

СПИН-СПИНОВАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ДЛИНА В ДВУМЕРНОМ ФРУСТРИРОВАННОМ МАГНЕТИКЕ И ЕЕ СВЯЗЬ С ДОПИРОВАНИЕМ

А. В. Михеенков^{a,b*}, В. Э. Валиулин^b, А. В. Шварцберг^b, А. Ф. Барабанов^a

^a Институт физики высоких давлений Российской академии наук
142190, Троицк, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

В сферически-симметричном самосогласованном подходе для двухвременных запаздывающих спин-спиновых функций Грина рассматривается J_1 - J_2 -модель Гейзенберга для спина $S = 1/2$ на двумерной квадратной решетке. Получен спектр спиновых возбуждений, $\omega(\mathbf{q})$, и спиновые щели в симметричных точках для всего J_1 - J_2 -круга, т. е. для любого φ , $J_1 = \cos \varphi$, $J_2 = \sin \varphi$. Во всем диапазоне параметров вычислен структурный фактор $c_{\mathbf{q}}$ и корреляционная длина ξ при конечной температуре. Продемонстрировано коренное различие поведения системы в верхней, фрустрированной ($0 \leq \varphi \leq \pi$), и нижней, нефрустрированной ($\pi \leq \varphi \leq 2\pi$), областях круга. В последней содержится единственный на фазовой диаграмме переход первого рода. Для слабофрустрированного антиферромагнетика ($J_1 > J_2 > 0$) проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными по зависимости ξ от температуры и допирования. Предложен закон соответствия между фрустрацией в спиновой модели и степенью допирования антиферромагнетика дырочными носителями.

DOI: 10.7868/S0044451015090096

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная J_1 - J_2 -модель Гейзенберга для спина $S = 1/2$ широко используется для изучения эффектов фрустрации в низкоразмерных системах, где они выражены наиболее ярко. Кроме того, это базовая модель при исследовании квантового фазового перехода. Наконец, в умеренно допированных магнетиках, наиболее изученными из которых являются ВТСП-купраты, модель адекватно описывает спиновую подсистему.

До недавнего времени абсолютное большинство экспериментально исследованных соединений, отвечающих этой модели, соответствовали антиферромагнитным (АФМ) знакам как ближайшего, так и следующего обменов, $J_1 > 0$, $J_2 > 0$ [1–4].

Однако в последние годы класс описываемых двумерной J_1 - J_2 -моделью соединений существенно расширился — были изучены около десятка

квазидвумерных соединений с ферромагнитным (ФМ) ближайшим обменом $J_1 < 0$ и фрустрирующим вторым АФМ-обменом $J_2 > 0$. Это, например, $\text{Pb}_2\text{VO}(\text{PO}_4)_2$ [5–8], $(\text{CuCl})\text{LaNb}_2\text{O}_7$ [9], $\text{SrZnVO}(\text{PO}_4)_2$ [8, 10, 11], $\text{BaCdVO}(\text{PO}_4)_2$ [7, 10, 12]. Считается, что в перечисленных соединениях фрустрация настолько сильна, что может разрушить дальний ФМ-порядок основного состояния. Исследуются также соединения, например K_2CuF_4 , Cs_2CuF_4 , Cs_2AgF_4 , $\text{La}_2\text{BaCuO}_5$, и Rb_2CrCl_4 [13–16], со слабым фрустрирующим АФМ-обменом.

На рис. 1 качественно представлена предполагаемая фазовая диаграмма модели для спина $S = 1/2$ и положения на ней некоторых из упомянутых квазидвумерных соединений (данные из работ [5, 7, 9–12, 17–19]). Здесь и далее J_1 - J_2 -круг определен соотношениями $J_1 = \cos \varphi$, $J_2 = \sin \varphi$.

Гамильтониан J_1 - J_2 -модели Гейзенберга для спина $S = 1/2$ на двумерной квадратной решетке имеет вид

*E-mail: mikheen@bk.ru

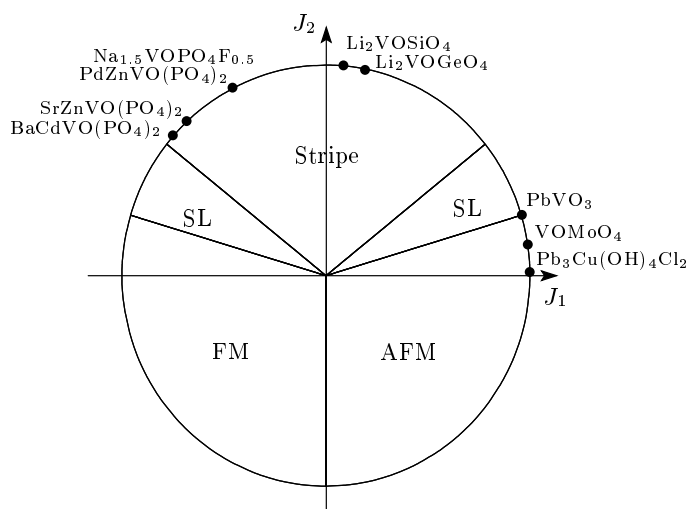


Рис. 1. Схематическая фазовая диаграмма J_1 - J_2 -модели Гейзенберга на двумерной квадратной решетке. Точки отвечают соотношению обменов J_1 и J_2 для некоторых квазидвумерных соединений. Границы областей неупорядоченной фазы SL (spin liquid) показаны условно

$$H = \frac{J_1}{2} \sum_{i,g} \hat{S}_i \cdot \hat{S}_{i+g} + \frac{J_2}{2} \sum_{i,d} \hat{S}_i \cdot \hat{S}_{i+d}, \quad (1)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{g} и \mathbf{d} — соответственно векторы узла решетки, первых и вторых ближайших соседей (сторона и диагональ квадрата).

Значительная часть теоретических работ также сосредоточена в первой четверти круга $J_1 > 0$, $J_2 > 0$ (см., например, обзоры [20, 21]). Общепринятая картина состоит в следующем. При $T = 0$ с ростом φ в системе происходят два последовательных фазовых перехода — из АФМ-фазы в неупорядоченную и далее из неупорядоченной фазы в страйп-фазу. Вопрос о структуре и границах неупорядоченной фазы, а также о характере обоих переходов остается дискуссионным (см., например, обсуждение и ссылки в недавней работе [22]). При $T > 0$ в строго двумерной модели в силу теоремы Мермина–Вагнера дальний порядок невозможен. В реальных соединениях квазидвумерность может приводить к нарушению этого жесткого условия.

В думерной модели в рамках различных подходов исследовался также и чисто ФМ-случай $\varphi = \pi$ ($J_1 = -1$, $J_2 = 0$) [23–35].

Наконец, появление экспериментов, относящихся ко второй четверти круга, $\pi/2 < \varphi < \pi$, стимулировало и теоретические работы в этой области [36–47]. Здесь также предполагается существование неупорядоченной фазы между ФМ- и страйп-фазами.

Таким образом, в верхней половине J_1 - J_2 -круга имеется несколько экспериментальных точек, а также ряд аналитических и численных работ, выполненных в рамках различных подходов в локальных областях параметров. Представляется целесообразным описание общей картины в рамках единого подхода. При этом естественно включить и нижнюю половину круга, $\pi < \varphi < 2\pi$.

В настоящей работе двумерная $S = 1/2$ J_1 - J_2 -модель Гейзенберга изучается во всей области параметров в рамках сферически-симметричного самосогласованного подхода (СССП) для двухвременных запаздывающих спиновых функций Грина (rotationally invariant second-order Green-function method, RGM). Подход автоматически сохраняет $SU(2)$ -симметрию гамильтониана (т.е. основное состояние, а также спин-спиновые корреляционные функции при $T \neq 0$ остаются сферически-симметричными в спиновом пространстве), трансляционную симметрию и спиновый констрейнт на узле. При ненулевой температуре в СССП также автоматически соблюдается теорема Мермина–Вагнера.

Ниже мы обсуждаем главным образом две важнейших характеристики системы — спектр спиновых возбуждений и структуру спинового упорядочения, в том числе корреляционную длину.

Дальнейшая часть работы построена следующим образом. В разд. 2 дано изложение использованного метода. В разд. 3 кратко описано основное состояние модели (которое может как обладать дальним порядком, так и быть неупорядоченным) при $T = 0$ и различных значениях обменных параметров. В разд. 4 рассматриваются ненулевые температуры, когда дальний порядок в силу двумерности невозможен. Исследована эволюция структуры ближнего порядка и соответствующей ему корреляционной длины во всем диапазоне обменных параметров. В этом разделе мы не преследовали цели детального сравнения с экспериментальными данными (тем более, что их пока недостаточно), а представили общую картину изменения характеристик спинового упорядочения. Оговоримся сразу, что нижняя половина J_1 - J_2 -круга ($\varphi > \pi$) экспериментально пока не реализована. Однако она представляет существенный модельный интерес, поскольку, во-первых, содержит ряд нетривиальных эффектов, а, во-вторых, дополняет анализ модели до логически замкнутого.

В разд. 5 более детально рассматривается область слабофрустрированного АФМ, $J_1 > J_2 > 0$. Показано, что СССП адекватно воспроизводит корреляционную длину в лантановых ВТСП-купратах при умеренном допировании. Одновременно выяв-

лен закон соответствия между фрустрацией в чисто спиновой модели и допированием в моделях с носителями.

В Заключении сформулированы основные выводы.

2. МЕТОД

Как уже упомянуто, J_1 - J_2 -модель Гейзенберга на плоской квадратной решетке изучается в рамках подхода СССР [31, 32, 45, 48]. Различные варианты подхода широко применяются для исследования низкоразмерных спиновых моделей [44, 49–55]. Коротко, СССР состоит в следующем (детальные вычисления приведены в работах [45, 56]). Вычисляется двухвременная запаздывающая спин-спиновая функция Грина

$$G_{\mathbf{nm}} = \langle S_{\mathbf{n}}^z | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega+i\delta} = -i \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle [S_{\mathbf{n}}^z(t), S_{\mathbf{m}}^z] \rangle. \quad (2)$$

Из-за сферической симметрии отличны от нуля (и равны друг другу) только диагональные по x, y, z функции Грина, а средний спин на узле равен нулю ($G^{zz} = G^{xx} = G^{yy}$, $\langle S_{\mathbf{n}}^{\beta} \rangle = 0$, $\beta = x, y, z$).

Поскольку $\langle [S_{\mathbf{n}}^z, S_{\mathbf{m}}^z] \rangle = 0$ и $[S_{\mathbf{n}}^{\alpha}, S_{\mathbf{m}}^{\beta}] = i\delta_{\mathbf{nm}}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_{\mathbf{n}}^{\gamma}$, для функции Грина $G_{\mathbf{nm}}$ уравнение движения имеет вид

$$\omega G_{\mathbf{nm}} = \langle [S_{\mathbf{n}}^z, S_{\mathbf{m}}^z] \rangle + \langle [S_{\mathbf{n}}^z, \hat{H}] | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega+i\delta} = i \sum_{\mathbf{b}=\mathbf{g},\mathbf{d}} J_{\mathbf{b}} \langle (S_{\mathbf{n}+\mathbf{b}}^x S_{\mathbf{n}}^y - S_{\mathbf{n}+\mathbf{b}}^y S_{\mathbf{n}}^x) | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega+i\delta}, \quad (3)$$

где $J_{\mathbf{g}} = J_1$, $J_{\mathbf{d}} = J_2$.

Замыкание на первом шаге невозможно. Второй шаг дифференцирования дает

$$i\omega \sum_{\mathbf{b}=\mathbf{g},\mathbf{d}} J_{\mathbf{b}} \langle (S_{\mathbf{n}+\mathbf{b}}^x S_{\mathbf{n}}^y - S_{\mathbf{n}+\mathbf{b}}^y S_{\mathbf{n}}^x) | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega+i\delta} = 2 \sum_{\mathbf{b}=\mathbf{g},\mathbf{d}} J_{\mathbf{b}} \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{b}}^z S_{\mathbf{n}}^z \rangle (\delta_{\mathbf{n}+\mathbf{b},\mathbf{m}} - \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}}) - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{b}=\mathbf{g},\mathbf{d}} J_{\mathbf{b}}^2 (G_{\mathbf{n}+\mathbf{b},\mathbf{m}} - G_{\mathbf{nm}}) - \sum_{\substack{\mathbf{b},\mathbf{b}',\beta \neq z, \\ \mathbf{b}+\mathbf{b}' \neq 0}} J_{\mathbf{b}} J_{\mathbf{b}'} \langle [S_{\mathbf{n}+\mathbf{b}}^{\beta} S_{\mathbf{n}-\mathbf{b}'}^z - S_{\mathbf{n}}^{\beta} | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega+i\delta} - \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{b}}^{\beta} S_{\mathbf{n}-\mathbf{b}'}^z | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega+i\delta} + \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{b}}^z S_{\mathbf{n}+\mathbf{b}+\mathbf{b}'}^{\beta} | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega+i\delta} - \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{b}}^{\beta} S_{\mathbf{n}+\mathbf{b}+\mathbf{b}'}^z | S_{\mathbf{m}}^z \rangle_{\omega+i\delta} \rangle. \quad (4)$$

В среднеполевом подходе цепочка уравнений движения для функции Грина замыкается на втором шаге в рамках следующего приближения для трех-узельных членов:

$$S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2}^j S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1}^l S_{\mathbf{n}}^{\gamma} \approx \alpha_{\mathbf{g}} \left(\delta_{jl} \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2}^j S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1}^l \rangle S_{\mathbf{n}}^{\gamma} + \delta_{l\gamma} \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1}^l S_{\mathbf{n}}^{\gamma} \rangle S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2}^j \right) + \alpha_{\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2} \delta_{j\gamma} \langle S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2}^j S_{\mathbf{n}}^{\gamma} \rangle S_{\mathbf{n}+\mathbf{g}_1}^l, \quad (5)$$

где $\alpha_{\mathbf{g}}$ и $\alpha_{\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2}$ — вершинные поправки (возможности выбора вершинных поправок детально обсуждаются в работах [45, 56]). Подчеркнем, что для $S = 1/2$ процедура расщепления для каждого члена однозначна, поскольку в выражении (4) $\beta \neq z$, а в среднем выносятся два спина с $\beta \neq z$.

После фурье-преобразования

$$S_{\mathbf{q}}^z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^z \quad (6)$$

функция Грина $G^{zz}(\omega, \mathbf{q}) = \langle S_{\mathbf{q}}^z | S_{-\mathbf{q}}^z \rangle_{\omega}$ — решение уравнений (3) и (4) — принимает вид

$$G^{zz}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{F_{\mathbf{q}}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2}. \quad (7)$$

Для модели с двумя обходами J_1 - J_2 получаем выражения для числителя функции Грина, $F_{\mathbf{q}}$, и спектра спиновых возбуждений, $\omega_{\mathbf{q}}$:

$$F_{\mathbf{q}} = -8 [J_1 c_g (1 - \gamma_g) + J_2 c_d (1 - \gamma_d)], \quad (8)$$

$$\omega_{\mathbf{q}}^2 = 2[(\gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2) - (\gamma_3 K_3 + \gamma_4 K_4) - (\gamma_5 K_5 + \gamma_6 K_6)], \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= J_1 J_2 K_{gd} + 12 J_1^2 \tilde{c}_g + 1 + K_{gg}, \\ K_2 &= J_1 J_2 K_{gd} + 12 J_2^2 \tilde{c}_d + 1 + K_{dd}, \\ K_3 &= 16 J_1^2 \tilde{c}_g, \quad K_4 = 16 J_2^2 \tilde{c}_d, \\ K_5 &= 16 J_1 J_2 \tilde{c}_g, \quad K_6 = 16 J_1 J_2 \tilde{c}_d, \\ K_{gg} &= \sum_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2, \\ \mathbf{g}_1 \neq -\mathbf{g}_2}} \tilde{c}_{\mathbf{r}}, \\ K_{dd} &= \sum_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{d}_1+\mathbf{d}_2, \\ \mathbf{d}_1 \neq -\mathbf{d}_2}} \tilde{c}_{\mathbf{r}}, \quad K_{gd} = \sum_{\mathbf{r}=\mathbf{g}+\mathbf{d}} \tilde{c}_{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= 1 - \gamma_g, & \gamma_2 &= 1 - \gamma_d, & \gamma_3 &= 1 - \gamma_g^2, \\
 \gamma_4 &= 1 - \gamma_d^2, & \gamma_5 &= (1 - \gamma_g)\gamma_d, \\
 \gamma_6 &= (1 - \gamma_d)\gamma_g, \\
 \gamma_g &= \frac{1}{z_g} \sum_{\mathbf{g}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{g}} = \frac{1}{2}(\cos q_x + \cos q_y), \\
 \gamma_d &= \frac{1}{z_d} \sum_{\mathbf{d}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{d}} = \cos q_x \cos q_y,
 \end{aligned} \tag{11}$$

$z_g = z_d = 4$ — число узлов на первой и второй координационных сферах, \tilde{c}_r — спин-спиновые корреляционные функции, перенормированные вершинными поправками, $\tilde{c}_r = \alpha_r c_r = \alpha_r \langle S_{\mathbf{n}}^z S_{\mathbf{n}+\mathbf{r}}^z \rangle$. В принципе, число различающихся вершинных поправок может доходить до числа затронутых в (3), (4) координационных сфер (в модели J_1 - J_2 их пять). Ниже в разд. 3 и 4 использовано приближение одной вершинной поправки α [31, 32, 50, 56, 57]. В этих же разделах все энергетические величины приводятся в единицах $J = \sqrt{J_1^2 + J_2^2}$.

Отметим, что нередко используется альтернативная (9)–(11) номенклатура группировки слагаемых в громоздком выражении для $\omega_{\mathbf{q}}$ [44, 45].

Для J_1 - J_2 -модели функция Грина G^{zz} (7) включает корреляторы c_r на первых пяти координационных сферах ($r = g, d, 2g, r_{gd} = |\mathbf{g} + \mathbf{d}|, 2d$). В рамках СССП эти корреляторы и вершинная поправка α находятся самосогласованно через G^{zz} . При этом накладывается дополнительное условие точного выполнения правила сумм (в данном случае — спинового констрейнта на узле) $\langle \hat{S}_i^z \rangle = 3/4$, т.е. $c_{\mathbf{R}=0} = \langle S_i^z S_i^z \rangle = 1/4$.

Спиновое упорядочение определяется структурным фактором $c_{\mathbf{q}}$, который в рамках СССП имеет вид

$$\begin{aligned}
 c_{\mathbf{q}} &= \langle S_{\mathbf{q}}^z S_{-\mathbf{q}}^z \rangle = -\frac{1}{\pi} \int d\omega \operatorname{Im} G^{zz}(\omega, \mathbf{q}) = \\
 &= \frac{F_{\mathbf{q}}}{2\omega_{\mathbf{q}}} [2n(\omega_{\mathbf{q}}) + 1], \tag{12}
 \end{aligned}$$

где $n(\omega_{\mathbf{q}})$ — бозе-функция. Корреляционные функции выражаются через структурный фактор:

$$\begin{aligned}
 c_R &= \langle S_{\mathbf{n}}^z S_{\mathbf{n}+\mathbf{R}}^z \rangle = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} = \\
 &= c_{cond} \sum_{\mathbf{q}_0} e^{i\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{R}} + \frac{1}{4\pi^2} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} \frac{F_{\mathbf{q}}}{2\omega_{\mathbf{q}}}, \tag{13}
 \end{aligned}$$

$$c_{cond} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \int d\mathbf{q} n(\omega_{\mathbf{q}}) \frac{F_{\mathbf{q}}}{\omega_{\mathbf{q}}}. \tag{14}$$

При $T \rightarrow 0$ в структурном факторе в точках \mathbf{q}_0 зоны Бриллюэна, где $\omega_{\mathbf{q}}$ обращается в нуль, могут возникать δ -пики, связанные с функцией $n(\omega_{\mathbf{q}})$. Тогда в корреляционных функциях c_R появляется ненулевое конденсатное слагаемое c_{cond} , что соответствует наличию спинового дальнего порядка (c_{cond} определяет спин-спиновый коррелятор на бесконечности). Слагаемое без $n(\omega_{\mathbf{q}})$ в правой части выражения (13) убывает при $R \rightarrow \infty$. При конечных температурах дальний порядок всегда отсутствует.

3. J_1 - J_2 -КРУГ: ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ

В рамках СССП основное состояние двумерной фрустрированной модели Гейзенберга для полного J_1 - J_2 -круга (т.е. для любых значений φ , $J_1 = \cos \varphi$, $J_2 = \sin \varphi$) рассмотрено в работе [57]. При $T = 0$ в зависимости от величины и знака обменных параметров в системе может реализовываться состояние как с дальним порядком, так и без него. В J_1 - J_2 -модели возможны три состояния с дальним порядком — шахматное антиферромагнитное (АФМ), страйп (полосатое) и ферромагнитное (ФМ).

Основное состояние с ростом φ эволюционирует следующим образом (см. рис. 2). При малом φ , т.е. при положительных знаках обоих обменов, $J_1 > J_2 > 0$, в интервале $0 \leq \varphi \leq \varphi_1 = 0.051$ реализуется дальний АФМ-порядок: щель в АФМ-точке $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ равняется нулю, $\Delta_{\mathbf{Q}} = 0$, спектр вблизи \mathbf{Q} линеен по $|\mathbf{q} - \mathbf{Q}|$.

При $\varphi = \varphi_1$ АФМ-щель $\Delta_{\mathbf{Q}}$ открывается, спектр

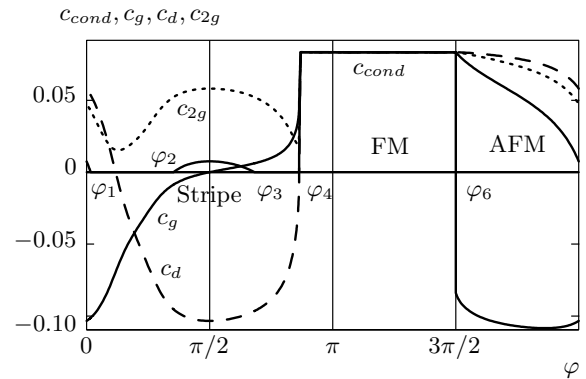


Рис. 2. Трансформация основного состояния с ростом φ ($J_1 = \cos \varphi$, $J_2 = \sin \varphi$). Показаны конденсат c_{cond} (модуль спин-спиновой коррелятора на бесконечности) и корреляторы на первых трех координационных сферах — соответственно c_g , c_d и c_{2g}

становится бесщелевым во всей зоне Бриллюэна, исключая тривиальную нулевую точку $\Gamma = (0, 0)$, где он линейен. Система переходит в состояние спиновой жидкости (обозначим его СЖ¹), которое реализуется в интервале $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 = 1.111$. Дальний порядок отсутствует, а ближний с увеличением φ перестраивается с характерного для АФМ-фазы на характерный для страйп-фазы.

При $\varphi = \varphi_2$ страйп-щель $\Delta_{\mathbf{X}}$ обращается в нуль, спектр в страйп-точках $\mathbf{X} = (0, \pi), (\pi, 0)$ становится линейным, система переходит в страйп-фазу с дальним порядком, которая реализуется в интервале $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3 = 2.141$.

При $\varphi = \varphi_3$ страйп-щель $\Delta_{\mathbf{X}}$ открывается, и система снова переходит в состояние спиновой жидкости (СЖ²), которое реализуется в диапазоне $\varphi_3 < \varphi < \varphi_4 = 2.712$ (с иной, чем в области СЖ¹, структурой ближнего порядка).

Подчеркнем еще раз, что во всех упомянутых выше фазах спектр вблизи точки $\Gamma = (0, 0)$ остается линейным по q .

При $\varphi = \varphi_4$ вновь возникает фаза с дальним (ФМ) порядком. Спектр вблизи точки Γ становится квадратичным по q (щель $\Delta_{\Gamma} = 0$ при любых φ , см. ниже). В этой фазе различимы две области, ФМ¹ и ФМ². В области ФМ¹ — узком интервале $\varphi_4 < \varphi < \varphi_5 = 2.733$ (в масштабе рис. 2 он не виден) — с увеличением φ конденсат c_{cond}^{FM} быстро растет от нуля до максимально возможного значения $1/12$. При $\varphi \geq \varphi_5$ (область ФМ²) все корреляторы и конденсат равны $1/12$, $\alpha = 3/2$ [32, 44]. Нетрудно показать, что $F_{\mathbf{q}} \sim \omega_{\mathbf{q}}$ в области ФМ², и поэтому второе слагаемое в выражении для корреляторов c_R (13) обращается в нуль. При $\varphi = -\pi$ ($J_1 = -1$, $J_2 = 0$) СССП-выражение для спектра совпадает со стандартным точным решением для ферромагнетика [32].

При $\varphi \geq \varphi_5$ решение ФМ² реализуется вплоть до $\varphi_6 = 3\pi/2$. При этом значении угла, выделенном на фазовой диаграмме, решетка распадается на две невзаимодействующие подрешетки. При $\varphi \rightarrow \varphi_6 - 0$ в системе нет фрустрации относительно ФМ-порядка, при $\varphi \rightarrow \varphi_6 + 0$ отсутствует фрустрация относительно АФМ-порядка. Поэтому физически очевидно (и вычисления в СССП это подтверждают), что и в квантовом пределе между ФМ- и АФМ-фазами не возникает области спиновой жидкости, а переход ФМ \rightarrow АФМ является переходом первого рода.

Описанная выше трансформация основного состояния проиллюстрирована на рис. 2, где показаны зависимости от φ спин-спиновых корреляторов на первых трех координационных сферах и конденсата

(модуля спин-спинового коррелятора на бесконечности).

4. J_1 - J_2 -КРУГ: СПЕКТРЫ ВОЗБУЖДЕНИЙ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ДЛИНА

Остановимся теперь на эволюции спектра спиновых возбуждений $\omega(\mathbf{q})$ при изменении φ как при нулевой, так и при ненулевой температуре.

Спиновая щель в точке Γ закрыта при любой температуре и любых значениях φ ,

$$\Delta_{\Gamma}(T, \varphi) = 0 \quad (15)$$

(можно показать [57], что спектр (9) представим в виде $\omega_{\mathbf{q}}^2 = A(\mathbf{q})(1 - \gamma_g)$, где величина $A(\mathbf{q})$ всегда конечна, а $1 - \gamma_g \rightarrow 0$ при $q \rightarrow 0$).

При $J_1 = 0$ ($\varphi = \pi/2$ или $\varphi = 3\pi/2$) и любых температурах закрыта также щель в АФМ-точке \mathbf{Q} ,

$$\Delta_{\mathbf{Q}}(T, \varphi = \pi/2, 3\pi/2) = 0. \quad (16)$$

Последнее формально прямо следует из аналитического выражения для $\Delta_{\mathbf{Q}}(\varphi = \pi/2, 3\pi/2) \sim J_1$. Физическое объяснение состоит в том, что при $J_1 = 0$ система распадается на две невзаимодействующие подрешетки, и ее состояние вырождено по отношению к их взаимному вращению. Поэтому перенос спинового возбуждения на соседний узел не требует энергии.

Кроме того, как уже отмечено выше, при $T = 0$ в области АФМ-фазы с дальним порядком в точке \mathbf{Q} закрыта спиновая щель. Структурный фактор $c_{\mathbf{q}}$ в этой точке имеет δ -пик. В области страйп-фазы с дальним порядком при $T = 0$ закрыта спиновая щель в точке \mathbf{X} , $c_{\mathbf{q}}$ имеет там δ -пик. При $T > 0$ щели открываются, дальний порядок исчезает, пики $c_{\mathbf{q}}$ имеют конечную величину, что соответствует конечной корреляционной длине ξ .

Наконец, при $T = 0$ в области ФМ-фазы структурный фактор $c_{\mathbf{q}}$ имеет δ -пик в точке Γ ; при $T > 0$ этот пик (и корреляционная длина) становится конечным. Щель Δ_{Γ} , как сказано выше, всегда закрыта.

В фазах спиновой жидкости, СЖ¹ и СЖ², все спиновые щели (кроме тривиальной Δ_{Γ}) открыты уже при $T = 0$, структурный фактор конечен во всей зоне Бриллюэна, дальний порядок отсутствует. Общее представление о поведении спиновых щелей дает рис. 3.

Таким образом, при нулевой температуре возможны три упорядоченные фазы — с АФМ-, страйп-

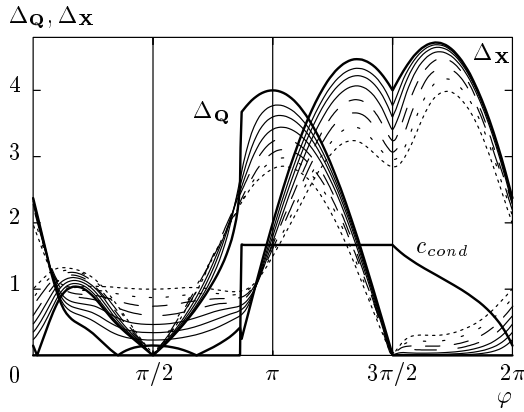


Рис. 3. Спиновые щели $\Delta_{\mathbf{Q}}$ и $\Delta_{\mathbf{X}}$ в точках $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ и $\mathbf{X} = (\pi, 0), (0, \pi)$ в зависимости от углового параметра φ ($J_1 = \cos \varphi, J_2 = \sin \varphi$): жирные линии отвечают нулевой температуре, тонкие сплошные — $T = 0.3, 0.4, 0.5$, штриховые — $T = 0.6, 0.7$, штрихпунктирные — $T = 0.8, 0.9$. Для наглядности показан также конденсат c_{cond} (в ином масштабе)

или дальним ФМ-порядком — и две области спиновой жидкости. При $T > 0$ дальнего порядка нет при любом φ , а ближний порядок сохраняет память о родительской нультемпературной фазе. Поэтому будем и при ненулевой температуре различать характерные области углового параметра φ по номенклатуре нультемпературных фаз.

Эволюция спектра спиновых возбуждений с изменением углового параметра φ представлена на рис. 4 и 5 (при $T = 0.3$).

На рис. 4а показан спектр $\omega_{\mathbf{q}}$ в АФМ-области ($\varphi=0$, т.е. $J_1 = 1, J_2 = 0$). Малая щель в точке \mathbf{Q} , $\Delta_{\mathbf{Q}} \ll \Delta_{\mathbf{X}}$, указывает на АФМ-характер ближнего порядка.

Рисунок 4б соответствует области спиновой жидкости СЖ¹ ($\varphi = \pi/4, J_1 = J_2 = 1/\sqrt{2}$). Щели в симметричных точках (кроме тривиальной $\Delta_{\mathbf{r}}$) сопоставимы, $\Delta_{\mathbf{Q}} \sim \Delta_{\mathbf{X}}$, в ближнем порядке отсутствует доминирующий мотив.

Рисунок 4в отвечает страйп-области ($\varphi = \pi/2, J_1 = 0, J_2 = 1$). Здесь видны сразу два «исключения из правил». Щели $\Delta_{\mathbf{r}} = \Delta_{\mathbf{Q}} = 0$ по указанным в (15), (16) причинам. Структура ближнего порядка диктуется малой страйп-щелью $\Delta_{\mathbf{X}}$.

Рисунок 4г соответствует области спиновой жидкости СЖ² ($\varphi = 3\pi/4, -J_1 = J_2 = 1/\sqrt{2}$). Щели в симметричных точках (кроме тривиальной $\Delta_{\mathbf{r}}$) вновь сопоставимы, хотя меньшая щель, $\Delta_{\mathbf{X}} < \Delta_{\mathbf{Q}}$, указывает на следы ближнего страйп-порядка.

На рис. 5а показан спектр $\omega_{\mathbf{q}}$ в ФМ-области ($\varphi = \pi$, т.е. $J_1 = -1, J_2 = 0$). Сам по себе этот спектр не позволяет судить о характере ближнего порядка, поскольку $\Delta_{\mathbf{r}} = 0$ всегда. То же относится к рис. 5б ($\varphi = 5\pi/4, J_1 = J_2 = -1/\sqrt{2}$), где оба обмена имеют ФМ-знак.

Рисунок 5в соответствует выделенной точке J_1 - J_2 -круга: $\varphi = 3\pi/2, J_1 = 0, J_2 = 1$. Спектр симметричен относительно диагонали $\mathbf{X} - \mathbf{X}$, щели $\Delta_{\mathbf{r}} = \Delta_{\mathbf{X}} = 0$. При $T = 0$ вблизи этой точки бесконечно малый отрицательный обмен $J_1 = -0$ устанавливает дальний ФМ-порядок, а $J_1 = +0$ — дальний АФМ-порядок. При конечных температурах переход ФМ ↔ АФМ хотя и становится непрерывным, остается очень резким вплоть до $T \gtrsim 1$.

Наконец, рис. 5г ($\varphi = 7\pi/4, J_1 = -J_2 = 1/\sqrt{2}$) отвечает области «сверхантiferромагнетизма», когда оба обмена насыщаются при АФМ-упорядочении. Поэтому АФМ-щель $\Delta_{\mathbf{Q}} \ll 1$, в масштабе рисунка ее отличие от нуля неразличимо.

Из сказанного выше ясно, что для анализа ближнего порядка и отвечающей ему корреляционной длины недостаточно вида спектра возбуждений. Необходимо одновременно рассматривать поведение структурного фактора. Значения структурного фактора $c_{\mathbf{q}}$ в симметричных точках при различных температурах показаны на рис. 6 и 7.

При сложном виде структурного фактора корреляционную длину необходимо вычислять из доминирующего пика. В принципе, в областях сильной фрустрации можно было бы ожидать сосуществования нескольких сравнимых по величине пиков, что означало бы несколько взаимопроникающих ближних порядков. Однако из рис. 6, 7 видно, что в J_1 - J_2 -модели такая возможность не реализована — при любом φ либо доминирует один пик, либо пиков нет вовсе. Отметим, что для J_1 - J_2 - J_3 -модели указанная ситуация возможна даже и при нулевой температуре, что означает сосуществование взаимопроникающих дальних порядков [51].

Из рис. 7 также видно, что пики $c_{\mathbf{q}}$ в страйп-области значительно меньше, чем пики $c_{\mathbf{q}}$ при тех же температурах на участках ФМ- и АФМ-областей, расположенных в нижней половине J_1 - J_2 -круга ($\varphi > \pi$). Причина в том, что вся верхняя полуокружность является фрустрированной — обмены J_1 и J_2 благоприятствуют различным спиновым упорядочениям. При $T = 0$ это приводит к ослаблению, а затем и разрушению дальнего АФМ- (или ФМ-порядка) с ростом $|J_2|$ и к появлению в области $\varphi \approx \pi/2$ «компромиссной» страйп-фазы со слабым дальним

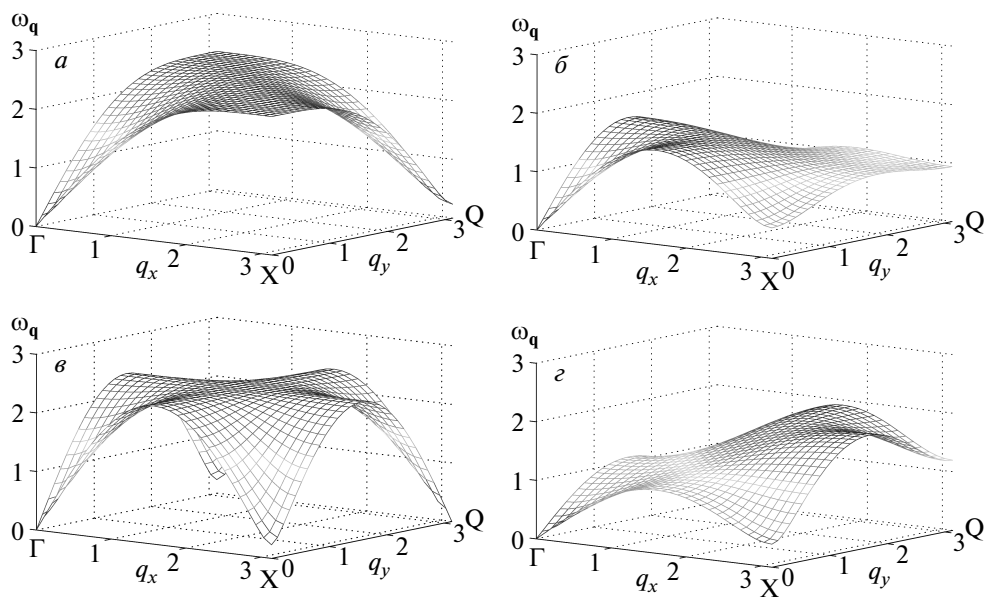


Рис. 4. Спектры спиновых возбуждений при $T = 0.3$ на верхней половине J_1 - J_2 -круга ($0 \leq \varphi < \pi$): $a - \varphi = 0$; $b - \varphi = \pi/4$; $v - \varphi = \pi/2$; $z - \varphi = 3\pi/4$. Показана четверть зоны Бриллюэна

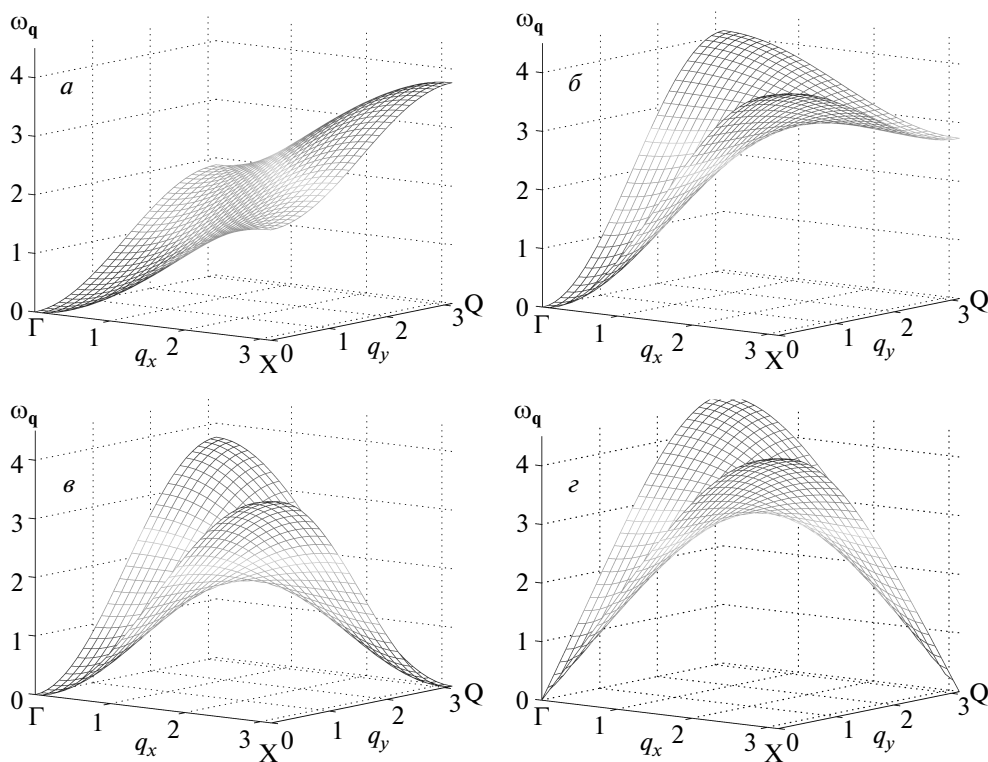


Рис. 5. Спектры спиновых возбуждений при $T = 0.3$ на нижней половине J_1 - J_2 -круга ($\pi \leq \varphi < 2\pi$): $a - \varphi = \pi$; $б - \varphi = 5\pi/4$; $в - \varphi = 3\pi/2$; $г - \varphi = 7\pi/4$. Показана четверть зоны Бриллюэна

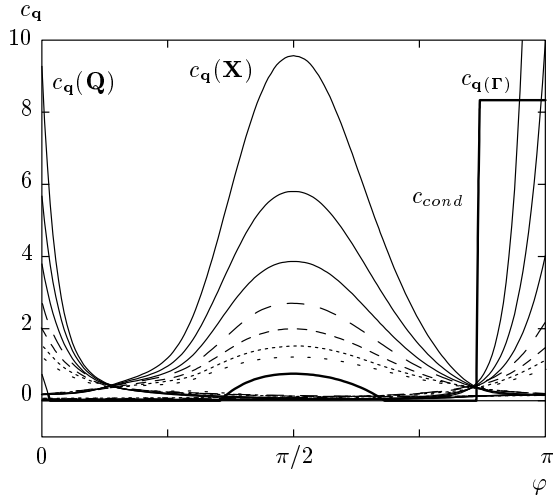


Рис. 6. Значения структурного фактора c_q в симметричных точках зоны Бриллюэна для верхней половины J_1 - J_2 -круга ($0 \leq \varphi \leq \pi$) и $T = 0.3-0.9$. Сплошные линии отвечают температурам $T = 0.3, 0.4, 0.5$, штриховые — $T = 0.6, 0.7$, штрихпунктирные — $T = 0.8, 0.9$. Показан также конденсат c_{cond} (в произвольном масштабе)

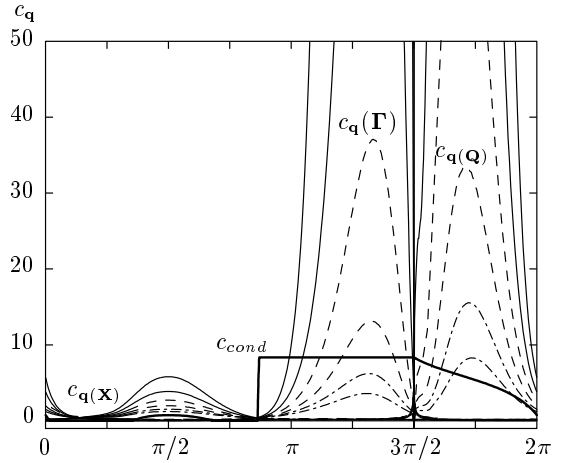


Рис. 7. Значения структурного фактора c_q в симметричных точках зоны Бриллюэна для полного J_1 - J_2 -круга ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) и $T = 0.4-0.9$. Сплошные линии отвечают температурам $T = 0.4, 0.5$, штриховые — $T = 0.6, 0.7$, штрихпунктирные — $T = 0.8, 0.9$. Показан также конденсат c_{cond} (в произвольном масштабе)

порядком (см. рис. 2), а при $T > 0$ — к быстрому уменьшению корреляционной длины с температурой. Нижняя полуокружность не фрустрирована, в третьей четверти круга нет фрустрации по отношению к ФМ-порядку, а в четвертой — по отношению к АФМ-порядку.

Упомянем здесь еще раз, что нижняя половина J_1 - J_2 -круга экспериментально пока не реализована, хотя модельно представляет значительный интерес.

Определение единственного (или лидирующего) пика в структурном факторе позволяет далее вычислить корреляционную длину по отношению к соответствующему спиновому упорядочению. Как правило, при анализе экспериментальных данных пик c_q аппроксимируется лоренцианом

$$c_q \sim \frac{1}{q^2 + \varkappa^2}, \quad (17)$$

где q отсчитано от соответствующей симметричной точки, и за корреляционную длину принимается обратная полуширина пика на полувысоте, $\xi = \varkappa^{-1}$.

Отметим, что в 2D-случае фурье-образ лоренциана c_q — коррелятор в прямом пространстве, $c_{\mathbf{R}} = \int d\mathbf{q} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} c_q$ — представляет собой не чистую экспоненту, а функцию МакДональда $c_R = (\pi/2)K_0(\varkappa R)$, которая даже асимптотически содержит преэкспоненту, $c_{R \rightarrow \infty} \approx (\pi/2)^{3/2} \times e^{-\varkappa R} / \sqrt{\varkappa R}$.

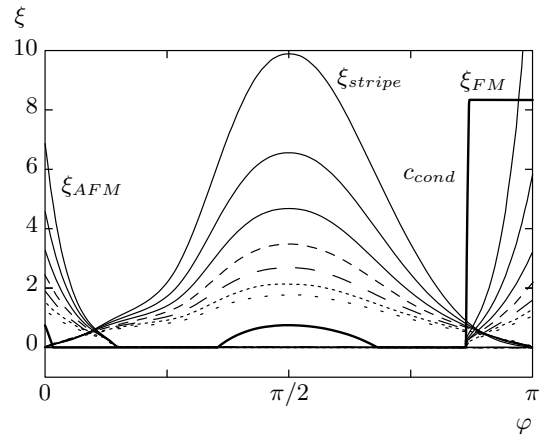


Рис. 8. Корреляционная длина, вычисленная из выражения (17), для спинового АФМ-, страйп- и ФМ-порядка для верхней половины J_1 - J_2 -круга ($0 \leq \varphi \leq \pi$) и $T = 0.3-0.9$. Сплошные линии отвечают температурам $T = 0.3, 0.4, 0.5$, штриховые — $T = 0.6, 0.7$, штрихпунктирные — $T = 0.8, 0.9$. Показан также конденсат c_{cond} (в произвольном масштабе)

Мы, однако, для определения корреляционной длины будем, как это принято, пользоваться аппроксимацией (17). На рис. 8 представлена вычисленная таким образом корреляционная длина ξ — относительно АФМ-, ФМ- и страйп-порядков — для верх-

ней половины круга $0 < \varphi < \pi$ и температуры $T = 0.3-0.9$. Как и следовало ожидать, кривые на рис. 6 и 8 качественно подобны ($c_q(q=0) \sim \xi^2$).

Для нижней половины круга ($\pi < \varphi < 2\pi$) численная процедура определения корреляционной длины из выражения (17) уже при достаточно высоких температурах становится неустойчивой в силу чрезвычайной узости пика c_q . Корреляционная длина как в ФМ-, так и в АФМ-области (третья и четвертая четверти круга) быстро растет с уменьшением температуры: $\xi \gg 1$ при $T \lesssim 0.8$; $\xi \gtrsim 100$ при $T \lesssim 0.6$. Качественное подобие кривых для $c_q(q=0)$ и ξ при этом сохраняется, что позволяет судить о характере изменения корреляционной длины по графикам на рис. 7.

Таким образом, рис. 6-8 представляют общую картину эволюции ближнего порядка в двумерной J_1-J_2 -модели Гейзенберга для спина $S = 1/2$ при изменении параметров обмена и температуры.

Отметим, что представленные здесь результаты получены в среднеполевом подходе (без учета затухания спиновых возбуждений) и простейшем приближении одной вершины. Однако наш анализ, а также сравнение с имеющимися аналитическими и численными результатами на локальных участках J_1-J_2 -круга показывают, что при уточнении подхода никаких качественных изменений в поведении корреляционной длины не происходит.

5. $J_1 > J_2 > 0$: СВЯЗЬ ФРУСТРАЦИИ И ДОПИРОВАНИЯ

Известно, что слабое допирование дырками двумерного антиферромагнетика существенно уменьшает спиновую корреляционную длину. К такому же результату приводит увеличение параметра J_2 в J_1-J_2 -модели Гейзенберга в области малых углов φ (см. рис. 6, 8). Поэтому представляет интерес попытаться установить соответствие между допированием в моделях с носителями и фрустрацией в чисто спиновой модели. На возможность такого соответствия впервые было обращено внимание еще на раннем этапе исследования ВТСП [58, 59].

Используя экспериментально известные данные по температурной зависимости спиновой корреляционной длины при различных значениях допирования в ВТСП, ниже мы установим количественное соответствие между допированием и фрустрацией. Как принято в этой области параметров, далее будем в качестве меры фрустрации использовать не φ , а параметр фрустрации

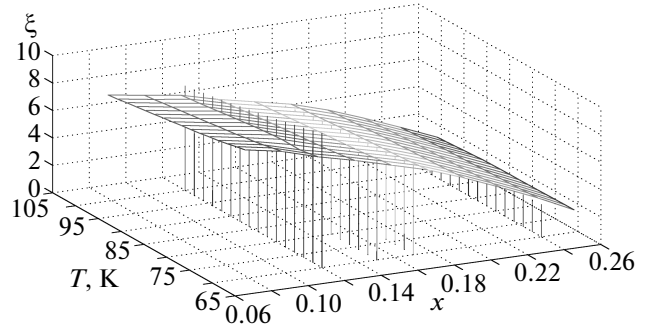


Рис. 9. Экспериментальные данные по корреляционной длине (вертикальные сплошные отрезки) и вычисленная с использованием аппроксимаций (19), (20) корреляционная длина (поверхность)

$$p = \frac{J_2}{J_1 + J_2} = \frac{\text{tg } \varphi}{1 + \text{tg } \varphi}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Существенно, что в данном разделе мы будем использовать усложненную модель с феноменологическим учетом затухания спиновых возбуждений. Соответствующая функция Грина имеет вид [56, 60, 61]

$$G_\gamma^{zz}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{F_{\mathbf{q}}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2 + i\omega\gamma}, \quad (18)$$

где γ — параметр затухания.

В отличие от разд. 3, 4, здесь мы использовали приближение трех вершин. Детальный вид вершинных поправок в случае вычислений с затуханием приведен в работах [56, 60, 61]. В рассмотренных ниже диапазонах изменения величин p и T мы принимали следующую зависимость параметра затухания:

$$\gamma(p, T) = (12.5p - 0.25)T.$$

Такой вид позволяет, во-первых, объяснить [60, 61] наблюдаемый экспериментально [62-66] скейлинговый закон для χ_{2D} (проинтегрированной по \mathbf{q} спиновой восприимчивости), а во-вторых, приводит к хорошему согласию вычисленной корреляционной длины с экспериментом. Несложно показать, что в приближении среднего поля без учета затухания скейлинг нельзя воспроизвести в принципе.

Наше самосогласование требует экспоненциально большого времени вычислений для нахождения корреляционной длины при температурах $T \lesssim 0.05J_1$ и фрустрации $p \lesssim 0.05$. С учетом этих ограничений мы сравниваемся с доступными экспериментальными данными по корреляционной длине. Мы используем данные нейтронных экспериментов

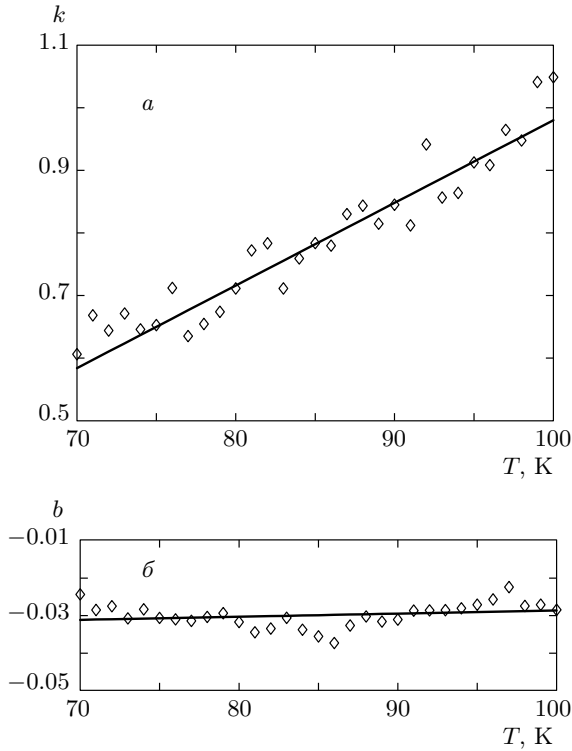


Рис. 10. Наилучшие значения коэффициентов k (а) и b (б) в выражении (19) и их линейные аппроксимации $k(T) = 1.32 \cdot 10^{-2} T$ [К] $- 0.34$, $b(T) = 8.3 \cdot 10^{-5} T$ [К] $- 0.03$

[62, 67, 68] и пересчета $\xi(x, T)$ по ЯМР [69] (а также обзорные работы [21, 70]). Экспериментальные данные, попадающие в рассматриваемую область, представлены на рис. 9 вертикальными сплошными отрезками.

При анализе экспериментальных данных и сопоставлении их с результатами вычислений использованы следующие параметры лантановых купратов: $J_1 = 1200$ К, $a = 3.87$ Å [21].

Мы полагали линейную зависимость допирования x от фрустрации,

$$x = k(T)p + b(T), \quad (19)$$

и в этом предположении во всей рассмотренной области температур и допирования добивались наилучшего согласия с экспериментом. При этом коэффициенты $k(T)$ и $b(T)$ также оказались линейными по T (рис. 10):

$$k(T) = 1.32 \cdot 10^{-2} T$$
 [К] $- 0.34$, $b(T) \approx -0.03$ (20)

(зависимость $b(T)$ очень слабая, линейный коэффициент порядка 10^{-5}). Вычисленная с использовани-

ем (19), (20) корреляционная длина во всем рассмотренном диапазоне температуры и допирования представлена поверхностью на рис. 9.

Таким образом, для лантановых купратов в области температур 50 К $\lesssim T \lesssim 100$ К и допирований $0.1 \lesssim x \lesssim 0.25$ фрустрированная J_1 - J_2 -модель Гейзенберга приводит к адекватным значениям спин-спиновой корреляционной длины. Закон соответствия допирования и фрустрации дается выражениями (19), (20).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в рамках единого подхода для двумерной J_1 - J_2 -модели Гейзенберга для спина $S = 1/2$ получены спектры спиновых возбуждений и определено поведение корреляционной длины в широкой области температур и во всем диапазоне обменных параметров. В наиболее исследованной области слабофрустрированного антиферромагнетика вычисленная корреляционная длина находится в хорошем согласии с экспериментом. Одновременно получен закон соответствия между фрустрацией в чисто спиновой модели и допированием в моделях с носителями.

Авторы В. Э. В., А. В. Ш. и А. Ф. Б. благодарят за поддержку РФФИ (грант № 13-02-00909), а А. В. М. — РФФИ (грант № 14-12-00820).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Melzi, P. Carretta, A. Lascialfari et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 1318 (2000).
2. R. Melzi, S. Aldrovandi, F. Tedoldi et al., Phys. Rev. B **64**, 024409 (2001).
3. H. Rosner, R. R. P. Singh, W. H. Zheng et al., Phys. Rev. B **67**, 014416 (2003).
4. J. M. Tranquada, in *Handbook of High-Temperature Superconductivity*, ed. by J. R. Schrieffer and J. S. Brooks, Springer, New York (2007), p. 257.
5. E. E. Kaul, H. Rosner, N. Shannon et al., J. Magn. Magn. Mater. **272-276**, Pt 2, 922 (2004).
6. M. Skoulatos, J. Goff, N. Shannon et al., J. Magn. Magn. Mater. **310**, 1257 (2007).
7. P. Carretta, M. Filibian, R. Nath et al., Phys. Rev. B **79**, 224432 (2009).

8. M. Skoulatos, J. P. Goff, C. Geibel et al., *Europhys. Lett.* **88**, 57005 (2009).
9. H. Kageyama, T. Kitano, N. Oba et al., *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 1702 (2005).
10. A. A. Tsirlin and H. Rosner, *Phys. Rev. B* **79**, 214417 (2009).
11. A. A. Tsirlin, B. Schmidt, Y. Skourski et al., *Phys. Rev. B* **80**, 132407 (2009).
12. R. Nath, A. A. Tsirlin, H. Rosner et al., *Phys. Rev. B* **78**, 064422 (2008).
13. S. Feldkemper, W. Weber, J. Schulenburg et al., *Phys. Rev. B* **52**, 313 (1995).
14. S. Feldkemper and W. Weber, *Phys. Rev. B* **57**, 7755 (1998).
15. H. Manaka, T. Koide, T. Shidara et al., *Phys. Rev. B* **68**, 184412 (2003).
16. D. Kasinathan, A. B. Kyker, and D. J. Singh, *Phys. Rev. B* **73**, 214420 (2006).
17. A. Bombardi, L. C. Chapon, I. Margiolaki et al., *Phys. Rev. B* **71**, 220406 (2005).
18. A. A. Tsirlin, A. A. Belik, R. V. Shpanchenko et al., *Phys. Rev. B* **77**, 092402 (2008).
19. A. A. Tsirlin, O. Janson, S. Lebernegg et al., *Phys. Rev. B* **87**, 064404 (2013).
20. J. Richter, J. Schulenburg, and A. Honecker, in *Quantum Magnetism*, ed. by U. Schollwöck, J. Richter, D. J. J. Farnell et al., Springer, Berlin–Heidelberg (2004), p. 85 no. 645 in *Lecture Notes in Phys.*
21. N. Plakida, *High-Temperature Cuprate Superconductors*, Vol. 166 of Springer Series in Solid-State Sciences, Springer, Berlin–Heidelberg (2010).
22. J. Richter, R. Zinke, and D. J. J. Farnell, *Eur. Phys. J. B* **88** (2015).
23. M. Takahashi, *Progr. Theor. Phys. Suppl.* **87**, 233 (1986).
24. M. Takahashi, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 168 (1987).
25. P. Kopietz and S. Chakravarty, *Phys. Rev. B* **40**, 4858 (1989).
26. N. Karchev, *Phys. Rev. B* **55**, 6372 (1997).
27. I. Juhász Junger, D. Ihle, L. Bogacz et al., *Phys. Rev. B* **77**, 174411 (2008).
28. E. Manousakis and R. Salvador, *Phys. Rev. B* **39**, 575 (1989).
29. Y. C. Chen, H. H. Chen, and F. Lee, *Phys. Rev. B* **43**, 11082 (1991).
30. P. Henelius, A. W. Sandvik, C. Timm et al., *Phys. Rev. B* **61**, 364 (2000).
31. J. Kondo and K. Yamaji, *Progr. Theor. Phys.* **47**, 807 (1972).
32. H. Shimahara and S. Takada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60**, 2394 (1991).
33. F. Suzuki, N. Shimata, and C. Ishii, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**, 1539 (1994).
34. I. Junger, D. Ihle, J. Richter et al., *Phys. Rev. B* **70**, 104419 (2004).
35. T. N. Antsygina, M. I. Poltavskaya, I. I. Poltavsky et al., *Phys. Rev. B* **77**, 024407 (2008).
36. N. Shannon, B. Schmidt, K. Penc et al., *Eur. Phys. J. B* **38**, 599 (2004).
37. N. Shannon, T. Momoi, and P. Sindzingre, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 027213 (2006).
38. P. Sindzingre, N. Shannon, and T. Momoi, *J. Magn. Magn. Mater.* **310**, 1340 (2007).
39. B. Schmidt, N. Shannon, and P. Thalmeier, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 145211 (2007).
40. B. Schmidt, N. Shannon, and P. Thalmeier, *J. Magn. Magn. Mater.* **310**, 1231 (2007).
41. J. R. Viana and J. R. de Sousa, *Phys. Rev. B* **75**, 052403 (2007).
42. P. Sindzingre, L. Seabra, N. Shannon et al., *J. Phys.: Conf. Ser.* **145**, 012048 (2009).
43. R. Shindou and T. Momoi, *Phys. Rev. B* **80**, 064410 (2009).
44. M. Härtel, J. Richter, D. Ihle et al., *Phys. Rev. B* **81**, 174421 (2010).
45. M. Härtel, J. Richter, O. Götze et al., *Phys. Rev. B* **87**, 054412 (2013).
46. D. V. Dmitriev, V. Y. Krivnov, and A. A. Ovchinnikov, *Phys. Rev. B* **55**, 3620 (1997).
47. J. Richter, A. Lohmann, H.-J. Schmidt et al., *J. Phys.: Conf. Ser.* **529**, 012023 (2014).
48. А. Ф. Барабанов, В. М. Березовский, *ЖЭТФ* **106**, 1156 (1994).
49. L. Siurakshina, D. Ihle, and R. Hayn, *Phys. Rev. B* **64**, 104406 (2001).

50. M. Härtel, J. Richter, D. Ihle et al., *Phys. Rev. B* **84**, 104411 (2011).
51. A. V. Mikheyenkov, A. F. Barabanov, and A. V. Shvartsberg, *Sol. St. Comm.* **152**, 831 (2012).
52. P. Rubin, A. Sherman, and M. Schreiber, *Phys. Lett. A* **376**, 1062 (2012).
53. А. В. Михеенков, А. В. Шварцберг, А. Ф. Барабанов, *Письма в ЖЭТФ* **98**, 178 (2013).
54. A. A. Vladimirov, D. Ihle, and N. M. Plakida, *Eur. Phys. J. B* **87**, 1 (2014).
55. М. Ю. Каган, К. И. Кугель, А. В. Михеенков и др., *Письма в ЖЭТФ* **100**, 207 (2014).
56. А. Ф. Барабанов, А. В. Михеенков, А. В. Шварцберг, *ТМФ* **168**, 389 (2011).
57. А. В. Михеенков, А. В. Шварцберг, А. Ф. Барабанов, *Письма в ЖЭТФ* **98**, 178 (2013).
58. M. Inui, S. Doniach, and M. Gabay, *Phys. Rev. B* **38**, 6631 (1988).
59. A. Moreo, E. Dagotto, T. Jolicoeur et al., *Phys. Rev. B* **42**, 6283 (1990).
60. A. V. Mikheyenkov, A. F. Barabanov, and N. A. Kozlov, *Phys. Lett. A* **354**, 320 (2006).
61. А. В. Михеенков, А. Ф. Барабанов, *ЖЭТФ* **132**, 392 (2007).
62. B. Keimer, N. Belk, R. J. Birgeneau et al., *Phys. Rev. B* **46**, 14034 (1992).
63. K. Kakurai, S. Shamoto, T. Kiyokura et al., *Phys. Rev. B* **48**, 3485 (1993).
64. M. A. Kastner, R. J. Birgeneau, G. Shirane et al., *Rev. Mod. Phys.* **70**, 897 (1998).
65. H. Hiraka, Y. Endoh, M. Fujita et al., *J. Phys. Soc. Jpn.* **70**, 853 (2001).
66. C. Stock, W. J. L. Buyers, R. Liang et al., *Phys. Rev. B* **69**, 014502 (2004).
67. G. Aeppli, T. E. Mason, S. M. Hayden et al., *Science* **278**, 1432 (1997).
68. T. Imai, C. P. Slichter, A. P. Paulikas et al., *Phys. Rev. B* **47**, 9158 (1993).
69. H. Monien, D. Pines, and M. Takigawa, *Phys. Rev. B* **43**, 258 (1991).
70. T. E. Mason, in *Handbook on the Physics and Chemistry of Rare Earths*, ed. by J. K. A. Gschneidner, LeRoy Eyring, and M. B. Maple, Elsevier Sci. Publ., Amsterdam (2001), Vol. 31 of High-Temperature Superconductors-II, p. 281.