

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ОПТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА РЕЗОНАНСНОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКОЙ

Н. В. Головастикова^{a,b}, Д. А. Быков^{a,b}, Л. Л. Досколович^{a,b**}, В. А. Сойфер^{a,b}*

*^a Институт систем обработки изображений Российской академии наук
443001, Самара, Россия*

*^b Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева
(национальный исследовательский университет)
443086, Самара, Россия*

Поступила в редакцию 7 мая 2015 г.

Рассмотрена дифракция пространственно-временного оптического импульса на резонансной дифракционной решетке. Дифракция импульса описана в терминах прохождения сигнала (пространственно-временной огибающей падающего импульса) через линейную систему. Для передаточной функции системы получена аналитическая аппроксимация в виде дробно-рациональной функции двух переменных, соответствующих угловой и пространственной частотам. Из передаточной функции получено дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа, описывающее общий вид преобразования огибающей падающего импульса при дифракции на резонансной дифракционной решетке. Получено решение данного уравнения для случая нормального падения импульса с центральной частотой, лежащей в окрестности волноводного резонанса дифракционной структуры. Представленные результаты численного моделирования дифракции импульса на резонансной решетке показывают сильные изменения формы огибающей импульса, которые полностью соответствуют предложенному теоретическому описанию. Результаты статьи могут найти применение при создании новых устройств для преобразования формы оптических импульсов в задачах оптической обработки информации и аналоговых оптических вычислений.

DOI: 10.7868/S0044451015110061

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптические устройства, осуществляющие заданные временные и пространственно-временные преобразования оптических сигналов, представляют большой интерес для широкого спектра приложений, включающих оптическую обработку информации и аналоговые оптические вычисления [1]. Важными операциями аналоговой обработки оптических сигналов являются временное и пространственное дифференцирование и интегрирование [1]. Для выполнения указанных операций были предложены различные варианты резонансных структур, включающие брэгговские решетки [1–9], резонансные ди-

фракционные решетки [10, 11], микро- и нанорезонаторы [12–14].

Использование резонансных структур для реализации операций временного и пространственного дифференцирования и интегрирования связано с тем, что профиль Фано, описывающий вид коэффициента отражения (пропускания) дифракционной структуры в окрестности резонанса, может аппроксимировать передаточную функцию дифференцирующего или интегрирующего фильтра [10]. Отметим, что в указанных выше работах временные и пространственные преобразования падающего пучка описывались по отдельности. При рассмотрении пространственных операций в работах [8, 9, 11] падающий пучок предполагался монохроматическим. При описании временных преобразований в работах [2–6, 10, 13, 14] не учитывалась пространственная структура оптического импульса.

Большой интерес представляет описание прост-

*E-mail: bykovd@gmail.com

**E-mail: leonid@smr.ru

ранственно-временных преобразований оптических импульсов (волновых пакетов) на резонансных дифракционных структурах. В работе [15] на основе численного моделирования дифракции двумерного оптического импульса на резонансной дифракционной решетке показано, что структура импульса может претерпевать сильнейшие пространственно-временные изменения. В то же время, в известных работах отсутствует аналитическое описание изменения пространственно-временной структуры импульса, которое происходит при дифракции на резонансной структуре.

В настоящей работе впервые показано, что пространственно-временное преобразование профиля падающего двумерного импульса, происходящее при дифракции на резонансной дифракционной решетке, может быть описано дифференциальным уравнением гиперболического типа. Уравнение и его решение приведены для случая нормального падения импульса с центральной частотой, лежащей в окрестности волноводного резонанса дифракционной структуры. Представленные результаты численного моделирования дифракции импульса на резонансной решетке по методу фурье-мод полностью подтверждают приведенное теоретическое описание.

2. ДИФРАКЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ИМПУЛЬСА НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

Рассмотрим двумерный оптический импульс, нормально падающий на дифракционную решетку (рис. 1). Пренебрегая дисперсией материала в области над решеткой, запишем падающий импульс в виде разложения по плоским волнам:

$$E(x, z, t) = V(x, z, t) \exp \left\{ -i \frac{\omega_0}{c} n_{sup} z - i \omega_0 t \right\} = \iint G(k_x, \omega - \omega_0) \times \exp \{ i k_x x - i k_z z - i \omega t \} dk_x d\omega, \quad (1)$$

где $V(x, z, t)$ — огибающая импульса, ω_0 — центральная частота импульса, n_{sup} — показатель преломления материала в области над и под решеткой, k_x и

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_{sup}^2 - k_x^2}$$

— компоненты волновых векторов, $G(k_x, \omega)$, $|k_x| \leq \Delta_g$, $|\omega| \leq \Omega$, — пространственно-временной спектр огибающей импульса при $z = 0$. Функция $E(x, z, t)$ в

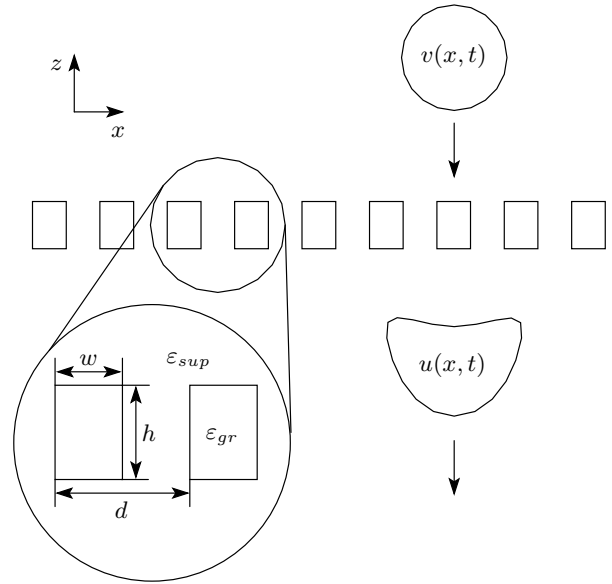


Рис. 1. Дифракция импульса на резонансной дифракционной решетке

(1) соответствует компоненте E_y электрического поля в случае ТЕ-поляризации и компоненте H_y магнитного поля в случае ТМ-поляризации.

Будем считать, что верхняя граница решетки расположена в плоскости $z = 0$. Поле импульса (1) на верхней границе решетки имеет вид

$$E(x, 0, t) = v(x, t) \exp \{ -i \omega_0 t \}, \quad (2)$$

где первый множитель задает огибающую падающего импульса при $z = 0$:

$$v(x, t) = V(x, 0, t) = \iint G(k_x, \omega) \times \exp \{ i k_x x - i \omega t \} dk_x d\omega. \quad (3)$$

Будем считать, что период дифракционной решетки является достаточно малым, так что отраженный и прошедший импульсы, формируемые при дифракции падающего импульса на решетке, соответствуют нулевым порядкам дифракции. В этом случае огибающая отраженного импульса на верхней границе решетки и огибающая прошедшего импульса на нижней границе решетки могут быть записаны в виде

$$r(x, t) = \iint G(k_x, \omega) R(k_x, \omega + \omega_0) \times \exp \{ i k_x x - i \omega t \} dk_x d\omega, \quad (4)$$

$$u(x, t) = \iint G(k_x, \omega) T(k_x, \omega + \omega_0) \times \exp \{ i k_x x - i \omega t \} dk_x d\omega,$$

где $R(k_x, \omega + \omega_0)$, $T(k_x, \omega + \omega_0)$ — комплексные коэффициенты отражения и пропускания дифракционной решетки (комплексные амплитуды нулевого отраженного и нулевого прошедшего порядков дифракции). Согласно (4), преобразование огибающей падающего импульса $v(x, t)$ в огибающие отраженного и прошедшего импульсов ($r(x, t)$ и $u(x, t)$) можно описывать в терминах прохождения сигнала $v(x, t)$ через линейные системы со следующими передаточными функциями:

$$\begin{aligned} H_{ref}(k_x, \omega) &= R(k_x, \omega + \omega_0), \\ H_{tr}(k_x, \omega) &= T(k_x, \omega + \omega_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Полученные передаточные функции (5) являются обобщением передаточных функций, описывающих временные преобразования оптического импульса [5, 10, 13, 14] и пространственные преобразования оптического пучка [8, 9, 11]. Приведенное описание дифракции оптического импульса на дифракционной решетке в рамках теории линейных систем предполагает выполненным приближение линейной оптики, в котором вектор поляризации пропорционален вектору напряженности электрического поля падающего светового пучка.

3. РЕЗОНАНСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПЕКТРА РЕЗОНАНСНОЙ РЕШЕТКИ

Для дальнейшего описания дифракции оптического сигнала на резонансной структуре получим представление коэффициента пропускания дифракционной решетки $T(k_x, \omega)$ в окрестности частоты волноводного резонанса. Для этого воспользуемся формализмом матрицы рассеяния.

Матрица рассеяния \mathbf{S} связывает комплексные амплитуды падающих на решетку волн и комплексные амплитуды рассеянных волн:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где \mathbf{R} и \mathbf{T} — векторы комплексных амплитуд отраженных и прошедших порядков дифракции, \mathbf{I}_1 и \mathbf{I}_2 — векторы комплексных амплитуд волн, падающих на структуру сверху и снизу. Предполагается, что x -компоненты волновых векторов падающих и рассеянных волн имеют вид $k_x + (2\pi/d)m$, где d — период решетки, m — номер порядка дифракции. При заданных геометрии, материалах решетки и поляризации падающего излучения матрица \mathbf{S} является функцией частоты ω и k_x : $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\omega, k_x)$.

Модами структуры называются распределения поля, существующие в структуре в отсутствие па-

дающих волн. Согласно (6), моды описываются следующей однородной системой уравнений [10, 16]:

$$\mathbf{S}^{-1}(\omega, k_x) \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = 0. \quad (7)$$

Нетривиальные решения системы (7) существуют при $\det \mathbf{S}^{-1}(k_x, \omega) = 0$. Данное уравнение называется дисперсионным и может быть записано в виде

$$l(k_x, \omega) = 0, \quad (8)$$

где $l(k_x, \omega) = \det \mathbf{S}^{-1}(k_x, \omega)$. Моды обычно описываются либо комплексной частотой ω [9, 12, 13, 15–17], либо комплексной константой распространения k_x [8, 9, 11, 18]. Таким образом, при решении уравнения (8) функцию $l(k_x, \omega)$ заменяют ее аналитическим продолжением. При этом комплексная частота (или константа распространения) моды является полюсом матрицы рассеяния [10, 16, 17].

Пусть при нормальном падении в структуре существует мода с частотой ω_p (т. е. $l(0, \omega_p) = 0$, где ω_p — полюс матрицы рассеяния при $k_x = 0$). Из симметрии структуры (рис. 1) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial k_x} l(0, \omega) = 0.$$

Данные условия позволяют применить к функции $l(k_x, \omega)$ в точке $(0, \omega_p)$ подготовительную теорему Вейерштрасса [19, 20]. Данная теорема позволяет представить функцию $l(k_x, \omega)$ в следующем виде:

$$l(k_x, \omega) = [k_x^2 + A(\omega)] \Phi(k_x, \omega), \quad (9)$$

где $A(\omega_p) = 0$, а $\Phi(k_x, \omega)$ — некоторая аналитическая функция, не обращающаяся в нуль в окрестности точки $(0, \omega_p)$.

Рассмотрим падение сверху на структуру плоской волны единичной амплитуды. В этом случае $\mathbf{I}_1 = \delta_0$, $\mathbf{I}_2 = \mathbf{0}$, где δ_0 — вектор, в котором элемент, соответствующий нулевому порядку дифракции, равен единице, а остальные элементы равны нулю. Используя метод Крамера, выразим из (6) коэффициент пропускания T , соответствующий нулевому порядку дифракции:

$$T = \frac{\det \tilde{\mathbf{Q}}}{\det \mathbf{S}^{-1}}. \quad (10)$$

Здесь матрица $\tilde{\mathbf{Q}}$ представляет собой матрицу \mathbf{S}^{-1} , соответствующий столбец которой заменен на $\begin{bmatrix} \delta_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$. Подставляя (9) в (10), имеем

$$T(k_x, \omega) = \frac{\det \tilde{\mathbf{Q}}(k_x, \omega) / \Phi(k_x, \omega)}{k_x^2 + A(\omega)}. \quad (11)$$

Перепишем (11), разложив $A(\omega)$ в ряд Тейлора до квадратичных членов в окрестности точки ω_p . Отметим, что числитель выражения (11) не имеет полюсов в окрестности рассматриваемой точки, поэтому мы можем разложить его в ряд Тейлора до тех же степеней что и знаменатель. В результате получим следующее выражение для коэффициента пропускания резонансной структуры при малых значениях k_x (при малых углах падения) и частоте, близкой к частоте резонанса:

$$T(k_x, \omega) = \tilde{t} \frac{k_x^2 - \alpha(\omega - \omega_{z,1})(\omega - \omega_{z,2})}{k_x^2 - \beta(\omega - \omega_{p,1})(\omega - \omega_{p,2})}. \quad (12)$$

Величину \tilde{t} в (12) будем называть нерезонансным коэффициентом пропускания в том смысле, что это коэффициент пропускания при больших значениях k_x , т. е. вдали от резонанса; $\omega_{p,1}, \omega_{p,2}$ — комплексные частоты мод структуры (полюсы коэффициента пропускания) при нормальном падении, $\omega_{z,1}, \omega_{z,2}$ — (комплексные) нули коэффициента пропускания при нормальном падении. Параметры β, α задают изменение положения полюсов и нулей коэффициента пропускания структуры при увеличении угла падения света.

Отметим, что условие равенства нулю знаменателя представления (12) определяет приближенное дисперсионное соотношение

$$k_x^2 - \beta(\omega - \omega_{p,1})(\omega - \omega_{p,2}) = 0, \quad (13)$$

которое является аппроксимацией точного уравнения (8). При $\beta > 0$ уравнение (13) соответствует гиперболе и описывает характерный эффект расщепления дисперсионных кривых, наблюдающийся в окрестности нормального падения [17]. Асимптоты гиперболы (13) имеют вид $\omega = \pm k_x / \sqrt{\beta}$. Это позволяет интерпретировать величину $v_{gr} = 1/\sqrt{\beta}$ как групповую скорость моды при больших значениях k_x .

Коэффициент отражения также может быть представлен в виде, аналогичном (12). При этом, согласно (7) и (9), знаменатель в представлении для коэффициента отражения будет совпадать со знаменателем в (12).

О представлении (12) можно говорить как о пространственно-временном обобщении профиля Фано. Действительно, в большинстве известных работ коэффициент пропускания (отражения) в окрестности резонанса рассматривается либо как функция только угловой частоты ω [10, 13, 16, 17] (описание временных преобразований импульсов), либо как функция только пространственной частоты k_x [8, 9, 11, 18]

(описание пространственных преобразований монохроматического пучка). Соответственно, выражение (12) обобщает указанные представления на пространственно-временной случай. Авторам известна только одна работа [20], в которой рассматривается пространственно-временное представление, аналогичное представлению (12). Полученное представление (12) описывает ряд важных физических эффектов, включающих формирование фотонной запрещенной зоны и существование нечетной моды, которая не может быть возбуждена при нормальном падении. Описание данных эффектов проиллюстрировано на численном примере, представленном в следующем разделе. Отметим, что пространственно-временное представление из работы [20] является более частным и при этом не описывает эффект формирования фотонной запрещенной зоны.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА РЕЗОНАНСНОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКОЙ

Полученное резонансное представление коэффициента пропускания $T(k_x, \omega)$ (12) позволяет записать передаточную функцию (5) резонансной дифракционной решетки в виде

$$H(k_x, \omega) = H_1(k_x, \omega)H_2(k_x, \omega) = (k_x^2 + z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2) \frac{\tilde{t}}{k_x^2 + p_1 + p_2\omega + p_3\omega^2}, \quad (14)$$

где введены обозначения

$$z_1 = -\alpha(\omega_{z,1} - \omega_0)(\omega_{z,2} - \omega_0),$$

$$z_2 = \alpha(\omega_{z,1} + \omega_{z,2} - 2\omega_0),$$

$$z_3 = -\alpha, \quad p_1 = -\beta(\omega_{p,1} - \omega_0)(\omega_{p,2} - \omega_0),$$

$$p_2 = \beta(\omega_{p,1} + \omega_{p,2} - 2\omega_0), \quad p_3 = -\beta.$$

Передаточная функция (14) описывает класс возможных преобразований сигнала (огibaющей падающего импульса в плоскости $z = 0$), которые могут быть осуществлены резонансной дифракционной решеткой. Опишем вид преобразования, соответствующего передаточной функции (14). Обозначим $V(k_x, \omega)$ и $U(k_x, \omega)$ фурье-спектры огibaющей падающего импульса $v(x, t)$ и огibaющей прошедшего импульса $u(x, t)$. Согласно (14), связь между спектрами огibaющих падающего и прошедшего импульсов имеет вид

$$\begin{aligned} (ik_x)^2 U(k_x, \omega) - p_1 U(k_x, \omega) - ip_2(-i\omega)U(k_x, \omega) + \\ + p_3(-i\omega)^2 U(k_x, \omega) = \tilde{t}(ik_x)^2 V(k_x, \omega) - \\ - z_1 \tilde{t} V(k_x, \omega) - iz_2 \tilde{t}(-i\omega) V(k_x, \omega) + \\ + z_3 \tilde{t}(-i\omega)^2 V(k_x, \omega). \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к обеим частям выражения (15), получим дифференциальное уравнение относительно огибающей $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - p_1 u(x, t) - ip_2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \\ + p_3 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \tilde{t} f(x, t), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} f(x, t) = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - z_1 v(x, t) - \\ - iz_2 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + z_3 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что функция $f(x, t)$ соответствует результату преобразования огибающей $v(x, t)$ линейной системой с передаточной функцией $H_1(k_x, \omega)$, соответствующей первому сомножителю в (14). Для резонансов с низкой добротностью функция $H_2(k_x, \omega)$ в (14) является плавно изменяющейся и основное влияние на формирование выходного сигнала оказывает система с передаточной функцией $H_1(k_x, \omega)$ [9–11]. В этом случае преобразование огибающей

$v(x, t)$ определяется выражением (17). Формула (17) показывает, что резонансная дифракционная решетка позволяет оптически реализовать ряд важных дифференциальных операторов, включающих вычисление второй производной по пространственной координате (первое слагаемое в (17)) и вычисление первой и второй производных по времени (третье и четвертое слагаемые в (17)). Отметим, что формула (17) обобщает пространственные и временные преобразования световых пучков, рассмотренные в работах [9–11]. В указанных работах операции оптического вычисления второй производной по пространственной координате и первой производной по времени рассматривались по отдельности соответственно для монохроматических пучков и временных импульсов.

В общем случае огибающая прошедшего сигнала $u(x, t)$ является решением неоднородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (16). Решение уравнения (16) приведено в Приложении. Согласно формуле (A.9), огибающая прошедшего сигнала может быть записана в виде интеграла свертки:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) h(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau, \quad (18)$$

где

$$h(x, t) = \begin{cases} \frac{\tilde{t}}{2\sqrt{\beta}} \exp\left\{-i\frac{\omega_{p,1} + \omega_{p,2} - 2\omega_0}{2}t\right\} J_0\left(\frac{\omega_{p,1} - \omega_{p,2}}{2}\sqrt{t^2 - \beta x^2}\right), & t \geq |x|\sqrt{\beta}, \\ 0, & t < |x|\sqrt{\beta}. \end{cases} \quad (19)$$

Отметим, что $h(x, t)$ — импульсная характеристика линейной системы с передаточной функцией, соответствующей второму сомножителю в (14). Решение (18), (19) было получено при условии $p_3 < 0$ ($\beta > 0$). При этом уравнение (16) является уравнением гиперболического типа, а полученное решение допускает наглядную физическую интерпретацию. Интегрирование в (18) выполняется по области, заключенной внутри двумерного конуса $t = |x|\sqrt{\beta}$. Эту область можно рассматривать как аналог светового конуса: она включает ту область одномерного пространства, возмущение из которой до рассматриваемой точки за время t . При этом, как отмечено выше, величина $v_{gr} = 1/\sqrt{\beta}$ имеет смысл групповой скорости распространения моды в направлении оси x . В предположении, что эта скорость не превосходит скорости света, импульсная характери-

стика $h(x, t)$ удовлетворяет релятивистскому условию причинности. Таким образом, аппроксимация коэффициента пропускания (12), полученная выше на основе подготовительной теоремы Вейерштрасса, имеет понятный физический смысл и обеспечивает выполнение условия причинности.

Для исследования применимости и точности полученных приближений (12), (14), (18), (19) сравним их с результатами моделирования дифракции оптического импульса на резонансной решетке, полученными в рамках строгого решения уравнений Максвелла. Для этого сначала построим аппроксимацию (12), (14) пространственно-временного спектра пропускания дифракционной решетки на рис. 1. На рис. 2а приведен пространственно-временной спектр коэффициента пропускания дифракционной

решетки, рассчитанный строгим методом Фурье-мод [21, 22] при следующих параметрах: период решетки $d = 0.5$ мкм, высота ступенек $h = 0.3$ мкм, ширина ступенек $w = 0.45$ мкм, диэлектрическая проницаемость материала решетки $\varepsilon_{gr} = 2.4025$, диэлектрическая проницаемость окружающей среды $\varepsilon_{sup} = 1$, поляризация падающих волн — ТЕ. Рисунок 2а показывает формирование двух выраженных резонансов, связанных с возбуждением в решетке квазиволноводных мод. Особенности (минимумы) коэффициента пропускания образуют две ветви, разделенные запрещенной зоной при $k_x = 0$ (рис. 1). Отметим, что нижняя ветвь соответствует возбуждению нечетной моды, поскольку данный резонанс исчезает в окрестности нормального падения ($k_x = 0$) [23].

Рассмотрим вычисление параметров аппроксимирующего выражения (12), соответствующих рассматриваемой решетке. Значения полюсов (комплексных частот возбуждаемых мод) $\omega_{p,1} = 2.872 \times 10^{15} - 3.065i \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\omega_{p,2} = 2.723 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ были найдены как полюсы матрицы рассеяния решетки при нормальном падении ($k_x = 0$) с использованием метода работы [17]. При этом действительный полюс $\omega_{p,2}$ соответствует нечетной моде структуры, которая не возбуждается при нормальном падении. Один из нулей коэффициента пропускания при нормальном падении $\omega_{z,1} = 2.873 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ был получен из рассчитанного спектра пропускания. Второй нуль полагался равным действительному полюсу решетки: $\omega_{z,2} = \omega_{p,2} = 2.723 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. При этом условие $\omega_{z,2} = \omega_{p,2}$ позволяет исключить особенность (деление на нуль) в коэффициенте пропускания (12) при $\omega = \omega_{p,2}$ и $k_x = 0$. Оставшиеся значения параметров $\alpha = \beta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ пс}^2 \cdot \text{мкм}^{-2}$ и $\tilde{t} = -0.404 - 0.841i$ были получены в результате оптимизации из условия минимума разности между коэффициентом пропускания, рассчитанным с использованием метода Фурье-мод, и приближенным выражением (12).

На рис. 2б представлена аппроксимация коэффициента пропускания рассматриваемой решетки, вычисленная по формуле (12) при рассчитанных параметрах. Сравнение рис. 2а и 2б полностью подтверждает применимость выражений (12), (14) для представления коэффициента пропускания резонансной дифракционной решетки в окрестности нормального падения.

При моделировании дифракции импульса на решетке рассматривался ТЕ-поляризованный оптический импульс с центральной частотой $\omega_0 = 2.873 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, совпадающей с нулем в спектре пропускания структуры при $k_x = 0$ ($T(0, \omega_0) = 0$).

Огибающая падающего импульса имеет гауссов вид:

$$v(x, t) = \exp \left\{ -\frac{(t - t_0)^2}{T^2} - \frac{x^2}{X^2} \right\},$$

где $2T = 2$ пс — продолжительность импульса (по уровню $1/e$), $2X = 40$ мкм — его ширина (рис. 3а), $t_0 = 3T$. На рис. 3 представлено сравнение огибающих прошедшего сигнала, вычисленных по методу Фурье-мод (рис. 3б) и с использованием аналитических формул (18), (19) (рис. 3в).

Графики на рис. 3б,в демонстрируют высокую степень соответствия вида огибающих, вычисленных с использованием точного и приближенного методов: величина среднеквадратического отклонения между графиками составляет менее 0.5%. Такая точность свидетельствует о корректности предложенного теоретического описания (18), (19). Отметим, что решение задачи дифракции импульса на резонансной дифракционной решетке с использованием интеграла свертки (18) или соотношений (4), (12) значительно проще, чем непосредственное решение уравнений Максвелла строгим методом Фурье-мод. Действительно, для вычисления параметров ядра свертки (19) (параметров передаточной функции (14)) достаточно строго решить задачу дифракции всего для нескольких пар (k_x, ω) . При этом единожды рассчитанные параметры ядра свертки (19) позволяют моделировать дифракцию произвольно го импульса.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описана дифракция пространственно-временного оптического импульса на резонансной дифракционной решетке. Показано, что преобразование огибающей падающего импульса при дифракции на дифракционной решетке может быть описано в рамках теории линейных систем. При этом передаточная функция и импульсная характеристика линейной системы определяются коэффициентом пропускания (или отражения) дифракционной решетки. Данный результат получен в рамках линейной оптики (без учета нелинейных эффектов).

На основе предложенной резонансной аппроксимации спектра пропускания решетки получено дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа, описывающее преобразование огибающей оптического импульса при дифракции на резонансной решетке. Получено аналитическое решение данного уравнения в виде интеграла

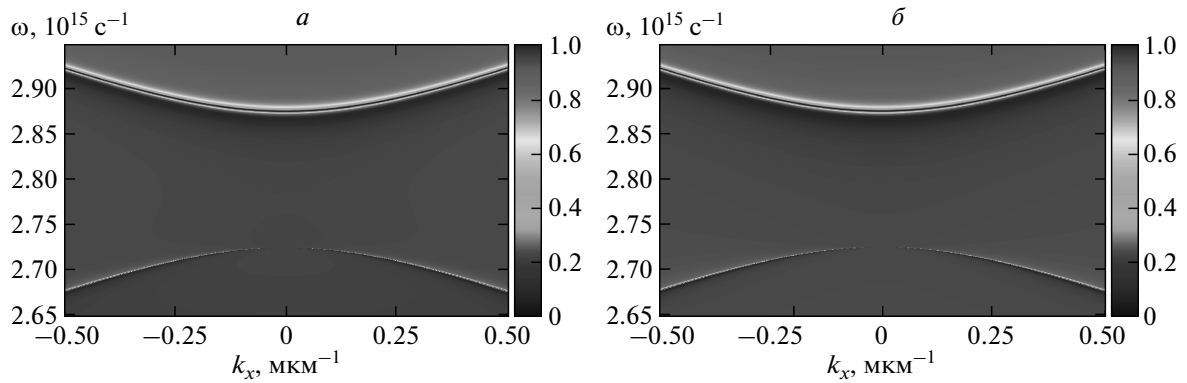


Рис. 2. Модуль коэффициента пропускания структуры как функция ω , k_x при ТЕ-поляризации падающих волн: а) рассчитанный с использованием метода фурье-мод; б) рассчитанный с использованием резонансного приближения (12)

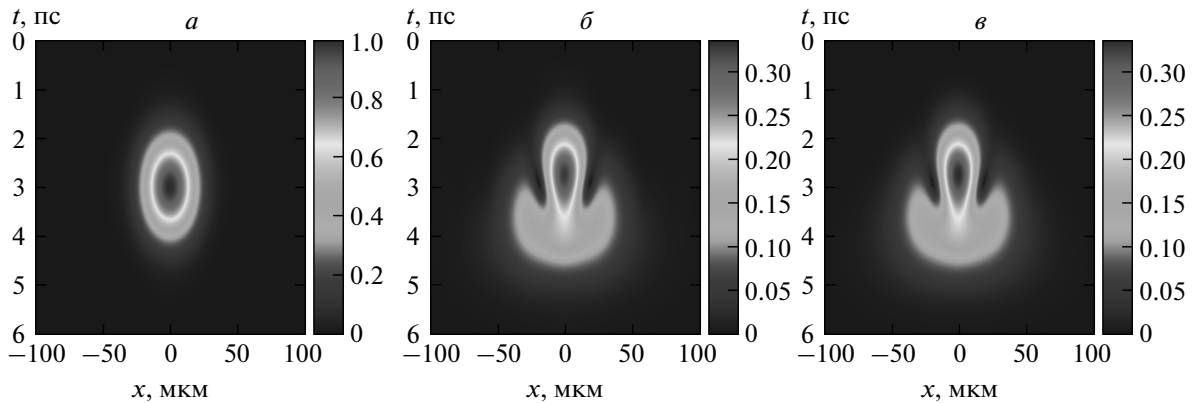


Рис. 3. Модуль огибающей импульса: а) падающий импульс, б) прошедший импульс, вычисленный по методу фурье-мод, в) прошедший импульс, вычисленный с использованием аналитического выражения (18)

свертки. Представленные результаты численного моделирования дифракции импульса на резонансной решетке по методу фурье-мод полностью подтверждают приведенное теоретическое описание.

Полученные результаты могут найти применение при создании новых планарных устройств для преобразования формы импульсов, в том числе в задачах оптической обработки информации и аналоговых оптических вычислений. При этом полученное теоретическое описание общего вида преобразования огибающей импульса определяет класс возможных пространственно-временных преобразований, реализуемых резонансными дифракционными решетками.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-00796).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проводя замену

$$u(x, t) = \exp\left(\frac{ip_2}{2p_3} t\right) \tilde{u}(x, t),$$

приведем уравнение (16) к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^2} - c^2 \tilde{u}(x, t) + \tilde{f}(x, t), \quad (\text{A.1})$$

где

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{\tilde{t}}{p_3} f(x, t) \exp\left(-\frac{ip_2}{2p_3} t\right),$$

$$a^2 = \frac{1}{-p_3}, \quad c^2 = \frac{1}{p_3} \left(\frac{p_2^2}{4p_3} - p_1\right).$$

Будем предполагать, что $p_3 < 0$. При этом уравнение (А.1) является уравнением гиперболического типа. Рассмотрим решение уравнения (А.1) на бесконечной прямой с однородными начальными условиями:

$$\begin{cases} \tilde{u}(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Отметим, что при рассмотрении конечного по времени сигнала всегда можно определить начальный момент времени так, чтобы нулевые начальные условия (А.2) выполнялись.

Для решения задачи (А.1), (А.2) будем использовать метод преобразования Фурье [24]. Введем преобразование Фурье функций $\tilde{u}(x, t)$ и $\tilde{f}(x, t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\lambda, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\xi, t) \exp\{-i\lambda\xi\} d\xi, \\ \tilde{F}(\lambda, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi, t) \exp\{-i\lambda\xi\} d\xi. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Относительно образов Фурье (А.3) задача (А.1), (А.2) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{U}(\lambda, t)}{\partial t^2} + (a^2\lambda^2 + c^2)\tilde{U}(\lambda, t) = \tilde{F}(\lambda, t), \\ \tilde{U}(\lambda, t) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{U}(\lambda, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Решение задачи (А.4) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка и может быть записано в виде [24]

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\lambda, t) &= \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{a^2\lambda^2 + c^2}(t - \tau))}{\sqrt{a^2\lambda^2 + c^2}} \times \\ &\quad \times \tilde{F}(\lambda, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Применяя к (А.5) обратное преобразование Фурье, запишем $\tilde{u}(x, t)$ как

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\lambda, t) \exp\{i\lambda x\} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{a^2\lambda^2 + c^2}(t - \tau))}{\sqrt{a^2\lambda^2 + c^2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\{i\lambda(x - \xi)\} d\lambda \right] \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Для вычисления внутреннего интеграла в (А.6), являющегося преобразованием Фурье, используем следующее известное соотношение [25]:

$$\begin{aligned} \int_0^a J_0(b\sqrt{a^2 - x^2}) \cos(\lambda x) dx &= \\ &= \frac{\sin(a\sqrt{b^2 + \lambda^2})}{\sqrt{b^2 + \lambda^2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Переходя в последней формуле от косинус-преобразования к преобразованию Фурье, а затем вычисляя обратное преобразование Фурье от правой и левой частей уравнения, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{a^2\lambda^2 + c^2}t)}{\sqrt{a^2\lambda^2 + c^2}} \exp(i\lambda x) d\lambda &= \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{a} J_0\left(c\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right), & |x| < at, \\ 0, & |x| > at. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Подставляя (А.8) в (А.6), получим окончательное решение задачи (А.1), (А.2) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-at}^{x+at} \tilde{f}(\xi, \tau) \times \\ &\quad \times J_0\left(c\sqrt{(t - \tau)^2 - \frac{(x - \xi)^2}{a^2}}\right) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Silva, F. Monticone, G. Castaldi et al., Science **243**, 160 (2014).
2. R. Slavík, Y. Park, M. Kulishov et al., Opt. Lett. **34**, 3116 (2009).
3. L. M. Rivas, S. Boudreau, Y. Park et al., Opt. Lett. **34**, 1792 (2009).
4. M. A. Preciado, X. Shu, P. Harper et al., Opt. Lett. **38**, 917 (2013).
5. N. K. Berger, B. Levit, B. Fischer et al., Opt. Express **15**, 371 (2007).
6. M. Kulishov, D. Krcmarík, and R. Slavík, Opt. Lett. **32**, 2978 (2007).

7. N. Q. Ngo, *Opt. Lett.* **32**, 3020 (2007).
8. N. V. Golovastikov, D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, and E. A. Bezus, *Opt. Comm.* **338**, 457 (2015).
9. D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, E. A. Bezus, and V. A. Soifer, *Opt. Express* **22**, 25084 (2014).
10. D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, and V. A. Soifer J. *Opt. Soc. Amer. A* **29**, 1734 (2012).
11. N. V. Golovastikov, D. A. Bykov, and L. L. Doskolovich, *Quant. Electr.* **44**, 984 (2014).
12. J. Dong, A. Zheng, D. Gao et al., *Opt. Lett.* **38**, 628 (2013).
13. N. L. Kazanskiy, P. G. Serafimovich, and S. N. Khonina, *Opt. Lett.* **38**, 1149 (2013).
14. N. L. Kazanskiy and P. G. Serafimovich, *Opt. Express* **22**, 14004 (2014).
15. T. Vallius, P. Vahimaa, and J. Turunen, *Opt. Express* **10**, 840 (2002).
16. D. A. Bykov and L. L. Doskolovich, *J. Lightwave Technol.* **31**, 793 (2013).
17. S. G. Tikhodeev, A. L. Yablonskii, E. A. Muljarov et al., *Phys. Rev. B* **66**, 045102 (2002).
18. M. Nevière, E. Popov, and R. J. Reinisch, *Opt. Soc. Amer. A* **12**, 513 (1995).
19. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, т. 1, Наука, Москва (1967), с. 472.
20. S. P. Shipman and S. Venakides, *Phys. Rev. E* **71**, 026611 (2005).
21. M. G. Moharam, E. B. Grann, D. A. Pommet et al., *J. Opt. Soc. Amer. A* **12**, 1068 (1995).
22. L. Li, *J. Opt. Soc. Amer. A* **13**, 1024 (1996).
23. N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, and T. Ishihara, *Phys. Rev. B* **72**, 045138 (2005).
24. А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов, *Задачи по математической физике*, Изд-во МГУ, Москва (1998), с. 245.
25. H. Bateman and A. Erdélyi, *Tables of Integral Transforms*, Vol. 1, McGraw-Hill Book Comp., New York (1954), p. 57.