

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ САМОДЕЙСТВИЕ В ПОЛЕ $(n+1)$-МЕРНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ: РАЗМЕРНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Ю. В. Грац [a*], ***П. А. Спирин*** [a,b]

[a] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119991, Москва, Россия*

[b] *Институт теоретической и вычислительной физики, Университет Крита 71003, Ираклион, Греция*

Поступила в редакцию 16 июня 2015 г.

Вычисляется собственная энергия классической заряженной частицы, локализованной на относительно большом расстоянии вне горизонта $(n+1)$-мерной черной дыры Шварцшильда–Тангерлини при произвольном $n \geqslant 3$. В первых двух порядках теории возмущений получено выражение для электростатической функции Грина. Для регуляризации соответствующего формально расходящегося выражения для собственной энергии предложено воспользоваться методом размерной регуляризации. Полученное выражение для перенормированной собственной энергии сравнивается с результатами других авторов.

DOI: 10.7868/S0044451016010090

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время физика черных дыр — это быстроразвивающаяся область исследования. С точки зрения астрофизики, черные дыры представляют собой объект, который может оказаться причиной многих важных процессов во Вселенной. Для теории гравитации исследование динамики классической и квантованной материи в гравитационном поле черной дыры дает возможность проверить некоторые из предсказаний эйнштейновской теории гравитации. Для теоретической физики в целом физика черных дыр является своеобразным мостом, объединяющим различные ее разделы.

В последние годы решения типа черных дыр снова стали объектом интенсивного исследования в связи с активно разрабатываемыми теориями в пространстве-времени с размерностью больше четырех. Достаточно упомянуть широко обсуждаемую в контексте многомерных теорий гравитации возможность рождения микроскопических черных дыр в экспериментах по физике высоких энергий [1]. Сейчас экспериментальное подтверждение рождения таких черных дыр при столкновениях частиц высокой энергии рассматривается как тест на существование дополнительных измерений. И хотя в настоящее время нет каких-либо подтверждений факта существования дополнительных измерений, равно как и многомерных микроскопических [2] или макроскопических черных дыр, современные теории стимулировали исследование общей теории относительности в $(n+1) > 4$ пространственно-временных измерениях. Это предполагает не только поиск новых, но и исследование многомерных обобщений известных решений стандартной $(3+1)$-мерной эйнштейновской теории. Одной из целей такого исследования является выяснение того, какие из предсказаний стандартной теории характерны только для четырехмерного случая, а какие являются универсальными и распространяются на высшие измерения. Считается, что исследование точных решений многомерных обобщений общей теории относительности позволяет пролить свет на некоторые эффекты стандартной четырехмерной теории и послужит лучшему пониманию последней. Такое исследование предполагает не только изучение геометрических особенностей многомерных обобщений известных решений, но и особенностей динамики классической и квантованной материи на их фоне. Уже сейчас известен ряд примеров того, насколько по-

[*] E-mail: grats@phys.msu.ru

разному может выглядеть один и тот же эффект в зависимости от числа (четное оно или нечетное) пространственных измерений. На уровне рассматриваемого нами эффекта самодействия в поле черной дыры некоторые примеры можно найти в процитированной ниже литературе. Еще одной иллюстрацией этого факта являются результаты нашей работы. Другим аргументом в пользу необходимости изучения многомерных черных дыр, который приводится в литературе, является AdS/CFT-соответствие, которое устанавливает связь свойств многомерной черной дыры с квантовой теорией поля в пространстве с размерностью на единицу меньше.

Современный обзор физики черных дыр можно найти в монографии [3]. Целый ряд работ посвящен непосредственно изучению черных дыр и необходимости их изучения в многомерной общей теории относительности (см., например, [4] и процитированную там литературу).

Одной из проблем классической теории поля, к которой постоянно возвращаются на протяжении не одного десятка лет, является задача о самодействии классической заряженной частицы в искривленном пространстве-времени. Эта задача становится нетривиальной даже в случае покоящегося заряда во внешнем статическом гравитационном поле [5]. Причина заключается в нелокальности эффекта. Это проявляется в том, что гравитационное поле искажает дальнодействующее собственное поле заряда, в результате чего конфигурация поля, а следовательно, и его энергия, начинают зависеть от положения частицы. При этом, на заряд действует сила, которая получила название силы статического самодействия. Однако вычисление этой силы в случае точечного источника сталкивается с проблемой расходимости и необходимостью регуляризации и перенормировки соответствующего выражения для собственной энергии. В разное время предлагались различные схемы регуляризации, эквивалентность которых не является очевидной, поскольку процедура устранения бесконечности не является в математическом смысле строгой. Поэтому выяснение адекватности различных процедур регуляризации представляет самостоятельный интерес. И здесь использование хорошо зарекомендовавших себя методов квантовой теории поля позволяет придать решению задачи о классическом самодействии наиболее универсальную и эффективную форму.

Одной из первых задач о статическом самодействии, которые были рассмотрены в мировой литературе, стала задача о сдвиге массы заряда в гравитационном поле черной дыры в четырехмерном пространстве-времени [6–12].

Эта проблема снова привлекла к себе внимание в связи с возросшим интересом к черным дырам и их многомерным обобщениям [13–15]. Однако точное вычисление силы самодействия оказывается возможным в тех случаях, когда удается получить относительно простое выражение для соответствующей статической функции Грина.

Трудно представить себе ситуацию, когда эффект статического самодействия допускал бы непосредственную экспериментальную проверку. Понятно также, что рассмотрение этого эффекта на фоне статического пространства-времени исключает возможность применения полученных результатов в случае микроскопических быстро испаряющихся черных дыр. Это является модельной, по-видимому, простейшей задачей, которая в ряде случаев допускает точное решение и хорошо иллюстрирует зависимость теоретико-полевых эффектов от глобальной структуры и числа измерений пространства-времени.

Предлагаемая работа посвящена вычислению энергии и силы статического самодействия классической заряженной частицы в поле $(n+1)$-мерной черной дыры. Для нахождения функции Грина при произвольном $n \geqslant 3$ предлагается воспользоваться теорией возмущений, а регуляризацию выражения для собственной энергии осуществлять методом размерной регуляризации, который для данной задачи ранее не применялся.

План работы следующий. В разд. 2 приводится выражение для метрики пространства Шварцшильда – Тангерлини, определены используемые в статье условные обозначения и выбор системы координат, в которых предполагается работать. В разд. 3 приводится краткий вывод формального выражения для собственной энергии покоящегося точечного заряда в статическом пространстве-времени. В разд. 4 вычисляется перенормированная собственная энергия заряда. Вычисления проводятся в рамках теории возмущений с использованием метода размерной регуляризации. Заключение посвящено краткому изложению результатов работы и обсуждению применимости предложенного нами подхода к решению рассматриваемой задачи.

В работе используется система единиц $G=c=1$ и метрика пространства-времени с сигнатурой $(- + \ldots +)$.

2. ПРОСТРАНСТВО ШВАРЦШИЛЬДА – ТАНГЕРЛИНИ

Обобщение решения Шварцшильда на случай $(n+1)$-мерного пространства-времени, известное как пространство Шварцшильда – Тангерлини [16], имеет вид

$$ds^2 = -f\,dt^2 + f^{-1}d\varrho^2 + \varrho^2 d\Omega_{n-1}, \quad f(\varrho) = 1 - \left(\frac{\varrho_g}{\varrho}\right)^{n-2}. \tag{1}$$

В (1) ϱ_g — радиус Шварцшильда

$$\varrho_g = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{8M\,\Gamma(n/2)}{n-1}\right]^{1/(n-2)},$$

а Ω_{n-1} — площадь единичной сферы S^{n-1}:

$$\Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Для нас значительно более удобными будут изотропные координаты $x^\mu = (t, x^1, \ldots, x^n)$, в которых метрика на сечении $t = \mathrm{const}$ конформно евклидова. Переход к изотропным координатам осуществляется заменой радиальной координаты $\varrho \to r$ согласно соотношениям

$$\varrho^{n-2} = r^{n-2}\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\varrho_g}{r}\right)^{n-2}\right]^2,$$
$$r^{n-2} = \frac{\varrho^{n-2}}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho_g}{\varrho}\right)^{n-2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho_g}{\varrho}\right)^{n-2}}\right]. \tag{2}$$

В изотропных координатах метрика (1) принимает вид

$$ds^2 = -\frac{\left[1-(r_g/r)^{n-2}\right]^2}{\left[1+(r_g/r)^{n-2}\right]^2}dt^2 + \left[1+\left(\frac{r_g}{r}\right)^{n-2}\right]^{4/(n-2)}\delta_{ik}\,dx^i dx^k, \tag{3}$$

где $r = \left(\delta_{ik}\,x^i x^k\right)^{1/2}$, $i, k, \ldots = \overline{1, n}$, а $r_g = 2^{-2/(n-2)}\varrho_g$.

Причина, по которой наш выбор остановился на изотропных координатах, связана с используемым в работе методом регуляризации и будет пояснена ниже.

3. СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЗАРЯДА В СТАТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Рассмотрим электрический заряд e в $(n+1)$-мерном статическом пространстве-времени с метрикой

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + g_{ik}dx^i dx^k, \quad \partial_t\, g_{tt} = 0 = \partial_t\, g_{ik}. \tag{4}$$

Будем работать в системе единиц, в которой при произвольной размерности пространства-времени уравнение электромагнитного поля имеет вид

$$\partial_\nu\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}\,J^\mu, \quad \mu, \nu = t, 1, 2, \ldots, n.$$

В случае статического источника с током $J^\mu = (J, 0, \ldots, 0)$ $(\partial_t\, J = 0)$ отличными от нуля компонентами тензора электромагнитного поля являются $F_{ti} = -F_{it} = -\partial_i\, A_t$, и для единственного нетривиального уравнения Максвелла в терминах A_t мы получаем

$$\partial_i\left(\sqrt{-g}\ g^{tt}g^{ik}\partial_k A_t\right) = -\sqrt{-g}\ J. \tag{5}$$

Плотность энергии поля определяется T^t_t-компонентой тензора энергии-импульса электромагнитного поля. При этом полная энергия дается выражением

$$E = -\int d^n x\,\sqrt{-g}\,T^t_t = -\frac{1}{2}\int d^n x\,\sqrt{-g}\,F_{ti}F^{ti}.$$

Или

$$E = -\frac{1}{2}\int d^n x\sqrt{-g}\ g^{tt}g^{ik}\partial_i A_t \partial_k A_t\ .$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$E = -\frac{1}{2}\int d^n x\,\partial_i\big(\sqrt{-g}\,g^{tt}g^{ik}\,\partial_i A_t\,\partial_k A_t\big) + \frac{1}{2}\int d^n x\,A_t\partial_i\big(\sqrt{-g}\,g^{tt}g^{ik}\,\partial_k A_t\big).$$

Теперь, если воспользоваться теоремой Гаусса и уравнением поля (5), то мы получим, что

$$E = -\frac{1}{2}\int d^n x\ \sqrt{-g}\ A_t J = -\frac{1}{2}\int d^n x\ \sqrt{-g}\times \int d^n x'\sqrt{-g'}J(x)G(x,x')J(x'), \tag{6}$$

где $G(x,x')$ — функция Грина уравнения (5), т. е. решение уравнения

$$-\partial_i\left(\sqrt{-g}\ g^{tt}g^{ik}\partial_k G(x,x')\right) = \sqrt{-g}\ \delta^n(x,x'), \quad \delta^n(x,x') = \frac{\delta^n(x-x')}{\sqrt{-g}}. \tag{7}$$

Для локализованного в точке x точечного заряда e

$$J(x') = e\,\delta^n(x, x'),$$

и выражение для энергии (6) приобретает вид

$$E = -\frac{1}{2}\,e^2\,G(x, x). \tag{8}$$

Соотношение (8) является формальным, поскольку взятая в пределе совпадающих точек функция Грина расходится, и для выделения расходящейся части его следует регуляризовать. Кроме того, функцию Грина удается получить в явном виде в относительно небольшом числе случаев. В остальных приходится прибегать к приближенным методам. В частности, выражение для силы самодействия, которое справедливо всюду вне горизонта событий черной дыры Шварцшильда–Тангерлини, пока получено только для размерностей пространства-времени 4 и 5 [9, 10, 15]. Ниже мы получим приближенное выражение для перенормированной собственной энергии заряда, которое справедливо на относительно больших расстояниях от черной дыры, но при произвольной размерности пространства $n \geqslant 3$. Регуляризацию и последующую перенормировку выражения (8) предполагается проводить в рамках метода размерной регуляризации (см., например, [17]).

Размерная регуляризация заключается в замене $G(x, x)$ на символ $G_{reg}(x, x; \varepsilon)$, формально соответствующий функции Грина в пространстве $(n - 2\varepsilon)$ измерений. Последующая перенормировка включает разделение $G_{reg}(x, x; \varepsilon)$ на две части, одна из которых расходится при $\varepsilon \to 0$, а другая конечна:

$$G_{reg}(x, x; \varepsilon) = G_{div}(x, x; \varepsilon) + G_{fin}(x, x; \varepsilon). \tag{9}$$

Перенормировка завершается отбрасыванием расходящейся части $G_{div}(x, x; \varepsilon)$ с последующим переходом к пределу $\varepsilon \to 0$:

$$G_{ren}(x, x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[G_{reg}(x, x; \varepsilon) - G_{div}(x, x; \varepsilon)\right]. \tag{10}$$

Основная проблема, которая при этом возникает, заключается в том, что разделение регуляризованной функции Грина на расходящуюся и конечную части (9) можно провести многими разными способами и необходим мотивированный выбор анзаца для $G_{div}(x, x; \varepsilon)$.

4. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В рассматриваемом нами случае пространства-времени (3) с произвольным числом пространственных измерений точное выражение для функции Грина в виде, который бы позволял работать с ней дальше, неизвестно. Поэтому мы воспользуемся методами теории возмущений.

Функция Грина является решением уравнения

$$\mathcal{L}(x, \partial)\,G(x, x') = \delta^n(x - x'), \tag{11}$$

где $\mathcal{L}(x, \partial)$ — оператор поля, вид которого зависит от метрики пространства-времени.

В рассматриваемом случае вид оператора $\mathcal{L}(x, \partial)$ определяется уравнением (7) и явным видом метрики (3).

Уравнение (11), следуя Швингеру [18], часто записывают в виде операторного соотношения

$$\mathfrak{L}\mathcal{G} = 1, \quad \mathcal{G} = \mathfrak{L}^{-1}. \tag{12}$$

В формализме Швингера

$$\langle x|\mathcal{G}|x'\rangle = G(x, x'), \quad \langle x|\mathfrak{L}|x'\rangle = \mathcal{L}(x, \partial)\,\delta^n(x - x').$$

Если оператор $\mathfrak{L}$ можно представить как $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \delta\mathfrak{L}$, рассматривая $\delta\mathfrak{L}$ в качестве малого возмущения, то, представляя решение уравнения (12) в виде $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \delta\mathcal{G}$, где $\mathcal{G}_0 = {\mathfrak{L}_0}^{-1}$ — невозмущенная функция Грина, мы получаем

$$\mathcal{G} = \left[\mathfrak{L}_0\,(1 + \mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L})\right]^{-1} = \\ = \mathcal{G}_0 - \mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}\mathcal{G}_0 + \ldots \tag{13}$$

Всюду ниже мы будем предполагать малой величину $\alpha = (r_g/r)^{n-2}$. В этом случае $\mathfrak{L}_0$ определяется нулевым порядком по α и, следовательно,

$$\mathcal{L}_0(x, \partial) = \partial^2, \quad \partial^2 = \delta^{ik}\partial_i\partial_k.$$

При этом, как это следует из выражений (7) и (3), оператор возмущения

$$\delta\mathcal{L}(x, \partial) = -\partial_i\left(\sqrt{-g}\,g^{tt}\,g^{ik}\partial_k\right) - \partial^2 \tag{14}$$

с точностью до членов второго порядка малости по α можно представить в виде

$$\delta\mathcal{L}(x, \partial) = \delta\mathcal{L}^{(1)}(x, \partial) + \delta\mathcal{L}^{(2)}(x, \partial) + \mathcal{O}(\alpha^3),$$

где

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}^{(1)}(x, \partial) &= 4\alpha\left[\partial^2 - (n-2)\,\frac{x\cdot\partial}{r^2}\right], \\ \delta\mathcal{L}^{(2)}(x, \partial) &= 7\alpha^2\left[\partial^2 - 2(n-2)\,\frac{x\cdot\partial}{r^2}\right], \end{aligned} \tag{15}$$

а операторное разложение (13) записать следующим образом:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 - \mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(1)}\mathcal{G}_0 - \mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(2)}\mathcal{G}_0 + \\ + \mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(1)}\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(1)}\mathcal{G}_0 + \mathcal{O}(\alpha^3). \tag{16}$$

В рассматриваемом случае функция $\langle x|\mathcal{G}_0|x'\rangle \equiv \equiv \langle x|\partial^{-2}|x'\rangle$ имеет вид[1)]

$$G_0(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^n}\int d^n p\,\frac{e^{-ip\,(x-x')}}{p^2}.$$

Следовательно, для вклада от первого члена в правой части (16) во взятую в пределе совпадающих точек функцию Грина $G(x,x)$ мы имеем формально расходящееся выражение

$$G_0(x,x) = \langle x|\mathcal{G}_0|x\rangle = -\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{d^n p}{p^2}. \qquad (17)$$

Для регуляризации выражения для собственной энергии (8) мы предполагаем воспользоваться методом размерной регуляризации. Но в методе размерной регуляризации все интегралы вида

$$\int d^n p\,\frac{p_{i_1}\ldots p_{i_k}}{p^2}, \qquad (18)$$

в частности, интеграл (17), которые в квантовой теории поля соответствуют диаграммам типа «головастик», считаются равными нулю (см., например, [19]).

Таким образом, этот вклад обращается в нуль, что соответствует отсутствию самодействия в плоском пространстве.

Можно рассуждать по-другому. Исходя из отсутствия силы самодействия на покоящийся заряд в плоском пространстве, что является очевидным следствием его однородности, можно потребовать равенство нулю интеграла (17) как естественное дополнительное условие.

В первом порядке теории возмущений взятая в пределе совпадающих точек функция Грина определяется вторым членом разложения (16) и в базисе Фурье может быть представлена следующим образом:

$$G^{(1)}(x,x) = -\langle x|\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(1)}\mathcal{G}_0|x\rangle = \\ = -\int\frac{d^n p\,d^n q}{(2\pi)^{2n}}\,\frac{\delta\mathcal{L}^{(1)}(q,-ip)}{p^2\,(p+q)^2}\,e^{-iqx}, \qquad (19)$$

где функция $\delta\mathcal{L}^{(1)}(q,-ip)$ определена как

$$\delta\mathcal{L}^{(1)}(q,-ip) = \int d^n x\,e^{iqx}\left[\delta\mathcal{L}^{(1)}(x,\partial)\Big|_{\partial\to -ip}\right]. \qquad (20)$$

Предполагается, что дифференциальный оператор $\delta\mathcal{L}(x,\partial)$ надо преобразовать к виду, при котором операторы дифференцирования стоят справа от функций координат, осуществить в нем замену $\partial_j \to \to -ip_j$, после чего выполнить преобразование Фурье полученной функции, рассматривая p_j как параметры.

Подстановка (20) в (19) с учетом явного вида оператора $\delta\mathcal{L}^{(1)}(x,\partial)$ (15) дает

$$G^{(1)}(x,x) = -2\int\frac{d^n q}{(2\pi)^n}\,e^{-iqx}q^2\mathcal{F}[\alpha](q)\times \\ \times\int\frac{d^n p}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{p^2(p+q)^2}. \qquad (21)$$

Стоящий в (21) интеграл по $d^n p$ расходится. Однако он имеет стандартный для квантовой теории поля вид. В рамках метода размерной регуляризации его следует заменить на выражение, которое формально соответствует интегрированию по $D = = (n-2\varepsilon)$-мерному импульсному пространству:

$$\int\frac{d^n p}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{p^2(p+q)^2} \to \lambda^{2\varepsilon}\int\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\,\frac{1}{p^2(p+q)^2}.$$

Имеющий размерность обратной длины произвольный параметр λ вводится для сохранения общей размерности регуляризованного выражения.

Техника работы с такими выражениями хорошо разработана (см., например, [19]), и мы получаем

$$\int\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\,\frac{1}{p^2(p+q)^2} = \\ = -\frac{2(D-1)}{(2\pi)^{D/2}}\,\frac{\Gamma^2(D/2)}{\Gamma(D)}\,\frac{\Gamma(1-D/2)}{(q^2)^{2-D/2}}. \qquad (22)$$

Соответствующее такой замене регуляризованное значение функции Грина $G^{(1)}(x,x)$ имеет вид

$$G^{(1)}_{reg}(x,x;\varepsilon) = \frac{4\lambda^{2\varepsilon}(D-1)}{(2\pi)^{D/2}}\,\frac{\Gamma^2(D/2)}{\Gamma(D)}\,\Gamma\,(1-D/2)\times \\ \times\int\frac{d^n q}{(2\pi)^n}\,e^{-iqx}\,\frac{\mathcal{F}[\alpha](q)}{(q^2)^{1-D/2}}. \qquad (23)$$

При четном n стоящее перед интегралом по $d^n q$ в (23) выражение имеет простой полюс, и при снятии регуляризации расходимость в $G^{(1)}_{reg}(x,x;\varepsilon)$ могла бы возникнуть из-за этого полюса, из-за интеграла по $d^n q$, или по той и другой причине одновременно.

[1)] Здесь и ниже преобразование Фурье определено соотношением

$$\mathcal{F}[\varphi(x)](q) = \int d^n x\,\varphi(x)e^{iqx}.$$

В действительности этого не происходит. Дважды воспользовавшись хорошо определенным в смысле обобщенных функций интегралом [20]

$$\mathcal{F}\left[r^{-\lambda}\right](q) = 2^{n-\lambda}\pi^{n/2}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda/2\right)}\frac{1}{q^{n-\lambda}}, \qquad (24)$$

первый раз при вычислении фурье-образа $\mathcal{F}[\alpha](q)$, а затем при вычислении интеграла по $d^n q$, мы получаем

$$\int \frac{d^n q}{(2\pi)^n}\, e^{-iqx}\mathcal{F}[\alpha](q)(q^2)^{D/2-1} = = 2^{D-3}\frac{(n-2)\Gamma\big((D+n)/2-2\big)}{\Gamma\left(2-D/2\right)}\frac{r_g^{n-2}}{r^{D+n-4}}. \qquad (25)$$

В результате, имеющийся в (23) простой полюс компенсируется простым нулем выражения (25), и при снятии регуляризации мы приходим к конечному выражению. Таким образом, в первом порядке теории возмущений $G^{(1)}_{div}(x,x;\varepsilon)=0$ и

$$G^{(1)}_{ren}(x,x) = -\frac{1}{\pi^{n/2}}\frac{\Gamma(n/2)}{(n-2)}\left(\frac{r_g}{r^2}\right)^{n-2}. \qquad (26)$$

Поправка второго порядка $G^{(2)}_{ren}(x,x)$ определяется двумя последними членами в правой части операторного соотношения (16).

Вычисление $\langle x|\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(2)}\mathcal{G}_0|x\rangle_{reg}$ осуществляется по аналогии с вычислением первой поправки заменой в (19) функции $\delta\mathfrak{L}^{(1)}(q,-ip)$ на $\delta\mathfrak{L}^{(2)}(q,-ip)$, что приводит к выражению

$$\langle x|\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(2)}\mathcal{G}_0|x\rangle_{reg} = -\frac{7\lambda^{2\varepsilon}}{2\pi^{D/2}}\frac{\Gamma^2(D/2)\,\Gamma\left(3D/2-3\right)}{(D-2)\,\Gamma^2(D-1)}\times \times\frac{\Gamma^2\left(2-D/2\right)}{\Gamma\left(2-D\right)}\left(\frac{r_g^2}{r^3}\right)^{n-2}. \qquad (27)$$

Нахождение $\langle x|\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(1)}\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(1)}\mathcal{G}_0|x\rangle_{reg}$ сопряжено со значительно более громоздкими вычислениями, поскольку соответствующее выражение содержит уже три функции Грина G_0:

$$\langle x|\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(1)}\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(1)}\mathcal{G}_0|x\rangle = = -\int\frac{d^n p}{(2\pi)^n}\frac{d^n q}{(2\pi)^n}\frac{d^n k}{(2\pi)^n}\frac{e^{-i(q-k)x}}{p^2\,(p+q)^2\,(p+k)^2}\times \times\,\delta\mathcal{L}^{(1)}(q,-ip)\,\delta\mathcal{L}^{(1)}(k,-i(p+k)).$$

Тем не менее, после регуляризации его удается свести к интегралам вида (22) и (24). В результате мы получаем, что

$$\langle x|\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(1)}\mathcal{G}_0\delta\mathfrak{L}^{(1)}\mathcal{G}_0|x\rangle_{reg} = \frac{4\lambda^{2\varepsilon}}{\pi^{D/2}}\frac{\Gamma(D/2)}{(D-2)}\times \times\left[1-\frac{\Gamma(D/2)\Gamma(3D/2-3)}{2\,\Gamma^2(D-1)}\frac{\Gamma^2(2-D/2)}{\Gamma(2-D)}\right]\times \times\left(\frac{r_g^2}{r^3}\right)^{D-2}. \qquad (28)$$

Регуляризованная вторая поправка к функции Грина в совпадающих точках получается сложением (27) и (28):

$$G^{(2)}_{reg}(x,x;\varepsilon) = \lambda^{2\varepsilon}\frac{4}{\pi^{D/2}}\frac{\Gamma(D/2)}{(D-2)}\left(\frac{r_g^2}{r^3}\right)^{D-2}\times \times\left[1+\frac{3}{8}\frac{\Gamma(D/2)\Gamma(3D/2-3)}{\Gamma^2(D-1)}\frac{\Gamma^2(2-D/2)}{\Gamma(2-D)}\right]. \qquad (29)$$

Заметим, что результаты для случаев нечетного и четного числа пространственных измерений существенным образом различаются.

Действительно, второе слагаемое в квадратных скобках в выражении (29) обращается в нуль при $\varepsilon\to 0$, если число пространственных измерений n нечетное, и имеет простой полюс в точке $\varepsilon=0$ при четном n.

Если n — нечетное, то при снятии регуляризации расходимостей не возникает, т. е. в этом случае $G^{(2)}_{div}(x,x;\varepsilon)=0$, и для второй поправки к перенормированному значению взятой в пределе совпадающих точек функции Грина мы имеем

$$G^{(2)}_{ren}(x,x) = \frac{4}{\pi^{n/2}}\frac{\Gamma(n/2)}{(n-2)}\left(\frac{r_g^2}{r^3}\right)^{n-2}. \qquad (30)$$

Объединяя (8), (26) и (30), мы получаем, что в этом случае перенормированная собственная энергия заряда дается выражением

$$E_{ren}(x,x) = \frac{e^2}{2\pi^{n/2}}\frac{\Gamma(n/2)}{(n-2)}\left(\frac{r_g}{r^2}\right)^{n-2}\times \times\left[1-4\left(\frac{r_g}{r}\right)^{n-2}\right]. \qquad (31)$$

Из (31), в частности, следует, что при $n=3$ сила самодействия в изотропных координатах имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{e^2}{4\pi}\frac{M}{r^3}\left[1-3\frac{M}{r}+\mathcal{O}\left((M/r)^2\right)\right]\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad (32)$$

что с принятой точностью совпадает с результатами, полученными другими авторами в рамках других схем регуляризации [8–10].

В случае четных n расходящаяся часть регуляризованной функции Грина $G^{(2)}_{div}(x,x;\varepsilon)$ уже не равна нулю, и процедура снятия регуляризации и перенормировки должна сопровождаться выделением и отбрасыванием расходящейся части выражения (29). При этом к (30) добавляется слагаемое, пропорциональное $(r_g^2/r^3)^{n-2}\ln(r/C\,r_g)$, где C — число порядка единицы.

Вычисление этого члена требует разложения выражения (29) до членов нулевого порядка по ε. Это может быть выполнено с помощью формулы

$$\Gamma(-n+2\varepsilon)=\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{2\varepsilon}-\gamma+1+\ldots+\frac{1}{n}+\mathcal{O}(\varepsilon)\right),$$

где γ – постоянная Эйлера.

С помощью этой формулы мы получаем, что при четном n

$$\frac{\Gamma^2(2-n/2+\varepsilon)}{\Gamma(2-n+2\varepsilon)}=\frac{2\Gamma(n-1)}{\Gamma^2(n/2-1)\,\varepsilon}+\mathcal{O}(1). \tag{33}$$

Стоящий перед этим выражением в (29) множитель не имеет особенностей. Если воспользоваться соотношением

$$\lambda^{2\varepsilon}\left(\frac{r_g^2}{r^3}\right)^{D-2}=\left(\frac{r_g^2}{r^3}\right)^{n-2}\left(1+2\varepsilon\ln\frac{\lambda r^3}{r_g^2}+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right),$$

его можно представить в виде

$$\frac{3\lambda^{2\varepsilon}}{2\,\pi^{D/2}}\left(\frac{r_g^2}{r^3}\right)^{D-2}\frac{\Gamma^2(D/2)\,\Gamma(3D/2-3)}{(D-2)\,\Gamma^2(D-1)}= =\frac{3}{2\,\pi^{n/2}}\left(\frac{r_g^2}{r^3}\right)^{n-2}\frac{\Gamma^2(n/2)\Gamma(3n/2-3)}{(n-2)\Gamma^2(n-1)}\times \times\left[1+2\varepsilon\ln\frac{\lambda r^3}{r_g^2}+\mathcal{O}(\varepsilon)\right]. \tag{34}$$

Здесь символом $\mathcal{O}(\varepsilon)$ обозначены члены, которые пропорциональны ε, но не зависят от r.

Перемножая (33) и (34), отбрасывая пропорциональное ε^{-1} слагаемое и подставляя полученное выражение в (29), мы получаем, что при четном n

$$G^{(2)}_{ren}(x,x)=\frac{9}{2\pi^{n/2}}\frac{\Gamma(3n/2-3)}{\Gamma(n-2)}\left(\frac{r_g^2}{r^3}\right)^{n-2}\times \times\left[\ln\frac{r}{r_g}+\mathcal{O}(1)\right],$$

а для перенормированной собственной энергии в этом случае имеет место выражение

$$E_{ren}(x,x)=\frac{e^2}{2\pi^{n/2}}\frac{\Gamma(n/2)}{(n-2)}\left(\frac{r_g}{r^2}\right)^{n-2}-\frac{9e^2}{4\pi^{n/2}}\times \times\frac{\Gamma(3n/2-3)}{\Gamma(n-2)}\left(\frac{r_g^2}{r^3}\right)^{n-2}\left[\ln\frac{r}{r_g}+\mathcal{O}(1)\right]. \tag{35}$$

Представленная в форме (35) собственная энергия может быть использована для оценок с логарифмической точностью, т. е. если можно пренебречь числом порядка единицы по сравнению с $\ln(r/r_g)$. В противном случае нужно вычислить и члены, которые в (35) обозначены символом $\mathcal{O}(1)$. Но здесь возникает другая проблема. Дело в том, что в $\mathcal{O}(1)$ попадает, в частности, выражение, содержащее $\ln\lambda r_g$. Понятно, что перенормированное выражение для собственной энергии не должно содержать таких членов. Это значит, что нельзя ограничиться процедурой минимального вычитания, при которой в расходящуюся часть взятой в пределе совпадающих точек функции Грина $G_{div}(x,x;\varepsilon)$ включаются только пропорциональные $1/\varepsilon$ члены и имеется некоторая неоднозначность в выборе соответствующего анзаца. Неоднозначность характерна и для результатов работ [14] и [15], где она проявляется в наличии в аргументе логарифма произвольного параметра.

Отметим, что аналогичная проблема обсуждалась и в однопетлевой квантовой гравитации в связи с регуляризацией вакуумного среднего оператора тензора энергии-импульса. Там соответствующий выбор удалось сделать на основании того, что перенормированное вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса стоит в правой части полуклассических уравнений Эйнштейна (см. [21] и процитированную там литературу). Каким образом выделить расходящуюся часть регуляризованной функции Грина в рассматриваемом случае при четном n пока не ясно. Мы только можем быть уверены, что результат (35) справедлив в логарифмическом приближении.

В частном случае пятимерной черной дыры сила самодействия с логарифмической точностью имеет вид

$$\mathbf{F}=\frac{e^2}{\pi^2}\left(\frac{r_g}{r^2}\right)^2\times \times\left[1-27\left(\frac{r_g}{r}\right)^2\left(\ln\frac{r}{r_g}+\mathcal{O}(1)\right)\right]\frac{\mathbf{r}}{r^2}. \tag{36}$$

Этот случай позволяет сравнить наш результат с результатами работ [14] и [15]. Прежде всего отметим, что в лидирующем по r/r_g порядке результаты всех трех работ совпадают. Наш результат и результаты работ [14] и [15] сходятся в наличии пропорционального логарифму r/r_g члена в выражении для энергии и силы самодействия, но если представить результаты работ [14] и [15] в аналогичном (36) виде, то можно увидеть, что они расходятся в величине коэффициента при логарифме в квадратных скобках и, прежде всего, в относительном знаке. Наш результат ближе к результату работы [14], отличаясь от него только по величине стоящего перед логарифмом коэффициента. В работе [14] коэффициент в три раза меньше.

Представленные формулами (31) и (35) результаты показывают, что при $r \gg r_g$ сила самодействия — это сила отталкивания при всех $n \geqslant 3$. При этом увеличение числа пространственных измерений приводит к увеличению скорости убывания силы самодействия с расстоянием.

Как уже было сказано выше, на появление логарифмической добавки к силе самодействия в частном случае пятимерной черной дыры ($n = 4$) было указано в работах [14, 15]. Теперь мы видим, что такие добавки появляются во всех случаях, когда рассматривается пространство-время Шварцшильда — Тангерлини с четным числом пространственных измерений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривалась задача нахождения собственной энергии точечной заряженной частицы в $(n+1)$-мерном пространстве Шварцшильда – Тангерлини. Нами предложено воспользоваться теорией возмущений в сочетании с методом размерной регуляризации. Показано, что сила самодействия в лидирующем порядке теории возмущений для всех n описывается формулой (26). При этом в первом порядке теории возмущений снятие регуляризации не сопровождается появлением бесконечностей. В случае нечетного числа пространственных измерений это имеет место и во втором порядке. При четном n ситуация иная. Здесь у регуляризованной поправки второго порядка имеется простой полюс и при снятии регуляризации возникают члены, пропорциональные логарифму отношения (r/r_g).

Теория возмущений предполагает рассмотрение больших по сравнению с r_g расстояний и не дает возможности дать оценку собственной энергии при $r \sim r_g$. Однако предложенный подход позволяет воспользоваться хорошо разработанными в квантовой теории поля аналитическими методами и получить результат, который справедлив при произвольном $n \geqslant 3$.

Для регуляризации и перенормировки классической собственной энергии точечного заряда предложено воспользоваться методом размерной регуляризации. В связи с этим, возникают два вопроса, которые следует пояснить.

Первое. Как показал С. Хокинг [22], в общем случае искривленного пространства не существует однозначного рецепта, по каким из измерений проводить аналитическое продолжение. Прежде всего это относится к пространствам, которые представляют собой произведение пространств с разной топологией. Результат может зависеть от этого выбора и отличаться от результата, полученного с использованием других методов регуляризации. Предложенный в [22] рецепт заключается в рассмотрении пространства, которое является прямым произведением рассматриваемого пространства на евклидово пространство произвольного числа измерений, с последующим продолжением по размерности этого евклидова пространства.

Сечение постоянного времени рассматриваемого нами пространства конформно евклидово, и представляется возможным проводить аналитическое продолжение по размерности этого евклидова пространства обычным образом. Это определило выбор изотропных координат при записи метрики Шварцшильда – Тангерлини. Проверка показала, что в рассматриваемом случае наш результат совпадает с результатом, полученным методом, предложенным в работе [22].

Второе. Следуя предписаниям квантовой теории поля, все выражения, имеющие вид (18), мы считали равными нулю. Мотивация такого рецепта никак не связана с квантовой теорией. Фактически она опирается на отсутствие в соответствующем выражении размерных параметров и, как следствие, на невозможность при регуляризации приписать таким интегралам какое-либо разумное конечное значение, кроме нуля. Поэтому это правило в равной мере применимо и в рамках классической теории поля.

В квантовой теории поля появление расходимостей, которые порождаются «головастиками», объясняется тем, что теория возмущений строится по отношению к нефизическому вакууму, а их исключение — необходимостью переопределения вакуумного состояния. Представляет интерес разобраться, с чем связано появление аналогичных расходимостей в классической теории.

Остается открытым вопрос и о правильном выборе анзаца для $G_{div}(x, x; \varepsilon)$ при четном числе пространственных измерений.

Ю. В. Грац признателен проф. А. В. Борисову за полезное обсуждение и высказанные замечания. Работа П. А. Спирина проведена в рамках гранта

РФФИ 14-02-01092 и программ ЕС «Thales» (MIS 375734) и «ARISTEIA II». Особую благодарность за поддержку П. А. Спирин хотел бы выразить некоммерческому фонду «Династия».

ЛИТЕРАТУРА

1. P. C. Argyres, S. Dimopoulos, and J. March-Russell, Phys. Lett. B **441**, 96 (1998), [hep-th/9808138]; P. Meade and L. Randall, JHEP **0805**, 003 (2008), arXiv:0708.3017 [hep-ph]; M. Bleicher and P. Nicolini, arXiv:1001.2211 [hep-ph].

2. The CMS collaboration, JHEP **07**, 178 (2013).

3. V. P. Frolov and A. Zelnikov, *Introduction to Black Hole Physics*, Oxford University Press, Oxford (2011).

4. R. Emparan and H. S. Reall, Living Rev. Relativity **11**, 6 (2008); H. S. Reall, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1230001 (2012).

5. B. S. DeWitt and R. W. Brehme, Annals Phys. (N. Y.) **9**, 220 (1960).

6. C. M. DeWitt and B. S. DeWitt, Physics **1**, 3 (1964).

7. W. G. Unruh, Proc. Roy. Soc. Lond. A **348**, 447 (1976).

8. A. Vilenkin, Phys. Rev. D **20**, 373 (1979).

9. A. G. Smith and C. M. Will, Phys. Rev. D **22**, 1276 (1980).

10. А. И. Зельников, В. П. Фролов, ЖЭТФ **82**, 321 (1982).

11. D. Lohiya, J. Phys. A **15**, 1815 (1982).

12. B. Leaute and B. Linet, Int. J. Theor. Phys. **22**, 67 (1983).

13. V. P. Frolov and A. Zelnikov, Phys. Rev. D **85**, 124042 (2012); Phys. Rev. D **86**, 044022 (2012); Phys. Rev. D **86**, 104021 (2012); Phys. Rev. D **91**, 064037 (2015); JHEP **04**, 014 (2015).

14. M. J. S. Beach, E. Poisson, and B. G. Nickel, Phys. Rev. D **89**, 124014 (2014).

15. P. Taylor and É. É. Flanagan, arXiv:1504.04622v2 [gr-qc].

16. F. Tangherlini, Nuovo Cimento **27**, 636 (1963).

17. J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge (1984).

18. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).

19. V. A. Smirnov, *Analytic Tools for Feynman Integrals, Springer Tracts in Modern Physics* **250**, Springer (2012).

20. Е. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, Москва (1959).

21. T. S. Bunch, J. Phys. Math. Gen. **12**, 517 (1979).

22. S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **55**, 133 (1977).