

# АКУСТОЭКСИТОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ГАЗЕ ДВУМЕРНЫХ НЕПРЯМЫХ ДИПОЛЬНЫХ ЭКСИТОНОВ В ПРИСУТСТВИИ БЕСПОРЯДКА

*В. М. Ковалев<sup>a,b</sup>, А. В. Чаплик<sup>a,c\*</sup>*

<sup>a</sup> *Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

<sup>b</sup> *Новосибирский государственный технический университет  
630073, Новосибирск, Россия*

<sup>c</sup> *Новосибирский государственный университет  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 10 декабря 2015 г.

Рассматривается теория линейного и квадратичного откликов двумерного газа не прямых дипольных экситонов на внешнее воздействие поверхностной звуковой волной в присутствии статического случайного потенциала. Теория строится как для высоких температур, заведомо больших температуры конденсации экситонного газа, так и при нулевой температуре, с учетом эффектов бозе-эйнштейновской конденсации. В рамках «крестовой» диаграммной техники вычисляются функции Грина частиц, корреляционная функция плотность–плотность, а также функция квадратичного отклика. Полученные результаты применяются для расчета поглощения поверхностных волн типа Рэлея и эффекта акустического увлечения экситонного газа волной Рэлея. Определено также затухание боголюбовских возбуждений экситонного конденсата, обусловленное рассеянием на случайном потенциале.

*Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 85-летию Л. В. Келдыша*

DOI: 10.7868/S004445101603010X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о конденсации экситонного газа низкой плотности ( $n_0 a_B^3 \ll 1$ ) в трехмерной системе впервые был рассмотрен теоретически в ставшей уже классической работе Келдыша и Козлова [1], где было показано, что такая система обладает боголюбовского типа спектром элементарных возбуждений аналогично системе слабозаимодействующих бозе-частиц. Таким образом, в области малых плотностей экситонная система представляет собой газ слабозаимодействующих водородоподобных экситонов Ванье–Мотта, теория которых может строиться с применением техники, разработанной Беляевым [2, 3]. С начала 1990-х гг. интерес переключился на изучение экситонных конденсатов в системах пониженной размерности [4–8] в структурах с двой-

ной или широкой одиночной квантовой ямой. Было продемонстрировано, что понижение размерности дает ряд преимуществ. В частности, пространственное разделение электронов и дырок в двойных квантовых ямах приводит к увеличению рекомбинационного времени жизни на несколько порядков и к уменьшению времени, требующегося на охлаждение экситонного газа. Кроме того, диполь-дипольное отталкивание экситонов в двойных квантовых ямах препятствует образованию связанных многоэкситонных комплексов.

Одним из важнейших аспектов теории экситонных конденсатов является вопрос об экситон-примесном рассеянии, или, шире, взаимодействия экситонов со статическими случайными полями, обусловленными неоднородностями интерфейсов квантовых ям, флуктуациями их ширины, заряженными и/или нейтральными примесями и т. д. Насколько нам известно, впервые вопрос экситон-примесного рассеяния для трехмерного экситонного конденсата в рамках боголюбовской модели слабонеидеально-

\* E-mail: chaplik@isp.nsc.ru

го бозе-газа рассматривался в работе [9]. Несколько позже этот вопрос применительно к двумерным системам экситонов изучался в работах [10–12]. Эффекты слабой локализации экситонов (выше температуры конденсации) были проанализированы в работах [13, 14]. В последнее время задача о влиянии случайного потенциала на свойства бозе-конденсата снова стала актуальной в свете развития теории атомарных конденсатов (см. обзор [15]). Во всех указанных работах (за исключением [13, 14]) рассматривались равновесные свойства конденсата бозе-частиц в поле случайного потенциала.

Недавно появился ряд экспериментальных работ, в которых изучалось поведение дипольных экситонов [16–18] и конденсата экситонных поляритонов [19] в поле поверхностной звуковой волны. Эти работы стимулировали нас к теоретическому изучению акустоэкситонного взаимодействия [20–22] в присутствии экситонного конденсата для чистых систем, когда динамика частиц является исключительно баллистической. Как было показано, выражения, описывающие отклики экситонной плотности и коэффициент увлечения в экситонном конденсате, расходятся при приближении частоты внешнего возмущения к энергии элементарных возбуждений системы. Как было указано в работе [22], эта расходимость является следствием пренебрежения рассеянием (конечным временем жизни) элементарных возбуждений. При достаточно низких температурах доминирующим вкладом в затухание элементарных возбуждений является экситон-примесное рассеяние. В настоящей работе мы обобщим полученные в [21, 22] результаты на диффузионную область как в высокотемпературной, так и в конденсированной фазе экситонного газа.

## 2. ЭКСИТОННЫЙ ГАЗ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Прежде чем переходить непосредственно к расчетам, остановимся на модели экситонного газа, которую мы будем рассматривать. Изучаемая структура представляет собой двойную квантовую яму на поверхности подложки, которую для простоты будем считать изотропной (рис. 1). Будем полагать, что экситоны представляют собой жесткие диполи, ориентированные вдоль направления роста структуры и имеющие дипольный момент  $\mathbf{p} = (0, 0, ed)$ , где  $e$  — модуль заряда электрона,  $d$  — расстояние между квантовыми ямами. Такая модель игнорирует внутренние степени свободы экситона и движение

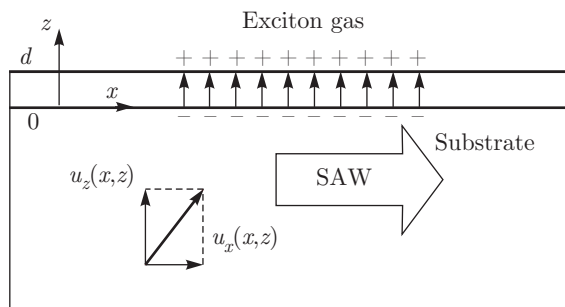


Рис. 1. Схема структуры: двойная квантовая яма на поверхности подложки. Поверхностная волна Рэлея распространяется по поверхности  $(x, y)$ . Функции  $u_x(x, z)$  и  $u_z(x, z)$  — компоненты вектора смещения точек среды (детали см. в [21, 22]). Стрелками обозначены дипольные моменты экситонов

электрона и дырки поперек слоев, а также подразумевает, что внешнее переменное звуковое поле и температура не возбуждают внутреннего движения частиц в экситоне. При этом экситон может двигаться как целое в плоскости квантовых ям, оставаясь ориентированным ортогонально ей. В такой модели функция Грина экситона зависит лишь от (двумерного в плоскости квантовой ямы) радиус-вектора центра масс  $\mathbf{r}$ . В отсутствие случайного потенциала функция Грина экситона удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left[ i\partial_t - \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \mu - U(\mathbf{r}, t) - g\delta n(\mathbf{r}, t) \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = \delta(x - x')\delta(t - t'). \quad (1)$$

В этом уравнении  $M = m_e + m_h$  — масса экситона,  $U(\mathbf{r}, t)$  — взаимодействие с внешним полем акустической волны,  $\mu$  — химический потенциал экситонов. Последнее слагаемое в квадратных скобках — экситон-экситонное взаимодействие, записанное в рамках подхода среднего поля. Взаимодействие экситонов будем считать контактным, а постоянную  $g$  можно оценить как  $g \sim 2\pi e^2 d / \epsilon$ . Величина  $\delta n(\mathbf{r}, t)$  представляет собой отклонение плотности экситонов от равновесного значения.

### 2.1. Отклик первого порядка и поглощение звука

Решение уравнения (1) будем искать итерациями по  $U(\mathbf{r}, t)$ . Представляя  $G - G_0 = \delta G_{(1)} + \delta G_{(2)} + \dots$ ,  $G_0$  — функция Грина невзаимодействующих частиц, и аналогично разлагая плотность  $\delta n = \delta n^{(1)} + \delta n^{(2)} + \dots$ , в первом порядке получаем

$$\delta G_{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = \int d\mathbf{r}_1 \int_C dt_1 G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1; t-t_1) \times \\ \times \left[ U(\mathbf{r}_1, t_1) + g\delta n^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1) \right] G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'; t_1 - t'), \quad (2)$$

где интегрирование по времени проводится по кельдышевскому контуру [23]. Представим внешнее воздействие в виде

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + \\ + U^*(\mathbf{k}, \omega) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t), \quad (3)$$

где  $|U(\mathbf{k}, \omega)|^2 \sim \omega I_0$ . В этом выражении  $\omega$  — частота поверхностной акустической волны Рэлея,  $I_0$  — ее интенсивность. Коэффициент пропорциональности в этой формуле представляет собой набор констант, характеризующих материал подложки и экситон-акустическое взаимодействие в модели деформационного потенциала (детали см. в работе [22]). Учитывая связь плотности частиц с функцией Грина,  $\delta n^{(1)}(\mathbf{r}, t) = i\delta G_{(1)}^<(\mathbf{r}, \mathbf{r}; t, t)$ , можно найти линейный отклик плотности самосогласованным образом:

$$\delta n^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \delta n^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + \\ + \delta n^{(1)}(-\mathbf{k}, -\omega) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t), \quad (4) \\ \delta n^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\Pi^R(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon^R(\mathbf{k}, \omega)} U(\mathbf{k}, \omega), \\ \varepsilon^R(\mathbf{k}, \omega) = 1 - g\Pi^R(\mathbf{k}, \omega).$$

В эти выражения входит поляризационный оператор экситонного газа:

$$\Pi^R(\mathbf{k}, \omega) = i \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \times \\ \times \left[ G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) G_0^<(\epsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}) + \right. \\ \left. + G_0^<(\epsilon, \mathbf{p}) G_0^A(\epsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \right]. \quad (5)$$

Здесь функции Грина введены согласно стандартным определениям [24].

Выражение (5) можно упростить, если воспользоваться следующим соотношением [24]:

$$G_0^<(\epsilon, \mathbf{p}) = -2\pi i f_\epsilon \delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{p}}) = f_\epsilon [G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) - G_0^A(\epsilon, \mathbf{p})].$$

С учетом этого соотношения перепишем (5) в следующем виде, удобном для дальнейших вычислений:

$$\Pi^R(\mathbf{k}, \omega) = i \int \frac{d\epsilon}{2\pi} (f_\epsilon - f_{\epsilon - \omega}) \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \mathfrak{D}_{\epsilon, \mathbf{p}}(\mathbf{k}, \omega) + \\ + i \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} f_\epsilon [G_0^R(\epsilon + \omega, \mathbf{p} + \mathbf{k}) G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) - \\ - G_0^A(\epsilon, \mathbf{p}) G_0^A(\epsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k})], \quad (6)$$

$$\mathfrak{D}_{\epsilon, \mathbf{p}}(\mathbf{k}, \omega) = G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) G_0^A(\epsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}).$$

Непосредственное интегрирование в (5) по  $\epsilon$  приводит к выражению линхардовского типа с равновесными функциями распределения  $f_\epsilon = [\exp((\epsilon - \mu)/T) - 1]^{-1}$  для экситонов с энергией  $\epsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2M$ , химическим потенциалом  $\mu$  и массой  $M$ . В отсутствие случайного потенциала мы использовали это выражение для поляризационного оператора при вычислении поглощения звука и эффекта акустического увлечения в [21, 22].

При наличии случайного поля  $u_i(\mathbf{r})$ , удовлетворяющего условиям

$$\langle u_i \rangle = 0, \quad \langle u_i(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}') \rangle = u_0^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (7)$$

выражение (6) следует усреднить по его случайным реализациям. После усреднения первого слагаемого получаем

$$\langle \mathfrak{D}_{\epsilon, \mathbf{p}}(\mathbf{k}, \omega) \rangle = \langle G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) \rangle \langle G_0^A(\epsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \rangle \times \\ \times \Gamma_\epsilon(\mathbf{k}, \omega), \quad (8)$$

где  $\langle G_0^{R,A} \rangle$  — усредненные по беспорядку функции Грина экситона, а величина  $\Gamma_\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$  отвечает за перенормировку вершины. Усреднение функций Грина по беспорядку вполне аналогично усреднению для случая электронов. В рамках борновского приближения имеем [13, 14]

$$\langle G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) \rangle^{-1} = \epsilon - \epsilon_{\mathbf{p}} - \text{Im} \Sigma(\epsilon, \mathbf{p}),$$

где  $\text{Im} \Sigma(\epsilon, \mathbf{p}) = -i\theta[\epsilon]/2\tau$  и  $\tau^{-1} = M u_0^2$  — время рассеяния экситонов на флуктуациях случайного поля  $u_i(\mathbf{r})$ . При этом по предположению слабости случайного поля энергия экситона велика по сравнению с уширением,  $\epsilon_{\mathbf{p}} \gg 1/\tau$ .

Перенормировка вершины вычисляется в лестничном приближении [25–27] как

$$\Gamma_\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{1 - u_0^2 \eta_\epsilon(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (9)$$

$$\eta_\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \langle G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) \rangle \langle G_0^A(\epsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \rangle.$$

Для расчета величины  $\eta_\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$  подынтегральное выражение представим в виде произведения:

$$\langle G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) \rangle \langle G_0^A(\epsilon - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \rangle = \\ = - \frac{1}{\omega - \epsilon_{\mathbf{p}} + \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + i/\tau} \times \\ \times \left[ \frac{1}{\epsilon - \epsilon_{\mathbf{p}} + i/2\tau} - \frac{1}{\epsilon - \omega - \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - i/2\tau} \right]. \quad (10)$$

В квадратных скобках в диффузионной области  $\omega\tau \ll 1$  и  $\tau v_\epsilon k \ll 1$  ( $v_\epsilon = \sqrt{2\epsilon/M}$  — скорость экситона с данной энергией  $\epsilon$ ) можно положить  $\omega = 0$  и  $\mathbf{k} = 0$ , после чего этот множитель заменяется на  $-2\pi i\tau\delta(\epsilon - \epsilon_p)$ , поскольку  $\epsilon_p \gg 1/\tau$ . Наличие дельта-функции позволяет взять интеграл по модулю импульса. В результате получаем

$$\Gamma_\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\tau(-i\omega + D_\epsilon k^2)}. \quad (11)$$

Здесь  $D_\epsilon = \tau v_\epsilon^2/2 = \tau\epsilon/M$  — коэффициент диффузии экситона на массовой поверхности. Полученное выражение следует подставить в (8) и далее в (6). В интеграле по энергии в первом слагаемом в (6) можно пренебречь раздвижкой полюсов в произведении функций Грина, считая  $\omega = 0$  и  $\mathbf{k} = 0$ , после чего произведение запаздывающей и опережающей функций Грина заменяется на дельта-функцию, что позволяет взять интеграл по импульсу.

Вычисление второго слагаемого в (6) менее громоздко. Действительно, при усреднении не нужно суммировать лестницу, (см. [25–27]) в результате остается произведение средних каждой функции Грина. Далее, в диффузионном пределе в этих произведениях можно положить  $\omega = 0$ ,  $\mathbf{k} = 0$ , после чего, используя равенство

$$(G^{R,A})^2 = -\frac{\partial}{\partial\epsilon} G^{R,A},$$

следует проинтегрировать по частям. Используя далее соотношения

$$\langle G^R \rangle - \langle G^A \rangle \approx -2\pi i\delta(\epsilon - \epsilon_p)$$

позволяет снять интегрирование по  $\mathbf{p}$ .

Собирая все получившиеся слагаемые вместе, находим поляризационный оператор экситонов в диффузионном пределе:

$$\Pi^R(\mathbf{k}, \omega) = M \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{2\pi} \left[ \frac{\partial f_\epsilon}{\partial\epsilon} + i \frac{f_\epsilon - f_{\epsilon-\omega}}{(-i\omega + D_\epsilon k^2)} \right]. \quad (12)$$

Точное вычисление этого интеграла провести не удастся. Однако наиболее интересной является область малых  $\omega \ll \epsilon \sim T$ , где  $\epsilon$  — характерная энергия экситонов в функции  $f_\epsilon$  при заданной температуре  $T$ . В случае малых  $\omega$  в (12) функции распределения можно разложить в ряд Тейлора. В результате получим ( $x = \epsilon/T$ )

$$\Pi^R(\mathbf{k}, \omega) = -M \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi} \frac{x}{x - i\beta} \left( -\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (13)$$

где  $\beta = 2\omega\tau/(k\ell_T)^2$  и введена характерная длина пробега  $\ell_T = v_T\tau$ .

Коэффициент поглощения рэлеевской волны выражается через функцию отклика плотности [21]

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\Pi^R(\mathbf{k}, \omega)}{\epsilon^R(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (14)$$

$$\Gamma \sim -k^2 \text{Im} S(\mathbf{k}, \omega) = -k^2 \frac{\text{Im} \Pi^R(\mathbf{k}, \omega)}{|\epsilon^R(\mathbf{k}, \omega)|^2},$$

где коэффициент пропорциональности не содержит зависимости от частоты и волнового вектора. Явное выражение для этого коэффициента приведено в работе [21]. Рассмотрим частотное поведение коэффициента поглощения  $\Gamma(\omega)$ . Поляризационный оператор выражается через безразмерную величину  $\beta = 2\omega\tau/(k\ell_T)^2$ . В случае рэлеевской волны  $\omega = ck$ , где  $c$  — ее фазовая скорость. В этом случае параметр

$$\beta = \frac{2}{\omega\tau} \left( \frac{c}{v_T} \right)^2.$$

При  $T = 10$  К,  $M \approx 0.1m_0$  получаем  $\beta \approx 2 \cdot 10^{-2}/\omega\tau$ . Таким образом, в диффузионной области  $\omega\tau \ll 1$  возможно как  $\beta \ll 1$ , так и  $\beta \gg 1$ . Эти неравенства эквивалентны, очевидно, неравенствам  $2(c/v_T)^2 \ll \omega\tau \ll 1$  и  $\omega\tau \ll 2(c/v_T)^2 \ll 1$  соответственно.

Рассмотрим обе эти ситуации. При больших и малых значениях параметра  $\beta$  из (13) имеем

$$\begin{aligned} \Pi^R(\mathbf{k}, \omega) \approx -M \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi} \left( -\frac{\partial f_\epsilon}{\partial\epsilon} \right) \times \\ \times \left( \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{ix}{\beta} \right), \quad \beta \gg 1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Pi^R(\mathbf{k}, \omega) \approx -M \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi} \left( -\frac{\partial f_\epsilon}{\partial\epsilon} \right) \times \\ \times \left( 1 + \frac{i\beta x}{x^2 + \beta^2} \right), \quad \beta \ll 1. \end{aligned}$$

Используя эти выражения, получим зависимости коэффициента поглощения рэлеевской волны от частоты. В первом случае больших  $\beta$  в (14) можно положить  $\epsilon^R(\mathbf{k}, \omega) \approx 1$ , и для коэффициента поглощения получаем

$$\Gamma \sim \frac{\omega^2 \omega\tau n_0}{Mc^4}. \quad (16)$$

В формуле (16)  $n_0$  — равновесная концентрация экситонов. В обратном предельном случае малых  $\beta$  интеграл в мнимой части в (15) можно оценить как  $-f'(0) \int_\beta^1 dx/x$ , что дает

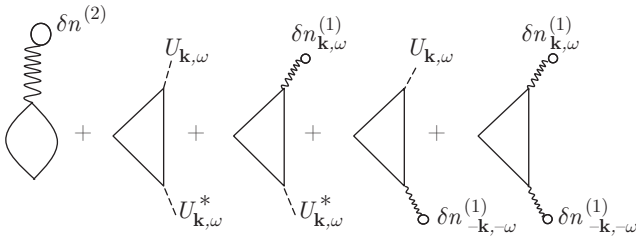


Рис. 2. Диаграммное представление вкладов второго порядка в функцию Грина экситонов при совпадающих аргументах

$$\Gamma \sim \frac{M\omega^2}{2\pi c^2} \beta \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \times \frac{\exp(2\pi n_0/MT)(\exp(2\pi n_0/MT) - 1)}{1 + \frac{2d}{aB}(\exp(2\pi n_0/MT) - 1)}, \quad (17)$$

т. е. частотная зависимость коэффициента поглощения в этом случае  $\Gamma \sim \omega \ln(\omega\tau)$ . Отметим, что в баллистическом режиме  $\Gamma \sim \omega^2$  [21].

### 2.2. Отклик второго порядка и эффект акустоэкситонного увлечения

Эффект увлечения заключается в появлении стационарной плотности тока экситонов (поверхностной плотности потока частиц) под действием распространяющейся в экситонном газе поверхностной звуковой волны. Величина плотности тока, очевидно, будет выражаться через функцию Грина, вычисленную во втором порядке по внешнему возмущению  $U(\mathbf{r}, t)$  в уравнении (1), а именно

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2M} \lim_{\mathbf{r}'t' \rightarrow \mathbf{r}t} (\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'}) G_{(2)}^<(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t'). \quad (18)$$

Получающееся выражение следует усреднить по времени для определения стационарного тока. Вычисление функции Грина, входящей в это выражение, основывается также на уравнении (1), где поправки следует искать до второго порядка по внешнему полю включительно. Несложные, но громоздкие вычисления мы не приводим. Более наглядно структуру получающихся членов можно представить себе в виде фейнмановских графиков (рис. 2). Прямое вычисление показывает, что первая диаграмма не дает вклада. Оставшиеся диаграммы дают выражение для тока

$$\mathbf{j} = i \left| \frac{U(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon^R(\mathbf{k}, \omega)} \right|^2 [\mathbf{D}^<(\mathbf{k}, \omega) + \mathbf{D}^<(-\mathbf{k}, -\omega)]. \quad (19)$$

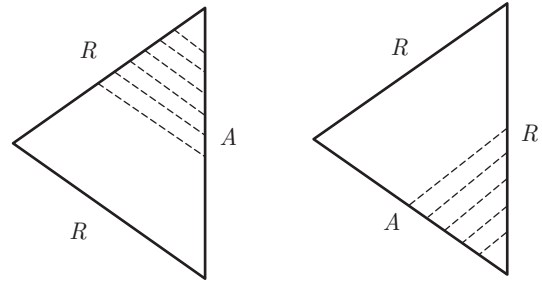


Рис. 3. Примесное усреднение треугольных диаграмм

Здесь диэлектрическая проницаемость системы описывает экранирование внешнего возмущающего поля

$$\varepsilon^R(\mathbf{k}, \omega) = 1 - g\Pi^R(\mathbf{k}, \omega),$$

а величина  $\mathbf{D}$  представляет треугольник из функций Грина на рис. 2,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^<(\mathbf{k}, \omega) = & \sum_{\mathbf{p}, \epsilon} \frac{\mathbf{p}}{M} G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) G_0^R(\epsilon_-, \mathbf{p}_-) G_0^<(\epsilon, \mathbf{p}) + \\ & + \sum_{\mathbf{p}, \epsilon} \frac{\mathbf{p}}{M} G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) G_0^<(\epsilon_-, \mathbf{p}_-) G_0^A(\epsilon, \mathbf{p}) + \\ & + \sum_{\mathbf{p}, \epsilon} \frac{\mathbf{p}}{M} G_0^<(\epsilon, \mathbf{p}) G_0^A(\epsilon_-, \mathbf{p}_-) G_0^A(\epsilon, \mathbf{p}), \quad (20) \end{aligned}$$

где  $\epsilon_- = \epsilon - \omega$ ,  $\mathbf{p}_- = \mathbf{p} - \mathbf{k}$ . Используя, как и выше, соотношение  $G_0^<(\epsilon, \mathbf{p}) = f_\epsilon [G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) - G_0^A(\epsilon, \mathbf{p})]$ , выражение (20) можно упростить:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^<(\mathbf{k}, \omega) = & \sum_{\epsilon} (f_\epsilon - f_{\epsilon-\omega}) \sum_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}}{M} G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) G_0^A(\epsilon, \mathbf{p}) \times \\ & \times [G_0^A(\epsilon_-, \mathbf{p}_-) - G_0^R(\epsilon_-, \mathbf{p}_-)], \quad (21) \end{aligned}$$

где опущены несущественные слагаемые  $(G^R)^3$  и  $(G^A)^3$  (в диффузионной области вклад этих слагаемых мал по сравнению с (21)<sup>1)</sup>). Усреднение этой величины по беспорядку сводится к перенормировке вершин треугольных диаграмм, как показано на рис. 3. В результате получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{D}^<(\mathbf{k}, \omega) \rangle = & \sum_{\epsilon} (f_\epsilon - f_{\epsilon-\omega}) \sum_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}}{M} \langle G_0^R(\epsilon, \mathbf{p}) \rangle \times \\ & \times \langle G_0^A(\epsilon, \mathbf{p}) \rangle [\Gamma_\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle G_0^A(\epsilon_-, \mathbf{p}_-) \rangle - \\ & - \Gamma_\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega) \langle G_0^R(\epsilon_-, \mathbf{p}_-) \rangle]. \quad (22) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Действительно, в этих слагаемых отсутствует диффузионный полюс и, следовательно, разложение вклада в ток от этих слагаемых в диффузионной области представляет собой степенной ряд по параметру  $\omega\tau \ll 1$ , в то время как оставшиеся слагаемые изменяются как  $1/\omega\tau$  вследствие наличия диффузионного полюса.



Интегрированием по частям в интеграле по  $\mathbf{p}$  это выражение можно свести к величине  $\eta_\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$  из (9), используя очевидные соотношения

$$\mathbf{p} = -M\nabla_{\mathbf{p}}\langle G^{R,A} \rangle^{-1}, \quad M\nabla_{\mathbf{p}}\langle G^{R,A} \rangle = \mathbf{p}[\langle G^{R,A} \rangle]^2.$$

В результате получим

$$\langle \mathbf{D}^<(\mathbf{k}, \omega) \rangle = 2i \sum_{\epsilon} (f_{\epsilon} - f_{\epsilon-\omega}) \operatorname{Im} \frac{\nabla_{\mathbf{k}} \eta_{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)}{1 - u_0^2 \eta_{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (23)$$

В типичных экспериментальных условиях выполняется неравенство  $\omega/T \ll 1$ , что позволяет разложить разность функций распределения в этом выражении по малым частотам. Используя также выражение для функции

$$\eta_{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) \approx \frac{1 + i\omega\tau + i\tau k^2/2M - \tau D_{\epsilon} k^2}{u_0^2},$$

для тока увлечения получаем

$$\mathbf{j} = -\frac{4M\omega^2\tau\mathbf{k}}{k^2} \left| \frac{U(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon^R(\mathbf{k}, \omega)} \right|^2 \times \int_0^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \left( -\frac{\partial f_{\epsilon}}{\partial \epsilon} \right) \left[ \frac{D_{\epsilon} k^2}{(\omega + k^2/2M)^2 + D_{\epsilon}^2 k^4} - \frac{D_{\epsilon} k^2}{(\omega - k^2/2M)^2 + D_{\epsilon}^2 k^4} \right]. \quad (24)$$

Раскладывая подынтегральное выражение по малым  $k^2/2M \ll \omega$ , для тока увлечения получаем окончательный результат:

$$\mathbf{j} = \tau\mathbf{k} \frac{(2\beta)^2}{2\pi} \left| \frac{U(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon^R(\mathbf{k}, \omega)} \right|^2 \times \int_0^{\infty} \left( -\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) \frac{x dx}{(\beta^2 + x^2)^2}. \quad (25)$$

Рассмотрим теперь предельные случаи этого выражения. В области малых  $\beta \ll 1$  в интеграле по  $x$  можно вынести производную функции распределения, взятую в нуле,  $-f'(0)$  за знак интеграла, поскольку основной вклад в интеграл дает область  $x \leq \beta \ll 1$ . Вычисляя оставшийся интеграл, получаем  $j \sim \tau\omega^2 I_0$ . В противоположной ситуации при  $\beta \gg 1$  подынтегральное выражение следует разложить в ряд по  $1/\beta$ , что дает  $j \sim \omega(\omega\tau)^3 I_0$ . Отметим, что в баллистическом режиме [22]  $j \sim I_0$  независимо от частоты (при фиксированной величине интенсивности).

### 3. ЭКСИТОННЫЙ КОНДЕНСАТ ПРИ НУЛЕВОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

В присутствии конденсата (детали см. в [20–22]) волновая функция системы представима в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t),$$

где  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — волновая функция конденсата (классическое поле), а  $\psi(\mathbf{r}, t)$  — надконденсатная часть. Функция  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  находится как решение уравнения Гросса–Питаевского

$$\left( i\partial_t - \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \mu - U(\mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{r}) - g|\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \times \varphi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (26)$$

а функции Грина надконденсатных частиц

$$\mathfrak{G} = -i\langle T[\psi(\mathbf{r}, t), \psi^+(\mathbf{r}', t')] \rangle,$$

$$\mathfrak{F}^+ = -i\langle T[\psi^+(\mathbf{r}, t), \psi(\mathbf{r}', t')] \rangle$$

— из матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - H(\mathbf{r}, t) & -g\varphi^2(\mathbf{r}, t) \\ -g\varphi^{*2}(\mathbf{r}, t) & -i\partial_t - H(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \hat{\mathfrak{G}} = \hat{1}, \quad (27)$$

$$H(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \mu + U(\mathbf{r}, t) + u_i(\mathbf{r}) + 2g|\varphi(\mathbf{r}, t)|^2.$$

В уравнении (27) учтено взаимодействие с конденсатом. Рассмотрим отклик конденсатных частиц на внешнее поле  $U(\mathbf{r}, t)$ . Пусть  $\varphi_0(\mathbf{r})$  — равновесное решение, описывающее конденсатные частицы в отсутствие внешнего динамического возмущения  $U(\mathbf{r}, t)$ . Общее решение ищем снова в виде разложения по внешнему полю  $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi_1 + \delta\varphi_2 + \dots$ . Линеаризуя уравнение (26), получаем

$$H_0(\mathbf{r})\varphi_0(\mathbf{r}) = 0, \quad H_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \mu + 2g|\varphi_0(\mathbf{r})|^2 + u_i(\mathbf{r}), \quad (28)$$

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - H_0(\mathbf{r}) & -g\varphi_0^2(\mathbf{r}) \\ -g\varphi_0^{*2}(\mathbf{r}) & -i\partial_t - H_0(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\varphi_1(\mathbf{r}, t) \\ \delta\varphi_1^*(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \varphi_0(\mathbf{r})U(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Подчеркнем, что линеаризация проводилась по внешнему динамическому возмущению — полю звуковой волны  $U(\mathbf{r}, t)$ , при этом случайное статическое поле примесей  $u_i(\mathbf{r})$  все еще входит в эти уравнения. Уравнение (28) описывает основное

состояние системы — экситонный конденсат в случайном поле примесей. Будем предполагать, что примеси не разрушают конденсат и точное решение уравнения (28) слабо отличается от такового в отсутствие примесей  $\varphi_0(\mathbf{r}) = \varphi_0 + \chi(\mathbf{r})$ , где  $\varphi_0^2 = n_c$  — концентрация частиц в конденсате, а  $\chi(\mathbf{r}) \ll \varphi_0$  — малая добавка. Такой подход применялся в работе [9] для задачи об экситонном бозе-конденсате в трехмерной системе. Уравнение для функции  $\chi(\mathbf{r})$  получается линеаризацией (28):

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \delta\mu + 2gn_c + u_i(\mathbf{r})\right)\chi(\mathbf{r}) = -\sqrt{n_c}(u_i(\mathbf{r}) - \delta\mu), \quad (30)$$

где  $\delta\mu = \mu - gn_c$  — возмущение химического потенциала системы. Решение этого уравнения пишем через функцию Грина нулевой энергии:

$$\chi(\mathbf{r}) = \sqrt{n_c} \int d\mathbf{r}' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (u_i(\mathbf{r}') - \delta\mu), \quad (31)$$

$$\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \delta\mu - 2gn_c - u_i(\mathbf{r})\right)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Обратим внимание, что функция  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  определена при заданном расположении примесей и поэтому зависит от каждой из координат  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  в отдельности. Добавка к химическому потенциалу находится из очевидного требования, что среднее по флуктуациям случайного потенциала  $\langle\chi(\mathbf{r})\rangle = 0$ . Линейный отклик конденсата на внешнее поле получается из (29):

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi_1(\mathbf{r}, t) \\ \delta\varphi_1^*(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \int d\mathbf{r}' dt' \varphi_0(\mathbf{r}') \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} U(\mathbf{r}', t'), \quad (32)$$

где  $\mathcal{G}$  — функция Грина надконденсатных частиц в отсутствие внешнего динамического возмущения, т.е. при  $U(\mathbf{r}, t) = 0$ . Отклик плотности и ток увлечения конденсатных частиц рассмотрим ниже, а сейчас остановимся на усреднении функции  $\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t')$  по примесям.

### 3.1. Усреднение функции Грина по примесям и затухание боголюбовского звука

Невозмущенная внешним звуковым полем функция Грина в (32) удовлетворяет матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} \epsilon - H_0(\mathbf{r}) & -g\varphi_0^2(\mathbf{r}) \\ -g\varphi_0^{*2}(\mathbf{r}) & -\epsilon - H_0(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon), \quad (33)$$

в котором  $\varphi_0(\mathbf{r}) = \varphi_0 + \chi(\mathbf{r})$ . Не ограничивая общности, функцию основного состояния можно выбрать действительной,  $\varphi_0(\mathbf{r}) = \varphi_0^*(\mathbf{r})$ . Оставляя в (33) линейные слагаемые по  $\chi(\mathbf{r})$ , получаем уравнение Дайсона

$$\hat{\mathcal{G}} = \hat{\mathcal{G}}_0 + \hat{\mathcal{G}}_0 \hat{\Upsilon} \hat{\mathcal{G}},$$

где  $\hat{\mathcal{G}}_0$  — свободная (без примесей) функция Грина, а матрица  $\hat{\Upsilon}$  обладает следующей структурой:

$$\hat{\Upsilon}(\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2g\sqrt{n_c}\chi(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

имеющей простой физический смысл. Первое слагаемое описывает рассеяние экситонов непосредственно на флуктуирующем потенциале примесей, а второе — на статических пространственных флуктуациях плотности конденсатных частиц, вызванных потенциалом примесей. Поскольку выполняется очевидное соотношение  $\langle\hat{\Upsilon}(\mathbf{r})\rangle = 0$ , мы можем воспользоваться стандартной крестовой техникой, с заменой  $u_i(\mathbf{r}) \rightarrow \hat{\Upsilon}(\mathbf{r})$ . В низшем борновском приближении получаем  $(\hat{\mathcal{G}})^{-1} = \hat{\mathcal{G}}_0^{-1} - \hat{\Sigma}$ , где массовый оператор

$$\hat{\Sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle\hat{\Upsilon}(\mathbf{r})\hat{\mathcal{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\hat{\Upsilon}(\mathbf{r}')\rangle, \quad (35)$$

а для его вычисления требуется знать корреляционную функцию случайного поля  $\langle\hat{\Upsilon}(\mathbf{r})\hat{\Upsilon}(\mathbf{r}')\rangle$ . Как было показано в работе [9], в (31) функцию Грина  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  достаточно взять в нулевом по примесному потенциалу  $u_i(\mathbf{r})$  приближении. В длинноволновом пределе  $p \ll ms$ ,  $\epsilon \ll ms^2$  из (31) получаем

$$g_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \approx -\frac{1}{2gn_c}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \delta\mu = 0,$$

что дает

$$\begin{aligned} \hat{\Upsilon}(\mathbf{r}) &= u_i(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\Sigma}(\epsilon) &= u_0^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \hat{\mathcal{G}}_0(\epsilon, \mathbf{p}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

Последнее выражение содержит «голую» (причинную) функцию Грина надконденсатных частиц:

$$\hat{G}_0(\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\epsilon^2 - \epsilon_{\mathbf{p}}^2 + i\delta} \times \begin{pmatrix} gn_c + p^2/2M + \epsilon & -gn_c \\ -gn_c & gn_c + p^2/2M - \epsilon \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2M} \left( 2Ms^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2M} \right)},$$

— закон дисперсии бogoлюбoвских возбуждений, в котором  $Ms^2 = gn_c$ . Нас будет интересовать лишь мнимая часть массового оператора, ответственная за затухание бogoлюбoвских возбуждений. В длинноволновом пределе  $p \ll Ms$ ,  $\epsilon \ll Ms^2$  закон дисперсии становится звуковым,  $\epsilon_{\mathbf{p}} = sp$ , а для мнимой части массового оператора находим выражение

$$\text{Im } \hat{\Sigma}(\epsilon) = -\frac{i}{\tau} \left( \frac{\epsilon}{2Ms^2} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Усредненная по примесям функция Грина надконденсатных частиц ( $\hat{G}$ ) вычисляется из матричного уравнения  $\langle \hat{G} \rangle^{-1} = \hat{G}_0^{-1} - \hat{\Sigma}$ . Пренебрегая примесными поправками к числителю, имеем  $\langle \hat{G} \rangle = \hat{G}_0/\Delta$ ,

$$\Delta = 1 - \text{Sp}(\hat{G}_0\hat{\Sigma}) + \det(\hat{G}_0) \det(\hat{\Sigma}). \quad (39)$$

Используя (37) и (38), приравнивая к нулю знаменатель  $\Delta = 0$ , получаем спектр элементарных бogoлюбoвских возбуждений в длинноволновом пределе  $p \ll Ms$  с учетом затухания на примесях  $\epsilon = sp - i\gamma_{\mathbf{p}}$ , где затухание бogoлюбoвских возбуждений и усредненная по примесям функция Грина надконденсатных частиц имеют вид

$$\gamma_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{sp}{2Ms^2} \right)^3, \quad \langle \hat{G}^R(\epsilon, \mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{\epsilon^2 - \epsilon_{\mathbf{p}}^2 + 2i\epsilon\gamma_{\mathbf{p}}} \times \begin{pmatrix} gn_c + p^2/2M + \epsilon & -gn_c \\ -gn_c & gn_c + p^2/2M - \epsilon \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Отметим, что в двумерном конденсате затухание возбуждений сильнее, чем в трехмерном случае [9], где  $\gamma_{\mathbf{p}} \sim (p/Ms)^4$ . В (40) мы записали уже запаздывающий вариант функции  $\langle \hat{G} \rangle$ , поскольку именно он потребуется в дальнейшем.

### 3.2. Отклик плотности и эффект увлечения в конденсате

Зная поправки к конденсатной функции, обусловленные звуковой волной (32), можно опреде-

лить отклик плотности конденсатных частиц, усредненный по примесному потенциалу:

$$\langle \delta n_c(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \varphi_0(\mathbf{r}) \delta \varphi_1(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle \varphi_0(\mathbf{r}) \delta \varphi_1^*(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (41)$$

Для расчета этой величины умножим выражение (32) на  $\varphi_0(\mathbf{r})$  и усредним по примесям. Получаем

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_0(\mathbf{r}) \delta \varphi_1(\mathbf{r}, t) \rangle \\ \langle \varphi_0(\mathbf{r}) \delta \varphi_1^*(\mathbf{r}, t) \rangle \end{pmatrix}_{\mathbf{k}, \omega} = \hat{P}(\mathbf{k}, \omega) U(\mathbf{k}, \omega) \times \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + (\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}, \omega \rightarrow -\omega), \quad (42)$$

$$\hat{P}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \langle \varphi_0(\mathbf{r}) \hat{G}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi_0(\mathbf{r}') \rangle.$$

Усреднение по примесям этой величины сводится, как обычно, к подстановке разложений каждого из трех множителей в ряд по примесному потенциалу и усреднению каждого из слагаемых. В первом приближении можно считать  $\varphi_0(\mathbf{r}) \approx \sqrt{n_c}$ , т.е. пренебречь малой поправкой  $\chi(\mathbf{r})$ . В этом случае усреднение в (42) сводится к усреднению функции Грина, которое было выполнено в разд. 3.1. Воспользовавшись полученными выше результатами, получим

$$\langle \delta n_c(\mathbf{k}, \omega) \rangle = P_c(\mathbf{k}, \omega) U(\mathbf{k}, \omega), \quad (43)$$

$$P_c(\mathbf{k}, \omega) = \frac{n_c k^2 / M}{\omega^2 - \epsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2i\omega\gamma_{\mathbf{k}}},$$

т.е., в отличие от чистого случая, в отклике конденсатной плотности появляется уширение бogoлюбoвских возбуждений вследствие рассеяния на примесях. Коэффициент поглощения поверхностной звуковой волны, обусловленный надконденсатными частицами, выражается через величину  $\text{Im } P_c(\mathbf{k}, \omega)$  в виде  $\Gamma_c(\omega) \sim -k^2 \text{Im } P_c(|\mathbf{k}| = \omega/c, \omega)$  [21]. Выделяя мнимую часть, имеем

$$\Gamma_c(\omega) \sim \frac{n_c}{M} \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 \frac{\omega\gamma_{k=\omega/c}}{\omega^2(1 - s^2/c^2)^2 + 4\omega^2\gamma_{k=\omega/c}^2}. \quad (44)$$

Ток увлечения конденсата получается из общего решения (32) в виде

$$\langle \mathbf{j}_c \rangle = \frac{i}{2M} [\langle \delta \varphi_1(\mathbf{r}, t) \nabla_{\mathbf{r}} \delta \varphi_1^*(\mathbf{r}, t) \rangle - \langle \delta \varphi_1^*(\mathbf{r}, t) \nabla_{\mathbf{r}} \delta \varphi_1(\mathbf{r}, t) \rangle], \quad (45)$$

при этом под знак усреднения попадают произведения двух функций Грина и двух множителей  $\varphi_0(\mathbf{r})$ . В простейшем случае, положив  $\varphi_0(\mathbf{r}) \approx \sqrt{n_c}$  и усредняя каждую из функций Грина независимо, приходим к результату

$$\langle \mathbf{j}_c \rangle = 2n_c \frac{\omega k^2}{M^2} \frac{\mathbf{k} |U(\mathbf{k}, \omega)|^2}{(\omega^2 - \epsilon_{\mathbf{k}}^2)^2 + 4\omega^2\gamma_{\mathbf{k}}^2}, \quad (46)$$



который отличается от результата в чистом случае наличием дополнительного слагаемого в знаменателе. После подстановки  $k = \omega/c$ , получаем

$$\langle \mathbf{j}_c \rangle \sim \frac{\omega I_0}{(1 - s^2/c^2)^2 + 4\gamma_{k=\omega/c}^2/\omega^2}. \quad (47)$$

Как видим, при учете примесного рассеяния, максимум тока увлечения при  $c = s$  становится конечным (ср. [22]):  $j_c \sim I_0 \tau^2/\omega^3$ .

### 3.3. Отклик плотности и эффект увлечения надконденсатных частиц

Динамика надконденсатных частиц при внешнем воздействии описывается уравнением (27), в которое входит точная волновая функция конденсата  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ . В простейшем случае можно считать, что отклик надконденсатных частиц происходит независимо от частиц в конденсате. Такое упрощение соответствует приближению  $\varphi(\mathbf{r}, t) \approx \varphi_0(\mathbf{r})$  в уравнении (27), т. е. пренебрежению взаимодействием надконденсатных частиц с динамическими флуктуациями конденсатного поля, вызванными звуковой волной. В рамках такого приближения получаем

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - H_0(\mathbf{r}) & -g\varphi_0^2(\mathbf{r}) \\ -g\varphi_0^{*2}(\mathbf{r}) & -i\partial_t - H_0(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \hat{\mathfrak{G}} = \\ = \hat{1} + U(\mathbf{r}, t)\hat{\mathfrak{G}}. \quad (48)$$

Из этого уравнения в первом порядке по  $U(\mathbf{r}, t)$  просто находится поляризационный оператор надконденсатных частиц, усредненный по беспорядку:

$$P_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = i\langle \hat{\mathfrak{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \hat{\mathfrak{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t) \rangle_{11}, \quad (49)$$

где индекс «11» указывает на левый верхний элемент соответствующей матрицы. Будем интересоваться лишь устранением сингулярности при  $\omega = sk$  в поглощении поверхностной акустической волны и токе увлечения [20–22] за счет рассеяния на примесях. Тогда в простейшем случае пренебрежем корреляционными эффектами в рассеянии, т. е. заменяем среднее от произведения функций Грина в (49) на произведение средних. В результате имеем

$$P_n(\mathbf{k}, \omega) = 2i(gn_c)^2 \int \frac{d\mathbf{p} d\epsilon}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon^2 - \epsilon_{\mathbf{p}}^2 + 2i\epsilon_{\mathbf{p}}\gamma_{\mathbf{p}}} \times \\ \times \frac{1}{(\epsilon + \omega)^2 - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}^2 + 2i\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}\gamma_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}}. \quad (50)$$

Интеграл по энергии  $\epsilon$  вычисляется с использованием теоремы о вычетах. В интеграле по импульсу удобно ввести новые переменные  $p = |\mathbf{p}|$  и  $p_1 = |\mathbf{p} + \mathbf{k}|$ . В результате приходим к интегралу

$$P_n(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4g^2n_c^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{p dp}{\epsilon_p - i\gamma_p} \int_{|p-k|}^{p+k} \frac{p_1 dp_1}{\epsilon_{p_1} - i\gamma_{p_1}} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{[(p+k)^2 - p_1^2][p_1^2 - (p-k)^2]}} \times \\ \times \left[ \frac{1}{\omega + \epsilon_p + \epsilon_{p_1} - i\gamma_p - i\gamma_{p_1}} - \frac{1}{\omega - \epsilon_p - \epsilon_{p_1} + i\gamma_p + i\gamma_{p_1}} \right]. \quad (51)$$

Сложность этого интеграла не позволяет вычислить его в общем виде. В первой строке можно отбросить  $\gamma_p$  по сравнению с энергией экситона,  $\epsilon_p \gg \gamma_p$ . Введем новые переменные  $x - y = 2p/k$ ,  $x + y = 2p_1/k$ . Тогда интеграл принимает вид

$$P_n(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{g^2n_c^2}{(2\pi s)^2} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \times \\ \times \left[ \frac{1}{\omega + skx - i\left(\frac{x^3 + 3xy^2}{4}\right)\gamma_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{\omega - skx + i\left(\frac{x^3 + 3xy^2}{4}\right)\gamma_{\mathbf{k}}} \right]. \quad (52)$$

Из этого выражения видно, что в отсутствие примесей  $\gamma_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$  получается результат баллистической теории [21, 22]. При этом мнимая часть этого выражения, ответственная как за поглощения звуковой волны, так и за эффект увлечения, в баллистическом пределе отлична от нуля лишь в области  $\omega > sk$ . При наличии в системе примесей мнимая часть может быть отлична от нуля и при  $\omega < sk$ . Для определения поглощения звуковой волны и тока увлечения требуется запаздывающий поляризационный оператор  $P_n^R(\mathbf{k}, \omega)$ , в то время как полученное выражение (52) является причинным. Несложный анализ показывает, что для нахождения  $P_n^R(\mathbf{k}, \omega)$  требуется изменить знак мнимой единицы в первом слагаемом в квадратной скобке на обратный. Тогда для мнимой части получаем

$$\begin{aligned} \text{Im } P_n^R(\mathbf{k}, \omega) = & \frac{\pi g^2 n_c^2 \gamma_{\mathbf{k}}}{(2\pi s)^2 4sk} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \times \\ & \times \left[ \frac{x^3 + 3xy^2}{(\omega/sk + x)^2 + (\gamma_{\mathbf{k}}/4sk)^2 (x^3 + 3xy^2)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{x^3 + 3xy^2}{(\omega/sk - x)^2 + (\gamma_{\mathbf{k}}/4sk)^2 (x^3 + 3xy^2)^2} \right]. \quad (53) \end{aligned}$$

Вычисление тока увлечения надконденсатных частиц аналогично вычислениям, изложенным выше, и мы не будем приводить детали вычислений. Результат имеет вид

$$\mathbf{j}_n(\mathbf{k}, \omega) = \frac{|U(\mathbf{k}, \omega)|^2}{M_s^2} \times i \nabla_{\mathbf{k}} [P_n^R(\mathbf{k}, \omega) - P_n^A(\mathbf{k}, \omega)]. \quad (54)$$

Как уже отмечалось выше, если  $\omega \gg \gamma_{\mathbf{k}}$ , то из (53) и (54) восстанавливаются результаты баллистической теории, в которой ненулевые значения получаются лишь в области  $\omega/sk > 1$ . При наличии примесей это условие уже не выполняется, и интересно рассмотреть режим  $\omega/sk \ll 1$ . Раскладывая (53) по этому параметру, получаем

$$\begin{aligned} \text{Im } P_n^R(\mathbf{k}, \omega) = & -\frac{\pi g^2 n_c^2 \omega \gamma_{\mathbf{k}}}{(2\pi s)^2 (sk)^2} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \times \\ & \times \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \frac{x(x^3 + 3xy^2)}{\left[ x^2 + (x^3 + 3xy^2)^2 \left( \frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{4sk} \right)^2 \right]^2}. \quad (55) \end{aligned}$$

Интеграл, входящий в формулу (55), можно оценить как

$$\int_1^{2\sqrt{sk/\gamma_{\mathbf{k}}}} dx/x \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi \ln(4sk/\gamma_{\mathbf{k}})}{2},$$

что позволяет вычислить частотное поведение коэффициента поглощения рэлеевской волны и тока увлечения:

$$\begin{aligned} \Gamma \sim & -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \text{Im } P_n^R(|\mathbf{k}| = \omega/c, \omega) \sim \\ & \sim \frac{\omega^4}{\tau} \ln\left(\frac{Msc}{\omega}\right), \quad (56) \\ j_n \sim & \frac{I_0}{\tau} \ln\left(\frac{Msc}{\omega}\right). \end{aligned}$$

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено акустоэкситонное взаимодействие в газе не прямых дипольных экситонов

с учетом рассеяния на случайном потенциале, который может быть обусловлен случайно расположенными в пространстве примесями или несовершенствами структуры. Рассчитаны поглощение поверхностной звуковой волны и эффект звукоэкситонного увлечения. Подчеркнем здесь следующее обстоятельство. Как известно, столкновения частиц в бозе-конденсате в двумерной системе аналогично приводят к конечному времени жизни боголюбовских возбуждений, при этом соответствующее обратное время столкновений как функция импульса имеет аналогичное случаю примесей поведение  $\gamma_{col}(\mathbf{p}) \sim p^3$  [28]. Таким образом, полученные в данной работе формулы (в режиме бозе-эйнштейновской конденсации) применимы, по крайней мере качественно, и при наличии затухания, обусловленного столкновением частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-02-00135) и программами РАН.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, ЖЭТФ **5**, 238 (1967).
2. С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 417 (1958).
3. С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 433 (1958).
4. L. V. Butov, Sol. St. Comm. **127**, 89 (2003).
5. L. V. Butov, J. Phys.: Condens. Matter **16**, R1577 (2004).
6. L. V. Butov, J. Phys.: Condens. Matter **19**, 295202 (2007).
7. А. В. Ларионов, В. Б. Тимофеев, Письма в ЖЭТФ **73**, 342 (2001).
8. А. В. Горбунов, В. Б. Тимофеев, Письма в ЖЭТФ **96**, 145 (2012).
9. В. А. Гергель, Р. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, ЖЭТФ **58**, 686 (1970).
10. Ж. С. Геворкян, Ю. Е. Лозовик, ФТТ **27**, 1800 (1985).
11. Ю. Е. Лозовик, А. М. Рувинский, ЖЭТФ **114**, 1451 (1998).
12. Ю. Е. Лозовик, О. Л. Берман, А. М. Рувинский, Письма в ЖЭТФ **69**, 573 (1999).
13. P. I. Arseyev and A. V. Dzyubenko, Phys. Rev. B **52**, R2261(R) (1995).

14. П. И. Арсеев, А. Б. Дзюбенко, ЖЭТФ **114**, 359 (1998).
15. B. Shapiro, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 143001 (2012).
16. J. Rudolph, R. Hey, and P. V. Santos, Phys. Rev. Lett. **99**, 047602 (2007).
17. A. Violante, K. Cohen, S. Lazic, R. Hey, R. Rapaport, and P. V. Santos, New J. Phys. **16**, 033035 (2014).
18. S. Lazic, A. Violante, K. Cohen, R. Hey, R. Rapaport, and P. V. Santos, Phys. Rev. B **89**, 085313 (2014).
19. E. A. Cerda-Mendez, D. N. Krizhanovskii, M. Wouters, R. Bradley, K. Biermann, K. Guda, R. Hey, P. V. Santos, D. Sarkar, and M. S. Skolnick, Phys. Rev. Lett. **105**, 116402 (2010).
20. В. М. Ковалев, А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **96**, 865 (2012).
21. М. В. Боев, В. М. Ковалев, ЖЭТФ **147**, 1155 (2015).
22. В. М. Ковалев, А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **101**, 194 (2015).
23. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1515 (1965).
24. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 10, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
25. B. L. Altshuler, A. G. Aronov, D. E. Khmel'nitskii, and A. I. Larkin, in *Quantum Theory of Solids*, ed. by I. M. Lifshits, Mir, Moscow (1982), p. 130.
26. B. L. Altshuler and A. G. Aronov, in *Electron-electron Interaction in Disordered Systems*, ed. by A. L. Efros and M. Pollak, North-Holland, Amsterdam (1985), p. 1.
27. C. Di Castro and R. Raimondi, arXiv:cond-mat/0402203.
28. M. Chung and A. Bhattacharjee, New J. Phys. **11**, 123012 (2009).