

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИЯ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПЛОСКОМ КОНДЕНСАТОРЕ

Н. Н. Картавых, Б. Л. Смородин, В. А. Ильин*

*Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 14 января 2015 г.

Изучены течения неоднородно нагретой слабопроводящей жидкости, находящейся в переменном электрическом поле горизонтального плоского конденсатора. Рассмотрение проведено для жидкостей, в которых зарядообразование обусловлено электрокондуктивным механизмом, связанным с зависимостью электропроводности среды от температуры. Периодические и хаотические режимы течений жидкости исследованы в предельном случае мгновенной релаксации заряда и для конечного времени релаксации. Построены бифуркационные диаграммы и карты электроконвективных режимов. Определены области синхронизации колебаний жидкости с частотой внешнего поля. Изучены гистерезисные переходы между режимами электроконвекции. Проанализированы сценарии перехода к хаотическим колебаниям. В зависимости от собственной частоты электроконвективной системы и частоты внешнего поля переход от периодических к хаотическим колебаниям может реализоваться через квазипериодичность, субгармонический каскад или перемежаемость.

DOI: 10.7868/S0044451015070160

1. ВВЕДЕНИЕ

Для анализа свойств осциллирующих и хаотических течений жидкостей часто с успехом применяется модель Лоренца [1–3]. Для учета различных осложняющих факторов используются ее модификации. Например, действие электрического поля на диэлектрические и слабопроводящие жидкости связано с диэлектрофоретической силой или силой Кулона [4], что приводит к дополнительным слагаемым или переменным коэффициентам в модели Лоренца и влияет на эволюцию систем [5, 6].

Известно, что переменное электрическое поле в зависимости от амплитуды и частоты может вызывать в электрогидродинамических системах колебательные и хаотические режимы движения [5–8]. Поведение жидкостей в электрическом поле сильно зависит от условий эксперимента, при которых главным источником заряда может выступать инжекционный, диэлектрофоретический или электрокондуктивный механизмы или их комбинация [9–11].

Исследование диэлектрофоретической электроконвекции, вызванной зависимостью диэлектрической проницаемости от температуры, в переменном поле конденсатора показало [5, 12], что в отличие от классического случая параметрического резонанса для маятника [13] в электроконвективной системе возмущения субгармонического отклика отсутствуют, а режимы синхронного отклика можно разделить на два различных класса, различающихся величиной среднего теплового потока за период внешнего поля. Колебательные и хаотические режимы электротермической конвекции в постоянном электрическом поле проанализированы в работах [14, 15] на базе модифицированной модели Лоренца. Отметим, что для слабопроводящей жидкости уравнения электроконвекции не обладают свойствами определенной четности по вертикальной координате и благодаря этому минимальный набор базисных функций содержит восемь мод, а модифицированная модель Лоренца [14, 15] содержит дополнительные уравнения. В результате анализа течений слабопроводящей жидкости был обнаружен переход к хаотическим колебаниям через каскад удвоений периода, а также найдена область сосуществования монотонной и колебательной конвекции.

*E-mail: bsmorodin@yandex.ru

В настоящей работе на базе модифицированной для случая переменного электрического поля модели Лоренца проведено исследование параметрической электроконвекции неизоотермической слабопроводящей жидкости в поле произвольной частоты. Рассматривается только электрокондуктивный механизм, в котором зарядообразование связано с зависимостью электропроводности среды от температуры. Этот механизм проявляет себя в случае неоднородного нагрева жидкости, находящейся в электрическом поле, например, в трансформаторном и конденсаторном маслах.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоский горизонтальный слой неоднородно нагретой вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости, находящейся в переменном вертикальном электрическом поле напряженностью \mathbf{E} и поле силы тяжести \mathbf{g} . Ось x совпадает с нижней границей слоя и направлена вдоль нее, ось z — перпендикулярна границам слоя. Идеально тепло- и электропроводные пластины конденсатора расположены в плоскостях $z = 0, h$ (h — толщина слоя) и нагреты до разной температуры: $T(0) = \Theta$, $T(h) = 0$, где T — температура, отсчитываемая от температуры верхнего электрода, а Θ — характерная разность температур. Потенциал поля верхней границы принят за начало отсчета: $\varphi(h) = 0$, потенциал нижней границы изменяется со временем по гармоническому закону: $\varphi(0) = U \cos(\omega t)$. Здесь U — амплитуда, $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/t_f$ — циклическая, ν — линейная частота, t_f — период модуляции поля.

Для изучения поведения слабопроводящей жидкости в электрическом поле воспользуемся электрогидродинамическим приближением, в котором магнитные эффекты считаются пренебрежимо малыми по сравнению с электрическими [11]. Предполагаем, что плотность $\rho = \rho_0(1 - \beta T)$ и электропроводность $\sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma T)$ жидкости линейно зависят от температуры, где β и β_σ — положительные коэффициенты: соответственно теплового расширения жидкости и температурный коэффициент электропроводности, ρ_0 — плотность и σ_0 — электропроводность при некоторой средней температуре. Зависимость электропроводности от температуры приводит к накоплению электрического заряда в более холодной жидкости. Взаимодействие этого заряда с внешним электрическим полем и вызывает электротермическую неустойчивость [11].

В общем виде электрическая сила, действующая на единицу объема жидкости, может быть записана в виде [4]

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{2} \nabla \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E^2 \right), \quad (1)$$

где ρ_e — свободный заряд единицы объема, ε — диэлектрическая проницаемость жидкости. Последнее слагаемое в (1) имеет градиентный вид и приводит лишь к переопределению давления в уравнении Навье–Стокса. Поскольку в задаче рассматриваются жидкости, в которых диэлектрическая проницаемость практически не зависит от температуры, то вторая (диэлектрофоретическая) часть электрической силы, связанная с неоднородностью диэлектрической проницаемости, отсутствует. В таких жидкостях при полях порядка 1 кВ/см электропроводность зависит от температуры сильнее, чем диэлектрическая проницаемость: $\beta_\sigma \gg \beta_\varepsilon$ [12, 16–18]. Движение в этом случае порождается только первой (кулоновской) частью силы, связанной со свободным объемным электрическим зарядом.

Предполагаем также, что максимальная разность потенциалов на пластинах конденсатора не превышает критического значения U^* , начиная с которого влияние инжекции на движение жидкости существенно. Согласно оценкам, проведенным в работе [19], U^* имеет порядок 1 кВ, что соответствует напряженностям поля примерно 1 кВ/см при межэлектродных расстояниях больших или равных 1 см. В уравнении теплопроводности пренебрегаем вязкой диссипацией и джоулевым разогревом. Коэффициенты динамической вязкости и электропроводности считаем постоянными. Ограничиваем исследование рамками приближения Буссинеска. Кроме того, коэффициент β_σ , как правило, имеет порядок 10^{-2} K^{-1} , поэтому в обычных условиях при умеренном (около 10 К) нагреве $\beta_\sigma \Theta \ll 1$. Малость этого параметра дает возможность использовать безындукционное приближение, в котором в расчет берется только внешнее электрическое поле (по сравнению с ним электрическое поле, связанное с перераспределением заряда в жидкости, пренебрежимо мало). Теоретические исследования электротермической конвекции в постоянных полях, использующие это условие, находятся в хорошем согласии с экспериментом.

Используем безразмерные переменные на основе масштабов: времени — $\rho_0 h^2 / \eta$, расстояния — h , скорости — χ / h , температуры — Θ , потенциала — U , поля — U/h , давления — $\eta \chi / h^2$, плотности заряда — $\varepsilon U \beta_\sigma \Theta / h^2$. Тогда система уравнений электроконвек-

ции слабопроводящей жидкости в безразмерном виде с учетом равновесного решения для поля запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \\ &+ \text{Ra}_\sigma \rho_e \gamma \cos \omega t + \text{Ra} T \gamma, \\ \text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)T &= \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \\ \text{Pr}_e \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\text{Pr}_e}{\text{Pr}}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho_e &+ \rho_e + \frac{\partial T}{\partial z} \cos \omega t = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, v, w)$, p , T — поля соответственно скорости, давления и температуры, η — динамическая вязкость, χ — коэффициент температуропроводности, $\gamma = (0, 0, 1)$. Система (2) содержит следующие безразмерные параметры: тепловое число Рэлея Ra , число Прандтля Pr , электрическое число Прандтля Pr_e :

$$\begin{aligned} \text{Ra} &= \frac{\rho_0 g \beta \Theta h^3}{\eta \chi}, \quad \text{Pr} = \frac{\eta}{\chi \rho_0}, \\ \text{Pr}_e &= \frac{\varepsilon \eta}{h^2 \rho_0 \sigma_0}, \quad \text{Ra}_\sigma = \frac{\varepsilon U^2 \beta_\sigma \Theta}{\eta \chi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь Ra_σ — электрический аналог числа Рэлея, меняющий знак при изменении направления градиента температуры. Электрическое число Прандтля характеризует отношение времени релаксации заряда и гидродинамического времени (времени распространения гидродинамических возмущений) в слое. Когда $\text{Pr}_e \ll 1$, тогда объемный заряд релаксирует мгновенно; при $\text{Pr}_e \gg 1$ — заряд заморожен в жидкость и переносится благодаря ее движению; при произвольном значении Pr_e время релаксации заряда соизмеримо с характерными временами затухания вязких возмущений.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Представим поля скорости, температуры, давления и плотности заряда в виде: \mathbf{v} , $T = T_0 + \vartheta'$, $p = p_0 + p'$, $\rho_e = \rho_{e0} + \rho_e'$ (штрихи означают отклонения величин от равновесных значений T_0 , p_0 , ρ_{e0} , далее штрихи опускаем). Поскольку задача (2) изотропна в плоскости слоя, двумерные и пространственные возмущения одинаково опасны. Это позволяет ограничиться рассмотрением плоских возмущений: $\mathbf{v} = (u, 0, w)$, $\partial/\partial y = 0$.

Рассмотрим случай свободных недеформируемых изотермических границ слоя, на которых обращаются в нуль вертикальная компонента скорости, а также касательная компонента тензора вязких напряжений.

Введем функцию тока ψ и представим компоненты вектора скорости в виде

$$w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (4)$$

В терминах функции тока уравнения для возмущений примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi \right) &= \\ &= \text{Ra}_\sigma \frac{\partial \rho_e}{\partial x} \cos \omega t + \text{Ra} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \Delta^2 \psi, \\ \text{Pr} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \Delta \vartheta + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \text{Pr}_e \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\text{Pr}_e}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho_e}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} \right) &+ \\ &+ \rho_e + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cos \omega t = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

с соответствующими граничными условиями

$$z = 0, 1: \quad \psi = \psi'' = \vartheta = 0. \quad (6)$$

Для решения системы уравнений (5) с граничными условиями (6) будем использовать метод Галлеркина, применяя следующие аппроксимации полей функции тока и температуры, удовлетворяющие граничным условиям (6), и плотности заряда ρ_e :

$$\begin{aligned} \psi &= (A_1(t) \sin \pi z + A_2(t) \sin 2\pi z) \sin \pi k x, \\ \vartheta &= (B_1(t) \sin \pi z + B_2(t) \sin 2\pi z) \cos \pi k x + \\ &+ C(t) \sin 2\pi z, \\ \rho_e &= (D_1(t) \cos \pi z + D_2(t) \cos 2\pi z) \cos \pi k x + \\ &+ E(t) \cos 2\pi z. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь k — волновое число, характеризующее периодичность возмущений в плоскости слоя; A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , D_1 , D_2 , E , C — амплитуды, характеризующие различные пространственные моды. В разложениях (7) присутствуют слагаемые с разной четностью по z . Это связано с тем, что в уравнение для эволюции возмущений заряда входит содержащее первую производную по z слагаемое, которое обуславливает перераспределение энергии между модами различной четности.

Коэффициенты разложения в рядах (7) (амплитуды) определяются из интегральных условий, выражающих ортогональность невязки к каждой базисной функции. Подставим разложения (7) в систему (5), проведем процедуру ортогонализации и получим систему восьми обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_1}{\partial t} &= -\pi^2(1+k^2)A_1 + \frac{k}{\pi(1+k^2)} \text{Ra} B_1 - \\
 &\quad - \frac{4k}{3\pi^2(1+k^2)} \text{Ra}_\sigma \cos \omega t D_2, \\
 \frac{\partial A_2}{\partial t} &= -\pi^2(4+k^2)A_2 + \frac{k}{\pi(4+k^2)} \text{Ra} B_2 + \\
 &\quad + \frac{8k}{3\pi^2(4+k^2)} \text{Ra}_\sigma \cos \omega t D_1, \\
 \text{Pr} \frac{\partial B_1}{\partial t} &= -\pi^2(1+k^2)B_1 + \pi k A_1 + \pi^2 k A_1 C, \\
 \text{Pr} \frac{\partial B_2}{\partial t} &= -\pi^2(4+k^2)B_2 + \pi k A_2, \\
 \text{Pr} \frac{\partial C}{\partial t} &= -4\pi^2 C - \frac{\pi^2 k}{2} A_1 B_1, \\
 \text{Pr}_e \frac{\partial D_1}{\partial t} &= -D_1 + \frac{\pi^2 k \text{Pr}_e}{\text{Pr}} A_1 E - \pi B_1 \cos \omega t, \\
 \text{Pr}_e \frac{\partial D_2}{\partial t} &= -D_2 - 2\pi B_2 \cos \omega t, \\
 \text{Pr}_e \frac{\partial E}{\partial t} &= -E + \frac{\pi^2 k \text{Pr}_e}{2 \text{Pr}} A_1 D_1 - 2\pi C \cos \omega t.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Перемасштабируем переменные

$$\begin{aligned}
 t &\rightarrow \frac{\text{Pr}}{\pi^2(1+k^2)} t, \quad A_1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k} X, \\
 A_2 &\rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k} V, \\
 B_1 &\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi} Y, \quad B_2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi} W, \quad C \rightarrow \frac{Z}{\pi}, \\
 D_1 &\rightarrow \sqrt{2} S, \quad D_2 \rightarrow 2\sqrt{2} T, \quad E \rightarrow U,
 \end{aligned} \tag{9}$$

в результате получим следующую систему уравнений для описания электротермической конвекции (точка над переменными обозначает производную по времени):

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= \text{Pr}(-X + rY - eT \cos \omega t), \\
 \dot{Y} &= -Y + X + XZ, \\
 \dot{Z} &= -bZ - XY, \\
 \dot{V} &= \text{Pr}(-dV + (rW + eS \cos \omega t)/d), \\
 \dot{W} &= -dW + V, \\
 \dot{S} &= -gS + XU - gY \cos \omega t, \\
 \dot{T} &= -gT - gW \cos \omega t, \\
 \dot{U} &= -gU - XS - 2gZ \cos \omega t.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь введены следующие новые параметры:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_0}, \quad e = \frac{\text{Ra}_\sigma}{\text{Ra}_{\sigma 0}}, \quad \text{Ra}_0 = \frac{\pi^4(1+k^2)^3}{k^2}, \\
 \text{Ra}_{\sigma 0} &= \frac{3\pi^4(1+k^2)^3}{8k^2},
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$b = \frac{4}{1+k^2}, \quad d = \frac{4+k^2}{1+k^2}, \quad g = \frac{\text{Pr}}{\pi^2(1+k^2) \text{Pr}_e}, \tag{12}$$

где r, e — нормированные тепловое и электрическое числа Рэлея; $\text{Ra}_0, \text{Ra}_{\sigma 0}$ — критические числа, при которых начинается соответственно термогравитационная или электрокондуктивная конвекция; b, d — геометрические параметры, зависящие от волнового числа; g — параметр, определяющий отношение времен релаксации тепловых возмущений и возмущений заряда. Электрическое число Рэлея может быть как положительным, так и отрицательным, поскольку по определению (3) линейно зависит от разности температур обкладок конденсатора и при нагреве сверху будет отрицательным.

Динамическая система (10) является обобщением модели Лоренца [1] на случай конвекции слабопроводящей жидкости с электрокондуктивным механизмом зарядообразования в переменном электрическом поле. Фактически для получения системы (10) использован метод Галеркина с небольшим числом базисных функций. Несмотря на это ограничение, применение подобного подхода для описания конвекции в переменных полях [2, 3] показывает неплохое согласие теоретических и экспериментальных данных вплоть до значений управляющего параметра, соответствующих состоянию надкритичности 2.5 [2].

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд (10) интегрировалась численно методом пошагового интегрирования Рунге–Кутты–Мерсона четвертого порядка точности. Для интегрирования дифференциальных уравнений в качестве начальных условий либо брались малые значения амплитуд: X, Y, Z, V, W, S, T, U , либо осуществлялась процедура продолжения по параметру. В этом случае для некоторого значения параметра e при интегрировании по времени в качестве начальных данных использовались значения переменных, полученные в конце интегрирования при предыдущем значении параметра.

Полученные в результате интегрирования реализации временной эволюции амплитуды анализировались с помощью быстрого преобразования Фурье, и определялся спектральный состав отклика конвективной системы на электрическое поле. Хаотический режим определялся по спектру Фурье (у этого режима спектр сплошной).

Для описания интенсивности конвективных течений введем средний по времени теплопоток, приходящий на единицу горизонтальной границы конденсатора (число Нуссельта):

$$\text{Nu} = -\frac{1}{t_{\text{end}}} \frac{k}{2} \int_0^{t_{\text{end}}} \int_0^{2/k} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dt, \quad (13)$$

$$\text{Nu} = \frac{qh}{\kappa \Theta},$$

где q — плотность потока тепла, κ — коэффициент теплопроводности. После интегрирования по пространству с использованием разложения температуры по базисным функциям (7) осредненный теплоток (13) примет вид

$$\text{Nu} = 1 - \frac{2}{t_{\text{end}}} \int_0^{t_{\text{end}}} Z(t) dt. \quad (14)$$

Для интегрирования по времени выбирался интервал больше 100 периодов внешнего поля.

4. СЛУЧАЙ МГНОВЕННОЙ РЕЛАКСАЦИИ ЗАРЯДА

Сначала обсудим результаты моделирования нелинейных надкритических режимов электроконвекции на основе уравнений (10) в невесомости ($r = 0$), когда источником движения жидкости служит только сила Кулона. Кроме того, предположим, что электрическое число Прандтля $\text{Pr}_e = 0$ (следовательно, $g \rightarrow \infty$). Физически это значит, что рассматриваются достаточно толстые слои слабопроводящей жидкости, и время релаксации заряда много меньше характерного гидродинамического времени.

Система уравнений в этом случае упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \text{Pr}(-X + rY + eW \cos^2 2\pi\nu t), \\ \dot{Y} &= -Y + X + XZ, \\ \dot{Z} &= -bZ - XY, \\ \dot{V} &= \text{Pr}(-dV + (rW - eY \cos^2 2\pi\nu t)/d), \\ \dot{W} &= -dW + V. \end{aligned} \quad (15)$$

Остальные параметры жидкости при исследовании случая невесомости выбраны как в [15], где исследован случай постоянного поля: $\text{Pr} = 100$, волновое число $k = 0.962$ соответствует минимуму нейтральной кривой, что дает значения геометрических параметров $b = 2.077$, $d = 2.56$.

Отметим, что в постоянном электрическом поле [14, 15] равновесие жидкости теряет устойчивость колебательным образом. Частота нейтральных колебаний в минимуме нейтральной кривой ν_* и критическое электрическое число e_* зависят от параметров жидкости. В подкритической области $e < e_*$

возмущения затухают колебательным образом. При превышении порога устойчивости $e > e_*$ мягко возбуждаются периодические вторичные течения и в результате эволюции система выходит на установившийся колебательный режим с некоторой частотой. Отметим, что для обозначенного выше набора параметров критическая частота и критическое электрическое число равны: $\nu_* = 2.55$, $e_* = 41.51$ [15].

В переменном электрическом поле характер конвективных движений определяется параметрическим резонансом. Нелинейная динамика конвективных режимов, возникающих благодаря параметрической неустойчивости, проанализирована для произвольных частот и амплитуд электрического поля с помощью анализа спектров Фурье для временной эволюции амплитуды $X(t)$.

Карта динамических режимов электроконвекции на плоскости период $t_f = 1/\nu$ (обратная частота) — амплитуда модуляции e представлена на рис. 1. Отметим следующие режимы поведения жидкости, имеющиеся на диаграмме: I — механическое равновесие, все возмущения затухают; II — периодический режим колебаний с соизмеримыми частотами (1, 2, 3, 4 — области вынужденной синхронизации частоты внешнего поля и собственной частоты колебательной моды электроконвекции); III — между областями синхронизации расположены области квазипериодических режимов колебаний с двумя несоизмеримыми частотами и комбинированными частотами; IV — область хаотических колебаний. На вставках рис. 1 приведены фурье-спектры, полученные в точках A, B, C карты режимов и характеризующие периодические, квазипериодические и хаотические колебания.

Внутри областей синхронизации 1, 2, 3, 4 периодический отклик имеет частоту, связанную с частотой внешнего поля, и ее высшими гармониками. На вставке a рис. 1 изображен фурье-спектр периодического сигнала, синхронизированного с внешним воздействием, в нем содержится внешняя частота $\nu = 2.55$ и ее утроенная гармоника $\nu = 7.65$. Таким образом, в отличие от классического случая параметрического резонанса [13] уже в первой резонансной области вместо субгармонического наблюдается синхронный отклик. Этот факт и само расположение областей синхронизации на плоскости параметров период поля — электрическое число Рэлея можно объяснить следующим образом. Благодаря свойствам переменных коэффициентов системы уравнений (15) $e \cos^2 2\pi\nu t = e(1 + \cos 4\pi\nu t)/2$ при частоте внешнего поля ν частота изменения силы Кулона вдвое больше — 2ν . Нижние границы «язы-

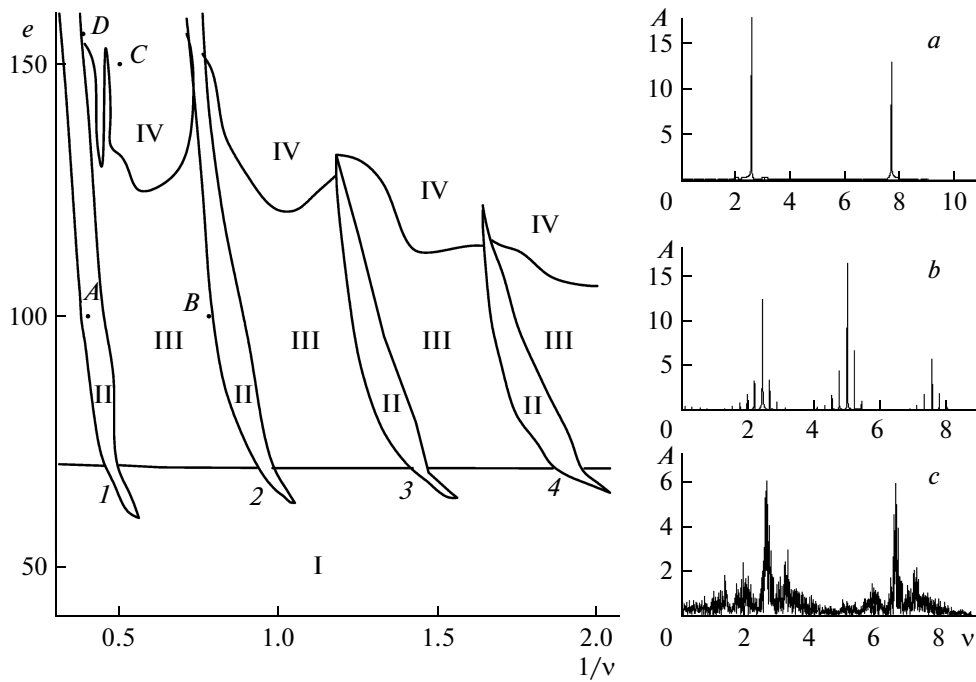


Рис. 1. Карта режимов на плоскости период модуляции $1/\nu$ — электрическое число Рэлея e : I — равновесный, II — периодический (области синхронизации 1, 2, 3, 4), III — квазипериодический и IV — хаотический режимы. На вставке представлены спектры колебаний в точках A, B, C, которым соответствуют следующие значения амплитуды и частоты: A — $\nu = 2.55$ ($t_f = 0.39$), $e = 100$; B — $\nu = 1.275$ ($t_f = 0.784$), $e = 100$; C — $\nu = 2$ ($t_f = 0.5$), $e = 150$

ков» параметрического резонанса соответствуют частотам внешнего воздействия 2ν , которые определяются из условия $2\nu = 2\nu_*/m$, где m — целое число, а ν_* — собственная частота колебательной системы в отсутствие переменного воздействия. В постоянном поле собственная частота, соответствующая минимуму нейтральной кривой, равна $\nu_* = 2.55$. Как показывают расчеты, нижние границы «языков» синхронизации находятся при частотах около ν_*/m , $m = 1, 2, 3, 4, \dots$

Поведение характеристик течения синхронного отклика в четных и нечетных областях синхронизации различно. Как было показано в [12] отклик электроконвективной системы на внешнее воздействие может принадлежать к двум различным классам синхронных возмущений, отличающихся по отношению к трансляции на половину периода внешнего воздействия.

В нашем случае слабопроводящей жидкости возмущения первого класса (H1) наблюдаются в нечетных областях синхронизации (1, 3, ...) и характеризуются преобразованием $t \rightarrow t + \pi/\omega$: $\psi \rightarrow -\psi$, $\vartheta \rightarrow -\vartheta$, $\rho \rightarrow \rho$, что соответствует нулевой средней за период изменения внешнего поля скорости и ну-

левой средней температуре в любой точке конвективной ячейке. В спектре колебаний функции тока основная частота совпадает с внешней (вставка a на рис. 1). Кроме того, в спектрах присутствуют высшие гармоники $\nu_n = (2n - 1)\nu_0$, $n = 1, 2, \dots$. Возмущения второго класса (H2) наблюдаются в четных областях синхронизации (2, 4, ...) и характеризуются преобразованием $t \rightarrow t + \pi/\omega$: $\psi \rightarrow \psi$, $\vartheta \rightarrow \vartheta$, $\rho \rightarrow -\rho$. Средняя за период изменения внешнего поля скорость и средняя температура в любой точке конвективной ячейки отличны от нуля. В спектре колебаний функции тока основная частота в два раза больше внешней, кроме того имеются гармоники $\nu_n = 2n\nu_0$, $n = 1, 2, \dots$

При переходе через границы области синхронизации отклик системы становится квазипериодическим. В фурье-спектре такого отклика (вставка b на рис. 1) содержатся две несоизмеримые частоты: 2.44 и 4.99 (их разность равна удвоенной внешней частоте 2.55) и комбинированные частоты, которые выражаются через линейную комбинацию этих двух частот $\nu_{m_1, m_2} = m_1\nu_1 + m_2\nu_2$, m_1 и m_2 — целые числа (0, $\pm 1, \pm 2, \dots$). В таблице приведены некоторые частоты спектра Фурье этого квазипериодического от-

Таблица. Частоты в спектрах Фурье при внешнем воздействии с частотой $\nu_0 = 1.275$, которые выражаются через две основные частоты в виде линейной комбинации $\nu_{m_1, m_2} = m_1\nu_1 + m_2\nu_2$

$e = 100$	$e = 107-141$
$\nu_{-2,1} = 0.11, \nu_{-6,3} = 0.33, \nu_{-10,5} = 0.55, \nu_{9,-4} = 2,$	2.55,
$\nu_{5,-2} = 2.22, \nu_{1,0} = \nu_1 = 2.44, \nu_{-3,2} = 2.66, \nu_{-7,4} = 2.88,$	5.1,
$\nu_{8,-3} = 4.55, \nu_{4,-1} = 4.77, \nu_{0,1} = \nu_2 = 4.99, \nu_{-4,3} = 5.21,$	7.64,
$\nu_{-8,5} = 5.43, \nu_{3,0} = 7.32, \nu_{-1,2} = 7.54, \nu_{-5,4} = 7.76,$	10.2
$\nu_{2,1} = 9.87, \nu_{-2,3} = 10.09, \nu_{-6,5} = 10.31$	

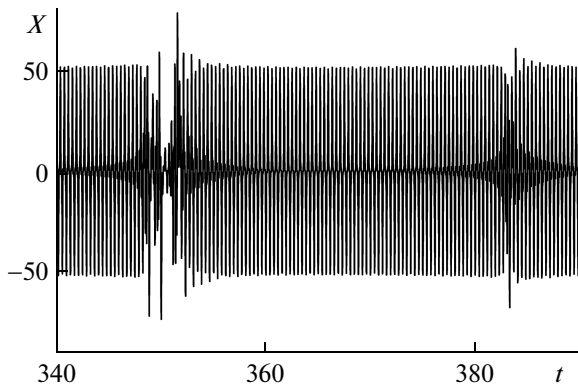


Рис. 2. Фрагмент эволюции первой амплитуды функции тока от времени при $\nu = 2.6, e = 156$ (точка D на рис. 1)

клика, а также частоты из области синхронизации, возникающей при росте электрического параметра.

Дальнейший рост электрического параметра приводит к появлению большого числа комбинационных частот на фоне двух несоизмеримых основных частот и переходу к хаотическому режиму (область IV) через квазипериодичность. На вставке c на рис. 1 представлен фурье-спектр хаотического сигнала.

Области синхронизации вклиниваются в область хаотических режимов (рис. 1). Переход к хаосу на границе областей II–IV происходит через перемежаемость. График зависимости первой амплитуды функции тока от времени для перемежаемого хаоса представлен на рис. 2.

5. УЧЕТ КОНЕЧНОГО ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ ЗАРЯДА

В случае тонких слоев жидкости необходимо учитывать конечность электрического числа Прандтля.

Так, например, в экспериментальном исследовании [18], проводимом на кукурузном масле, $Pr_e = 30$. Кроме того, для таких слабопроводящих жидкостей как конденсаторное и трансформаторное масла, или кукурузное масло число Прандтля $Pr = 400$. Эти характеристики электроконвективной системы влияют не только на пороги электроконвекции, но и на собственные частоты колебаний. Линейный анализ устойчивости равновесия жидкости в постоянном поле [14, 15] для данного набора параметров ($Pr_e = 30, Pr = 400$) позволяет определить критическое волновое число $k = 0.933$ (при $r = 0$), а также значения параметров $b = 2.138, d = 2.604, g = 0.722$, для которых проведены все дальнейшие вычисления в случае переменного поля.

5.1. Нагрев снизу

Рассмотрим случай подогрева снизу, например, $r = 0.8$ (подкритическая область по отношению к обычной тепловой конвекции). Собственная частота электроконвективных колебаний в постоянном поле [15] для случая $Pr_e = 30, Pr = 400$ равна $\nu_* = 0.11$, что значительно ниже, чем в предыдущем случае нулевого электрического числа Прандтля. На рис. 3 представлена карта режимов поведения слабопроводящей жидкости на плоскости период колебаний поля $1/\nu$ — электрическое число e . В области I равновесие жидкости устойчиво, все возмущения затухают, тепло передается теплопроводным механизмом ($Nu = 1$). С ростом напряженности электрического поля на границе областей I–II мягко возникают электроконвективные регулярные колебания, в спектре Фурье которых имеются кратные частоты $\nu_m = m\nu$, где m — целое число. При потере устойчивости для периода $1/\nu < 6.1$ основная частота в спектре равняется удвоенной внешней частоте $\nu_{main} = 2\nu$ (это соответствует синхронным колебаниям $H2$), а при $1/\nu > 6.1$ совпадает с ней:

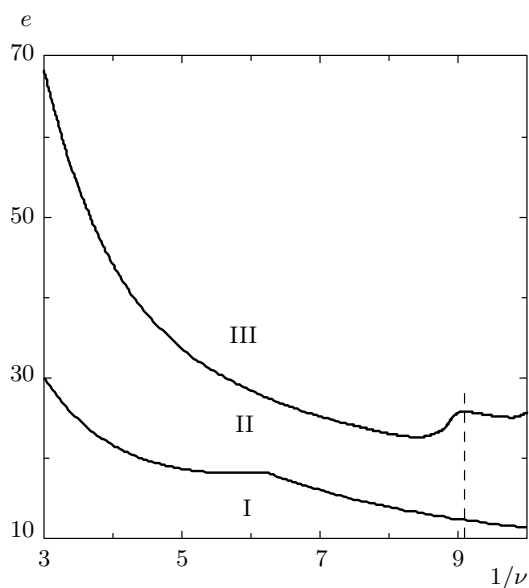


Рис. 3. Карта режимов на плоскости период колебаний поля $1/\nu$ — электрическое число e : I — равновесный, II — периодический, III — хаотический режимы (штриховая линия соответствует разрезу на рис. 4а при $\nu = 0.11$)

$\nu_{main} = \nu$ (синхронные колебания $H1$). Таким образом, в электроконвективной системе и при конечных значениях электрического числа Прандтля возможны два разных типа колебаний синхронного отклика. Область III соответствует хаотическим колебательным режимам с окнами периодичности. Переход к хаосу при рассмотренных частотах происходит через каскад удвоений периода колебаний, по сценарию Фейгенбаума.

Рассмотрим область, в которой неустойчивость начинается синхронными колебаниями класса $H1$. При частоте внешнего электрического поля $\nu = 0.11$ (штриховая линия на рис. 3) вычислен безразмерный теплопоток, который представлен на рис. 4а. При потере устойчивости реализуется синхронный режим с частотой колебаний внешнего поля ν , а фурье-спектр временной эволюции сигнала содержит только нечетные гармоники внешней частоты. Рост амплитуды поля приводит к изменению типа колебательного режима и характера теплопереноса через конвективную ячейку. С увеличением электрического числа, начиная со значения $e = 21.9$, теплоперенос через ячейку резко падает и основной частотой в системе становится удвоенная внешняя частота 2ν , а в спектральном составе отклика системы присутствуют только ее четные комбинации.

При $e = 24.7$ вновь появляются нечетные гармоники. Дальнейший рост амплитуды поля вызывает каскад удвоений периода колебаний. Первая бифуркация удвоения периода происходит при $e = 25.625$: в системе появляется частота, равная половине внешней ($\nu = 0.055$), второе удвоение — $e = 25.8131$ ($\nu = 0.0275$), третье — $e = 25.8558$ ($\nu = 0.01375$), четвертое — $e = 25.8649$ ($\nu = 0.06875$). Обнаружено, что хаос начинается при $e = 25.87$ (рис. 4а, точка А). Проведена оценка постоянной Фейгенбаума: $\delta = 4.692$, что с погрешностью 0.5% совпадает с ее точным значением [20]:

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_k - e_{k-1}}{e_{k+1} - e_k} = 4.669 \dots$$

В области хаотических колебаний найдено окно периодичности с минимальной частотой колебаний, равной трети внешней частоты и кратными ей гармониками. Например, при $e = 26$ основной частотой служит удвоенная внешняя частота 2ν , а все гармоники определяются соотношением: $\nu_m = 0.037m$, где m — целое число.

С помощью метода продолжения по параметру удалось обнаружить, что при уменьшении электрического числа e , смены режимов происходят при других значениях электрического числа (рис. 4а, штриховая линия), т.е. появляются гистерезисные переходы. Наименьшее значение электрического параметра, при котором реализуется хаотический колебательный режим, это $e = 26.51$ (рис. 4а, точка В). Окончательный период характеризуется удвоенной внешней частотой 2ν . Две другие гистерезисные петли, расположенные при меньшем значении электрического параметра, представляют собой переходы между синхронными колебаниями разных типов.

Для внешнего воздействия с $\nu = 0.333$ (ось ординат, рис. 3) неустойчивость наступает при $e = 30.02$ с появлением колебаний с частотой 2ν и четными гармониками (режим $H2$). Зависимость теплопотока от электрического числа для этого случая приведена на рис. 4б. При достижении значения $e = 35.0$ (соответствует излому на зависимости $Nu(e)$, рис. 4б) появляется периодический режим, в спектральном составе которого присутствуют как четные, так и нечетные гармоники основной частоты. При последующем увеличении амплитуды поля, начиная с $e = 61.2$, фурье-спектр содержит только нечетные комбинации внешней частоты, а значению $e = 64.3$ соответствует уже полный набор гармоник: четных и нечетных. С дальнейшим ростом электрического параметра происходит каскад бифуркаций удвоения периода и при $e = 68.20$ наступает хаос (точка А).

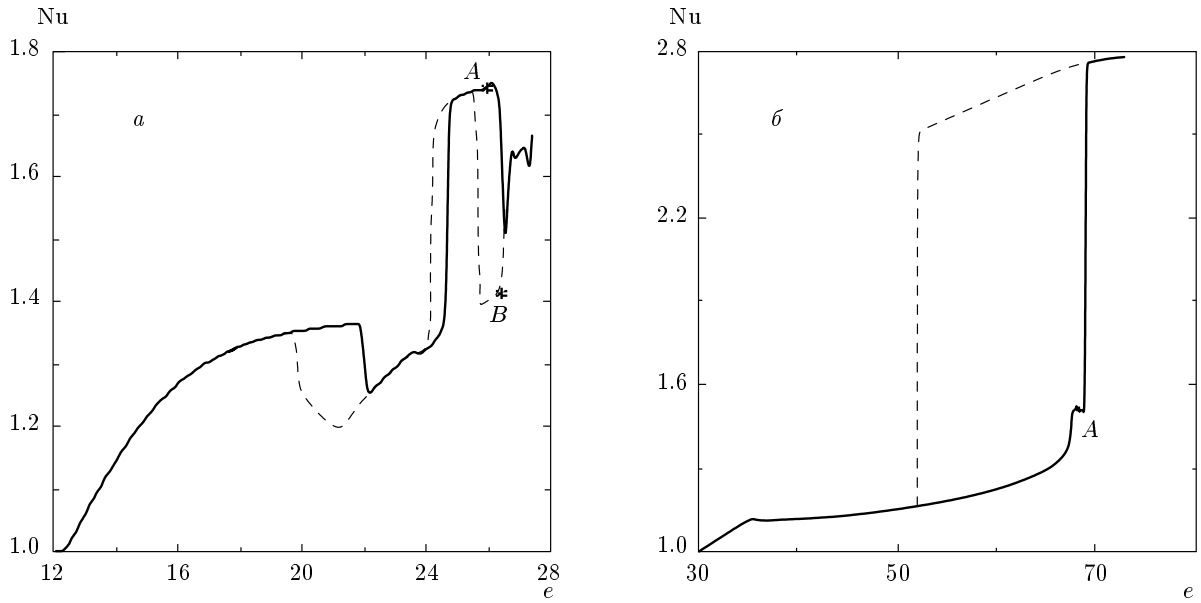


Рис. 4. Графики зависимости безразмерного теплопотока Nu от электрического числа e при различных значениях внешней частоты ν : 0.11 (а); 0.333 (б). Штриховые линии соответствуют движению справа налево; А — точка возникновения хаоса

При движении в сторону уменьшения электрического числа наблюдался гистерезис, представляющий собой переход между разными периодическими колебательными режимами. В данной области на гистерезисной ветви хаос не наблюдался. Для частот, которые больше $\nu = 0.333$, хаотических режимов в рассматриваемой области параметров обнаружить не удалось.

5.2. Нагрев сверху

Рассмотрим нелинейные режимы электроконвекции при нагреве сверху $r = -10$. Известно, что в отсутствие электрического поля при нагреве сверху жидкость находится в состоянии устойчивого равновесия. Нагреву сверху соответствуют не только отрицательные значения теплового числа Рэлея r , при этом электрический параметр e также отрицателен. Полученная в результате расчетов карта режимов представлена на рис. 5. На этом рисунке представлены две основные области: I — равновесие, II — область хаотических режимов. Штриховкой обозначены области гистерезисных переходов между разными режимами.

Линии AB и DEJ соответствуют границам областей нарастания малых квазипериодических колебаний, линия DCB — синхронных. Обе границы получены на основе линеаризации системы уравнений

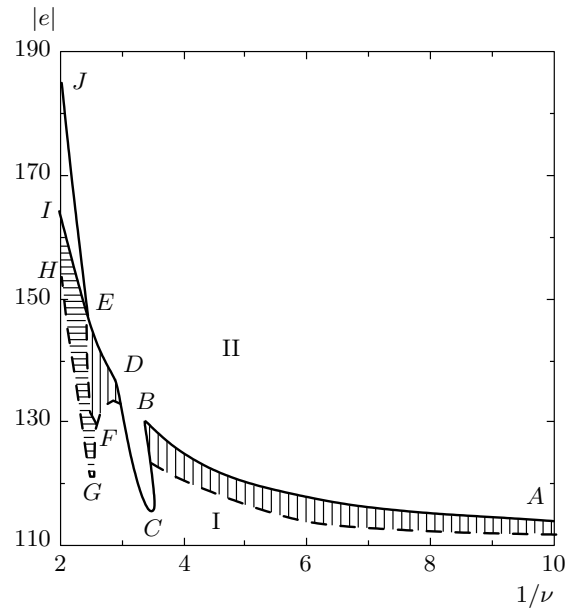


Рис. 5. Карта режимов на плоскости период колебаний поля $1/\nu$ — электрическое число e : I — равновесный, II — хаотический режимы. На линиях AB и DEJ переход к хаосу происходит через квазипериодичность, на CD — через перемежаемость; штриховка отмечает области гистерезисов

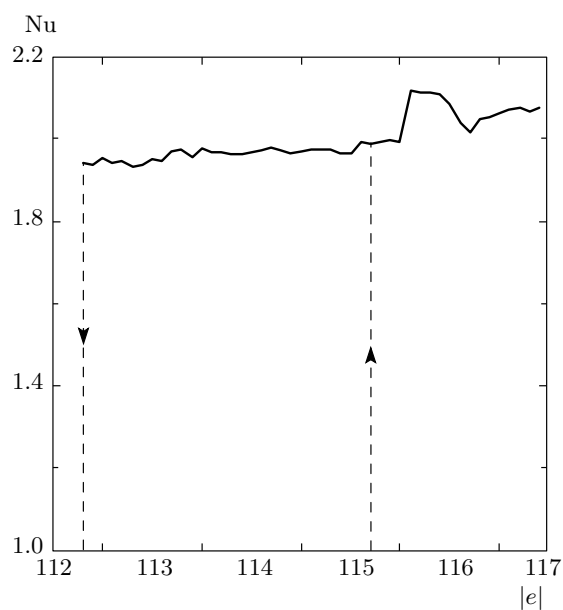


Рис. 6. График зависимости безразмерного теплового потока от модуля электрического числа при $\nu = 0.125$

(10) и их анализа с помощью теории Флоке. Нелинейный расчет показал, что в зависимости от частоты эволюция возмущений происходит по разным сценариям, а конечное течение зависит не только от амплитуды электрического поля, но и от начальных условий.

На участках *AB* и *DE* электроконвекция устанавливается в результате обратной бифуркации и эволюции квазипериодических колебаний. Рассмотрим к примеру поведение системы при воздействии внешнего электрического поля с частотой $\nu = 0.125$ ($1/\nu = 8$). На рис. 6 представлена зависимость числа Нуссельта от абсолютного значения электрического параметра.

Как следует из рис. 6, при увеличении $|e|$ конвекция в слое возникает жестко при $e = -115.2$ (штриховая линия со стрелкой вверх). Неустойчивость в этой точке появляется с рождением нарастающих квазипериодических колебаний. В результате нелинейной эволюции в спектре колебаний появляются комбинированные частоты и происходит переход к хаосу через квазипериодичность. При уменьшении $|e|$, в точке $e = -112.3$ (штриховая линия со стрелкой вниз), хаотические колебания теряют устойчивость и спустя некоторое время в системе устанавливается равновесие. Таким образом, между линиями *AB* (*DE*) и расположенной ниже штриховой линией наблюдается гистерезис между равновесием и

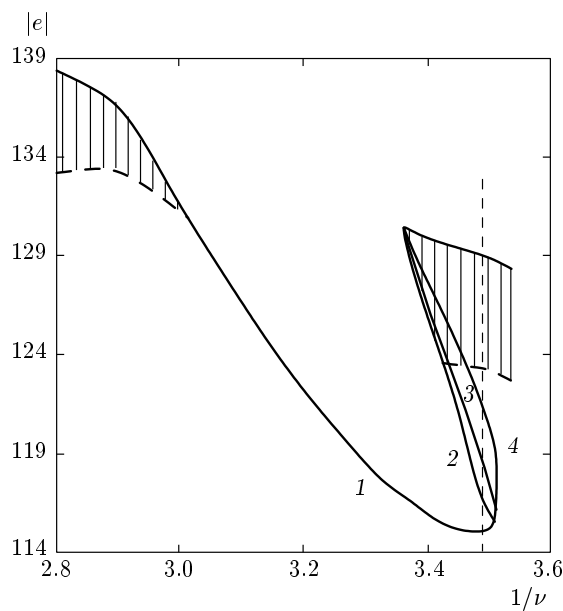


Рис. 7. Увеличенный участок области *BCD* карты режимов на рис. 5. На линии 1 хаос возникает при переходе через перемежаемость, на линии 2 возникает квазипериодический режим колебаний, на линии 3 происходит переход к синхронным периодическим колебаниям, на линии 4 устанавливается равновесие

хаосом: в зависимости от начальных условий могут возникнуть хаотические колебания или равновесие.

В области *BCD* хаос возникает при меньшем значении электрического числа (параметрический «язык хаоса»). При этом реализуется другой сценарий перехода к хаосу — через перемежаемость. На рис. 7 область *BCD* представлена подробнее. На участке *CD* (линия 1 на рис. 7) переход к хаосу происходит, как уже было отмечено, через перемежаемость. В этом режиме участки хаотических колебаний чередуются с участками синхронных колебаний. При движении в пространстве параметров снизу вверх на линии 2 (рис. 7) перемежающиеся хаотические колебания сменяются квазипериодическими колебаниями, которые переходят в синхронные периодические колебания на линии 3. Средняя амплитуда периодических колебаний убывает и устанавливается равновесие (линия 4). При дальнейшем росте внешнего поля наблюдается поведение, как на участке *AB* — жестким образом рождается хаотический режим течения.

Поведение числа Нуссельта при внешнем воздействии с частотой $\nu = 0.286$ (штриховая вертикальная линия на рис. 7) представлено на рис. 8.

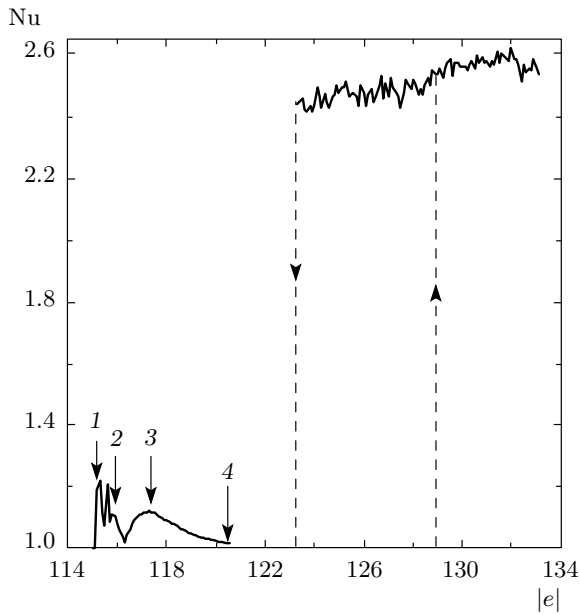


Рис. 8. График зависимости безразмерного теплопотока от модуля электрического числа при $\nu = 0.286$. В точке 1 возникает перемежаемый хаос, в точке 2 — квазипериодический режим колебаний, в точке 3 — синхронные периодические колебания, в точке 4 устанавливается равновесие

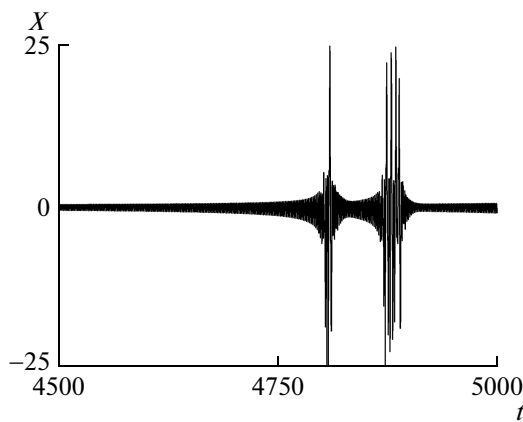


Рис. 9. Фрагмент эволюции амплитуды первой гармоники функции тока от времени при $\nu = 0.286$, $e = -115.2$

Согласно результатам линейной теории, неустойчивость возникает в системе при $e = -115.2$ (пересечение штриховой вертикальной линии и линии 1 на рис. 7) в результате нарастания синхронных возмущений с главной частотой колебаний, равной удвоенной внешней частоте 2ν , и фурье-спектром, содер-

жащим лишь четные комбинации внешней частоты (возмущения класса $H2$). В результате переходного процесса в слое появляется перемежаемый хаос. На рис. 9 представлен фрагмент временной эволюции амплитуды X , представляющий собой чередование нарастающих периодических (с частотой, равной удвоенной внешней частоте 2ν) и хаотических колебаний, характерное для данного режима. Фурье-спектр таких колебаний сплошной.

При достижении $e = -115.9$ (линия 2 на рис. 7) хаотические колебания переходят в квазипериодические: спектр Фурье меняется с непрерывного на дискретный. С увеличением $|e|$ квазипериодические колебания переходят в периодический колебательный режим с удвоенной внешней частотой 2ν , которые наступают при $e = -117.4$ (линия 3 на рис. 7). С последующим ростом $|e|$ эти возмущения затухают и при $e = -120.5$ наступает равновесие (линия 4 на рис. 7). При дальнейшем возрастании $|e|$ конвекция снова возникает при $e = -128.9$ (рис. 8, штриховая линия со стрелкой вверх). Механизм возникновения колебаний аналогичен описанному выше при частоте внешнего электрического поля $\nu = 0.125$: переход от равновесия к хаосу происходит через нарастающие квазипериодические колебания. Так же как и в предыдущем случае, при движении в сторону убывания $|e|$ был обнаружен гистерезис. Хаос сменяется равновесием при $e = -123.2$ (рис. 8, штриховая линия со стрелкой вниз).

На участке EI (рис. 5) эволюция квазипериодических возмущений приводит к установлению синхронных колебаний. Они оказываются устойчивы не только в области IEJ , но и при значениях электрического числа e в подкритической области ($EFGHI$). Таким образом, в области $EFGHI$ существует гистерезис между равновесием и периодическим режимом: в зависимости от начальных условий в жидкости реализуются либо синхронные периодические колебания, либо равновесие.

Чуть ниже границы EJ синхронные колебания становятся квазипериодическими и переход к хаосу происходит через квазипериодичность.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы нелинейные режимы электротермической конвекции и сценарии перехода к хаосу в слабопроводящей жидкости, находящейся в переменном электрическом поле горизонтального конденсатора. Рассмотрены случаи мгновенного и конечного времени релаксации заряда. В слу-

чае невесомости, нагрева слоя снизу или сверху на картах обратная частота — амплитуда поля найдены области существования периодических, квазипериодических и хаотических режимов электроконвективных колебаний. Исследованы синхронизация колебаний жидкости с внешним полем, гистерезисные переходы между различными режимами поведения слабопроводящей жидкости. Показано, что в зависимости от собственной частоты электроконвективной системы и частоты внешнего поля переход от периодических к хаотическим колебаниям может реализоваться через квазипериодичность, субгармонический каскад или перемежаемость.

Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 13-01-00171-а, 14-01-31253-мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sc.* **20**, 130 (1963).
2. R. G. Finucane and R. E. Kelly, *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 71 (1976).
3. G. Ahlers, P. C. Hohenberg, and M. Lücke, *Phys. Rev. A* **32**, 3493 (1985).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*. Т. 6. *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
5. В. А. Ильин, Б. Л. Смородин, *Письма в ЖТФ* **31**, 57 (2005).
6. P. G. Siddheshwar and D. Radhakrishna, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* **17**, 2883 (2012).
7. P. Atten, J. C. Lacroix, and B. Malraison, *Phys. Lett. A* **79**, 255 (1980).
8. Б. Л. Смородин, А. В. Тараут, *ЖЭТФ* **145**, 180 (2014).
9. Г. А. Остроумов, *Взаимодействие электрических и гидродинамических полей*, Наука, Москва (1979).
10. М. К. Болога, Ф. П. Гросу, И. А. Кожухарь, *Электроконвекция и теплообмен*, Штиинца, Кишинев (1977).
11. Ю. К. Стишков, А. А. Остапенко, *Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках*, Изд-во ЛГУ, Ленинград (1989).
12. B. L. Smorodin and M. G. Velarde, *J. Electrostat.* **50**, 205 (2001).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*. Т. 1. *Механика*, Наука, Москва (1986).
14. В. А. Ильин, Б. Л. Смородин, *Письма в ЖТФ* **33**, 81 (2007).
15. В. А. Ильин, *ЖТФ* **83**, 64 (2013).
16. M. J. Gross and J. E. Porter, *Nature* **212**, 1343 (1966).
17. С. А. Жданов, С. Р. Косвинцев, И. Ю. Макарихин, *ЖЭТФ* **117**, 398 (2000).
18. S. R. Kosvintsev, B. L. Smorodin, S. A. Zhdanov, and I. Yu. Makarikhin, *Proc. Intern. Conf. "Modern Problems of Electrophysics and Electrohydrodynamics of Liquids"* (MPEEL), St.-Peterburg (2000), p. 79.
19. А. И. Жакин, *УФН* **182**, 495 (2012).
20. П. Берже, И. Помо, К. Видаль, *Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности*, Мир, Москва (1991).