (27) функций можно найти в работе [32]. В рассмотренных примерах функция $\tilde{g}(\gamma_0)$ убывает с ростом γ_0 , при этом вероятность w резко возрастает (при фиксированной амплитуде поля $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{cr}$). Как и в случае многофотонной ионизации атомов, этот эффект проявляется в области высоких частот $\omega \gg \omega_t$, что на языке ММВ объясняется сокращением эффективной ширины барьера. В целом, модельный случай переменных полей вида (26) удастся рассмотреть в деталях.

Приведем некоторые оценки для модели (26) с $\varphi(\theta) = \cos\theta$, т. е. в случае монохроматического поля. Число N пар, образованных в объеме²⁾ $V = \lambda^3$ при длительности импульса τ , равно $N = w\lambda^3\tau$, где w — вероятность (24). Значения электрического поля, необходимого для рождения одной пары, представлены на рис. 3. Здесь кривые 1 и 5 отвечают длительности импульса $\tau = 2\pi/\omega$ (один период поля) и $\tau = 1$ с, а значения λ отхватывают интервал от 10600 нм ($\hbar\omega = 0.11$ эВ, CO₂-лазер) до 13 нм ($\hbar\omega = 95$ эВ, лазер на свободных электронах). Для инфракрасных и оптических лазеров порог рождения пар достигается при $\mathcal{E} \approx (0.7 \div 1) \cdot 10^{15}$ В/см, что на полтора порядка меньше \mathcal{E}_{cr} . Зависимость числа пар, рождаемых в объеме $V = \lambda^3$, от амплитуды поля титан-сапфирового лазера показана на рис. 4. Заметим, что эти оценки основаны на простейшей модели лазерного импульса (26) и носят качественный характер.

²⁾ Дифракционный предел для фокусировки лазерного света с длиной волны λ .

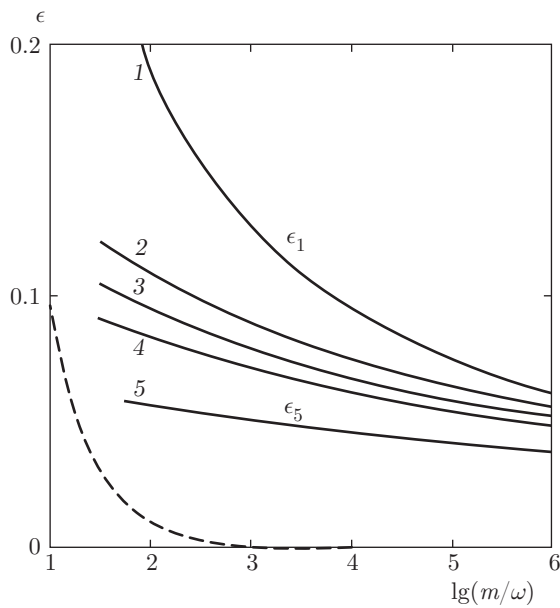


Рис. 3. Приведенное электрическое поле $\epsilon = \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_{cr}$, необходимое для рождения одной e^+e^- -пары в объеме $V = \lambda^3$. Кривые соответствуют (в порядке возрастания номера) длительности импульса 2.6 фс, 0.01 пс, 1 пс, 100 пс, 1 нс. Область адиабатичности расположена выше штриховой кривой, для которой $\gamma_0 = 1$. Из работы [32]

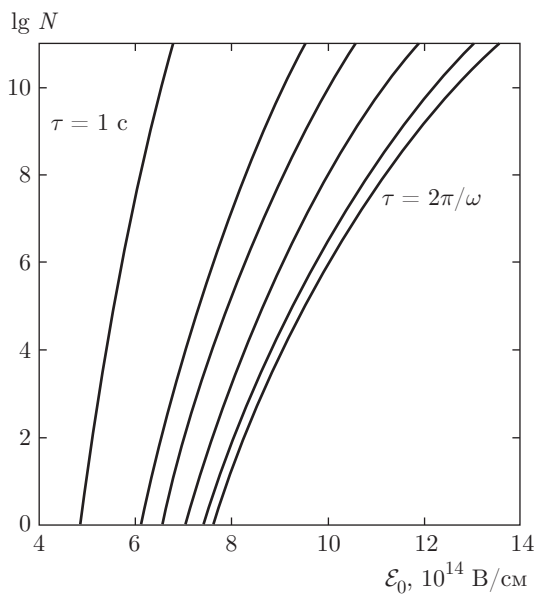


Рис. 4. Зависимость числа e^+e^- -пар, рождаемых в объеме $V = \lambda^3$, от амплитуды поля для титан-сапфирового лазера ($\lambda = 795$ нм). Кривые соответствуют (справа налево) длительности импульса τ [с] = $2\pi/\omega = 2.6 \cdot 10^{-15}$, 10^{-14} , 10^{-12} , 10^{-10} , 10^{-8} , 1. Из работы [32]

Сравнение (27) с формулой (4.4) из работы [31] показывает аналогию этих формул, однако функции g и \tilde{g} существенно различаются аналитически (в связи с этим мы обозначили входящие в (27) функции тильдой). Это объясняется различным видом закона дисперсии $\epsilon(p)$ в ньютоновской и в релятивистской механиках. Параметры адиабатичности γ и γ_0 в этих двух случаях также имеют разный порядок величины.

Отметим, что в работе Келдыша [34] помимо ионизации атомов и атомных ионов рассмотрена также теория многофотонной ионизации полупроводников. При этом закон дисперсии выбирался в виде $\epsilon(p) = \Delta(1 + p^2/m_*\Delta)^{1/2}$, где p — квазиимпульс, m_* — приведенная масса электрона и дырки и Δ — ширина запрещенной зоны, отделяющей валентную зону от зоны проводимости. Выражение для $\epsilon(p)$ совпадает, с точностью до обозначений, с законом дисперсии $\epsilon(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$ в релятивистской квантовой механике свободной частицы, поэтому и формулы для вероятности $w(\mathbf{p})$ имеют в этих двух случаях аналогичный вид. В этой связи уместно упомянуть также эффект Франца — Келдыша [55, 56], заключающийся в сдвиге границы собственного поглощения света с частотой ω в полупроводнике в присутствии внешнего электрического поля \mathcal{E} . Вследствие туннелирования электронов из валентной зоны в зону проводимости размывается граница континуума и становится возможным поглощение света с частотой $\omega < \omega_0 = \Delta/\hbar$, а коэффициент поглощения $\alpha(\mathcal{E}, \omega)$ имеет, с экспоненциальной точностью, тот же вид, что и вероятность туннелирования (24)³⁾:

$$\alpha(\mathcal{E}, \omega) \propto \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{eff}}{\mathcal{E}}\right), \quad (38)$$

$$\mathcal{E}_{eff} = \frac{4\sqrt{2m_*\hbar}}{3e}(\omega_0 - \omega)^{3/2}.$$

3.3. Рождение пар в поле фокусированного лазерного импульса

Переменное электрическое поле вида (26) с $\mathcal{H} \equiv 0$ представляет собой идеализацию, завышающую число $N_{e^+e^-}$ образовавшихся пар. В реальной электромагнитной волне всегда присутствует магнитное поле, которое уменьшает $N_{e^+e^-}$ (как известно, в чисто магнитном поле, так же, как и в плоской волне произвольной интенсивности, поляризации и спектрального состава, пары в вакууме не рождаются [9, 11].) В работе [57] рассмотрена реалистичес-

³⁾ См., например, §8 главы VIII в книге А. И. Ансельм, *Введение в теорию полупроводников*, Наука, Москва (1978).

кая трехмерная модель фокусированного лазерного импульса, основанная на точном решении уравнений Максвелла в вакууме и содержащая следующие параметры: радиус R фокального пятна, параметр фокусировки $\Delta = c/\omega R = \lambda/2\pi R$, характеризующий отличие лазерного импульса от плоской волны, и дифракционная, или рэлеевская длина $L = R/\Delta = kR^2$ ($k = 2\pi/\lambda$ — волновой вектор). Отметим, что Δ — малый параметр, во всяком случае $\Delta \lesssim 1/\pi$. Явные выражения для электрического поля такого импульса приведены в Приложении С.

При вычислении числа пар $N_{e^+e^-}$ учтем, что длина формирования l_f процесса рождения пар полем с напряженностью, близкой к критической, определяется комптоновской длиной $l_C = \hbar/mc$ [11], которая на много порядков меньше длины волны лазерного излучения, $l_C \ll \lambda$. Это позволяет локально использовать формулу для среднего числа пар, рождаемых постоянным электромагнитным полем [11] в единице объема и в единицу времени, интеграл от которой по всему объему V фокальной области и по длительности импульса T дает полное число рожденных пар:

$$N_{e^+e^-} = \frac{1}{4\pi^2 l_C^4} \int dt dV \epsilon(\mathbf{r}, t) \eta(\mathbf{r}, t) \times \\ \times \operatorname{cth} \left(\frac{\pi \eta(\mathbf{r}, t)}{\epsilon(\mathbf{r}, t)} \right) \exp \left(-\frac{\pi}{\epsilon(\mathbf{r}, t)} \right). \quad (39)$$

Здесь $\epsilon(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t)/\mathcal{E}_{cr}$, $\eta(\mathbf{r}, t) = H(\mathbf{r}, t)/\mathcal{E}_{cr}$ — локальные значения нормированных на \mathcal{E}_{cr} инвариантов E и H , имеющих смысл напряженностей электрического и магнитного поля в той системе отсчета, где они параллельны⁴⁾:

$$E = \sqrt{(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} + \mathcal{F}}, \quad H = \sqrt{(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} - \mathcal{F}}, \\ \mathcal{F} = (\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2)/2, \quad \mathcal{G} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{H}.$$

Явные выражения для инвариантов \mathcal{F} и \mathcal{G} и полей \mathcal{E} и \mathcal{H} в данной модели приведены в [57], см. формулы (2.1)–(2.12) указанной работы.

Заметим, что длина формирования l_f зависит от напряженности поля как $l_f \sim l_C (\mathcal{E}_{cr}/\mathcal{E})^{3/2}$ [11]. Приближение локально-постоянного поля (ЛПП), которое лежит в основе (39), справедливо, если выполнено условие $l_f \ll \lambda$, где λ — длина волны лазерного импульса. Для пиковой напряженности поля это условие выглядит как $\mathcal{E}_0 \gg \mathcal{E}_{cr} (l_C/\lambda)^{2/3}$. Это значит, что для оптического лазера ($\lambda \sim 1$ мкм) интенсивность должна быть много больше 10^{21} Вт/см².

⁴⁾ Как известно [44], такая система отсчета всегда существует, за исключением случая скрещенных полей (но в этом случае $\mathcal{F} = \mathcal{G} = 0$ в каждой точке, и рождение пар отсутствует).

Другими словами, приближение ЛПП заведомо применимо для любого поля, рождающего пары.

Оценим число рожденных лазерным импульсом пар в предположении, что инвариант ϵ имеет в самом центре фокальной области единственный максимум, а магнитное поле η в этой точке обращается в нуль. Похожая ситуация имеет место для фокусированного лазерного импульса электрического типа, см. Приложение С. Тогда основной вклад в интеграл (39) дает окрестность центра фокальной области, где нормированные инварианты $\epsilon(\mathbf{r}, t)$, $\eta(\mathbf{r}, t)$ можно представить в виде

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_{cr}} \left(1 - \frac{r_{\perp}^2}{2R^2} - \frac{z^2}{2L^2} - \frac{t^2}{2\tau^2} \right), \quad (40) \\ \eta(\mathbf{r}, t) \approx 0,$$

где параметры R и L определены выше, а τ — длительность импульса. После простых вычислений для полного числа рожденных пар в этом специальном случае получим

$$N_{e^+e^-} \approx \frac{R^2 L \tau}{\pi^3 l_C^4} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_{cr}} \right)^2 \exp \left(-\frac{\pi \mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}_0} \right). \quad (41)$$

Мы видим, что при $R \sim \lambda \sim 1$ мкм, $L \sim 3\lambda$, $\tau \sim 10$ фс число пар $N_{e^+e^-}$ становится порядка единицы уже для $\mathcal{E}_0 \approx 5.6 \cdot 10^{-2} \mathcal{E}_{cr}$. Это значит, что при интенсивности $\mathcal{I} \approx 1.5 \cdot 10^{27}$ Вт/см² за один выстрел лазера рождается одна пара. Эта интенсивность, которую мы назовем пороговой, по крайней мере на два порядка ниже критической (1).

На протяжении долгого времени считалось, что вероятность рождения пары целиком определяется так называемой швингеровской экспонентой $\exp(-\pi \mathcal{E}_{cr}/\mathcal{E})$, и потому экспоненциально мала при $\mathcal{E} < \mathcal{E}_{cr}$. Однако из формулы (41) видно, что для числа рожденных пар швингеровская экспонента сопровождается предэкспоненциальным множителем $V\tau/l_C^4$. Это значит, что швингеровская экспонента определяет вероятность рождения пары в комптоновском 4-объеме l_C^4 . Поскольку 4-объем $V\tau$, занимаемый электрическим полем, в любой реалистической ситуации много больше комптоновского, вероятность приобретает огромный предэкспоненциальный множитель. Для оптического лазерного импульса с длиной волны $\lambda = 1$ мкм и длительностью 10 фс, сфокусированного до оптического предела, этот множитель оказывается порядка 10^{25} . Он настолько велик, что может компенсировать малость швингеровской экспоненты даже при $\mathcal{E}_0 \ll \mathcal{E}_{cr}$.

В табл. 2 представлены результаты численных расчетов числа пар $N_{e^+e^-}$, рожденных одиночным

Таблица 2. Среднее число пар $N_{e^+e^-}$, рожденных одиночным лазерным импульсом электрического типа, в зависимости от интенсивности \mathcal{I} и параметра фокусировки Δ

\mathcal{I} , 10^{-28} Вт/см ²	$\epsilon \cdot 100$	N_e , $\Delta = 0.1$	N_e , $\Delta = 0.05$
0.4	0.160	0.093	–
0.5	0.179	2.4(1)	–
0.7	0.211	3.8(4)	–
0.8	0.23	5.3(5)	6.4(–11)
0.9	0.240	4.7(6)	4.1(–9)
1.0	0.252	3.0(7)	1.4(–7)
1.5	0.309	1.7(10)	0.023
2.0	0.357	8.0(11)	32
2.5	0.399	1.2(13)	4.6(3)
3.0	0.438	8.4(13)	1.9(5)
5.0	0.565	1.0(16)	1.3(9)

фокусированным лазерным импульсом электрического типа (см. Приложение С), в зависимости от интенсивности \mathcal{I} и параметра фокусировки Δ . Как и следовало ожидать, число рожденных пар при одной и той же интенсивности очень резко зависит от параметра фокусировки. При его увеличении всего вдвое число рожденных пар возрастает более чем на десять порядков. Но, пожалуй, главное состоит в резкой зависимости от интенсивности. По мере роста пиковой интенсивности число рожденных пар растет так быстро, что энергия их покоя $W_{e^+e^-}^r \approx 2mc^2 N_{e^+e^-}$ становится сравнимой с энергией самого лазерного импульса W_L . Более того, при $\mathcal{E}_0 \sim \mathcal{E}_{cr}$ энергия $W_{e^+e^-}^r$ оказывается намного больше W_L . Это означает следующее. Во-первых, поскольку пары образуются за счет энергии лазерного импульса, процесс их рождения истощает его. Во-вторых, метод расчета, при котором лазерное поле рассматривается как заданное классическое внешнее поле, становится внутренне противоречивым: появляется необходимость учитывать обратное влияние эффекта рождения пар на процесс фокусирования импульса. И в третьих, проведенный анализ прямо показывает, что значение напряженности порядка \mathcal{E}_{cr} недостижимо для поля, рождающего электрон-позитронные пары. Последний результат является убедительным аргументом в пользу этого утверждения, высказанного Н. Бором еще в 30-х гг. прошлого века (см., например, [5, стр. 232]).

Пороговое значение интенсивности можно понизить за счет использования многопучковой техно-

логии. В результате интерференции сталкивающихся когерентных импульсов результирующее поле приобретает пиковую пространственно-временную структуру, что может приводить к тому, что пиковое значение напряженности возрастает, в то время как полный 4-объем, занятый полем, уменьшается. С ростом пиковой напряженности число рожденных частиц растет экспоненциально, а с уменьшением объема, занятого полем, убывает, но лишь степенным образом. Это и объясняет, почему пороговая интенсивность понижается. Так, два идентичных линейно поляризованных лазерных импульса могут «сталкиваться» таким образом, что в пучностях образовавшейся стоячей волны электрические поля будут суммироваться, а магнитные — компенсировать друг друга.

Оценки для числа пар, рождающихся в поле двух сталкивающихся импульсов, приведены в табл. 2 работы [58]. Апертура лазерных пучков ограничивает число таких пар в группе, состоящей из сфокусированных в одну точку пучков так, что их направления распространения лежат в одной плоскости, некоторым числом $n/2$, где n — полное число сталкивающихся импульсов. При этом пиковая напряженность в фокусе возрастает в \sqrt{n} раз. В работе [59] была предложена оптимальная конфигурация эксперимента, в котором имеются 3 группы импульсов, каждая из которых состоит из 8 импульсов, сталкивающихся в одной плоскости, причем направления распространения импульсов каждой группы составляют угол $\pi/4$ с плоскостями других групп. Распределение инвариантного электрического поля ϵ в зависимости от координат в одной из плоскостей, проходящей через фокус, для 2, 8 и 24 сталкивающихся импульсов представлено на рис. 5. Согласно вычислениям, в такой конфигурации суммарная пороговая энергия 24 импульсов, необходимая для наблюдения эффекта рождения, составляет примерно 5 кДж для импульсов с $\lambda \approx 1$ мкм и длительностью 10 фс. Это соответствует суммарной мощности около 500 пВт, которая, по-видимому, может быть реализована на установках типа ELI и XCELS [17, 18].

3.4. Динамический эффект Швингера

Рассмотрим влияние укорочения импульса на вероятность рождения пар и их импульсный спектр, для чего достаточно определить величины, входящие в формулу (27). В частности,

$$\tilde{g}(\gamma_0) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \chi(\gamma_0 u) \sqrt{1-u^2} du. \quad (42)$$

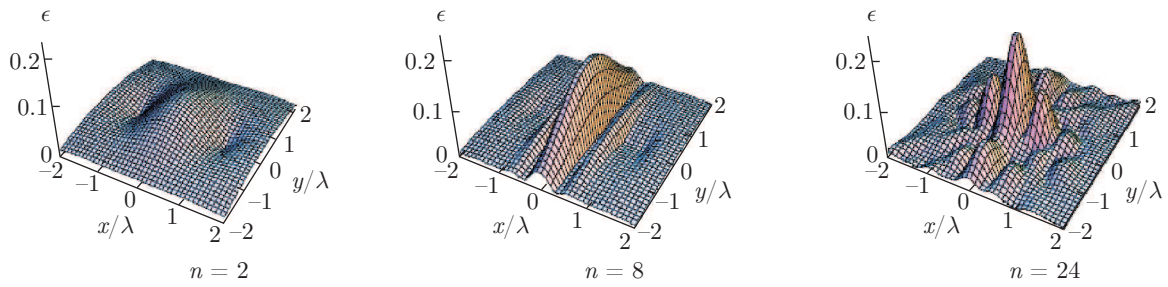


Рис. 5. Распределение инвариантного электрического поля в зависимости от координат в плоскости xy , проходящей через лазерный фокус, для 2, 8 и 24 сталкивающихся импульсов электрического типа. Суммарная мощность пучков во всех трех случаях предполагается одинаковой. Из работы [58]

Здесь $\chi(u)$ — вспомогательная функция, однозначно определяемая по форме лазерного импульса $\varphi(\theta)$ и имеющая тот же вид, что и в теории многофотонной ионизации атомов (см., например, разд. 3 в обзоре [27]), а параметр адиабатичности γ_0 определен формулой (28) (см. также Приложение В). Если функция $\chi(u)$ известна, то вычисление вероятности рождения пар и их импульсного спектра сводится к квадратурам. Результаты расчета для нескольких импульсов показаны на рис. 6, на котором кривые 1–5 относятся к полям следующего вида: 1) $\varphi = \cos \theta$ (монохроматический импульс); 2) $\varphi = \exp(-\theta^2)$ (гауссиан); 3) $\varphi = 1/\text{ch}^2 \theta$ (солитоноподобный импульс [52]); 4) $\varphi = (1 + \theta^2)^{-1}$ (лоренцев импульс) и 5) $\varphi = (1 + \theta^2)^{-2}$. Во всех перечисленных случаях функция $\tilde{g}(\gamma_0)$ убывает монотонно с ростом параметра адиабатичности, при этом вероятность w резко возрастает (при фиксированном значении поля $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{cr}$) и для $\gamma_0 \gtrsim 1$ существенно зависит от формы лазерного импульса. Это явление, возникающее на высоких частотах $\omega \gtrsim \omega_t$, аналогично поведению вероятности многофотонной ионизации атомов в зависимости от параметра Келдыша γ и было названо [32] «динамическим эффектом Швингера».

Для существующих в настоящее время лазеров $\hbar\omega \ll mc^2$, поэтому мы приведем разложения при $\gamma_0 \ll 1$ для функций, входящих в выражение (27). В адиабатической области вероятности определяются, в основном, поведением поля вблизи максимума. Считая, без ограничения общности, что максимум поля $\mathcal{E}(\theta)$ достигается при $\theta = 0$ и $\varphi(0) = 1$, так что

$$\varphi(\theta) = 1 - \frac{a_2}{2!}\theta^2 + \frac{a_4}{4!}\theta^4 + \dots, \quad a_2 > 0, \quad (43)$$

получаем

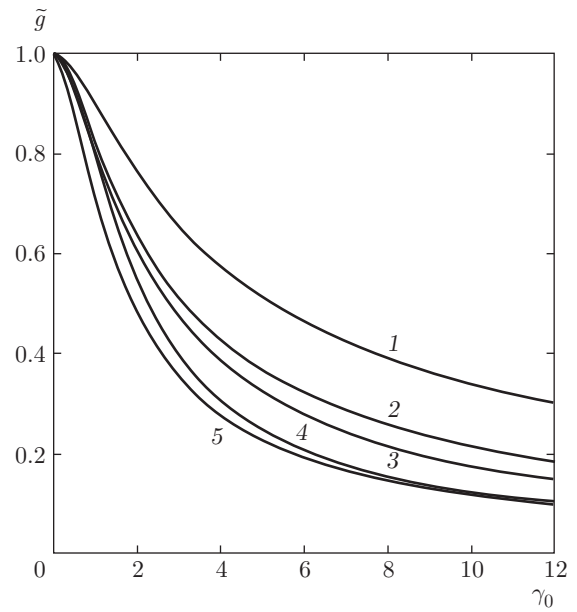


Рис. 6. Функция \tilde{g} из уравнений (27), (42) в зависимости от параметра адиабатичности γ_0 для импульсов различной формы: 1 — $\varphi(\theta) = \cos \theta$; 2 — $\varphi(\theta) = \exp(-\theta^2)$; 3 — $\varphi(\theta) = 1/\text{ch}^2 \theta$; 4 — $\varphi(\theta) = (1 + \theta^2)^{-1}$; 5 — $\varphi(\theta) = (1 + \theta^2)^{-2}$, $\theta = \omega t$

$$\tilde{g}(\gamma_0) = 1 - \frac{1}{8}a_2\gamma_0^2 + \frac{1}{192}(10a_2^2 - a_4)\gamma_0^4 + \mathcal{O}(\gamma_0^6), \quad (44)$$

$$\tilde{b}_{\parallel} = \frac{1}{2}a_2\gamma_0^2 + \dots, \quad \tilde{b}_{\perp} = 1 - \frac{1}{8}\gamma_0^2 + \dots$$

Вместе с формулами (27) и (31) эти выражения определяют вероятности рождения пар в низкочастотном пределе.

4. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ АСПЕКТ ЗАДАЧИ О РОЖДЕНИИ ПАР

4.1. Бозонный случай ($s = 0$)

Уравнение Клейна–Фока–Гордона имеет (в калибровке $\mathbf{A} = 0$, $A_0 = -\mathcal{E}(t) \cdot \mathbf{r}$) решение

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \xi(t)e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad (45)$$

где \mathbf{p} — импульс классической частицы в поле $\mathcal{E}(t)$,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_- + e \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(t') dt' = \mathbf{p}_+ - e \int_t^{\infty} \mathcal{E}(t') dt', \quad (46)$$

и функция $\xi(t)$ удовлетворяет осцилляторному уравнению

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \omega^2(t)\xi &= 0, \quad \omega^2(t) = m^2 + p^2(t), \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \omega(t) &= (m^2 + p_{\pm}^2)^{1/2} \equiv \omega_{\pm}. \end{aligned} \quad (47)$$

На бесконечности электрическое поле выключается, что позволяет поставить задачу о рождении пар из вакуума математически корректно.

Переходя от представления Шредингера к гейзенберговскому, имеем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{\exp(i\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{r})}{\sqrt{2\omega_-}} \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}(t) + \hat{b}_{-\mathbf{p}}^{\dagger}(t) \right]. \quad (48)$$

При этом выполняется каноническое преобразование Боголюбова

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}}(t) &= u(t) a_{\mathbf{p}} + v(t) b_{-\mathbf{p}}^{\dagger}, \\ \hat{b}_{-\mathbf{p}}^{\dagger}(t) &= v^*(t) a_{\mathbf{p}} + u^*(t) b_{-\mathbf{p}}^{\dagger}, \end{aligned} \quad (49)$$

коэффициенты которого могут быть выражены через решение осцилляторного уравнения (47). Так, при $t \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \omega(t) &\rightarrow \omega_-, \quad u(t) = \exp(-i\omega_- t), \quad v(t) = 0, \\ \hat{a}_{\mathbf{p}}(t) &= a_{\mathbf{p}} \exp(-i\omega_- t). \end{aligned} \quad (50)$$

Сохранение во времени коммутатора между гейзенберговскими операторами,

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}(t), \hat{a}_{\mathbf{p}'}^{\dagger}(t) \right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}(t), \hat{b}_{\mathbf{p}'}^{\dagger}(t) \right] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

накладывает условие

$$|u(t)|^2 - |v(t)|^2 = 1, \quad (51)$$

показывающее, что канонические преобразования (49) принадлежат квазиунитарной группе $SU(1, 1)$.

В данном квантовом состоянии (с импульсом $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t \rightarrow +\infty)$) может находиться n пар бозонов, при этом распределение по числу пар имеет вид

$$w_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= |C_2/C_1|^2, \quad 0 \leq \rho < 1, \\ \xi(t \rightarrow -\infty) &= e^{-i\omega_- t}, \\ \xi(t \rightarrow +\infty) &= C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{-i\omega_+ t}. \end{aligned} \quad (53)$$

4.2. Фермионный случай ($s = 1/2$)

Для фермионов со спином $s = 1/2$ из уравнения Дирака вместо (47) получаем

$$i\dot{\xi} = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}(t) + \beta m] \xi, \quad (54)$$

где $\xi(t)$ — биспинор, $\boldsymbol{\alpha}$ и β — матрицы Дирака. Оператор квантованного спинорного поля представляется в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3 p}{2\omega_-} e^{i\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{r}} \times \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1/2} \left[\hat{a}_{\sigma}(\mathbf{p}, t) u_{\alpha}^{\sigma} + \hat{b}_{\sigma}^{\dagger}(-\mathbf{p}, t) v_{\alpha}^{\sigma} \right], \end{aligned} \quad (55)$$

где \hat{a} и \hat{b} — гейзенберговские операторы уничтожения для частицы и античастицы; спиноры u и v удовлетворяют уравнениям Дирака с переменными величинами $\mathbf{p}(t)$ и $\varepsilon(t)$:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}(t) + \beta m] u^{\sigma} &= \varepsilon(t) u^{\sigma}, \\ [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}(t) + \beta m] v^{\sigma} &= -\varepsilon(t) v^{\sigma}. \end{aligned} \quad (56)$$

Как и в (49), зависимость операторов \hat{a} и \hat{b} от времени дается каноническим преобразованием

$$\begin{aligned} \hat{a}(\mathbf{p}, t) &= U(t) a(\mathbf{p}, t_0) + \bar{V}^{\dagger}(t) \hat{b}^{\dagger}(-\mathbf{p}, t_0), \\ \hat{b}^{\dagger}(\mathbf{p}, t) &= V(t) a(\mathbf{p}, t_0) + \bar{U}^{\dagger}(t) \hat{b}^{\dagger}(-\mathbf{p}, t_0), \end{aligned} \quad (57)$$

где U и V — матрицы второго порядка⁵⁾, причем $U^{\dagger}U + V^{\dagger}V = 1$ и имеют место уравнения

$$\begin{aligned} \dot{U} &= -i[\varepsilon(t) + N] U - PV, \\ \dot{V} &= PU + i[\varepsilon(t) - N] V, \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} N &= \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}}}{\varepsilon(t)[m + \varepsilon(t)]} = \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{1 + \sqrt{1 - v^2}}, \\ P &= \left(\dot{\mathbf{v}}^2 + \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{1 - v^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

⁵⁾ Детали вычислений мы здесь опускаем. Подробности можно найти в [60, гл. 4].

и $\sigma = \pm 1/2$ — проекция спина. В нерелятивистском пределе выражение для N переходит в известную формулу для томасовской прецессии, $N = (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})/2$.

Согласно принципу Паули, в определенном состоянии (\mathbf{p}, σ) могут находиться 0, 1 или 2 пары e^+e^- с вероятностями

$$w_0 = (1 - \nu_1)(1 - \nu_2), \quad w_1 = \nu_1 + \nu_2 - 2\nu_1\nu_2, \quad w_2 = \nu_1\nu_2, \quad (59)$$

где ν_i — собственные значения матрицы $V^\dagger U(t \rightarrow \infty)$.

В случае однородного электрического поля $\mathcal{E}(t)$ осцилляторы заряженных полей имеют переменную во времени частоту, но остаются независимыми. Поэтому в процессе эволюции перемешиваются только операторы $\hat{a}(\mathbf{p}, t)$ и $\hat{b}^\dagger(-\mathbf{p}, t)$ (а также $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, t)$ и $\hat{b}(-\mathbf{p}, t)$), что значительно упрощает решение задачи.

4.3. Использование теории представлений групп позволяет получить ответ наиболее коротким и элегантным способом. В задаче о рождении пар из вакуума повышающим оператором является, очевидно, $\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger$. Здесь \hat{a}^\dagger — оператор рождения частицы, \hat{b}^\dagger — античастицы (индексы \mathbf{p} и σ у операторов \hat{a} и \hat{b} мы здесь опускаем). Положим для бозонов

$$J_+ = \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger, \quad J_- = \hat{b} \hat{a} = \hat{a} \hat{b}, \quad J_0 = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b} + 1) \quad (60)$$

(при этом $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = [\hat{b}^\dagger, \hat{b}] = 1$), а в случае фермионов, когда антикоммутаторы $\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\} = \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}\} = 1$, имеем

$$J_+ = \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger, \quad J_- = \hat{b} \hat{a} = -\hat{a} \hat{b}, \quad J_0 = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b} - 1). \quad (61)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2\eta J_0, \quad (62)$$

где $\eta = -1$ в случае бозонов и $\eta = 1$ в случае фермионов. Отсюда видно, что операторы (60) и (61) являются генераторами групп (точнее, алгебр) $SU(1,1)$ и $SU(2)$, а оператор Казимира (квадрат «углового момента» на группе) равен

$$J^2 = J_0^2 + \eta(J_1^2 + J_2^2) = \frac{2\eta + 1}{4} \left[1 - (\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b})^2 \right]. \quad (63)$$

В вакуумном состоянии $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{b}^\dagger \hat{b} = 0$, поэтому для бозонов

$$J^2 = j(j + 1) = -\frac{1}{4}, \quad j = -\frac{1}{2}, \quad (64)$$

а для фермионов

$$J^2 = j(j + 1) = \frac{3}{4}, \quad j = \frac{1}{2}. \quad (65)$$

Вероятность перехода вакуум-вакуум равна квадрату функции Вигнера для соответствующего представления:

$$w_{00} = \left| d_{-j, -j}^{(j)}(\beta \text{ или } \theta) \right|^2 = \begin{cases} 1/\text{ch}^2(\beta/2), & s = 0, \\ \cos^2(\theta/2), & s = 1/2, \end{cases} \quad (66)$$

где β и θ — «углы поворота» ($0 < \beta < \infty$ для $SU(1,1)$ и $0 < \theta < \pi/2$ для $SU(2)$).

4.4. В качестве конкретного примера, допускающего решение в аналитическом виде, выберем импульс вида

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(\text{ch } \Omega t)^{-2}, \quad (67)$$

что соответствует известному в квантовой механике потенциалу Экарта [61]. В этом случае (для фермионов с $s = 1/2$)

$$\omega^2(t) = \frac{1}{2} [\omega_+^2 + \omega_-^2 + (\omega_+^2 - \omega_-^2) \text{th } \Omega t] - \Omega^2(\kappa^2 \pm i\kappa)(\text{ch } \Omega t)^{-2}, \quad (68)$$

$\kappa = e\mathcal{E}_0/\Omega^2$. При этом [30, 60]

$$R_+ = -i \frac{\Gamma(i\nu_+) \Gamma(1 - i\nu - i\rho/2) \Gamma(i\nu - i\rho/2)}{\Gamma(-i\nu_+) \Gamma(1 - i\nu + i\sigma/2) \Gamma(i\nu + i\sigma/2)}, \quad (69)$$

где $\nu_+ + \nu_- = \pi(\omega_+ + \omega_-)/\Omega$, $\sigma = \nu_+ - \nu_-$. Подставляя это в выражение $\rho = |R_+|$, находим

$$\rho_{s=1/2} = \frac{\text{ch } \nu - \text{ch}(\nu_+ - \nu_-)}{\text{ch}(\nu_+ + \nu_-) - \text{ch } \nu}, \quad \nu_+ + \nu_- > \nu > |\nu_+ - \nu_-|, \quad (70)$$

где $\nu_\pm = \pi\omega_\pm/\Omega$, $\nu = 2\pi e\mathcal{E}_0/\Omega^2$. Аналогичные формулы имеют место для скалярных частиц ($s = 0$):

$$\rho_{s=0} = \frac{\text{ch}(\nu_+ - \nu_-) + \cos \sqrt{1 - \kappa^2}}{\text{ch}(\nu_+ + \nu_-) + \cos \sqrt{1 - \kappa^2}}. \quad (71)$$

Формулы, эквивалентные (70) и (71), были получены Нарожным и Никишовым [54], которые нашли точное решение уравнений Дирака и Клейна – Фокка – Гордона для поля (67) и вычислили вероятность рождения пар из вакуума. В нашем подходе задача сводится к вычислению коэффициента прохождения через одномерный потенциальный барьер; некоторые точные и приближенные решения этой задачи можно найти в [60]. Заметим, что при выполнении условий

$$\mathcal{E}_0 \ll \mathcal{E}_{cr}, \quad \hbar\omega \ll mc^2 \quad (72)$$

к решению задачи о рождении пар полем $\mathcal{E}(t)$ можно применить ММВ.

При выполнении (72) имеем

$$\nu_{\pm} \gg 1, \quad \nu_+ + \nu_- \gg \nu \gg |\nu_+ - \nu_-|.$$

Разлагая

$$\omega_{\pm} = m \left\{ 1 + \frac{p_{\perp}^2}{m^2} + \left(\gamma^{-1} \pm \frac{p_{\parallel}^2}{m^2} \right) \right\}^{1/2}$$

$$D = \begin{cases} [\exp(-(\nu - \sqrt{\nu^2 - 1})) + \exp(-(\nu + \sqrt{\nu^2 - 1}))]^2, & s = 0, \\ (1 - \exp(-2\nu))^2, & s = 1/2. \end{cases} \quad (74)$$

При $\omega \gg m\sqrt{\mathcal{E}_0/\mathcal{E}_{cr}}$ параметр $\nu \gg 1$ и

$$D \approx \begin{cases} 1 - \mathcal{O}(1/\nu^2), & s = 0, \\ 1 - \mathcal{O}(e^{-2\nu}), & s = 1/2. \end{cases} \quad (75)$$

В этом случае вероятность практически не зависит от спина и совпадает, включая предэкспоненту, с результатом (27) квазиклассического расчета.

В заключение отметим, что в специальном случае однородного электрического поля $\mathcal{E}(t)$, сохраняющего свое направление в пространстве, вычисление вероятности рождения пар из вакуума сводится к задаче [62] о возбуждении одномерного осциллятора с переменной частотой [30, 60] $\omega(t)$:

$$\omega^2(t) = \begin{cases} m^2 + p^2(t), & s = 0, \\ m^2 + p^2(t) \pm i\mathcal{E}(t), & s = 1/2, \end{cases} \quad (76)$$

причем частота осциллятора вещественна в случае бозонов и комплексна для фермионов.

Авторы благодарны М. И. Высоцкому за интерес к работе и полезные замечания. Работа выполнена в Центре «Прикладная математика и теоретическая физика» при государственной поддержке Программы повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ (Соглашение с Минобрнауки РФ от 27 августа 2013 г. № 02.а03.21.0005) и РФФИ (грант № 16-02-00936).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Адиабатические разложения

Частотная зависимость вероятности туннелирования при ионизации атомного уровня лазерным излучением или при рождении e^+e^- -пар из вакуума

в ряд по степеням p/m , можно преобразовать (70) и (71) к следующему виду:

$$\rho_s(\mathbf{p}) = D \exp \left\{ -\frac{\pi\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}_0} \left[\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \gamma_0^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_0^2}} \frac{p_{\perp}^2}{m^2} + \frac{\gamma_0^2}{(1 + \gamma_0^2)^{3/2}} \frac{p_{\parallel}^2}{m^2} \right] \right\}, \quad (73)$$

где γ_0 — параметр адиабатичности (28), а предэкспоненциальный множитель равен

полем $\mathcal{E}(t)$ определяется функциями $g(\gamma)$ и $\tilde{g}(\gamma_0)$. С точностью до предэкспоненты имеем

$$w(\gamma) \propto \exp \left\{ -\frac{2\kappa^3\mathcal{E}_a}{3\mathcal{E}_0} g(\gamma) \right\}, \quad (A.1)$$

$$\tilde{w}(\gamma_0) \propto \exp \left\{ -\frac{2m}{\omega} \tilde{g}(\gamma_0) \right\},$$

где [47, 50]

$$g(\gamma) = \frac{3}{2\gamma} \int_0^{\gamma} \chi(u) \left(1 - \frac{u^2}{\gamma^2} \right) du, \quad (A.2)$$

$$\tilde{g}(\gamma_0) = \frac{4}{\pi\gamma_0} \int_0^{\gamma_0} \chi(u) \left(1 - \frac{u^2}{\gamma_0^2} \right)^{1/2} du,$$

γ (параметр Келдыша [34]) и γ_0 — параметры адиабатичности для этих задач,

$$\gamma = \frac{\omega\kappa}{\mathcal{E}_0} \quad (\hbar = m = e = 1, \kappa = \sqrt{2I}), \quad (A.3)$$

$$\gamma_0 = \frac{m\omega}{e\mathcal{E}_0} \quad (\hbar = c = 1),$$

I — потенциал ионизации, а функция $\chi(u)$ определяется формой лазерного импульса $\varphi(\omega t)$, см. работу [31, разд. 4].

В случае низкочастотного поля ($\gamma, \gamma_0 \ll 1$) естественно использовать адиабатические разложения

$$g(\gamma) = \sum_0^{\infty} (-1)^n g_n \gamma^{2n}, \quad (A.4)$$

$$\tilde{g}(\gamma_0) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \tilde{g}_n \gamma_0^{2n}, \quad g(0) = \tilde{g}(0) = 1.$$

Связь между коэффициентами этих разложений (при любой форме импульса) находим из (A.2):

$$\frac{\tilde{g}_n}{g_n} = \frac{4}{3} \frac{\Gamma(n + 5/2)}{(n + 1)! \Gamma(1/2)} = 1, \frac{5}{4}, \frac{35}{24}, \dots \quad (A.5)$$

соответственно для $n = 0, 1, 2, \dots$. В случае монохроматического излучения

$$g(\gamma) = 1 - \frac{1}{10}\gamma^2 + \frac{9}{280}\gamma^4 - \frac{5}{386}\gamma^6 + \dots,$$

и с учетом (A.5) имеем адиабатическое разложение для вероятности рождения пар полем $\varphi(t) = \cos \omega t$:

$$\tilde{g}(\gamma_0) = 1 - \frac{1}{8}\gamma_0^2 + \frac{3}{64}\gamma_0^4 - \frac{175}{768}\gamma_0^6 + \dots \quad (A.6)$$

В общем случае, считая, что функция импульса $\varphi(\theta)$ имеет максимум в нуле и $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0, \varphi''(0) < 0$,

$$\varphi(\theta) = 1 - \frac{a_2}{2!}\theta^2 + \frac{a_4}{4!}\theta^4 - \dots, \quad a_2 > 0, \quad \theta = \omega t,$$

получим

$$\tilde{g}(\gamma_0) = 1 - \frac{1}{8}a_2\gamma_0^2 + \frac{1}{192}(10a_2^2 - a_4)\gamma_0^4 + \dots \quad (A.7)$$

Аналогичное разложение имеет место для $g(\gamma)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Параметры γ_r и γ_R

В нерелятивистской теории ионизации Келдыша [34] параметр адиабатичности имеет вид $\gamma = \omega\kappa/\mathcal{E}_0$ ($\hbar = m = e = 1$). При $\gamma \ll 1$ процесс ионизации является туннельным, при $\gamma \gg 1$ — многофотонным. В релятивистском случае выбор подходящего параметра адиабатичности требует некоторых пояснений.

В качестве релятивистского обобщения этого параметра можно использовать величину γ_0 , определенную в (28). Однако она не зависит от энергии уровня в атоме и потому не слишком удобна при описании процесса релятивистской ионизации (в случае рождения пар мерой энергии является энергия покоя mc^2 — при этом параметр γ_0 возникает естественным образом). Релятивистским обобщением параметра Келдыша, зависящим от энергии уровня, могло бы быть выражение

$$\gamma_r = \frac{mc\omega}{\mathcal{E}_0} \sqrt{1 - \epsilon_0^2} \equiv \gamma_0 \sqrt{1 - \epsilon_0^2}, \quad (B.1)$$

которое переходит в выражение для γ в нерелятивистском пределе $\epsilon_0 = E_0/mc^2 \rightarrow 1 - I/mc^2$. Однако $\gamma_r \rightarrow 0$ при $\epsilon_0 \rightarrow -1$, когда уровень приближается к границе нижнего континуума и (B.1) теряет смысл. Это связано с тем, что при энергиях уровня $\epsilon_0 < 0$ контур интегрирования в комплексной плоскости времени меняет свой вид (см. рис. 2).

В рамках ММВ в качестве времени туннелирования электрона естественно взять $|t_0|$, где t_0 — полное (чисто мнимое) время подбарьерного движения. В случае скрещенных низкочастотных полей ($\mathcal{E} = \mathcal{H}, \mathcal{E} \perp \mathcal{H}, \omega \ll \kappa^2$) подбарьерная траектория находится аналитически. В частности,

$$t_0 = i\sqrt{\frac{3\xi^2}{1 + \xi^2}} \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}_0}, \quad \mathbf{r}(t_0) = 0, \quad (B.2)$$

где переменная $\xi = \xi(\epsilon_0)$ определена в (12). Это приводит к определению

$$\gamma_R = \omega|t_0| = \frac{mc\omega}{e\mathcal{E}_0} \sqrt{\frac{3\xi^2}{1 + \xi^2}} = \left(1 - \frac{\xi^2}{3}\right)^{-1/2} \gamma_r. \quad (B.3)$$

Для низких частот, $\omega \rightarrow 0$ (а также при $\epsilon_0 > 0$), значения γ_r и γ_R близки друг к другу. Так, в модели водородоподобного атома (иона) с зарядом $Z < \alpha^{-1} = 137$ имеем $\epsilon_0 = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2} = 0.926, 0.899, 0.741, 0$,

$$\gamma_r/\gamma_R = 0.997, 0.99, 0.97, 0.816 \quad (B.4)$$

соответственно при $Z = 30, 60, 92, 137$. С другой стороны, при $\epsilon_0 \rightarrow -1$ параметр $\gamma_r \rightarrow 0$, в то время как γ_R отличается от параметра $\gamma_0 = mc\omega/e\mathcal{E}_0$, возникающего в теории рождения пар из вакуума в переменном электрическом поле, лишь численным множителем 1.224. На рис. 7 показана зависимость функции g , стоящей в показателе экспоненты в (9), от параметра γ_R . Переход от постоянного поля ($\gamma_R = 0$) к случаю $\gamma_R \gg 1$ приводит к резкому увеличению вероятности туннелирования (как и в теории многофотонной ионизации атомов), причем численные значения $g(\gamma_R, \epsilon_0)$ почти не зависят от энергии уровня ϵ_0 . Поэтому выбор релятивистского параметра адиабатичности в форме (B.3) представляется более предпочтительным.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Трехмерная модель сфокусированного лазерного импульса

Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией задается 4-потенциалом вида

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\omega} a(\varphi), 0, 0\right), \quad A_0 = 0, \quad (C.1)$$

где $\mathcal{E} = \mathcal{H} = \mathcal{E}_0 da(\varphi)/dt$, $\varphi = \omega(t - z)$ — переменная светового фронта, и ось z выбрана вдоль направления распространения волны. Функция $a(\varphi)$

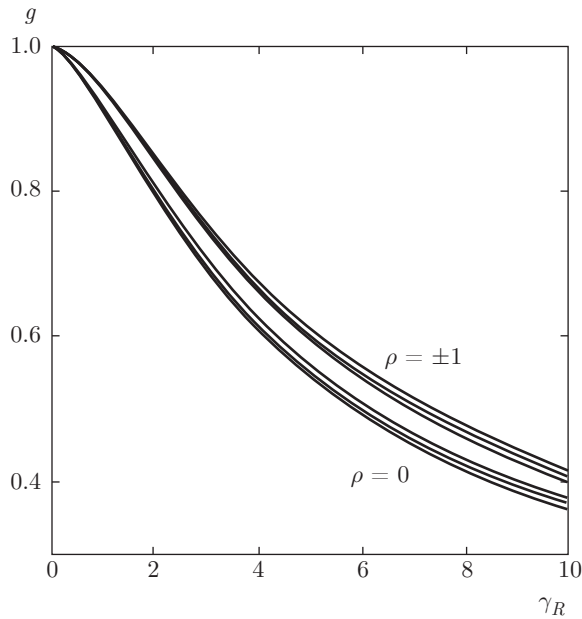


Рис. 7. Функция g в зависимости от параметра адиабатичности γ_R . При заданной эллиптичности излучения ρ кривые соответствуют значениям $\epsilon_0 = 1, 0, -1$ (сверху вниз). Из работы [50]

определяет форму импульса. Так, $a(\varphi) = \sin \varphi$ отвечает монохроматическому лазерному излучению, $a(\varphi) = \text{th } \varphi$ – солитоноподобному импульсу $\mathcal{E}(t, z) = \mathcal{E}_0 / \text{ch}^2 \varphi$ и т. д.

В работе [57] были найдены точные решения уравнений Максвелла в вакууме, характеризующиеся параметрами R (радиус фокального пятна), L (дифракционная длина) и Δ (параметр фокусировки) и описывающие стационарные во времени фокусированные лазерные импульсы. Были найдены также приближенные решения, описывающие импульсы конечной длительности τ и характеризующиеся огибающей $g(\tau)$.

В стационарном фокусированном лазерном импульсе электрического типа (т. е. таком, в котором магнитное поле имеет отличную от нуля проекцию на направление распространения импульса, а электрическое поле лежит в плоскости xy) последнее имеет вид [57]

$$\mathcal{E}^e = i\mathcal{E}_0 e^{-i\varphi} \times \{(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)F_1 - e^{2i\phi}(\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y)F_2\}, \quad (\text{C.2})$$

где функции F_1 и F_2 определяются из решения уравнений

$$2i\frac{\partial F_1}{\partial \chi} + \Delta^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) = 0,$$

$$F_2 = F_1 - \frac{2}{\chi^2} \int_0^\xi d\xi' \xi' F_1(\xi'), \quad (\text{C.3})$$

где $\chi = z/L$, $\xi = \rho/R$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\exp(i\phi) = (x + iy)/\rho$. При $\xi, |\chi| \rightarrow \infty$ функции $F_{1,2} \rightarrow 0$. Радиус R фокального пятна в плоскости xy , дифракционная (рэлеевская) длина L и параметр фокусировки Δ связаны соотношением

$$L = \frac{R}{\Delta} = kR^2, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (\text{C.4})$$

Магнитное поле импульса \mathcal{H}^e описывается аналогичными, хотя и более громоздкими, выражениями [57].

Если лазерный импульс сфокусирован до дифракционного предела, $R \sim \lambda$, то $\Delta \sim 1/2\pi \sim 0.1$; поэтому будем считать, что $\Delta \ll 1$. В этом случае входящие в (C.2) функции F_1 и F_2 имеют вид

$$F_1 = (1 + 2i\chi)^{-2} \left(1 - \frac{\xi^2}{1 + 2i\chi} \right) \times \exp \left(-\frac{\xi^2}{1 + 2i\chi} \right), \quad (\text{C.5})$$

$$F_2 = -\xi^2 (1 + 2i\chi)^{-3} \exp \left(-\frac{\xi^2}{1 + 2i\chi} \right).$$

Импульсы такого типа обычно называют гауссовыми пучками.

Другим решением уравнений Максвелла является волна с h -поляризацией, электрическое и магнитное поля которой выражаются через поля e -поляризованной волны согласно уравнениям

$$\mathcal{E}^h = \pm i\mathcal{H}^e, \quad \mathcal{H}^h = \mp i\mathcal{E}^e. \quad (\text{C.6})$$

Верхний знак соответствует левой, а нижний – правой циркулярной поляризации волны. В этом случае поперечным является магнитное поле.

Для того чтобы обобщить эти выражения на случай нестационарного лазерного импульса длительностью τ , в (C.1) вводится огибающая $g(\varphi/\omega\tau)$, удовлетворяющая условиям $g(0) = 1$ и $g \rightarrow 0$ при $|\varphi| \gg \gg \omega\tau$. Строго говоря, такие функции уже не являются точным решением уравнений Максвелла, но приближенно удовлетворяют им при $\omega\tau \gg 1$. За дальнейшими подробностями относительно моделей фокусированного лазерного импульса мы отсылаем читателя к работам [57–59].

ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. M. Dirac, *Progr. Roy. Soc. London A* **117**, 610; **118**, 351 (1928).
2. П. Дирак, *Принципы квантовой механики*, Наука, Москва (1979).
3. W. Gordon, *Z. Phys.* **48**, 11 (1928).
4. C. G. Darwin, *Progr. Roy. Soc. London A* **118**, 654 (1928).
5. А. Зоммерфельд, *Строение атома и спектры*, т. 2, Гостехиздат, Москва (1956).
6. F. Sauter, *Z. Phys.* **69**, 742; **73**, 547 (1931).
7. A. Calogeracos and N. Dombey, *Contemp. Phys.* **40**, 313 (1999).
8. W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936).
9. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
10. В. С. Ваяшин, М. В. Терентьев, *ЖЭТФ* **48**, 565 (1965).
11. А. И. Никишов, *Труды ФИАН* **111**, 152 (1979).
12. V. Yanovsky, V. Chvykov, G. Kalinchenko et al., *Opt. Express* **16**, 2109 (2008).
13. J. Andruskow, B. Aunte, V. Ayvazyan et al., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3825 (2000).
14. T. Shintake, H. Tanaka, T. Hara et al., *Nature Phot.* **2**, 555 (2008).
15. P. Emma, R. Arke, J. Arthur et al., *Nature Phot.* **4**, 641 (2010).
16. L. Young, E. P. Kanter, B. Krässig et al., *Nature* **466**, 56 (2010).
17. Европейский проект Extreme Light Infrastructure (<http://www.extreme-light-infrastructure.eu>) предполагает создание около 2015–2020 гг. лазерных установок, генерирующих импульсы интенсивностью до 10^{24} – 10^{25} Вт/см².
18. Проект создания сверхмощного лазера Exawatt Center for Extreme Light Studies (XCELS) на базе института прикладной физики РАН, <http://www.xcels.iapras.ru>.
19. Международная коллаборация International Center for Zetta-Exawatt Science and Technology (IZEST), <http://www.izest.polytechnique.edu>.
20. G. V. Dunne, *Eur. Phys. J. Special Topics* **223**, 1055 (2014).
21. G. Mourou, T. Tajima, and S. V. Bulanov, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 309 (2006).
22. A. Di Piazza, C. Müller, K. Z. Hatsagortsyan, and C. H. Keitel, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1177 (2012).
23. N. B. Narozhny and A. M. Fedotov, *Eur. Phys. J. Special Topics* **223**, 1083 (2014).
24. A. Ringwald, *Phys. Lett. B* **510**, 107 (2001).
25. R. Alkofer, M. B. Hecht, C. D. Roberts et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 193902 (2001).
26. N. B. Narozhny and A. M. Fedotov, *Contemp. Phys.* **56**, 249 (2015).
27. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, С. В. Попруженко, В. С. Попов, *УФН* **185**, 3 (2015).
28. В. С. Попов, *Письма в ЖЭТФ* **13**, 261 (1971).
29. В. С. Попов, *ЖЭТФ* **61**, 1334 (1971).
30. В. С. Попов, *ЖЭТФ* **62**, 1248 (1972).
31. В. С. Попов, *УФН* **174**, 921 (2004).
32. В. С. Попов, *Письма в ЖЭТФ* **74**, 133 (2001); В. С. Попов, *ЖЭТФ* **121**, 1235 (2002).
33. V. S. Popov, *Phys. Lett. A* **218**, 83 (2002); in *I. Ya. Pomeranchuk and Physics at the Turn of Centuries*, World Sci. (2003), p. 496.
34. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1945 (1964).
35. *J. Phys. B* **47**, issue 20 (2015): Special issue on 50 years of optical tunneling.
36. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, *ЖЭТФ* **50**, 1393 (1966).
37. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, *ЖЭТФ* **51**, 309 (1966).
38. В. С. Попов, В. П. Кузнецов, А. М. Переломов, *ЖЭТФ* **53**, 331 (1967).
39. L. D. Landau, *Phys. Zs. Sowjet.* **1**, 88 (1932).
40. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989).
41. N. B. Narozhny, S. V. Bulanov, V. D. Mur, and V. S. Popov, *Phys. Lett. A* **330**, 1 (2004).
42. V. S. Popov, V. D. Mur, B. M. Karnakov, and S. G. Pozdnyakov, *Phys. Lett. A* **358**, 21 (2006).
43. В. С. Попов, *ЯФ* **68**, 717 (2005).
44. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Теория поля*, Наука, Москва (1988).

45. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Механика*, Наука, Москва (1973).
46. В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, В. С. Попов, ЖЭТФ **114**, 798 (1998).
47. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, ЖЭТФ **132**, 331 (2007).
48. В. С. Попов, В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, Письма в ЖЭТФ **66**, 213 (1997).
49. Ю. Н. Демков, Г. Ф. Друкарев, ЖЭТФ **47**, 918 (1964).
50. В. С. Попов, В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, С. Г. Поздняков, ЖЭТФ **129**, 871 (2006).
51. E. Brezin and C. Itzikson, Phys. Rev. D **2**, 1191 (1970).
52. Л. В. Келдыш, частное сообщение (2001).
53. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции*, Наука, Москва (1977).
54. Н. Б. Нарожный, А. И. Никишов, ЯФ **11**, 1072 (1970).
55. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **33**, 994 (1957).
56. W. Franz, Z. Natur. **13a**, 484 (1958).
57. Н. Б. Нарожный, М. С. Фофанов, ЖЭТФ **117**, 867 (2000).
58. С. С. Буланов, Н. Б. Нарожный, В. Д. Мур, В. С. Попов, ЖЭТФ **124**, 14 (2006).
59. S. S. Bulanov, V. D. Mur, N. B. Narozhny et al., Phys. Rev. Lett. **104**, 220404 (2010).
60. В. С. Попов, Дисс. . . . докт. физ.-мат. наук, ИТЭФ, Москва (1974).
61. C. Eckart, Phys. Rev. **35**, 1303 (1930).
62. В. С. Попов, А. М. Переломов, ЖЭТФ **56**, 1375 (1969).