

ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ МЕДЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ: КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ И КВАНТОВАЯ ПОПРАВКА

Н. Л. Манаков, А. А. Крыловецкий, С. И. Мармо*

*Воронежский государственный университет
394006, Воронеж, Россия*

Поступила в редакцию 9 ноября 2014 г.

Прямым разложением по $\hbar \rightarrow 0$ получены компактные аналитические выражения для нерелятивистской амплитуды кулоновского тормозного излучения (ТИ), дифференциального (по частоте и углам рассеянного электрона) сечения ТИ и трижды дифференциального сечения ТИ, учитывающего направление и поляризацию тормозного фотона и направление рассеянного электрона, которые содержат классический предел и квантовую поправку порядка \hbar при произвольном значении частоты ТИ ω , а также найдено явное выражение для квантовой поправки порядка \hbar к классическому спектру ТИ.

DOI: 10.7868/S0044451015110012

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к тормозному излучению (ТИ), возникающему при рассеянии электронов на ядрах, наряду с ролью ТИ в плазменных и лазерных приложениях, обусловлен его фундаментальным значением как простейшего излучательного процесса. Так, нерелятивистское дипольное ТИ электрона в кулоновском поле дает удобную возможность для исследования соответствия между квантовой и классической теориями излучения (см., например, [1]). Действительно, поскольку кулоновское ТИ (в нерелятивистском дипольном приближении) рассчитывается аналитически как в классической, так и в квантовой теории, возникает возможность аналитической проверки принципа соответствия на примере неупругих переходов в непрерывном спектре.

Тормозное излучение на кулоновском центре впервые было исследовано Крамерсом [2], рассчитавшим методами классической электродинамики спектральное эффективное излучение $d\chi(\omega)$; полное решение задачи о классическом кулоновском ТИ было дано во втором издании (1948 г.) книги [3]. Разделив величину $d\chi(\omega)$ на энергию тормозного фотона $\hbar\omega$, получим сечение $d\sigma(\omega) = d\chi(\omega)/\hbar\omega$, которым обычно характеризуют ТИ в квантовой механи-

ке. Для удобства сравнения классических и квантовых результатов сечение $d\sigma(\omega)$ используют также и в классической теории, хотя эта величина и содержит постоянную Планка \hbar . Квантовый расчет сечения ТИ был проведен Зоммерфельдом [4, 5], получившим аналитическое выражение для $d\sigma(\omega)$ через гипергеометрические функции. Классический предел формулы Зоммерфельда для $d\sigma(\omega)$ впервые был найден Биденхарном [6], но не непосредственно, а путем разложения сечения ТИ в ряд по орбитальному моменту l и перехода к пределу $\hbar \rightarrow 0$ в радиальных матричных элементах с последующей заменой суммирования по l на интегрирование по прицельному параметру. Переход к классическому сечению ТИ непосредственным устремлением \hbar к нулю в формуле Зоммерфельда был выполнен в работе [7] (см. также [8]). Неоднократно предпринимались и попытки найти квантовые поправки к классическим сечениям [9–13], однако правильно были вычислены, по-видимому, только высокочастотная [10] и низкочастотная [13] поправки к $d\sigma(\omega)$. В работах [14–16] получены квазиклассические сечения кулоновского ТИ, более точные, чем классические, однако явно их точность по отношению к классическим результатам установлена не была.

Цель настоящей работы состоит в вычислении квантовых поправок порядка \hbar к классическим сечениям ТИ — как дифференциальному (по углам рассеянного электрона и по частоте излученного фо-

*E-mail: manakov@phys.vsu.ru

тона), так и спектральному эффективному излучению — при произвольном значении частоты ω . Очевидно, что именно результаты таких вычислений позволяют определить границы применимости классической теории и получить замкнутые аналитические выражения для главной квантовой поправки к классическим результатам для кулоновского ТИ. В разд. 2 приведены основные положения квантовой теории нерелятивистского ТИ и выписана амплитуда кулоновского ТИ как в форме, впервые полученной Зоммерфельдом [4, 5], так и в симметричной, отличной от зоммерфельдовской форме. В разд. 3 приведены основные результаты классической теории ТИ. В разд. 4 с использованием симметричной формы записи получены два члена (главный и первый поправочный) разложения амплитуды ТИ по $\hbar \rightarrow 0$. В разд. 5 вычислены квантовые поправки к классическим трижды дифференциальному ($d\sigma_{\mathbf{e}\mathbf{k}\mathbf{p}'}^{cl}(\omega)$), дифференциальному по углам рассеянного электрона и частоте излучения ($d\sigma_{\mathbf{p}'}^{cl}(\omega)$) и дифференциальному по частоте ($d\sigma^{cl}(\omega)$) сечениям ТИ. В разд. 6 найдена асимптотика квантовой поправки к $d\sigma^{cl}(\omega)$ при высоких и низких частотах ТИ. В Приложении вычислены два члена асимптотики гипергеометрических функций с большими верхними параметрами и большим аргументом, через которые выражаются амплитуда и сечения кулоновского ТИ.

2. ЗОММЕРФЕЛЬДОВСКАЯ И СИММЕТРИЧНАЯ ФОРМЫ АМПЛИТУДЫ КУЛОНОВСКОГО ТИ

Заряженная частица при рассеянии (торможении) во внешнем электрическом поле испускает электромагнитное (тормозное) излучение, которое с подавляющей вероятностью является однофотонным. Согласно правилу Ферми сечение нерелятивистского дипольного ТИ фотона (с частотой ω , вектором поляризации \mathbf{e} ($\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* = 1$) и волновым вектором \mathbf{k} ($|\mathbf{k}| = \omega/c$)) электроном с начальным импульсом \mathbf{p} и конечным импульсом \mathbf{p}' ($p' = \sqrt{p^2 - 2m\hbar\omega}$) дается выражением

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{e}\mathbf{k}\mathbf{p}'}(\omega)}{d\omega d\Omega_{\mathbf{p}'} d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{e^2}{(2\pi)^4 \hbar^3 c^3} \frac{p'\omega}{p} |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{M}|^2. \quad (1)$$

Здесь

$$\mathbf{M} = \langle \psi_{\mathbf{p}'}^{(-)} | \hat{\mathbf{p}} | \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \rangle \quad (2)$$

— амплитуда перехода между начальным состоянием $\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}$ с импульсом \mathbf{p} и асимптотикой расходящихся волн и конечным состоянием $\psi_{\mathbf{p}'}^{(-)}$ с импульсом \mathbf{p}' и асимптотикой сходящихся волн на бесконечности.

Трижды дифференциальное сечение $d\sigma_{\mathbf{e}\mathbf{k}\mathbf{p}'}(\omega)$ содержит полную информацию о поляризации, частоте и угловом распределении излученных фотонов и угловом распределении рассеянных электронов. Во многих случаях столь детальное знание не требуется и сечение (1) можно упростить. Например, при изучении эффекта Маркуза [13, 17, 18] фиксируются частота, направление и поляризация излученного фотона, а по направлениям конечного электрона сечение (1) следует проинтегрировать. Если же в эксперименте измеряется только частота фотона, то сечение следует просуммировать по поляризациям и проинтегрировать по направлениям излученного фотона. Эти операции сводятся к замене [19]

$$e_i e_k^* d\Omega_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{8\pi}{3} \delta_{ik}, \quad (3)$$

в результате которой получаем

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{p}'}(\omega)}{d\omega d\Omega_{\mathbf{p}'}} = \frac{e^2}{6\pi^3 \hbar^3 c^3} \frac{p'\omega}{p} |\mathbf{M}|^2. \quad (4)$$

Интегрирование (4) по направлениям рассеянного электрона, которое не может быть выполнено в общем виде, дает сечение ТИ в интервале частот $d\omega$:

$$\frac{d\sigma(\omega)}{d\omega} = \frac{e^2}{6\pi^3 \hbar^3 c^3} \frac{p'\omega}{p} \int |\mathbf{M}|^2 d\Omega_{\mathbf{p}'}. \quad (5)$$

При рассеянии в центральном поле $U = U(r)$ амплитуда \mathbf{M} перехода между начальным $\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}$ и конечным $\psi_{\mathbf{p}'}^{(-)}$ состояниями, через которую выражаются сечения (1), (4), (5), из общих соображений может быть записана в виде

$$\mathbf{M} = Q_1(p, p', \theta) \mathbf{n} + Q_2(p, p', \theta) \mathbf{n}', \quad (6)$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{p}'}{p'}$$

— единичные векторы в направлении начального и конечного импульсов, θ — угол рассеяния ($\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$), а скалярные параметры $Q_{1,2}$ связаны между собой соотношением симметрии:

$$Q_1(p, p', \theta) = Q_2(p', p, \theta), \quad (7)$$

т. е. Q_1 и Q_2 определяются одной комплексной функцией.

При рассеянии в кулоновском поле $U = -Ze^2/r$ (для определенности будем рассматривать поле притяжения, применение результатов к полю отталкивания $U = Ze^2/r$ будем оговаривать отдельно) амплитуда \mathbf{M} вычисляется аналитически. Расчет, впервые

выполненный Зоммерфельдом [4, 5] (см. также [19]), приводит к выражению

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \exp\left(\frac{\pi}{2}(a' - a)\right) \frac{8\pi i \hbar^3}{(p - p')^3} \frac{|p - p'|^{ia+ia'}}{(p + p')^{ia+ia'+1}} \times \\ & \times \Gamma(1 - ia)\Gamma(1 - ia')(1 - z)^{ia+ia'-1} \times \\ & \times [iap(\mathbf{p}' - \mathbf{p})F(ia, ia', 1; z) + \\ & + (1 - z)F'(ia, ia', 1; z)(p'\mathbf{p} - p\mathbf{p}')], \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$a = \frac{Ze^2 m}{\hbar p}, \quad a' = \frac{Ze^2 m}{\hbar p'}, \quad (9)$$

$$z = -\frac{2aa'}{(a' - a)^2}(1 - \cos \theta), \quad (10)$$

$F(ia, ia', 1; z) \equiv {}_2F_1(ia, ia', 1; z)$ — гипергеометрическая функция, $F'(ia, ia', 1; z)$ — ее производная по аргументу. Безразмерные кулоновские (зоммерфельдовские) параметры a, a' и аргумент z удобно записывать также через скорости начального и конечного электрона $v = p/m$ и $v' = p'/m$.

Зоммерфельдовское представление амплитуды (8) позволяет выполнить интегрирование по углам электрона в (5) и получить аналитическое выражение для сечения $d\sigma(\omega)$. Идея вычислений состоит в том, что с использованием дифференциального уравнения для гипергеометрической функции удается записать квадрат модуля амплитуды (8) как полную производную некоторого выражения. Форма (8) для \mathbf{M} удобна для такого преобразования, поскольку содержит функцию $F(ia', ia, 1; z)$ и ее же производную. Окончательное выражение для сечения ТИ в интервале частот $d\omega$ (формула Зоммерфельда) имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma(\omega) = & \frac{16\pi^2}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \frac{v^2}{c^2} \times \\ & \times \frac{1}{(1 - e^{-2\pi a'})} \frac{1}{(e^{2\pi a} - 1)} z_0 \frac{d}{dz_0} |F(z_0)|^2 \frac{d\omega}{\omega}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(z_0) = & F(ia, ia', 1; z_0), \\ z_0 = & -\frac{4pp'}{(p - p')^2} = -\frac{4aa'}{(a' - a)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Формулу Зоммерфельда часто записывают через крамеровское сечение [2]

$$d\sigma^{Kr}(\omega) = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \frac{v^2}{c^2} \frac{d\omega}{\omega} \quad (13)$$

(которое, являясь высокочастотным пределом классического сечения ТИ (26), см. ниже, задает естественный масштаб величины $d\sigma$) и гаунт-фактор g :

$$d\sigma(\omega) = g d\sigma^{Kr}(\omega). \quad (14)$$

Зоммерфельдовская форма (8) амплитуды \mathbf{M} не имеет явно симметричного вида (6), но приводится к нему с использованием рекуррентных соотношений для гипергеометрической функции F [20, 21]. При этом параметры $Q_{1,2}$ в (6) определяются одной функцией

$$\begin{aligned} Q_1(p, p', \theta) = & Q_2(p', p, \theta) = 8\pi \hbar^3 \frac{a' p' p}{(p - p')^3} \times \\ & \times \exp\left[\frac{\pi}{2}(a' - a)\text{sign}(p - p')\right] \frac{|p - p'|^{ia+ia'}}{(p + p')^{ia+ia'+1}} \times \\ & \times \Gamma(2 - ia)\Gamma(1 - ia')F(2 - ia, 1 - ia', 2; z) \end{aligned} \quad (15)$$

в соответствии с формулой (7). Симметричная форма амплитуды ТИ непосредственно возникает при ее расчете в параболических координатах, см. [22]. Обратим внимание на универсальность записи амплитуды радиационного перехода в континууме в формах (8) и (6), (15): эти выражения справедливы не только для тормозного излучения (когда $p > p'$ и $\text{sign}(p - p') = 1$), но и для тормозного поглощения (когда $p < p'$ и $\text{sign}(p - p') = -1$) в кулоновском поле притяжения ($Ze^2 > 0$). Амплитуды тормозного излучения и поглощения в поле отталкивания следуют из них при замене $Ze^2 \rightarrow -Ze^2$.

Зоммерфельдовская форма (8) неудобна для расчета асимптотики \mathbf{M} при $\hbar \rightarrow 0$, поскольку главные члены разложения отдельных слагаемых в \mathbf{M} взаимно уничтожаются; симметричное представление (6) более удобно для решения этой задачи, см. разд. 4. Кроме того, для анализа классического случая удобно ввести «квантовую» частоту

$$\tilde{\omega} = \frac{\hbar\omega}{mv^2/2}, \quad (16)$$

которую вместе с кулоновским параметром $a = Ze^2/\hbar v$ и угловым параметром

$$\varepsilon = \frac{1}{\sin(\theta/2)} \quad (17)$$

обычно используют как независимые переменные, выражая через них a', z_0 и z . Произведение a и $\tilde{\omega}$ не содержит \hbar и определяет «классическую» частоту

$$\nu = \frac{1}{2} a \tilde{\omega} = \frac{Ze^2 \omega}{mv^3}. \quad (18)$$

3. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В классической теории ТИ обычно используются величины, не учитывающие поляризацию и направление фотонов, а также направление рассеянных электронов, например, спектральное распределение (энергия дипольного излучения в интервале $d\omega$ при рассеянии частицы на мишени) [3]. Однако методами классической электродинамики можно получить и величины, аналогичные квантовым сечениям (см. разд. 2). Например, в [23] в рамках гамильтонова подхода классической электродинамики [24] получено трижды дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{e}\mathbf{k}\mathbf{p}'}^{cl}(\omega)}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}d\Omega_{\mathbf{p}'}} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\omega}{4\pi^2 c^2} \tilde{\sigma}_0 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{v}_\omega|^2, \quad (19)$$

где

$$\mathbf{v}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) \exp(i\omega t) dt$$

— фурье-компонента классической скорости и $\tilde{\sigma}_0 \equiv \equiv d\sigma_0/d\Omega_{\mathbf{p}'}$ — сечение упругого рассеяния; в кулоновском случае

$$\tilde{\sigma}_0 = \left(\frac{Ze^2}{2mv^2} \right)^2 \varepsilon^{-4}$$

— резерфордовское сечение. Суммируя (19) по поляризациям и интегрируя по $d\Omega_{\mathbf{k}}$ согласно (3), получаем

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{p}'}^{cl}(\omega)}{d\omega d\Omega_{\mathbf{p}'}} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{2\omega}{3\pi c^2} \tilde{\sigma}_0 |\mathbf{v}_\omega|^2. \quad (20)$$

Интегрирование (20) по направлениям рассеянного электрона дает спектральное распределение:

$$\frac{d\sigma^{cl}(\omega)}{d\omega} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{2\omega}{3\pi c^2} \int \tilde{\sigma}_0 |\mathbf{v}_\omega|^2 d\Omega_{\mathbf{p}'}. \quad (21)$$

Умножив $d\sigma^{cl}(\omega)$ на $\hbar\omega$, получим величину, не зависящую от \hbar , — спектральное эффективное излучение [3]:

$$d\mathcal{N}(\omega) = \hbar\omega d\sigma^{cl}(\omega). \quad (22)$$

Сечения (19)–(21) являются классическими аналогами квантовых сечений соответственно (1), (4), (5): квантовые формулы должны переходить в классические в пределе $\hbar \rightarrow 0$.

Фурье-образ \mathbf{v}_ω обладает, очевидно, теми же свойствами пространственно-временной симметрии,

что и квантовая амплитуда ТИ (2). Соответственно, в центральном поле $U = U(r)$ для \mathbf{v}_ω может быть записано следующее общее выражение (ср. с (6)):

$$\mathbf{v}_\omega = f(\omega, v, \theta) \mathbf{n} + f(-\omega, v, \theta) \mathbf{n}'. \quad (23)$$

Явные выражения параметров $f(\pm\omega, v, \theta)$, определяющих фурье-образ \mathbf{v}_ω скорости электрона, движущегося по гиперболической траектории в кулоновском поле притяжения, легко находятся [23] по его известным [3] фурье-компонентам проекций скорости в плоскости орбиты:

$$\mathbf{v}_\omega = -\frac{Ze^2}{mv^2} e^{\pi\nu/2} [K_{i\nu}(\nu\varepsilon)(\mathbf{n} + \mathbf{n}') + i\varepsilon K'_{i\nu}(\nu\varepsilon)(\mathbf{n} - \mathbf{n}')], \quad (24)$$

или

$$\mathbf{v}_\omega = i\varepsilon \frac{Ze^2}{mv^2} e^{\pi\nu/2} \times [K_{1+i\nu}(\nu\varepsilon)\mathbf{n} - K_{1-i\nu}(\nu\varepsilon)\mathbf{n}'], \quad (25)$$

где $K_\mu(z)$ и $K'_\mu(z)$ — функция Макдональда и ее производная по z .

Фурье-образ \mathbf{v}_ω в поле отталкивания получается из (24), (25) изменением общего знака и заменой $\nu \rightarrow -\nu$ в показателе экспоненты и в индексах функций Макдональда (в формуле (24) надо еще поменять знак перед производной функции Макдональда).

Подставляя (24) в (20), после элементарных преобразований получим классическое сечение ТИ в кулоновском поле притяжения:

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{p}'}^{cl}(\omega)}{d\omega d\Omega_{\mathbf{p}'}} = \frac{2Z^2 e^6}{3\pi \hbar c^3} \frac{\nu^2}{\omega p^2} e^{\pi\nu} \varepsilon^4 \times [(1 - \varepsilon^{-2})K_{i\nu}^2(\nu\varepsilon) + K'_{i\nu}{}^2(\nu\varepsilon)]. \quad (26)$$

Интегрирование последнего выражения по направлениям рассеянного электрона сводится к подведению его под дифференциал с использованием свойств бесселевых функций [3] и при записи через классический гаунт-фактор g^{cl} дает следующий результат:

$$d\sigma^{cl}(\omega) = g^{cl}(\nu) d\sigma^{Kr}, \quad (27)$$

$$g^{cl}(\nu) = -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \nu e^{\pi\nu} K_{i\nu}(\nu) K'_{i\nu}(\nu).$$

Общий знак минус в этом выражении компенсирует отрицательную величину произведения $K_{i\nu}(\nu)K'_{i\nu}(\nu)$.

4. АСИМПТОТИКА АМПЛИТУДЫ РАДИАЦИОННОГО ПЕРЕХОДА В КУЛОНОВСКОМ КОНТИНУУМЕ В КЛАССИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Переход к пределу $\hbar \rightarrow 0$ в квантовомеханических формулах для амплитуды ТИ означает выполнение следующих условий для параметров a и $\tilde{\omega}$ в (9) и (16):

$$a = \frac{Ze^2}{\hbar v} \gg 1, \quad \tilde{\omega} = \frac{\hbar\omega}{mv^2/2} \ll 1, \quad (28)$$

в то время как параметр

$$\nu = \frac{1}{2}a\tilde{\omega} = \frac{Ze^2\omega}{mv^3}$$

остаётся конечным. Заметим для дальнейших вычислений, что разность $\xi = a' - a$ имеет при $\hbar \rightarrow 0$ следующее разложение:

$$\begin{aligned} \xi &= \nu \left(1 + \frac{3\nu}{2a} \right) + O(\hbar^2) = \\ &= \nu \left(1 + \frac{3\hbar\omega}{2mv^2} \right) + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (29)$$

Будем искать асимптотику \mathbf{M} , используя представление амплитуды (6) с $Q_{1,2}$ из (15). Очевидно, основная трудность состоит в разложении гипергеометрических функций $F(2 - ia, 1 - ia', 2; z)$ и $F(1 - ia, 2 - ia', 2; z)$ в $Q_{1,2}$ в двух порядках по \hbar . Это разложение дается формулой (57) Приложения. Упрощая также гамма-функции в (15) по формуле Стирлинга, получим асимптотику амплитуды

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &\stackrel{as}{=} e^{i\gamma} \mathcal{A} x \times \\ &\times \left\{ \left[K_{1+i\xi}(x) + i \frac{x}{2\sqrt{aa'}} K'_{1+i\xi}(x) \right] \mathbf{n} - \right. \\ &\left. - \left[K_{1-i\xi}(x) + i \frac{x}{2\sqrt{aa'}} K'_{1-i\xi}(x) \right] \mathbf{n}' \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$x = \varepsilon |\xi|, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \pi Z e^2 m \hbar^2 \times \\ &\times \exp \left[\frac{\pi}{2} (a' - a) \text{sign}(p - p') \right] \frac{\varepsilon^2}{pp'(p - p')}, \end{aligned} \quad (32)$$

а фазовый множитель имеет вид

$$\begin{aligned} e^{i\gamma} &= -i \exp \left(\frac{2i}{3\sqrt{aa'}} - \frac{i\sqrt{aa'}}{z} \right) \left(\frac{a}{e} \right)^{-ia} \left(\frac{a'}{e} \right)^{-ia'} \times \\ &\times (-z)^{(ia+ia')/2} \left| \frac{p-p'}{p+p'} \right|^{ia+ia'}. \end{aligned} \quad (33)$$

Укажем, что выражение (30), как и аналогичные асимптотики ниже, записано с превышением точности. Такая запись более компактна и позволяет явно сохранить симметрию формул относительно a и a' (или p и p'); явное разложение по \hbar мы выполним лишь в окончательном выражении (39) для $d\sigma(\omega)$.

С помощью рекуррентных соотношений для функций Макдональда [25] можно привести асимптотику (30) к другой форме, которую удобно использовать для расчета сечений:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &\stackrel{as}{=} i e^{-i/2\sqrt{aa'}} e^{i\gamma} \mathcal{A} \xi \times \\ &\times \left\{ \left[K_{i\xi}(x) + i \frac{x}{2\sqrt{aa'}} K'_{i\xi}(x) \right] (\mathbf{n} + \mathbf{n}') + \right. \\ &\left. + \left[i \text{sign}(\xi) \varepsilon K'_{i\xi}(x) + \frac{\xi(1-\varepsilon^2)}{2\sqrt{aa'}} K_{i\xi}(x) \right] (\mathbf{n} - \mathbf{n}') \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Обратим внимание на очевидное соответствие асимптотики (34) классическому фурье-образу скорости в форме (24) и асимптотики (30) фурье-образу (25).

Асимптотические формулы (30), (34) справедливы как для ТИ, так и для тормозного поглощения. Далее мы будем рассматривать процесс ТИ и опустим знаки модуля, учитывая, что $p > p'$. Заметим также, что, используя асимптотику (57), легко убедиться, что в формуле (8) главные по \hbar члены при $\hbar \rightarrow 0$ компенсируют друг друга. При использовании же симметричного представления (6), (15), как мы видели в этом разделе, такой компенсации не возникает.

5. КВАНТОВАЯ ПОПРАВКА К КЛАССИЧЕСКИМ СЕЧЕНИЯМ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ $d\sigma_{\text{екр}'}^{cl}(\omega)$, $d\sigma_{\text{р}'}^{cl}(\omega)$ И $d\sigma^{cl}(\omega)$

Найдем асимптотическое выражение для трижды дифференциального сечения

$$\frac{d\sigma_{\text{екр}'}(\omega)}{d\omega d\Omega_{\text{р}'} d\Omega_{\text{к}}},$$

подставляя амплитуду (34) в общее выражение (1). В результате получим четыре слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение инвариантного (не зависящего от поляризации) параметра на поляризационно-угловой коэффициент:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{екр}'}^{app}(\omega)}{d\omega d\Omega_{\text{р}'} d\Omega_{\text{к}}} &= A_1 |(\mathbf{e}^*, \mathbf{n} + \mathbf{n}')|^2 + \\ &+ A_2 |(\mathbf{e}^*, \mathbf{n} - \mathbf{n}')|^2 + A_3 \text{Re}\{(\mathbf{e}^*, \mathbf{n} + \mathbf{n}')(\mathbf{e}, \mathbf{n} - \mathbf{n}')\} + \\ &+ A_4 \text{Im}\{(\mathbf{e}^*, \mathbf{n} + \mathbf{n}')(\mathbf{e}, \mathbf{n} - \mathbf{n}')\}, \end{aligned} \quad (35)$$

где инвариантные параметры A_{1-4} даются выражениями

$$\begin{aligned} A_1 &= BK_{i\xi}^2(\varepsilon\xi), \quad A_2 = B\varepsilon^2 K_{i\xi}'^2(\varepsilon\xi), \\ A_3 &= B\frac{\xi}{\sqrt{aa'}}[(1 - \varepsilon^2)K_{i\xi}^2(\varepsilon\xi) + \varepsilon^2 K_{i\xi}'^2(\varepsilon\xi)], \\ A_4 &= -2B\varepsilon K_{i\xi}(\varepsilon\xi)K_{i\xi}'(\varepsilon\xi), \\ B &= \frac{Z^2 e^6}{16\pi^2 \hbar c^3} \frac{\xi^2}{\omega p^2} e^{\pi\xi\varepsilon^4}. \end{aligned} \quad (36)$$

Обратим внимание, что A_3 имеет малость порядка \hbar относительно остальных параметров A_i , при этом A_3 — единственный параметр, в который дает вклад поправочное слагаемое $\sim 1/\sqrt{aa'} \sim \hbar$ и который, соответственно, не может быть получен из классических выражений заменой $\nu \rightarrow \xi$. Четвертое слагаемое в (35) меняет знак при замене $\mathbf{e} \rightleftharpoons \mathbf{e}^*$ и, следовательно, описывает эффект циркулярного дихроизма в ТИ, т. е. различие в сечениях ТИ с излучением фотонов с противоположными спиральностями (или знаками степени циркулярной поляризации) при прочих равных условиях [23].

Суммируя сечение (35) по поляризациям и интегрируя по направлениям испускания фотона согласно (3), получаем дифференциальное по частоте и направлениям рассеянных электронов сечение

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\mathbf{p}'}^{app}(\omega)}{d\omega d\Omega_{\mathbf{p}'}} &= \frac{2Z^2 e^6}{3\pi\hbar c^3} \frac{\xi^2}{\omega p^2} e^{\pi\xi\varepsilon^4} \times \\ &\times [(1 - \varepsilon^{-2})K_{i\xi}^2(\xi\varepsilon) + K_{i\xi}'^2(\xi\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (37)$$

Этот результат отличается от (26) только заменой ν на ξ (заметим, что трижды дифференциальное сечение $d\sigma_{\mathbf{e}\mathbf{kp}}^{app}(\omega)$ нельзя получить из $d\sigma_{\mathbf{e}\mathbf{kp}}^{cl}(\omega)$ такой заменой), поэтому дифференциальное по частоте сечение $d\sigma(\omega)$ сразу выписывается по аналогии с (27):

$$d\sigma^{app}(\omega) = g^{cl}(\xi) d\sigma^{Kr}. \quad (38)$$

Отметим, что результат (38) можно получить и непосредственно из точного квантового выражения (11) для $d\sigma(\omega)$: вычисляя квадрат модуля $F(ia, ia', 1; z_0)$ в (11) согласно формуле (57), снова приходим к (38).

Приближенные выражения (37), (38) впервые были получены в 1924 г. (т. е. еще до создания квантовой механики) Вентцелем [14], который заменил в классическом выражении (26) параметр ν на параметр ξ , основываясь на принципе соответствия. Такой же результат был получен Биденхарном [6] и Альдером и др. [15]. В работе [6] для амплитуды ТИ (в калибровке ускорения) было записано мультипольное разложение и выполнен переход к пределу $\hbar \rightarrow 0$ при конечном ξ , а в [15] сечение ТИ было рассчитано с использованием квазиклассических

кулоновских волновых функций. Формула (38) получена также в работе [16], в которой авторы исходили из представления (8) для амплитуды и, в силу упоминавшихся выше компенсаций, вынуждены были получить дополнительный (третий) член разложения в формуле (55). Это привело к весьма громоздким промежуточным выражениям, которые удалось привести к окончательному виду (38) лишь компьютерными средствами. Существенно, что точность аппроксимации (38) авторами работ [6, 14–16] установлена не была, в то время как из наших результатов явно следует, что при $\hbar \rightarrow 0$ формулы (37), (38), наряду с классическим пределом, включают точные квантовые поправки порядка \hbar .

Учитывая разложение (29) и разлагая по \hbar формулу Вентцеля (38), получаем в явном виде два члена разложения по \hbar квантовомеханической формулы (11) для сечения кулоновского ТИ в поле притяжения:

$$d\sigma(\omega) \approx d\sigma^{cl}(\omega) + d\sigma^{corr}(\omega). \quad (39)$$

Здесь $d\sigma^{cl}(\omega)$ определяется формулой (27), а поправка имеет вид

$$d\sigma^{corr}(\omega) = d\sigma^{Kr} \frac{3\nu^2}{2a} \frac{d}{d\nu} g^{cl}(\nu). \quad (40)$$

Поскольку $\nu^2/a \sim \hbar$, поправка $d\sigma^{corr}$ имеет малость порядка \hbar по отношению к классическому сечению $d\sigma^{cl}$.

Для иллюстрации согласия квантового и классического результатов на рис. 1 приведены квантовый g , классический g^{cl} и уточненный классический $g^{cl} + g^{corr}$ гаунт-факторы как функции зоммерфельдовского параметра a , а на рис. 2 эти же величины приведены как функции квантовой частоты $\tilde{\omega}$. Как видно из графиков, квантовая поправка существенно улучшает классическое сечение, а согласие классического сечения с квантовым вполне удовлетворительно уже при $a = 2$ и лишь незначительно ухудшается при увеличении частоты до ее максимального значения $\tilde{\omega} = 1$. Тем самым на частном (но весьма важном) примере кулоновского ТИ подтверждается общий вывод работ [26, 27] о том, что для классичности спектра ТИ в центральном поле притяжения достаточно только квазиклассичности (выполнения условия $a \gg 1$) движения электрона.

Рассмотрим теперь ТИ в поле отталкивания. Учитывая свойство симметрии функции Макдональда $K_{-i\nu}(\nu) = K_{i\nu}(\nu)$, легко показать, что в этом случае вместо (38) будем иметь

$$d\sigma_{rep}^{app} = e^{-2\pi\xi} g(\xi) d\sigma^{Kr}. \quad (41)$$

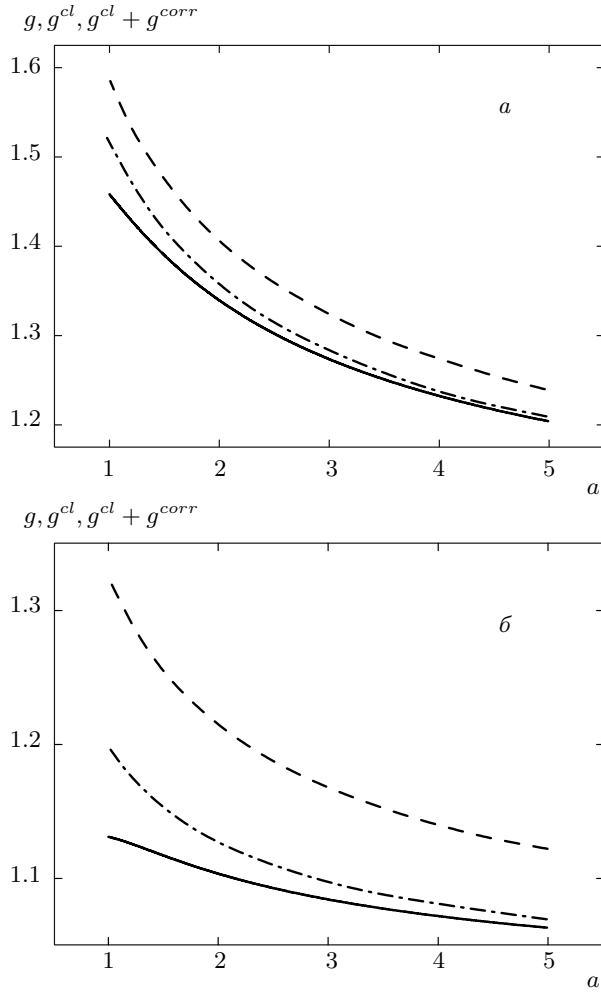


Рис. 1. Квантовый гаунт-фактор g (сплошная линия), классический гаунт-фактор g^{cl} (штриховая линия) и классический гаунт-фактор с квантовой поправкой $g^{cl} + g^{corr}$ (штрихпунктирная линия) для ТИ в кулоновском поле притяжения как функции зоммерфельдовского параметра $a = Ze^2/\hbar v$ при двух значениях квантовой частоты $\tilde{\omega} = \frac{\hbar\omega}{mv^2/2}$:

$$\tilde{\omega} = 0.3 \text{ (a)}, 0.9 \text{ (б)}$$

Соответственно, классический гаунт-фактор в поле отталкивания есть [3]

$$g_{rep}^{cl} = e^{-2\pi\nu} g^{cl}(\nu), \tag{42}$$

а квантовая поправка к нему имеет вид

$$g_{rep}^{corr} = \frac{3\nu^2}{2a} \frac{d}{d\nu} [e^{-2\pi\nu} g^{cl}(\nu)]. \tag{43}$$

Наличие множителя $e^{-2\pi\nu}$ под знаком производной приводит к появлению в поправке слагаемого, имеющего относительную точность $3\nu^2/a \sim \pi a \tilde{\omega}^2$. Это

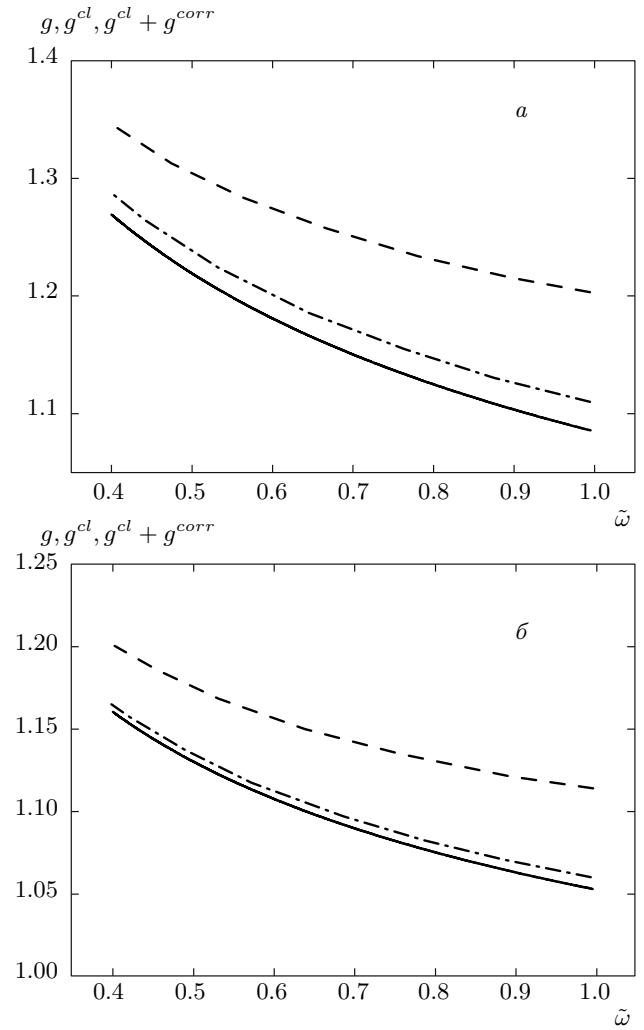


Рис. 2. Те же величины, что и на рис. 1, но как функции квантовой частоты $\tilde{\omega} = \frac{\hbar\omega}{mv^2/2}$ при двух значениях зоммерфельдовского параметра a : $a = 2$ (a), 5 (б)

слагаемое существенно ограничивает область применимости классических результатов. В частности, в отличие от ТИ в поле притяжения, классическое сечение ТИ в поле отталкивания не согласуется с квантовым при $\tilde{\omega} \sim 1, a \gg 1$ (т.е. вне области (28)). Физическая причина такой ситуации (на полуклассическом языке) объясняется тем, что в поле притяжения высокочастотный спектр формируется излучением электронов, которые движутся по сильно искривленным траекториям вблизи центра. Максимальная кинетическая энергия на таких траекториях существенно превышает полную энергию, поэтому излучение кванта $\hbar\omega \approx mv^2/2$ слабо искажает траекторию [1, 27]. В поле отталкивания нет траек-

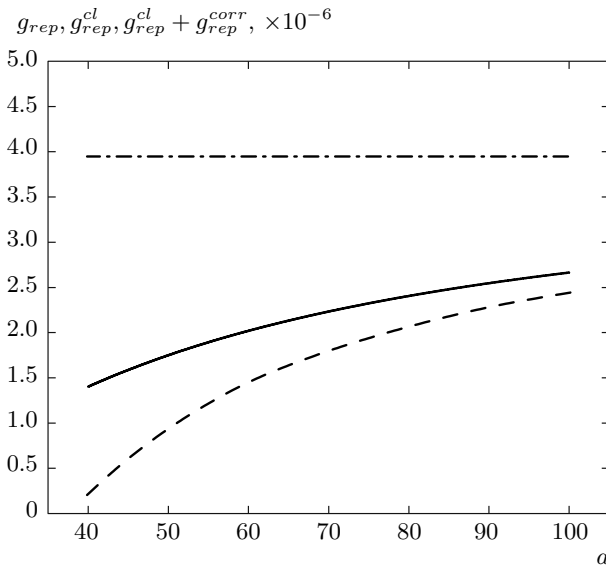


Рис. 3. Квантовый гаунт-фактор g_{rep} (сплошная линия), классический гаунт-фактор g_{rep}^{cl} (штриховая линия) и классический гаунт-фактор с квантовой поправкой $g_{rep}^{cl} + g_{rep}^{corr}$ (штрихпунктирная линия) для ТИ в кулоновском поле отталкивания как функции зоммерфельдовского параметра $a = Ze^2/\hbar v$ при $\nu = Ze^2\omega/mv^3 = 2$

торий, проходящих вблизи центра, поэтому условие $\hbar\omega \ll mv^2/2$ является необходимым. При выполнении неравенств (28) и $\pi a\tilde{\omega}^2 \ll 1$ имеется удовлетворительное (но при тех же a и $\tilde{\omega}$ существенно худшее, чем в случае притяжения) согласие классического g_{rep}^{cl} и квантового g_{rep} гаунт-факторов для поля отталкивания, а учет поправки g_{rep}^{corr} заметно улучшает результат, см. рис. 3.

6. КВАНТОВАЯ ПОПРАВКА ПРИ ВЫСОКИХ И НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

Из-за наличия производной по ν квантовая поправка (40) имеет достаточно сложную структуру, поэтому представляют интерес предельные области высоких ($\nu \gg 1$) и низких ($\nu \ll 1$) частот, в которых она упрощается до элементарного вида. Для этого проще всего исходить из формулы (38), поскольку она лишь заменой ν на ξ отличается от классического сечения (27), предельные формы которого известны.

6.1. Высокие частоты: $\nu \gg 1$

Поскольку $\nu = \lim \xi$ при $\hbar \rightarrow 0$, при больших значениях ν большими будут и ξ . Запишем три члена асимптотики вентцельского сечения (38) при $\xi \gg 1$, воспользовавшись известным [7] разложением классического сечения (27):

$$d\sigma(\omega) = d\sigma^{Kr} \left[1 + \frac{\sqrt{3}\Gamma^2(1/3)}{10\pi 6^{1/3}\xi^{2/3}} + O(\xi^{-4/3}) \right]. \quad (44)$$

Подставим сюда (29) и выделим главный при $\hbar \rightarrow 0$ и $\nu \rightarrow \infty$ член. Очевидно, что второй член в квадратных скобках имеет величину порядка $\hbar\nu^{-2/3}$, а третий — порядка $\hbar\nu^{-4/3}$ и его, как и последующие члены разложения, следует опустить. В результате для сечения ТИ в высокочастотной области получаем

$$d\sigma_{hf}(\omega) = d\sigma_{hf}^{cl} + d\sigma_{hf}^{corr} = d\sigma^{Kr} \times \left[1 + \frac{\Gamma^2(1/3)\sqrt{3}}{10\pi 6^{1/3}\nu^{2/3}} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{mv^2} \right) \right]. \quad (45)$$

Как видно из последней формулы, крамерсовское сечение (13) является высокочастотным пределом классического сечения (27). Поправочный член в (45) складывается из классической и квантовой поправок к крамерсовскому сечению (13). По виду выражения (45) можно ожидать, что оно справедливо при $\hbar\omega \lesssim mv^2$ (т.е. формально за пределами области (28), в которой оно было получено), поскольку квантовая поправка при этом остается малой по сравнению с крамерсовским сечением. Действительно, выражение (45) в точности совпадает с результатом работы [10], в которой методами контурного интегрирования найдены два члена разложения формулы Зоммерфельда (11) по параметру $a \ll 1$, при этом отношение $\hbar\omega/mv^2$ считалось конечным.

6.2. Низкие частоты: $\nu \ll 1$

Поскольку величины ν и ξ стремятся к нулю одновременно, удобно снова воспользоваться формулой Вентцеля (38), записав ее низкочастотное разложение:

$$d\sigma(\omega) = d\sigma^{Kr}(\omega) \frac{\sqrt{3}}{\pi} \times \left[\ln \frac{2}{\gamma\xi} (1 + \pi\xi) + O(\xi^2 \ln^3(\xi^{-1})) \right], \quad (46)$$

где $\ln \gamma = -\psi(1) = 0.57721 \dots$ — постоянная Эйлера. Обратим внимание, что это разложение не совпадает с аналогичным результатом (1.23) в [7]: в последнем пропущен член с $\pi\xi$, что подтверждается численной проверкой. Подставляя в (46) разложение (29) для ξ , разделим в низкочастотном сечении $d\sigma_{if}$ классический предел $d\sigma_{if}^{cl}$ и низкочастотную квантовую поправку $d\sigma_{if}^{corr}$:

$$d\sigma_{if} = d\sigma_{if}^{cl} + d\sigma_{if}^{corr}, \quad (47)$$

где

$$d\sigma_{if}^{cl} = d\sigma^{Kr} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma\nu}, \quad (48)$$

$$d\sigma_{if}^{corr} = -d\sigma^{Kr} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{3\nu}{2a} = -d\sigma^{Kr} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{3\hbar\omega}{2mv^2}. \quad (49)$$

Низкочастотная квантовая поправка (49) тоже не совпадает с аналогичной поправкой в [7] (формула (1.22)), где она получена из известной формулы Эльверта [28]. Но наши результаты (46), (49) совпадают с аналогичными в [13], формула (10).

Отметим также, что асимптотики $d\sigma_{hf}^{corr}(\omega)$ и $d\sigma_{if}^{corr}(\omega)$ квантовой поправки при высоких и низких частотах могут быть получены и непосредственно из явного выражения (40) для квантовой поправки, однако это требует значительно более сложных вычислений, которые мы здесь не приводим.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представив амплитуду однофотонного дипольного перехода в кулоновском континууме в специальном симметричном виде и вычислив два члена асимптотики гипергеометрических функций вида

$$F(m - ia, m' - ia', 1 + n; aa'/\lambda)$$

(где m, m', n — неотрицательные целые числа) при $a, a' \rightarrow \infty$, $\lambda \sim O(1)$, мы нашли компактное приближенное выражение для амплитуды кулоновского ТИ, которое справедливо в двух порядках по $\hbar \rightarrow 0$ при произвольном значении частоты тормозного фотона (формулы (34) и (30)) и полностью закрывает вопрос о расчете главной квантовой поправки к классической асимптотике амплитуды однофотонного перехода в непрерывном спектре для кулоновского потенциала притяжения и отталкивания. Это выражение определяет, очевидно, не только классический предел и квантовую поправку для трижды дифференциального сечения ТИ и спектраль-

ного эффективного излучения (см. разд. 5), но и любые характеристики кулоновских однофотонных радиационных процессов (как спонтанного ТИ, так и вынужденных процессов) в квазиклассической области: параметры углового распределения ТИ, компоненты поляризационного тензора, величину эффекта Маркуза и т. п.

Один из основных результатов настоящей работы состоит в вычислении квантовой поправки порядка \hbar к классическому спектру кулоновского ТИ (27), которая выглядит весьма компактно в записи через классический гаунт-фактор — см. формулы (40) для поля притяжения и (43) для поля отталкивания. В предельных случаях высоких и низких частот ТИ квантовая поправка переходит в известные элементарные выражения (45) и (49), а в промежуточной области она была исследована численно. Выполненный анализ подтверждает известный результат [27] о том, что в случае поля притяжения малость квантовой поправки (необходимая для применимости классических результатов) обусловлена малостью только одного параметра $a^{-1} = \hbar\nu/Ze^2$, обратного квантовому параметру Зоммерфельда, тогда как второй независимый параметр

$$\tilde{\omega} = \frac{\hbar\omega}{mv^2/2},$$

в который входит постоянная Планка, может принимать любые допустимые значения $0 < \tilde{\omega} \leq 1$, при этом относительная величина поправки возрастает с увеличением $\tilde{\omega}$. Например, при $a = 2$ поправка составляет приблизительно 1.5% для $\tilde{\omega} = 0.1$ и около 8% на коротковолновой границе $\tilde{\omega} = 1$; при $a = 10$ поправка составляет примерно 1% для $\tilde{\omega} = 0.1$ и приблизительно 3% для $\tilde{\omega} = 1$. Начиная с $a = 2$, отличие классического сечения с квантовой поправкой от точного квантового сечения (11) является малым даже на коротковолновой границе спектра ТИ: оно составляет примерно 2.2% для $a = 2$ и около 0.25% для $a = 10$. С такой же точностью приближает квантовое сечение (11) (формулу Зоммерфельда) и полуфеноменологическая формула Вентцеля (38). В отличие от поля притяжения, для применимости классических результатов в кулоновском поле отталкивания необходима малость обоих квантовых параметров — a^{-1} и $\tilde{\omega}$, причем в этом случае квантовая поправка быстро растет с увеличением «квантовой» частоты $\tilde{\omega}$. Так, даже при $a = 10$ квантовая поправка составляет приблизительно 6.5% для $\tilde{\omega} = 0.05$ и достигает 25% уже при $\tilde{\omega} = 0.1$. Заметим, что формула Вентцеля в поле отталкивания приближает формулу Зоммерфельда

так же хорошо, как и в поле притяжения, так как точно учитывает экспоненциальный фактор в формуле (43), содержащий «классическую» частоту ν . Физические причины различия применимости классической теории ТИ в поле отталкивания и поле притяжения обсуждаются в разд. 5.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-02-00420) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания ВУЗам в сфере научной деятельности на 2014–2016 г.г. (проект № 1019).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Асимптотика функции ${}_2F_1$ с большими верхними параметрами и большим аргументом

Амплитуда и сечения кулоновского ТИ выражаются через гипергеометрические функции вида

$$F(m - ia, m' - ia', 1 + n; z). \tag{50}$$

Здесь m, m', n — неотрицательные целые числа, параметры a, a' задаются формулами (9), а аргумент z — формулой (10). При $\hbar \rightarrow 0$

$$a, a' \sim \hbar^{-1}, \quad z \sim \hbar^{-2}, \tag{51}$$

так что $aa'/z \approx \text{const}$ при $\hbar \rightarrow 0$. Разность $a' - a \equiv \xi$ также остается конечной при $\hbar \rightarrow 0$. Для исследования функции (50) перейдем к гипергеометрическим функциям с обратным аргументом¹⁾ [29]:

$$F(m - ia, m' - ia', 1 + n; z) = \Gamma(1 + n)(-z)^{-(m+m'-ia-ia')/2}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2), \tag{52}$$

где

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\Gamma(m' - m - ia' + ia)}{\Gamma(m' - ia')\Gamma(1 + n - m + ia)} \times (-z)^{-(m-m'+ia'-ia)/2} \times F(m - ia, m - n - ia, 1 + m - m' - ia + ia'; z^{-1}) \tag{53}$$

и

$$\mathcal{F}_2(m, m', a, a') = \mathcal{F}_1(m', m, a', a). \tag{54}$$

Два члена разложения ${}_2F_1$ по обратным степеням верхних параметров, которых нам здесь достаточно, получены²⁾ в работе [9]:

$$F\left(a, b, c; \frac{1}{z}\right) = \Gamma(c) \left(\frac{z}{ab}\right)^{(c-1)/2} \times \left[I_{c-1}\left(2\sqrt{\frac{ab}{z}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{ab}{z} \times I_{c+1}\left(2\sqrt{\frac{ab}{z}}\right) + O(a^{-2}, b^{-2}) \right], \tag{55}$$

где $I_\alpha(x)$ — модифицированная функция Бесселя [25]. Основная идея дальнейших преобразований состоит в приведении всех функций Бесселя, возникающих в $\mathcal{F}_{1,2}$, к симметричному по a, a' аргументу

$$x = 2\sqrt{\frac{aa'}{-z}}, \tag{56}$$

причем вычисления должны выполняться так, чтобы формулы были справедливы в двух низших порядках по \hbar . При этом в функции \mathcal{F}_1 возникают модифицированные функции Бесселя $I_{m-m'+ia'-ia}(x)$, $I'_{m-m'+ia'-ia}(x)$ и $I_{2+m-m'+ia'-ia}(x)$, где

$$I'_\alpha(x) = \frac{d}{dx}I_\alpha(x).$$

С помощью рекуррентных соотношений для функций Бесселя удается устранить $I_{2+m-m'+ia'-ia}(x)$ и представить \mathcal{F}_1 в виде комбинации $I_{m-m'+ia'-ia}(x)$ и $I'_{m-m'+ia'-ia}(x)$. Упрощая коэффициенты при этих функциях с помощью достаточно очевидных, но громоздких преобразований, и записывая аналогичное выражение для \mathcal{F}_2 по формуле (54), находим окончательное асимптотическое разложение:

$$F(m - ia, m' - ia', 1 + n; z) \stackrel{as}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} i^{m+m'+n+1} \times \Gamma(1 + n)(-z)^{(ia+ia'-m-m')/2} (aa')^{-n/2} \times \exp\left(\frac{\pi}{2}(a + a')\right) \times \exp\left(\frac{i\sqrt{aa'}}{-z} - \frac{i}{2\sqrt{aa'}}n(m + m' - n - 1)\right) \times \left[K_{m-m'+ia'-ia}(x) + \frac{i}{\sqrt{-z}}(m + m' - n - 1)K'_{m-m'+ia'-ia}(x) \right], \tag{57}$$

¹⁾ Альтернативный способ расчета асимптотики (50) использован в работе [30].

²⁾ В формуле (32) из [9] имеется опечатка: в левой части следует заменить x на x^{-1} .

где

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)] \quad (58)$$

— функция Макдональда [25]. Напомним, что асимптотическая формула (57) справедлива в двух низших порядках по \hbar при $\hbar \rightarrow 0$ (поведение a, a', z при $\hbar \rightarrow 0$ указано в (51)).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Коган, УФН **170**, 1351 (2000).
2. Н. А. Крамерс, Phil. Mag. **46**, 836 (1923).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (2003).
4. А. Sommerfeld, Ann. Physik **11**, 257 (1931).
5. А. Зоммерфельд, *Строение атома и спектры*, т. 2, Гостехиздат, Москва (1956).
6. L. C. Biedenharn, Phys. Rev. **102**, 262 (1956).
7. В. И. Гервидс, В. И. Коган, Препринт ИАЭ № 2720 (1976).
8. В. И. Гервидс, В. И. Коган, *Тормозное излучение электронов в статическом потенциале*, Обзор, ЦНИИАтоминформ, Москва (1988).
9. S. D. Drell and K. Huang, Phys. Rev. **99**, 686 (1955).
10. В. В. Бабиков, *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций*, под ред. М. А. Леонтовича, Изд. АН СССР, Москва (1958), т. 2, с. 226.
11. R. J. Gould, Amer. J. Phys. **38**, 189 (1970).
12. V. P. Krainov, J. Phys. B **33**, 1585 (2000).
13. В. П. Крайнов, ЖЭТФ **119**, 1109 (2001).
14. G. Wentzel, Z. Physik **27**, 257 (1924).
15. K. Alder, A. Bohr, T. Huus et al., Rev. Mod. Phys. **28**, 432 (1956).
16. M. D. Thorsley and M. C. Chidichimo, J. Math. Phys. **42**, 1921 (2001).
17. D. Marcuse, Bell Syst. Techn. J. **41**, 1557 (1962).
18. M. V. Fedorov, *Atomic and Free Electrons in a Strong Laser Field*, World Sci., Singapore (1997).
19. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
20. M. Gavrilu, in *Collisions Theory for Atoms and Molecules*, ed. by F. A. Gianturco, Plenum Press, New York, London (1989), p. 139.
21. N. L. Manakov, S. I. Marmo, and V. V. Volovich, Phys. Lett. A **27**, 42 (1995).
22. Н. Л. Манаков, С. И. Мармо, А. Г. Файнштейн, ЖЭТФ **108**, 1569 (1995).
23. А. А. Крыловский, N. L. Manakov, S. I. Marmo, and A. F. Starace, Phys. Rev. A **72**, 035401 (2005).
24. В. Гайтлер, *Квантовая теория излучения*, Изд-во иностр. лит., Москва (1956).
25. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, Москва (1974).
26. В. И. Коган, А. Б. Кукушкин, ЖЭТФ **87**, 1164 (1984).
27. V. I. Kogan, A. B. Kukushkin, and V. S. Lisitsa, Phys. Rep. **213**, 1 (1992).
28. G. Elwert, Ann. Phys. **34**, 178 (1939).
29. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, Москва (1973).
30. Д. В. Гальцов, Ю. В. Грац, ТМФ **28**, 201 (1976).