

# МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОСТЬ И КВАНТОВАЯ ДИФФУЗИЯ ИЗ САМОСОГЛАСОВАННОЙ ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ

*И. М. Суслов\**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 18 марта 2015 г.

Показано, что мультифрактальные свойства волновых функций неупорядоченной системы могут быть получены из самосогласованной теории локализации Вольхардта–Вольфле. Диаграммная интерпретация результатов позволяет вывести все скейлинговые соотношения, используемые в численных экспериментах. Приведены аргументы в пользу того, что однопетлевой результат Вегнера для размерности  $d = 2 + \epsilon$  является точным, так что мультифрактальный спектр — строго параболический. Обнаружена дефектность  $\sigma$ -моделей на четырехпетлевом уровне и обсуждаются возможные причины этого. Продемонстрирована крайне медленная сходимость результатов для фрактальных размерностей к термодинамическому пределу. Вопрос о связи мультифрактальности с пространственной дисперсией коэффициента диффузии  $D(\omega, q)$  решается компромиссным образом ввиду неоднозначности определения  $D(\omega, q)$ . Проведено сопоставление результатов с обширным численным материалом.

DOI: 10.7868/S0044451015110164

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих работах автора [1–5] предпринят систематический анализ численных алгоритмов, используемых при исследовании перехода Андерсона [6]. В предположении справедливости самосогласованной теории локализации Вольхардта–Вольфле [7] выведены уравнения конечно-размерного скейлинга для минимального показателя Ляпунова [1], усредненного контактанса [2] и статистики уровней [4]. Сопоставление с численными экспериментами показывает [1–5], что на уровне первичных данных они вполне совместимы с самосогласованной теорией вопреки утверждениям оригинальных работ, которые связаны с неоднозначностью обработки. Это обеспечивает серьезную поддержку аргументам [8, 9], согласно которым теория Вольхардта–Вольфле предсказывает правильное критическое поведение.

Предметом настоящей работы является изучение очередного алгоритма, основанного на скейлин-

ге для «обратных отношений участия» (inverse participation ratios) [6], которые определяются как

$$P_q = \int d^d r |\Psi(\mathbf{r})|^{2q}, \quad (1)$$

где  $\Psi(\mathbf{r})$  — нормированная волновая функция электрона в конечной неупорядоченной системе, имеющей форму  $d$ -мерного куба со стороной  $L$ . В металлической фазе функция  $\Psi(\mathbf{r})$  распространяется по всей системе, и из условия нормировки следует, что  $|\Psi(\mathbf{r})|^2 \sim L^{-d}$  и  $P_q \sim L^{-d(q-1)}$ . В критической области волновые функции приобретают мультифрактальный характер, так что

$$\langle P_q \rangle \sim L^{-D_q(q-1)} \sim L^{-d(q-1) + \Delta_q} \quad (2)$$

и вместо геометрической размерности  $d$  возникает набор фрактальных размерностей  $D_q$ . Согласно Вегнеру [10], для пространства размерности  $d = 2 + \epsilon$  справедлив результат

$$\Delta_q = q(q-1)\epsilon + O(\epsilon^4), \quad (3)$$

так что в первом  $\epsilon$ -приближении спектр аномальных размерностей  $\Delta_q$  является параболическим.

Фрактальные размерности  $D_q$  определяют также поведение некоторых корреляторов, в частности

$$\langle |\Psi(\mathbf{r})|^2 |\Psi(\mathbf{r}')|^2 \rangle \sim |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\eta}, \quad (4)$$

\*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

где

$$\eta = d - D_2. \quad (5)$$

Результат (4) справедлив в критической области  $L \lesssim \xi$ , где  $\xi$  — корреляционный радиус. В металлической фазе такое поведение сохраняется на масштабах  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \lesssim \xi$ , тогда как  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gtrsim \xi$  происходит выход на константу. В диэлектрической области поведение (4) справедливо при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \lesssim \xi$ , а при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gtrsim \xi$  оно сменяется экспоненциальным убыванием. Заметив, что интеграл по  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  от выражения (4) равен единице, нетрудно оценить коэффициент пропорциональности в правой части и для  $P_2$  получить

$$\langle P_2 \rangle \sim \begin{cases} L^{-d} (\xi/a)^\eta & (\text{металл}), \\ L^{-d} (L/a)^\eta & (\text{критическая область}), \\ \xi^{-d} (\xi/a)^\eta & (\text{диэлектрик}), \end{cases} \quad (6)$$

где  $a$  — межатомное расстояние. Три результата (6) сшиваются при  $\xi \sim L$ , а сопоставление с (2) дает соотношение (5).

При отклонении от критической точки обычно предполагают, что вместо (2) справедливо скейлинговое соотношение [6]

$$\langle P_q \rangle = L^{-D_q(q-1)} F(L/\xi), \quad (7)$$

которое можно использовать для исследования критического поведения. Ниже показано, что самосогласованная теория локализации позволяет воспроизвести результаты (2)–(7) и получить в явном виде все функциональные соотношения. Полученные скейлинговые функции могут быть сопоставлены с обширным численным материалом. При этом, как и в работах [1–5], выясняется, что первичные численные данные вполне совместимы с теорией Вольхардта–Вольфле, а противоположные утверждения соответствующих авторов связаны с неоднозначностью интерпретации и наличием малых параметров типа числа Гинзбурга.

Согласно некоторым авторам [11, 12], пространственная дисперсия коэффициента диффузии  $D(\omega, q)$  также связана с мультифрактальными свойствами. Заметим, что коэффициент диффузии  $D_L$  конечной системы размера  $L$  определяется по заданной функции  $D(\omega, q)$  с помощью соотношения

$$D_L \sim D(D_L/L^2, L^{-1}). \quad (8)$$

Если принять для  $D(\omega, q)$  степенное поведение по  $\omega$  и  $q$ , то легко убедиться, что комбинация

$$D(\omega, q) \sim \omega^{\eta'/d} q^{d-2-\eta'} \quad (9)$$

обеспечивает правильное поведение  $D_L \sim L^{2-d}$  в критической точке [13] при произвольном значении показателя  $\eta'$ . Согласно гипотезе Чолкера [11], справедливо соотношение  $\eta' = \eta$ , которое подтверждено в работах [11, 12] на основе детального численного анализа. На наш взгляд, эти аргументы являются логически дефектными; это было отмечено в заметке [14], но при этом не было предложено конструктивной альтернативы.

С другой стороны, попытки ввести пространственную дисперсию в схему самосогласованной теории локализации [15, 16] обнаружили крайнюю нежелательность этого. В пренебрежении пространственной дисперсией  $D(\omega, q)$  теория обладает множеством достоинств:

а) обеспечивает выполнение соотношения Вегнера  $s = \nu(d-2)$  между критическими индексами проводимости ( $s$ ) и корреляционного радиуса ( $\nu$ );

б) дает правильное значение верхней критической размерности  $d_{c2} = 4$ , которое следует из теоремы Боголюбова [17] о перенормируемости теории  $\phi^4$  [1, 5];

в) дает правильную зависимость  $D(\omega, 0) \sim \omega^{(d-2)/d}$  в критической точке, которая может быть получена разными способами [18–20] и подтверждается численно [21];

г) обеспечивает логически непротиворечивое описание конечных систем, рассматриваемых как квазинульмерные [2].

Учет пространственной дисперсии приводит к непоправимому разрушению всех свойств (а–г) [2, 5], что трудно считать случайным, так как теория Вольхардта–Вольфле как минимум является удачным приближением. Фактически утверждение об отсутствии существенной пространственной дисперсии  $D(\omega, q)$  сделано в более ранней работе [9] в результате детального анализа.

Ниже показано, что разрешение указанного противоречия носит компромиссный характер. Дело в том, что определение коэффициента диффузии  $D(\omega, q)$  неоднозначно и допускает «калибровочное преобразование» [9]. Пространственная дисперсия отсутствует в «естественной» калибровке, использованной в работе [9], но возникает при переходе к другой калибровке, делая возможным существование равенства  $\eta' = \eta$ . При этом остается открытым вопрос, какой калибровке соответствует наблюдаемый коэффициент диффузии; имеются указания, что равенство  $\eta' = \eta$  для нее нарушается (см. разд. 6).

Самосогласованная теория локализации сформулирована для обычных неупорядоченных систем (типа электронов в случайном потенциале), которые

соответствуют дайсоновскому ортогональному ансамблю [22]. Попытки ее обобщения на случай наличия магнитного поля (унитарный ансамбль) [23] или кулоновского взаимодействия [24] оказались неоднозначными и не привели к убедительным результатам. Отсутствует ясность и на физическом уровне. Согласно численным экспериментам для  $d = 3$ , магнитное поле практически не влияет на критическое поведение [25]<sup>1)</sup> и мультифрактальные свойства [27], тогда как  $\sigma$ -модели предсказывают радикальные изменения в обоих случаях [28]. Физический эксперимент подтверждает самосогласованную теорию как при наличии [29], так и при отсутствии [30] взаимодействия (см. [1, 2]), что указывает на возможность учета последнего в духе теории ферми-жидкости;  $\sigma$ -модели приводят к противоположному утверждению [31]. Ввиду сказанного, приводимые ниже результаты нельзя распространять на другие классы универсальности. Исключение составляет неравенство для  $\Delta_q$  (см. разд. 3), не связанное с самосогласованной теорией. Из него следуют дефектность  $\sigma$ -моделей для унитарного ансамбля на четырехпетлевом уровне и симметричная форма для корреляторов в однопетлевом приближении многих моделей.

По мнению автора, модифицированный вариант самосогласованной теории [9] является точным. Настоящая работа снимает целый ряд возражений, выдвигаемых против этой концепции. Согласно господствующему в литературе мнению, самосогласованная теория не описывает мультифрактальности; это мнение опровергается в разд. 2, 3. Обнаруженная дефектность  $\sigma$ -моделей на четырехпетлевом уровне (разд. 3, 7) делает неактуальными их расхождения с самосогласованной теорией, возникающие на том же уровне. Вывод скейлинговых соотношений и сравнение с численным экспериментом подтверждают так называемый мультифрактальный скейлинг [32] и показывают согласие теории работы [9] не только с прецизионными результатами для  $L \lesssim 20$  [1, 3], но и с результатами для рекордно больших систем (до  $L = 120$ ). Противоречие анализа работы [9] с гипотезой Чолкера разрешается компромиссным образом (см. разд. 6). Крайне медленная сходимость корреляторов к термодинамическому пределу (см. разд. 5) объясняет небольшие отклонения численных данных от однопетлевого результата Вегнера (3), который в рамках самосогласованной теории естественно считать точным (см. разд. 3).

<sup>1)</sup> Различие выявляется [26] лишь в результате сомнительной обработки (см. примечание 12).

## 2. ДВУХТОЧЕЧНЫЙ КОРРЕЛЯТОР

### 2.1. Диаграммный анализ

Рассмотрим коррелятор двух локальных плотностей состояний,

$$K_{E+\omega, E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \nu_{E+\omega}(\mathbf{r}) \nu_E(\mathbf{r}') \rangle = \left\langle \sum_{s, s'} |\psi_s(\mathbf{r})|^2 |\psi_{s'}(\mathbf{r}')|^2 \delta(E+\omega-\epsilon_s) \delta(E-\epsilon_{s'}) \right\rangle \quad (10)$$

( $\psi_s(\mathbf{r})$  и  $\epsilon_s$  — точные собственные функции и собственные значения для электрона в случайном потенциале), который тесно связан с коррелятором (4) и выражается через двухчастичные функции Грина:

$$K_{E+\omega, E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \text{Re} [\Phi^{RA}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}') - \Phi^{RR}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}')]. \quad (11)$$

Здесь

$$\Phi^{RA}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \langle G_{E+\omega}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_E^A(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \rangle \quad (12)$$

и  $\Phi^{RR}$  определяется аналогично. Практически диаграммная техника строится для величины  $\Phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{RA}(\mathbf{q})$  (рис. 1), которая является фурье-образом величины (12) с учетом трехимпульсных обозначений,

$$\Phi^{RA}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = L^{-3d} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \Phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{RA}(\mathbf{q}) \times \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2) + i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)/2]. \quad (13)$$

Величина  $\Phi^{RR}$  не содержит диффузионных полюсов и дает существенный вклад лишь в нулевом порядке по случайному потенциалу. Величина  $\Phi^{RA}$  определяется неприводимой четыреххвосткой  $U^{RA}$  (рис. 1a), которая в металлической фазе сводится к так называемому куперону (рис. 1б) [33]

$$U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^C(\mathbf{q}) = \frac{2U_0\gamma}{-i\omega + D_0(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2} \equiv U(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (14)$$

и отличается от него заменой классического значения  $D_0$  на полный коэффициент диффузии  $D(\omega, q)$  (см. разд. 6). Здесь  $U_0 = W^2 a^d$ ,  $W$  — амплитуда случайного потенциала,  $\gamma = \pi U_0 \nu_F$  — упругое затухание, определяемое соотношением  $\gamma = -\text{Im} \Sigma_{\mathbf{k}}^R$  по средней функции Грина<sup>2)</sup>

$$\langle G_{\mathbf{k}}^R \rangle = \frac{1}{E - \epsilon_{\mathbf{k}} - \Sigma_{\mathbf{k}}^R},$$

<sup>2)</sup> В дальнейшем опускаем знаки усреднения и считаем, что энергетическая переменная равна  $E + \omega$  у функций  $G^R$  и  $E$  у функций  $G^A$ .

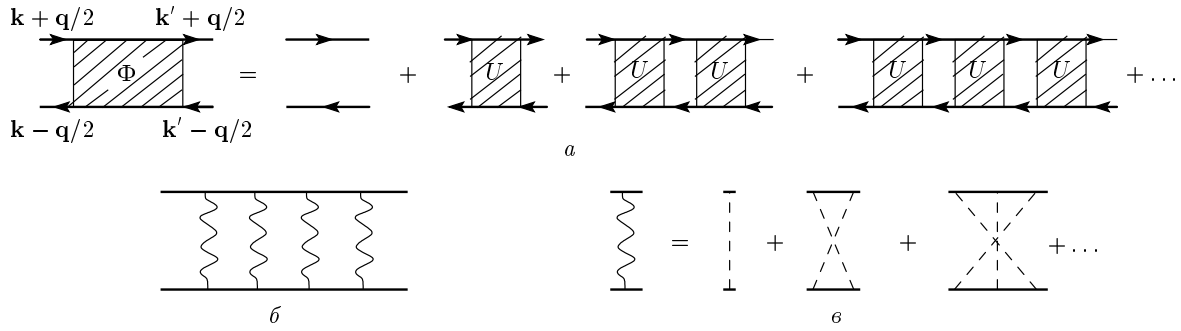


Рис. 1. а) Связь функции  $\Phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{RA}(\mathbf{q})$  с неприводимой четыреххвосткой  $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{RA}(\mathbf{q})$ ; б) лестничные диаграммы; в) определение куперона

а  $\nu_F$  — плотность состояний на уровне Ферми. В частности, однокуперонный вклад в коррелятор (10) имеет вид

$$K_{E+\omega, E}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \text{Re} L^{-3d} \times \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{q}_1} P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) \frac{2U_0\gamma}{-i\omega + D_0q_1^2} \times P_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}_1}(\mathbf{q}) \exp [i(2\mathbf{k} - \mathbf{q}_1) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (15)$$

(где  $P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^R G_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^A$ ) и легко вычисляется в полюсном приближении, когда в медленно меняющихся функциях типа  $P_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}_1}(\mathbf{q})$  пренебрегается зависимостью от импульсов типа  $\mathbf{q}_1$ , входящих в диффузионные знаменатели. В таком приближении легко вычислить вклады в  $\Phi^{RA}$  от лестничных диаграмм, показанных на рис. 1б; при этом диаграммы с четным ( $2n$ ) и нечетным ( $2n+1$ ) числом куперонов имеют качественно различное поведение<sup>3)</sup>:

$$\begin{aligned} \Phi^{(2n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &= 2k_n(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)k_n^*(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) [U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)]^{2n}, \\ \Phi^{(2n+1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &= [ \tilde{k}_n(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) \tilde{k}_n(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) + \tilde{k}_n(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \tilde{k}_n(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) ] [U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]^{2n+1}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $U(\mathbf{r})$  получается из (14) обратным фурье-преобразованием,

$$U(\mathbf{r}) = L^{-d} \sum_{\mathbf{q}} \frac{2U_0\gamma}{-i\omega + D_0q^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \propto \frac{1}{r^{d-2}}, \quad (17)$$

<sup>3)</sup> Для обеспечения симметрии  $\Phi^{RA}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$  относительно перестановки  $\mathbf{r}_3$  и  $\mathbf{r}_4$  добавлены также вклады диаграмм, полученных разворотом нижней  $G$ -линии.

а  $k_n(\mathbf{r})$  и  $\tilde{k}_n(\mathbf{r})$  — короткодействующие функции, определенные как

$$\begin{aligned} \tilde{k}_n(\mathbf{r}) &= L^{-d} \sum_{\mathbf{k}} (G_{\mathbf{k}}^R G_{\mathbf{k}}^A)^{n+1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ k_n(\mathbf{r}) &= L^{-d} \sum_{\mathbf{k}} (G_{\mathbf{k}}^R)^{n+1} (G_{\mathbf{k}}^A)^n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (18)$$

и убывающие как  $\exp(-r/l)$  на длине пробега  $l$ , которая имеет атомный порядок величины вблизи перехода Андерсона. Нетрудно видеть, что функция  $\Phi^{RA}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$  оказывается экспоненциально малой, если все  $\mathbf{r}_i$  существенно различны; дальнедействующие степенные хвосты возникают лишь в случае попарного совпадения аргументов: случай  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_4$  соответствует коррелятору (10), а случай  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4$  (и эквивалентный ему  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3$ ) — коррелятору

$$\mathcal{K}_{E+\omega, E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left\langle \sum_{s, s'} \psi_s(\mathbf{r}) \psi_s(\mathbf{r}') \psi_{s'}(\mathbf{r}) \psi_{s'}(\mathbf{r}') \times \delta(E + \omega - \epsilon_s) \delta(E - \epsilon_{s'}) \right\rangle. \quad (19)$$

Согласно (16), дальнедействующая часть коррелятора  $K_{E+\omega, E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  определяется четными, а коррелятора  $\mathcal{K}_{E+\omega, E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  — нечетными порядками.

Учитывая значения функций  $k_n(\mathbf{r})$  и  $\tilde{k}_n(\mathbf{r})$  в нуле (в предположении независимости плотности состояний  $\nu(\epsilon)$  от энергии  $\epsilon$ ),

$$\begin{aligned} k_n(0) &= -\frac{i\nu_F}{\gamma^{2n}} a_n, \quad \tilde{k}_n(0) = \frac{\nu_F}{\gamma^{2n+1}} a_n, \\ a_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(n + 1)}, \end{aligned} \quad (20)$$

имеем для существенных вкладов в коррелятор (10)

$$K^{(2n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{a_n^2}{\pi^2} \nu_F^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{2}{\pi \nu_F D(\omega)} \Pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]^{2n} \quad (21)$$

и коррелятор (19)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(2n+1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \\ &= \frac{a_n^2}{2\pi^2} \nu_F^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{2}{\pi \nu_F D(\omega)} \Pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]^{2n+1}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{r}) &= L^{-d} \sum_{\mathbf{q}} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{q^2 + m^2}, \\ m^2 &\equiv -\frac{i\omega}{D(\omega)} = \xi_{0D}^{-2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Замена  $D_0$  на  $D(\omega)$  распространяет формулы, полученные для металлической фазы, на всю область параметров, так как приводит к замене куперонных линий (см. рис. 1б) на блоки  $U$  (см. рис. 1а); при этом учета лестничных диаграмм достаточно, поскольку в терминах блоков  $U$  все диаграммы являются лестничными. В соответствии с работой [9], мы пренебрегаем зависимостью коэффициента диффузии от  $q$ , которая несущественна в подразумеваемой здесь калибровке (см. разд. 6). В конечной закрытой системе коэффициент диффузии имеет локализационное поведение  $D(\omega) = -i\omega \xi_{0D}^2$ , где  $\xi_{0D}$  — корреляционный радиус соответствующей квазиульмерной системы [2], так что величина  $m^2$  в (23) является конечной. При переходе к открытым системам возникает эффективное затухание  $\gamma_0$ , которое вводится заменой  $-i\omega \rightarrow -i\omega + \gamma_0$ , производимой как в члене  $-i\omega$ , так и в  $D(\omega)$ ; в результате возникает конечный статический коэффициент диффузии  $\gamma_0 \xi_{0D}^2$  и знак  $\operatorname{Re}$  в (21), (22) можно опустить.

## 2.2. Недостаточность полюсного приближения

Выражение (21) нетрудно просуммировать по  $n$ ,

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{\nu_F^2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2} \sqrt{1+t^2-u^2}}, \\ u &= \frac{2}{\pi \nu_F D(\omega)} \Pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (24)$$

если с учетом (20) представить  $a_n^2$  в виде двойного интеграла. Однако этот результат оказывается практически бесполезным из-за недостаточности полюсного приближения. Чтобы понять, в чем дело, оценим предельное значение (21) при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ . Воспользуемся тождеством Уорда [7]

$$\Delta \Sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = L^{-d} \sum_{\mathbf{k}'} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) \Delta G_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}), \quad (25)$$

$$\Delta G_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) \equiv G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^R - G_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^A,$$

$$\Delta \Sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) \equiv \Sigma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^R - \Sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^A$$

и соотношением

$$\Delta G_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = [-\omega + \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + \Delta \Sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})] P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}),$$

получим при  $\mathbf{q} = 0$

$$L^{-d} \sum_{\mathbf{k}'} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(0) P_{\mathbf{k}'}(0) = 1 + i\omega/2\gamma \quad (26)$$

в предположении, что  $\operatorname{Im} \Sigma_{\mathbf{k}}^R = -\gamma$  не зависит от  $\mathbf{k}^A$ . При малых  $\mathbf{q}$  и вершине  $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q})$ , не зависящей от импульсов, справедливо соотношение [33]

$$L^{-d} \sum_{\mathbf{k}'} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) P_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) = 1 + i\omega\tau - D_0\tau q^2, \quad \tau = \frac{1}{2\gamma}. \quad (27)$$

Имеются основания ожидать аналогичного соотношения в общем случае:

$$L^{-d} \sum_{\mathbf{k}'} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) P_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) = 1 + i\omega\tau - D(\omega, q)\tau q^2. \quad (28)$$

Действительно, правая часть выражения (25), являясь функцией  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{q}$ , фактически зависит от инвариантов  $k^2$ ,  $q^2$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}$  и может быть разложена по двум последним. В предположении независимости от  $\mathbf{k}$  левой части выражения (25) его можно усреднить по направлениям  $\mathbf{k}$ , что устраняет нечетные по  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}$  члены. В результате правая часть соотношения (28) содержит лишь четные члены разложения по  $\mathbf{q}$ ; нулевой член фиксируется в силу (26), а высшие определяют функцию  $D(\omega, q)$ , тогда как медленная зависимость от модуля  $\mathbf{k}$  оценивается при  $k^2 \approx \epsilon_F$ .

Условие  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  в (11) означает, что в (13) ввиду  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4$  возникает свертка  $\Phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q})$  по  $\mathbf{k}'$ , для которой соотношение (28) позволяет проводить радикальные упрощения; например, для диаграммы с двумя блоками  $U$  имеем

<sup>4</sup> Зависимость  $\Sigma_{\mathbf{k}}^R$  от  $\mathbf{k}$  не имеет качественного значения: в частности, она строго отсутствует в модели Ллойда, которая является вполне обычной с точки зрения перехода Андерсона. В общем случае пренебрежение зависимостью от  $\mathbf{k}$  соответствует в координатном пространстве (см. разд. 3) замене короткодействующих вкладов на  $\delta$ -функционные.

$$\begin{aligned}
L^{-d} \sum_{\mathbf{k}'} \Phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(2)}(\mathbf{q}) &= \\
&= L^{-2d} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}'} P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}(\mathbf{q}) P_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{q}) U_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}'}(\mathbf{q}) P_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) = \\
&= L^{-d} \sum_{\mathbf{k}_1} P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}(\mathbf{q}) P_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{q}) \times \\
&\quad \times \exp [i\omega\tau - D(\omega, q)\tau q^2] = \\
&= P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) \exp \{2 [i\omega\tau - D(\omega, q)\tau q^2]\}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Аналогично, для диаграммы с  $n$  блоками  $U$  имеем

$$\begin{aligned}
L^{-d} \sum_{\mathbf{k}'} \Phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(n)}(\mathbf{q}) &= \\
&= P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) \exp \{n [i\omega\tau - D(\omega, q)\tau q^2]\}, \quad (30)
\end{aligned}$$

а суммирование по  $n$  дает

$$\begin{aligned}
L^{-d} \sum_{\mathbf{k}'} \Phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) &= P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) \frac{2\gamma}{-i\omega + D(\omega, q)q^2} = \\
&= \frac{i\Delta G_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) + O(q)}{-i\omega + D(\omega, q)q^2}. \quad (31)
\end{aligned}$$

Но именно такое соотношение следует из уравнения Бете–Солпитера (см. формулу (63) в [9]), что позволяет отождествить введенную функцию  $D(\omega, q)$  с коэффициентом диффузии.

Подставляя (30) в соотношения (10), (13), имеем для вклада  $n$ -го порядка

$$\begin{aligned}
K^{(n)}(0, 0) &= \frac{1}{\pi^2} \operatorname{Re} L^{-2d} \times \\
&\times \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) \exp \{n [i\omega\tau - D(\omega, q)\tau q^2]\} = \nu_F^2. \quad (32)
\end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо при  $\omega \rightarrow 0$  в окрестности критической точки, где  $D(\omega, q)$  обращается в нуль одновременно при всех  $q$  [9]. Вводя безразмерный кондактанс  $g = \nu_F D L^{d-2}$  и замечая, что в металлической фазе  $g \sim (L/\xi)^{d-2}$  [19], имеем из (21)

$$K^{(2n)}(\mathbf{r}, 0) \sim \nu_F^2 (\xi/r)^{2n(d-2)}. \quad (33)$$

Мы видим, что вклады с разными  $n$  сравниваются при  $r \sim \xi$  и становятся порядка  $\nu_F^2$  в соответствии с (32). Отсюда ясно, что результат (33) справедлив при  $r \gtrsim \xi$ , тогда как при  $r \lesssim \xi$  зависимость от  $r$  выходит на насыщение. Причина этого в том, что в тождестве Уорда (25) происходят деликатные сокращения: при интегрировании по  $\mathbf{k}'$  в бесконечных пределах полюсная часть вершины  $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q})$  не дает вклада в интеграл из-за ортогональности к функции

$\Delta G_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q})$  [9]; поэтому полюсное приближение оказывается совершенно неприменимым. При  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  интегрирование по  $\mathbf{k}'$  эффективно ограничивается областью  $|\mathbf{k}'| \lesssim |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ ; поэтому при больших  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  ортогональность несущественна и можно пользоваться полюсным приближением.

Полный коррелятор  $K(\mathbf{r}, 0)$  определяется при  $r \gtrsim \xi$  двухкуперонным вкладом, тогда как при  $r \lesssim \xi$  требуется суммирование ряда, все члены которого имеют одинаковый порядок величины: параметр разложения  $u$  стремится к единице при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow 0$  и интеграл в (24) растет из-за логарифмической расходимости при  $u = 1$ . Конкретный закон роста определяется характером выхода вкладов  $K^{(2n)}(\mathbf{r}, 0)$  в (33) на постоянное значение (32). Например, если

$$K^{(2n)}(\mathbf{r}, 0) = \nu_F^2 (1 - \beta_n r^2/\xi^2), \quad r \lesssim \xi \quad (34)$$

с коэффициентами  $\beta_n \sim n^\gamma$ , то возникает степенное поведение  $K(\mathbf{r}, 0) \sim r^{-2/\gamma}$ . Фактически из аналогии соотношений (4) и (10) ожидается зависимость  $K(\mathbf{r}, 0) \sim r^{-\eta}$  (см. разд. 2.4). Учитывая вклад нулевого порядка, имеем

$$K(\mathbf{r}, 0) - \nu_F^2 \sim \begin{cases} \nu_F^2 (\xi/r)^\eta, & r \lesssim \xi, \\ \nu_F^2 (\xi/r)^{2(d-2)}, & r \gtrsim \xi. \end{cases} \quad (35)$$

В случае коррелятора  $\mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  равенство  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4$  в (13) имеет место при произвольных  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ , поэтому полюсное приближение оказывается изначально дефектным; всегда справедлив результат (32), тогда как (22) не имеет области применимости<sup>5)</sup>. Использование результата (31) дает

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} L^{-d} \sum_{\mathbf{q}} \frac{2\pi\nu_F}{-i\omega + D(\omega, q)q^2} \times \\
&\quad \times \exp [i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')], \quad (36)
\end{aligned}$$

т. е. реализуется функциональная форма, соответствующая вкладу первого порядка (ср. с (22)), но коэффициент диффузии соответствует другой калибровке и содержит пространственную дисперсию (см. разд. 6).

### 2.3. Ситуация для $d = 2 + \epsilon$

Рассмотрим конечную открытую систему, в которой импульс  $\mathbf{q}$  не имеет разрешенного значения  $\mathbf{q} = 0$  и возникает конечный статический коэффициент диффузии [2]. Для размерностей пространства

<sup>5)</sup> По этой причине для коррелятора  $\mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  нельзя провести рассуждение, которое проводится в разд. 2.3 для коррелятора  $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ .

$d = 2 + \epsilon$   $\epsilon \ll 1$  для параметра разложения в (21), (22) имеем

$$u = \frac{2\Pi(r)}{\pi\nu_F D} \sim \frac{1}{\nu_F D} \int \frac{d^d q}{q^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \sim \frac{L^\epsilon}{g} \int_{1/L}^{1/r} q^{-1+\epsilon} dq \sim \frac{1}{g} \frac{(L/r)^\epsilon - 1}{\epsilon}, \quad (37)$$

где мы ввели безразмерный кондактанс  $g = \nu_F D L^{d-2}$  и приняли  $m \lesssim L^{-1}$ , что справедливо в металлической фазе и в критической области. Выберем  $r$  так, что  $\epsilon \ln(L/r) \ll 1$ . Поскольку значение кондактанса  $g_c$  в точке перехода Андерсона имеет порядок  $1/\epsilon$ , при указанном условии параметр разложения  $u = \ln(L/r)/g$  мал во всей металлической области и в окрестности перехода в интервале  $L \exp(-1/\epsilon) \lesssim r \leq L$ . Поэтому предельное значение (29) не достигается, и коррелятор (35) определяется двухкуперонным вкладом. Поскольку корреляционный радиус  $\xi$  в металлической фазе меняется от минимального значения  $\xi_{min}$  до бесконечности, он не проявляется в качестве существенного масштаба длины; тогда из (35) следует, что

$$\eta = 2\epsilon \quad (38)$$

в соответствии с результатом Вегнера (см. соотношения (2)–(5)). Поскольку мы не ожидаем, что изменение характера решения происходит на каком-то масштабе, отличном от  $\xi$ , ограничение  $\epsilon \ln(L/r) \ll 1$  несущественно и двухкуперонное поведение сохраняется в металлической фазе при произвольных  $r$ :

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \nu_F^2 = \nu_F^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{L^\epsilon}{\pi g} \Pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]^2. \quad (39)$$

В локализованной фазе имеем  $m = \xi^{-1}$  и параметром разложения является  $u = \ln(\xi/r)/g$ , так что двухкуперонное поведение справедливо для  $\xi \exp(-g) \lesssim r \leq L$ . С другой стороны, при  $r \lesssim \xi$  ожидается такое же степенное поведение, как в критической области. Тем самым результат (39) распространяется на локализованную фазу.

#### 2.4. Связь корреляторов (10) и (4)

При построении теории возмущений система предполагается открытой, так что ее кондактанс  $g$  конечен и возможно разложение по  $1/g$ . Интерпретация выражений типа (10) в открытых системах подразумевает уширение  $\delta$ -функций на величину  $\Gamma \gg \Delta$ , где  $\Delta = 1/\nu_F L^d$  — среднее расстояние меж-

ду уровнями. Тогда в каждой из сумм по  $s$  и  $s'$  содержится  $\Gamma/\Delta$  членов, а каждая из  $\delta$ -функций дает множитель  $1/\Gamma$ . Считая, что все члены с  $s = s'$  (и соответственно с  $s \neq s'$ ) имеют одинаковые статистические свойства, получим при  $\omega = 0$

$$K_{E,E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx \frac{1}{\Gamma\Delta} \langle |\psi_E(\mathbf{r})|^2 |\psi_E(\mathbf{r}')|^2 \rangle + \frac{1}{\Delta^2} \langle |\psi_E(\mathbf{r})|^2 |\psi_{E'}(\mathbf{r}')|^2 \rangle. \quad (40)$$

Предположим для оценки, что  $\psi_E(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ , где огибающая  $\Psi(\mathbf{r})$  имеет неизменную форму, а начало отсчета  $\mathbf{R}$  меняется случайным образом. Тогда усреднение по беспорядку заменяется усреднением по  $\mathbf{R}$ , и для второго члена в (40) имеем

$$\frac{1}{\Delta^2} L^{-2d} \int d^d R d^d R' |\Psi(\mathbf{r} - \mathbf{R})|^2 \times |\Psi(\mathbf{r}' - \mathbf{R}')|^2 = \nu_F^2, \quad (41)$$

тогда как первый член имеет порядок

$$\nu_F^2 (\Delta/\Gamma) (L/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^{4\alpha-d}, \quad (42)$$

если  $\Psi(\mathbf{r}) \sim |\mathbf{r}|^{-\alpha}$  и  $d/2 < 2\alpha < d$ . Таким образом, в первом приближении вклад нулевого порядка  $\nu_F^2$  возникает из членов с  $s \neq s'$ , тогда как степенное поведение, соответствующее коррелятору (4), определяется членами с  $s = s'$ . В действительности такое разбиение не является строгим, так как изменения  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}'$  не являются независимыми и второй член в (40) также содержит зависимость от  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  (см. ниже (44)).

Ситуация становится более прозрачной в пределе закрытых систем, когда  $\Gamma/\Delta \rightarrow 0$ . Тогда при  $\omega = 0$  в окрестности энергии  $E$  с вероятностью  $\Gamma/\Delta$  имеется один уровень с некоторым номером  $s_0$  и в сумме (10) остаются лишь члены с  $s = s' = s_0$ ; при этом второй член в (40) исчезает. Таким образом, при переходе от открытых систем к закрытым следует опустить постоянный вклад  $\nu_F^2$ , после чего коррелятор (10) лишь коэффициентом отличается от коррелятора (4) и сопоставление с (39) дает

$$A \langle |\psi_E(\mathbf{r})|^2 |\psi_E(\mathbf{r}')|^2 \rangle = L^{-2d} \operatorname{Re} [L^\epsilon \Pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^2, \quad (43)$$

где коэффициент  $A$  определяется условием нормировки (см. разд. 4). Используя свойства диффузионного пропагатора  $\Pi(\mathbf{r})$  (см. разд. 5), легко показать, что результат (43) соответствует физическим представлениям о корреляторе (4): степенное поведение  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\eta}$ , имеющее место при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \lesssim \xi$ , сменяется

при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gtrsim \xi$  выходом на константу в металлической фазе и экспоненциальным убыванием в локализованной. Постоянное значение в металлической фазе определяется вкладом члена с  $\mathbf{q} = 0$ , который всегда имеется в закрытых системах [2]. В открытых системах он отсутствует, что и приводит к несущественности масштаба  $\xi$  в металлической фазе, которая отмечалась выше. Члены с  $s = s'$  одинаковы в корреляторах (10) и (19), что обеспечивает справедливость гипотезы работы [34] об одинаковом поведении этих корреляторов в критической области<sup>6)</sup>.

Рассмотрим теперь случай конечных частот  $\omega \gg \Delta$ . Тогда при  $\Gamma \sim \Delta$  в выражении типа (40) отсутствует первый член и сопоставление с (39) дает

$$L^{2d} \langle |\psi_E(\mathbf{r})|^2 |\psi_{E+\omega}(\mathbf{r}')|^2 \rangle \approx \approx 1 + \text{Re} \left[ \frac{L^\epsilon}{\pi g} \Pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]^2. \quad (44)$$

Степенное поведение пропагатора  $\Pi(\mathbf{r})$  сохраняется на масштабах, меньших  $L_\omega$ , где

$$L_\omega = (\nu_F \omega)^{-1/d}, \quad (45)$$

тогда как при  $r \gtrsim L_\omega$  оно сменяется экспоненциальным убыванием (см. разд. 4). Таким образом, волновые функции, относящиеся к энергиям  $E$  и  $E + \omega$ , становятся статистически независимыми при  $r \gtrsim L_\omega$  [34].

### 3. ВЫСШИЕ КОРРЕЛЯТОРЫ

Аналогичным образом можно определить  $n$ -точечные корреляторы

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \langle \nu_{E_1}(\mathbf{r}_1) \nu_{E_2}(\mathbf{r}_2) \dots \nu_{E_n}(\mathbf{r}_n) \rangle \quad (46)$$

и выразить их через многочастичные функции Грина. Например, для  $n = 3$

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = -\frac{1}{4\pi^3} \times \times \text{Im} \left[ \Phi^{RAR}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3) + + (\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3) \right] \quad (47)$$

и коррелятор определяется диаграммами, построенными на трех  $G$ -линиях (рис. 2). Отбор диаграмм удобно проводить в координатном представлении, в котором куперонная вершина (14) имеет вид

$$U^C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \quad (48)$$

<sup>6)</sup> В общем случае их поведение заведомо различно, что ясно из оценки типа (41).

и отличается от полной неприводимой вершины заменой короткодействующих функций типа  $k_n(\mathbf{r})$  на  $\delta$ -функции. Аналогичным образом при анализе степенных хвостов можно заменить на  $\delta$ -функции короткодействующие функции  $G^R(\mathbf{r})$  и  $G^A(\mathbf{r})$ . Согласно (48), координаты  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}_j$ , соответствующие  $G$ -линиям, подходящим слева к куперонной вершине, меняются местами после ее прохода (рис. 2), а куперонная линия дает множитель  $U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ . Дальнейшие вклады в коррелятор (46) определяются диаграммами, для которых координаты всех  $G$ -линий возвращаются к исходной последовательности после прохождения всех куперонных вершин. При этом функции  $U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  могут входить лишь в четных степенях, так как для восстановления исходной последовательности координаты  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}_j$  должны меняться местами четное число раз.

Аналогично разд. 2.4, коррелятор (46) связан с  $n$ -точечным коррелятором волновых функций. Если считать, что он степенным образом зависит от разностей  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ , то наиболее общая форма такой зависимости имеет вид

$$\langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^2 |\Psi(\mathbf{r}_2)|^2 \dots |\Psi(\mathbf{r}_n)|^2 \rangle \sim L^{-nd} \left( \frac{L}{a} \right)^{\kappa_n} \times \times \left[ \left( \frac{L}{r_{12}} \right)^{\alpha_n} \left( \frac{L}{r_{13}} \right)^{\beta_n} \left( \frac{L}{r_{23}} \right)^{\gamma_n} \dots \left( \frac{L}{r_{n-1,n}} \right)^{\delta_n} + + \text{перестановки } r_{ij} \right], \quad (49)$$

где перестановки обеспечивают симметрию выражения по всем  $r_{ij}$ . Без ограничения общности можно считать, что

$$\alpha_n \geq \beta_n \geq \gamma_n \geq \dots \geq \delta_n. \quad (50)$$

Используя (49) и «алгебру мультифрактальности», сформулированную в работе [34], можно вывести неравенства для  $\Delta_n$ . Если все  $r_{ij} \sim L$ , то коррелятор (46) разбивается на произведение [34]<sup>7)</sup>

$$\langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle \langle |\Psi(\mathbf{r}_2)|^2 \rangle \dots \langle |\Psi(\mathbf{r}_n)|^2 \rangle \sim L^{-nd}, \quad (51)$$

так что  $\kappa_n = 0$ . Если же все  $r_{ij} = 0$ , то расходимости в (49) обрезаются на масштабе  $a$ , тогда как в силу (1), (2)

$$\langle |\Psi(\mathbf{r})|^{2n} \rangle \sim L^{-nd + \Delta_n}, \quad (52)$$

<sup>7)</sup> Поскольку это не вполне очевидно, будем иметь в виду следующую процедуру. Введем масштаб  $L_\omega$ , связанный с частотой и определенный в (45). Тогда при  $r_{ij} \gtrsim L_\omega$  функции  $\Pi(r_{ij})$  экспоненциально малы (разд. 4) и из всех диаграмм типа рис. 2 остается лишь диаграмма без куперонных линий, соответствующая расщеплению (51). Выбрав  $L_\omega \ll L$ , получим при  $r_{ij} \sim L$  расщепление (51), после чего масштаб  $L_\omega$  можно увеличить до величины порядка  $L$ .



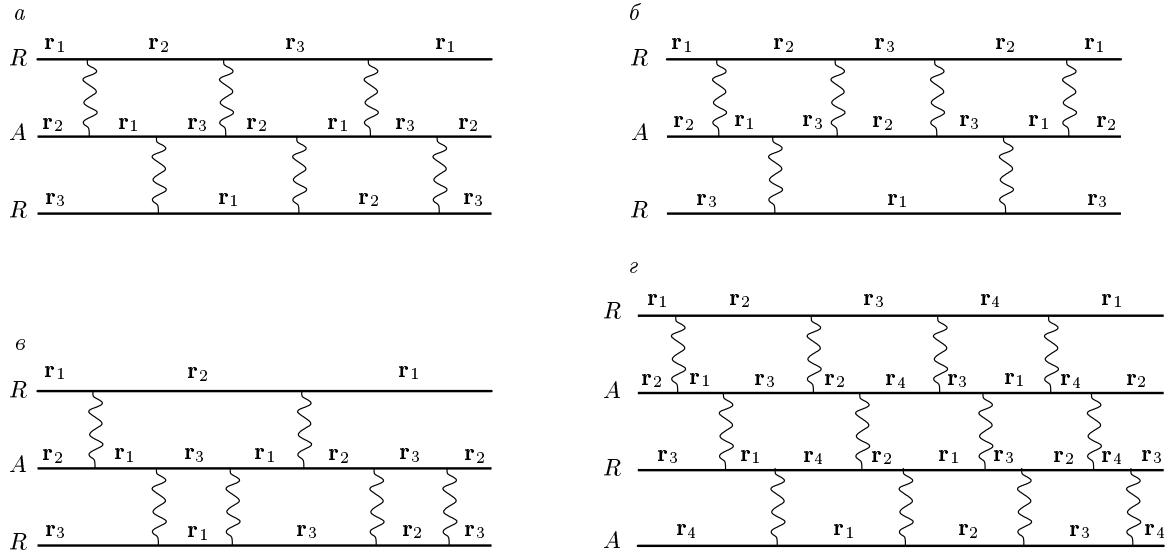


Рис. 2. При  $n = 3$  симметричные по всем  $r_{ij}$  вклады определяются диаграммами (а-б) и диаграммами, получаемыми из них отражениями относительно вертикальной или горизонтальной оси. в) Диаграммы, аналогичные а, существуют при произвольных  $n$

откуда

$$\Delta_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \dots + \delta_n. \quad (53)$$

Используя неравенства (50) и учитывая, что в сумме  $n(n-1)/2$  членов, получим  $\Delta_n \leq \alpha_n n(n-1)/2$ , что сводится к

$$\Delta_n \leq \Delta_2 \frac{n(n-1)}{2}, \quad (54)$$

если учесть, что показатель  $\alpha_n$  не зависит от  $n$  и совпадает с  $\eta = \Delta_2$ . Действительно, если  $r_{12} \ll L$ , а все остальные  $r_{ij} \sim L$ , то (49) дает<sup>8)</sup>

$$\langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^2 |\Psi(\mathbf{r}_2)|^2 \dots |\Psi(\mathbf{r}_n)|^2 \rangle \sim L^{-nd} (L/r_{12})^{\alpha_n}, \quad (55)$$

тогда как согласно (4) это пропорционально  $r_{12}^{-\eta}$ . Из результата Вегнера (3) ясно, что в главном  $\epsilon$ -приближении в соотношении (54) имеет место знак равенства и коррелятор (49) определяется наиболее симметричной конфигурацией

$$\langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^2 |\Psi(\mathbf{r}_2)|^2 \dots |\Psi(\mathbf{r}_n)|^2 \rangle \sim L^{-nd} \prod_{i < j} \left( \frac{L}{r_{ij}} \right)^\eta. \quad (56)$$

<sup>8)</sup> В общем случае в правой части (49) могут присутствовать менее сингулярные члены, определяемые индексами  $\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n, \dots, \tilde{\delta}_n$ , сумма которых меньше  $\Delta_n$ . Если при этом окажется, что  $\tilde{\alpha}_n > \alpha_n$ , то  $\tilde{\alpha}_n = \eta$  и  $\alpha_n < \eta$ . Поэтому в общем случае справедливо неравенство  $\alpha_n \leq \eta$ , которого достаточно для перехода к (54).

Вклад  $O(\epsilon^4)$  в формуле (3), соответствующей ортогональному ансамблю, имеет структуру  $-an(n-1) \times (n^2 - n + 1)$  с  $a > 0$  [10, 28], и при  $n > 1$  из (54) следует неравенство

$$n^2 - n + 1 \geq 3, \quad (57)$$

которое выполняется для  $n = 2, 3, 4, \dots$

Неравенство (54) не связано с самосогласованной теорией и имеет общий характер. Оно превращается в равенство для параболического спектра  $\Delta_q = \beta q(q-1)$  с произвольным  $\beta$ , приводя к симметричной форме (56) для  $n$ -точечного коррелятора с  $\eta = 2\beta$ . В частности, это актуально на однопетлевом уровне для унитарного ансамбля, когда [10, 28]

$$\Delta_n = n(n-1)(\epsilon/2)^{1/2} + (3/8)n^2(n-1)^2\zeta(3)\epsilon^2, \quad (58)$$

и в режиме квантового эффекта Холла (см. ниже). Подстановка (58) в (54) приводит при  $n > 1$  к неравенству

$$n(n-1) \leq 2, \quad (59)$$

которое нарушается при  $n = 3, 4, \dots$ . Следовательно, на четырехпетлевом уровне результаты, получаемые в  $\sigma$ -моделях, обнаруживают дефектность, которая обсуждается ниже в разд. 7.

Результат (56) допускает диаграммную интерпретацию. При малых  $\epsilon$  можно не рассматривать несимметричные вклады, хотя механизм их компенсации не вполне ясен. При  $n = 3$  симметричный

вклад низшего порядка происходит от диаграмм, показанных на рис. 2а–в:

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \text{const} \cdot \nu_F^3 \left( \frac{L^{d-2}}{g} \right)^6 \times \\ \times \Pi(r_{12})^2 \Pi(r_{13})^2 \Pi(r_{23})^2. \quad (60)$$

Диаграммы, аналогичные показанной на рис. 2а, существуют при любых  $n$ , что иллюстрируется на рис. 2г для  $n = 4$ : первые  $n - 1$  куперонов обеспечивают циклическую перестановку координат  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ , которую нужно повторить  $n$  раз, чтобы вернуться к исходной конфигурации. С учетом вклада нулевого порядка имеем

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) - \nu_F^n = \text{const} \cdot \nu_F^n \left( \frac{L^{d-2}}{g} \right)^{n(n-1)} \times \\ \times \prod_{i < j} \Pi(r_{ij})^2. \quad (61)$$

В пределе закрытых систем член  $\nu_F^n$  отсутствует (см. разд. 2.4), и выражение (61) соответствует главному симметричному вкладу в металлической области для  $r_{ij} \gtrsim \xi$ , который может быть распространен на произвольные  $r_{ij}$  аналогично разд. 2.3.

Формально результат (61) получен для  $d = 2 + \epsilon$  с малым  $\epsilon$ , однако его справедливость связана с двумя качественными моментами:

а) с несущественностью корреляционного радиуса  $\xi$  в металлической фазе как характерного масштаба длины;

б) с реализацией максимально симметричной формы (56) для  $n$ -точечного коррелятора.

Эти свойства могут быть приближенными и справедливыми только для малых  $\epsilon$ . Однако их качественный характер позволяет допустить, что они сохраняются в общем случае: это подтверждается диаграммной интерпретацией результатов. Тогда мультифрактальный спектр определяется соотношением  $\Delta_n = n(n-1)\epsilon$  и является строго параболическим. В дальнейшем будем использовать результат (61) в трехмерном случае, понимая его как экстраполяцию из области малых  $\epsilon$  в область  $\epsilon \sim 1$ , но имея в виду, что он может оказаться точным.

Простейшие аргументы не позволяют опровергнуть эту гипотезу. Апелляция к  $\epsilon$ -разложению несостоятельна, так как  $\sigma$ -модели обнаруживают дефектность, начиная с четвертой петли; возможная причина этого обсуждается ниже в разд. 7. Численные результаты также не могут считаться надежными ввиду крайне медленной сходимости к термодинамическому пределу (см. разд. 5). В пользу высказанной гипотезы имеются следующие аргументы.

1) Результат  $\eta = 2\epsilon$  выглядит правдоподобным, поскольку при  $d > 4$  выполняется условие  $\eta > d$ . Тогда из (56) следует, что нормировочный интеграл для всех актуальных корреляторов определяется атомным масштабом. Это согласуется с оценками методом оптимальной флуктуации и инстантонными вычислениями [35], согласно которым типичные волновые функции при  $d > 4$  локализованы на атомном масштабе даже в критической области.

2) Необычайная точность однопетлевого результата в применении к  $d = 3$  и  $d = 4$  неоднократно отмечалась в численных экспериментах [27, 32, 36, 37]. Так, положение максимума сингулярного спектра  $f(\alpha)$  (который имеет место при  $\alpha_0 = d + \epsilon$  в однопетлевом приближении) оценивалось как  $\alpha_0 = 4.03 \pm 0.05$  [36],  $\alpha_0 = 4.048 \pm 0.003$  [32] при  $d = 3$  и  $\alpha_0 = 6.5 \pm 0.2$  [36] при  $d = 4$ . Параболическая форма спектра подтверждается на уровне 10% [27, 32, 37], что следует считать удовлетворительным (см. разд. 5).

3) В режиме квантового эффекта Холла параболичность спектра имеет место на уровне  $10^{-3}$  [38] и имеются теоретические аргументы в пользу строгой параболичности [39–41] (подтверждающие свойство б)), основанные на связи с конформной теорией поля.

4) Справедливость теории Вольхардта–Вольфле прямо связана с упомянутым свойством а). Действительно, из конечно-размерного скейлинга известно, что  $g = g_c + \text{const} \cdot (L/\xi)^{1/\nu}$  в критической области [2, 6], тогда как в металлической фазе  $g \sim (L/\xi)^{d-2}$  [19]<sup>9)</sup>. Отсюда следует соотношение  $\nu^{-1} = d-2$  [7], если  $\xi$  не является существенным масштабом длины. При  $d > 4$  происходит модификация конечно-размерного скейлинга [2], приводящая к результату  $\nu = 1/2$  [7].

5) Применение «алгебры мультифрактальности» к корреляторам более общего вида, чем (49), приводит к утверждению о строгой параболичности мультифрактального спектра [42]. Таким образом, симметричная форма (56) является точной, а дефектность  $\sigma$ -моделей имеет место не только для унитарного, но и для ортогонального ансамбля.

<sup>9)</sup> Согласно теории однопараметрического скейлинга [13],  $g = F(L/\xi)$ , где функция  $F(x)$  в металлической фазе имеет поведение  $x^{d-2}$  для обеспечения соотношения  $g \propto L^{d-2}$ . Поскольку  $\xi \sim \tau^{-\nu}$  ( $\tau$  — расстояние до перехода), можно рассматривать  $g$  как функцию аргумента  $\tau L^{1/\nu}$ , которая допускает регулярное разложение по  $\tau$  ввиду отсутствия фазовых переходов в конечных системах. В критической области можно ограничиться первым порядком по  $\tau$ .

#### 4. СКЕЙЛИНГ ДЛЯ «ОТНОШЕНИЙ УЧАСТИЯ»

Выше мы установили, что поведение коррелятора (56) в критической точке обеспечивается диаграммным вкладом (61), что позволяет распространить результаты за пределы критической области. Переходя в (61) к закрытым системам, имеем аналогично разд. 2.4

$$\begin{aligned} \langle |\Psi(\mathbf{r}_1)|^2 |\Psi(\mathbf{r}_2)|^2 \dots |\Psi(\mathbf{r}_n)|^2 \rangle &= \\ &= A^{-1} L^{-dn} L^{n(n-1)\epsilon} \prod_{i < j} \Pi(r_{ij})^2, \end{aligned} \quad (62)$$

где параметр  $A$  определяется из условия равенства единице для интеграла по  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  от левой части:

$$\begin{aligned} A &= L^{-dn+n(n-1)\epsilon} \int d^d r_1 \dots \int d^d r_n \times \\ &\times \prod_{i < j} \Pi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2. \end{aligned} \quad (63)$$

При  $n = 2$  интеграл легко вычисляется, так что  $A$  оказывается регулярной функцией аргумента  $z = L/\xi_{0D}$ ,

$$\begin{aligned} A = A(z) &= \sum_{\mathbf{s}} \left[ \frac{1}{z^2 + (2\pi\mathbf{s})^2} \right]^2 = \\ &= \begin{cases} 1/z^4, & z \ll 1, \\ \tilde{c}_d z^{d-4}, & z \gg 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (64)$$

где  $\tilde{c}_d = \pi K_d(1-d/2)/2 \sin(\pi d/2)$ , а  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$  — вектор с целочисленными компонентами  $s_i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Согласно работе [2], величина  $z$  является функцией отношения  $L/\xi$ , которая определяется уравнением

$$\pm c_d (L/\xi)^{d-2} = H(z), \quad (65)$$

где  $c_d = \pi K_d/|2 \sin(\pi d/2)|$  и  $H(z)$  — функция, определенная в [2], с асимптотиками  $1/z^2$  при  $z \ll 1$  и  $-c_d z^{d-2}$  при  $z \gg 1$ . Полагая  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  в (43) и подставляя в (1), для  $P_2$  получим

$$\langle P_2 \rangle = A^{-1} L^{-d} (L/a)^{2\epsilon} \quad (66)$$

в согласии с (7). Используя соотношения (64), (65), имеем

$$\begin{aligned} \langle P_2 \rangle &\sim \\ &\sim \begin{cases} L^{-d} (\xi/a)^{2\epsilon} & (\text{металл}), \\ L^{-d} (L/a)^{2\epsilon} & (\text{критическая область}), \\ \xi^{-d} (\xi/a)^{2\epsilon} & (\text{диэлектрик}) \end{cases} \end{aligned} \quad (67)$$

в согласии с (6).

При произвольных  $n$  из соотношения (63) нетрудно получить, что  $A(z) \sim z^{-2n(n-1)}$  в металлической области и  $A(z) \sim z^{-d(n-1)+n(n-1)\epsilon}$  в локализованной. Первый результат следует из того, что при  $m \ll L^{-1}$  диффузионный пропагатор (23) определяется членом с  $\mathbf{q} = 0$  и практически постоянен. Второй следует после перехода от переменных  $\mathbf{r}_i$  к переменным  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1$  ( $i \geq 2$ ) с учетом независимости подынтегрального выражения от  $\mathbf{r}_1$  и его локализации при  $|\mathbf{r}'_i| \lesssim \xi_{0D}$ . Тогда, используя (65), имеем

$$A = \begin{cases} \sim (L/\xi)^{n(n-1)\epsilon} & (\text{металл}), \\ A_c \pm B(L/\xi)^{d-2} & (\text{критическая область}), \\ \sim (L/\xi)^{-d(n-1)+n(n-1)\epsilon} & (\text{диэлектрик}). \end{cases} \quad (68)$$

Полагая  $\mathbf{r}_{ij} = 0$  в (62), аналогично (66) получим

$$\langle P_n \rangle \sim A^{-1} L^{-d(n-1)} (L/a)^{n(n-1)\epsilon}, \quad (69)$$

откуда

$$\ln \langle P_n \rangle = -D_n(n-1) \ln(L/a) + \text{const} + F_n(L/\xi), \quad (70)$$

где константа выбрана из условия  $F_n(0) = 0$  и

$$\begin{aligned} F_n(x) &= -\ln \frac{A}{A_c} = \\ &= \begin{cases} -n(n-1)\epsilon \ln x & (\text{металл}), \\ \pm B_n x^{d-2} & (\text{критическая область}), \\ D_n(n-1) \ln x & (\text{диэлектрик}). \end{cases} \end{aligned} \quad (71)$$

Результат для  $F_n(x)$  при произвольных  $x$  можно получить из (63) в виде многократной суммы по импульсам. Однако такое выражение при больших  $n$  требует громоздких вычислений и не обеспечивает аналитического продолжения на нецелые  $n$ . Воспользуемся тем, что результат  $A \sim z^{-2n(n-1)}$ , справедливый для металлической фазы, по порядку величины сохраняется в критической области. Поэтому в этих областях  $F_n(x)$  отличается от  $F_2(x)$  множителем  $n(n-1)/2$ , тогда как в глубине локализованной фазы  $F_n(x) = (n-1)(D_n/D_2)F_2(x)$ . Простейшая интерполяционная форма, обеспечивающая такие свойства, имеет вид

$$F_n(x) = \begin{cases} C_+ F_2(\alpha x) & (\text{верхняя ветвь}), \\ C_- F_2(x) & (\text{нижняя ветвь}), \end{cases} \quad (72)$$

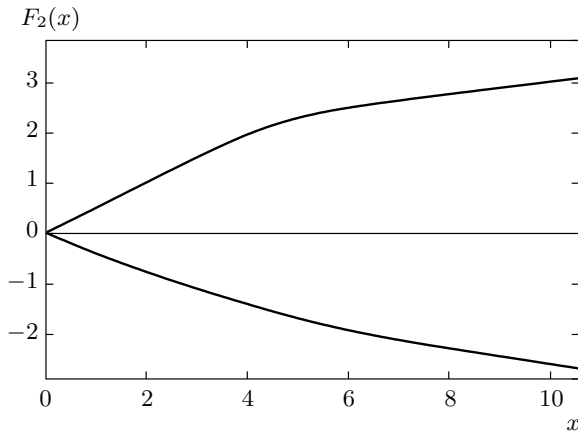


Рис. 3. Скейлинговая функция  $F_n(L/\xi)$  для  $n = 2$

т. е. две ветви  $F_n(x)$  имеют такое же поведение, как две ветви  $F_2(x)$ , различаясь лишь масштабным преобразованием. Коэффициенты  $C_+$  и  $C_-$  обеспечивают правильные асимптотики (71) при больших  $x$ , а параметр  $\alpha$  выбирается из условия симметрии двух ветвей  $F_n(x)$  при малых  $x$ :

$$C_+ = \frac{D_n(n-1)}{D_2}, \quad C_- = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \alpha = \left(\frac{C_-}{C_+}\right)^{1/\epsilon}. \quad (73)$$

Вычисляя функцию  $F_2(x)$  (рис. 3), можно сопоставить (72) с результатами Брндияра и Маркоша для  $n = 5$  [43] (рис. 4а). Наличие большого параметра  $n(n-1) = 20$  приводит к тому, что все численные данные оказываются в критической области  $x \lesssim 1$ , для которой зависимость  $F_n(x)$  линейна в соответствии со значением индекса  $\nu = 1$  в теории Вольхардта–Вольфле для  $d = 3$ . Линейность зависимостей на рис. 4а также очевидна, поэтому совмещение их с теоретической скейлинговой кривой не составляет проблемы (рис. 4б)<sup>10)</sup>.

Противоположная ситуация имеет место для численных данных Родригеца и др. [32] при  $n = 1/2$  (рис. 5а). Авторы этой работы принимали соотношение

$$\langle P_n \rangle \sim L^{-d(n-1)+\tilde{\Delta}_n} \quad (74)$$

для всей области параметров, считая, что  $\tilde{\Delta}_n = \Delta_n$  только в критической точке. Сопоставляя выражения (69) и (74), нетрудно получить

$$\tilde{\Delta}_n = \Delta_n + \frac{F_n(L/\xi)}{\ln(L/a)}. \quad (75)$$

При этом вводилось огрубление на масштабе  $l$ , который следует использовать в качестве  $a$  в (75), и рассматривалась зависимость  $\tilde{\Delta}_n$  от  $L/\xi$  при фиксированном  $\lambda = l/L$ , которая определяется функцией  $F_n(x)$ . Результаты работы [32] для  $n = 1/2$ ,  $\lambda = 0.1$  представлены на рис. 5а: выход на константу имеет место при  $W_c = 16.6$ , что дает оценку критической точки. Понимая отклонение от критической точки как  $\tilde{\Delta}_n(W, L) - \tilde{\Delta}_n(W_c, L)$ , нетрудно совместить все численные данные с теоретической скейлинговой кривой путем изменения масштаба вдоль горизонтальной оси (рис. 5б). Наличие малого параметра  $n(n-1)/\ln(1/\lambda) = 0.11$  приводит к тому, что основной массив данных соответствует большим значениям  $x = L/\xi$ , так что нижняя ветвь<sup>11)</sup> определяется логарифмической асимптотикой. При этом верхняя ветвь остается в линейном режиме ввиду малости параметра  $\alpha$ . Это объясняет, почему зависимости для  $W > W_c$  практически линейны (см. вставку на рис. 5б), а при  $W < W_c$  обнаруживают тенденцию к насыщению. Небольшие отклонения на рис. 5б связаны, по-видимому, с неточностью интерполяционной формы (72). Очевидная линейность зависимостей при малых  $L$  соответствует значению  $\nu = 1$  теории Вольхардта–Вольфле, тогда как утверждение работы [32] о результате  $\nu = 1.590$ , полученном с «беспрецедентной точностью», выглядит довольно нелепым<sup>12)</sup>.

При частотах  $\omega \gg \Delta$  для  $g$  и  $z = L/\xi_{0D}$  справедливо уравнение [3]

$$g_L = \frac{p}{z^2}, \quad \pm c_d \left(\frac{L}{\xi}\right)^{d-2} = \frac{p}{z^2} - c_d z^{d-2}, \quad (76)$$

где  $p = -i\omega/\Delta$ . В критической точке имеем  $\xi = \infty$

<sup>11)</sup> Ввиду отрицательности множителя  $n-1$  верхняя и нижняя ветви меняются местами, и для восстановления их нормального расположения мы рассматриваем величину  $-\tilde{\Delta}_n$ . Поскольку в [32] определение  $\tilde{\Delta}_n$  отличается знаком, рис. 5а прямо соответствует рис. 6с в [32].

<sup>12)</sup> В работе [32] использовалась схема обработки, предложенная в [44], которая уже подвергалась критике [45]. Она основана на использовании многопараметрической нелинейной процедуры, которая приводит к наличию огромного числа минимумов  $\chi^2$  и позволяет получить любое желаемое значение  $\nu$  в довольно широком интервале. «Желаемое» значение  $\nu = 1.590$  выбрано из соответствия с предыдущими работами (причина появления таких результатов обсуждалась в [1]), а его «беспрецедентная точность» соответствует флуктуациям в одном минимуме  $\chi^2$  и не имеет никакого отношения к реальности. Аналогичные соображения справедливы в отношении точности результатов для  $\alpha_0$  (см. разд. 3) и  $D_2$  (см. разд. 5).

<sup>10)</sup> Детали скейлинговой процедуры обсуждались в разд. 3 работы [5].

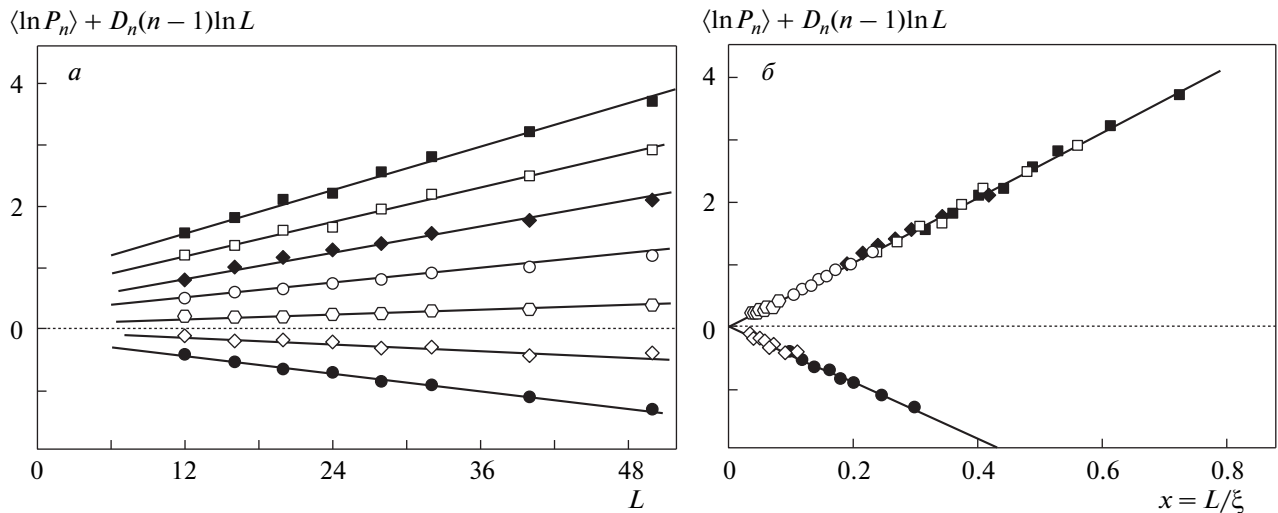


Рис. 4. Численные данные Брнджара и Маркоша при  $n = 5$ , извлеченные из рис. 2 работы [43], и их сопоставление с теоретической скейлинговой зависимостью. Использовались эмпирические значения  $D_2 = 1.28$  и  $D_5 = 0.96$ , приведенные в [43]. При сопоставлении пренебрегалось различием  $\langle \ln P_n \rangle$  и  $\ln \langle P_n \rangle$

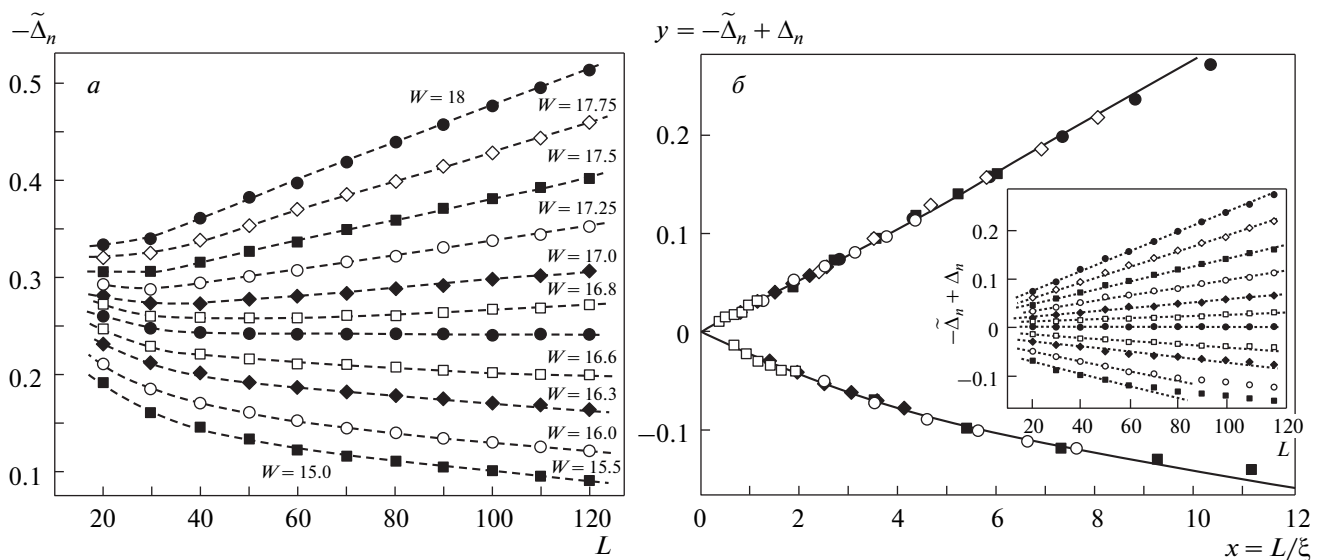


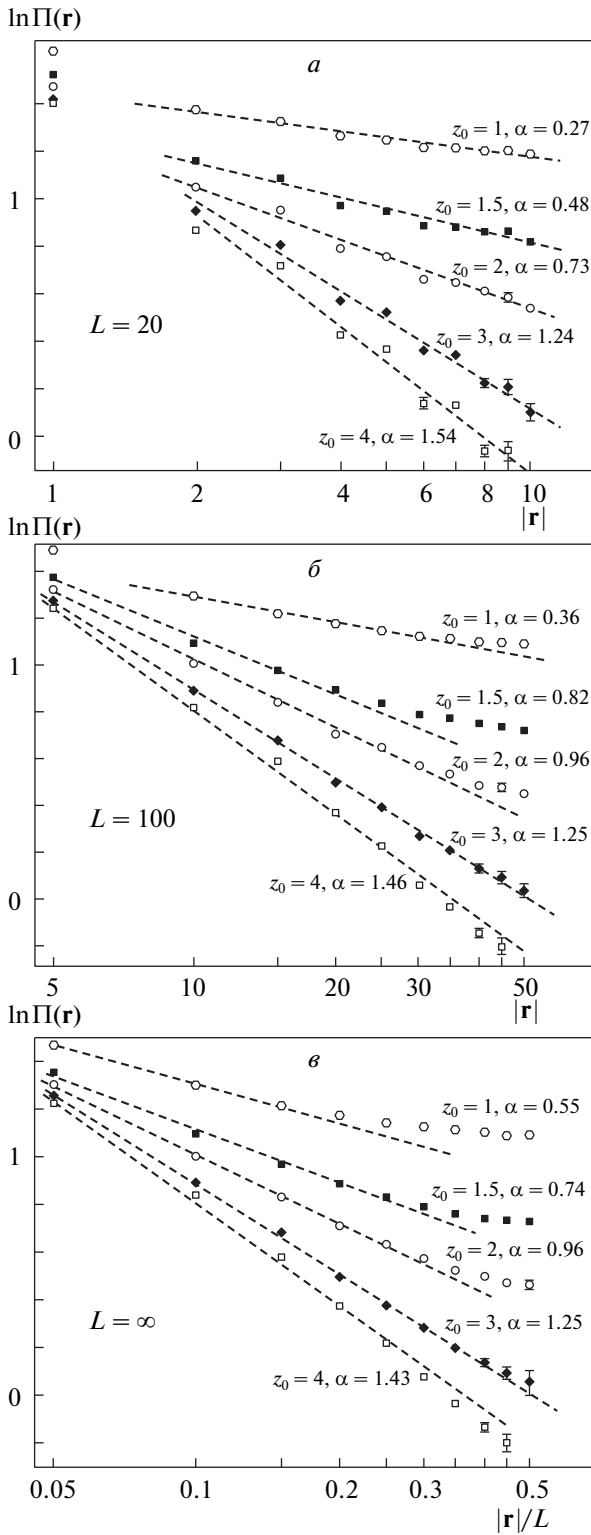
Рис. 5. Численные данные Родригеца и др. при  $n = 1/2$ , извлеченные из рис. 6с работы [32], и их сопоставление с теоретической скейлинговой зависимостью (72). На рис. 5б показаны точки, соответствующие  $L = 20, 40, 60, \dots$

и  $z \sim p^{1/d}$ , так что  $\xi_{0D}$  совпадает с масштабом  $L_\omega$ , введенным ранее в (45). Поэтому  $m^{-1} \sim L_\omega$  и пропагатор  $\Pi(\mathbf{r})$  экспоненциально убывает на масштабе  $L_\omega \ll L$ , что обеспечивает статистическую независимость  $|\psi_E(\mathbf{r})|^2$  и  $|\psi_{E+\omega}(\mathbf{r})|^2$  при  $r \gtrsim L_\omega$  и выполнение условия нормировки в (44) с точностью до малых поправок. Далее из (76) имеем  $g \sim (\omega/\Delta)^{(d-2)/d}$  в соответствии с результатами работ [18–20]. Подставляя

это соотношение для  $g$  в уравнение (44) и полагая в нем  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , с учетом доминирования второго члена получим

$$\langle |\psi_E(\mathbf{r})|^2 |\psi_{E+\omega}(\mathbf{r})|^2 \rangle \sim L^{-2d} \left( \frac{L_\omega}{a} \right)^\eta \propto \omega^{-\eta/d}. \quad (77)$$

Численная проверка такого скейлинга проводилась в работах [12, 46] и рассматривалась как подтвержде-



**Рис. 6.** Поведение диффузионного пропагатора  $\Pi(\mathbf{r})$  при различных  $z_0$  для  $L = 20$  (а),  $L = 100$  (б) и  $L = \infty$  (в). Начало отсчета по оси ординат выбрано произвольно

ние гипотезы Чолкера [11] о пространственной дисперсии коэффициента диффузии. Мы видим, что этот результат получается без учета зависимости  $D(\omega, q)$  от  $q$ .

### 5. СХОДИМОСТЬ К ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМУ ПРЕДЕЛУ

Согласно (61), все актуальные корреляторы определяются диффузионным пропагатором  $\Pi(\mathbf{r})$ , введенным в выражении (23), которое актуально использовать для закрытых систем (см. разд. 2.4). Последние содержат  $\mathbf{q} = 0$  в качестве разрешенного значения, поэтому примем  $\mathbf{q} = 2\pi\mathbf{s}/L$  ( $\mathbf{s}$  — вектор с целочисленными компонентами  $s_i$ ), что соответствует периодическим граничным условиям. При  $\mathbf{r} \neq 0$  сумма по  $\mathbf{q}$  сходится и не требует обрезания на больших импульсах. Тогда можно показать, что<sup>13)</sup>

$$\Pi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{s}} \Pi_0(\mathbf{r} + \mathbf{s}L), \quad (78)$$

где  $\Pi_0(\mathbf{r})$  — непрерывная версия (23),

$$\Pi_0(\mathbf{r}) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{q^2 + m^2} = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{r}{2m}\right)^\mu \times K_\mu(mr), \quad \mu = 1 - d/2 \quad (79)$$

( $K_\mu(x)$  — функция Мак-Дональда) со следующими асимптотиками при  $d > 2$ :

$$\Pi_0(r) = \begin{cases} \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{(4\pi)^{d/2}} m^{d-2} \left(\frac{2}{mr}\right)^{d-2}, & mr \ll 1, \\ \frac{(\pi/2)^{1/2}}{(2\pi)^{d/2}} \frac{m^{d-2}}{(mr)^{(d-1)/2}} e^{-mr}, & mr \gg 1. \end{cases} \quad (80)$$

При  $\mathbf{r} = 0$  примем сферическое обрезание  $|\mathbf{q}| < \Lambda$ , так что

$$\Pi_0(0) = \frac{K_d \Lambda^{d-2}}{d-2} \quad (81)$$

и рост при  $r \rightarrow 0$  в (80) насыщается при  $r \lesssim \Lambda^{-1}$ . Согласно (78), диффузионный пропагатор  $\Pi(\mathbf{r})$  представляет собой сумму сферически-симметричных функций с началом отсчета в центрах кубических блоков размера  $L$ . Этот факт, наряду с обрезанием  $|\mathbf{q}| < \Lambda$ , приводит к искажению зависимостей (80), характерных для бесконечной системы: возникает анизотропия по направлениям  $\mathbf{r}$  и появляются

<sup>13)</sup> Это следует из  $\alpha$ -представления и формулы суммирования Пуассона (см. Приложение к работе [2]).

осцилляции, связанные с обрезанием. Поэтому показатель в степенной зависимости  $\Pi(\mathbf{r}) \propto |\mathbf{r}|^{-\alpha}$  определяется в конечной системе с принципиально ограниченной точностью.

Согласно работе [2], в критической точке справедливо соотношение  $mL = z_0$ , где  $z_0$  — корень функции  $H(z)$  в (65). Параметр  $z_0$  не является универсальной константой, а зависит от деталей обрезания, а следовательно, — от конкретной модели (для сферического обрезания  $z_0 \approx 2$ ). На рис. 6а приведены результаты для  $\Pi(\mathbf{r})$  в трехмерном случае с  $\Lambda = \pi$  и различными  $z_0$  при  $L = 20$ . Нетрудно видеть, что в интервале  $z_0$  от 1 до 4 имеют место вполне удовлетворительные зависимости  $\Pi(\mathbf{r}) \sim |\mathbf{r}|^{-\alpha}$  с  $\alpha$  от 0.27 до 1.54, и их качество не позволяет выделить теоретическое значение  $\alpha = 1$  с достаточной точностью. При увеличении  $L$  до 100 (рис. 6б) интервал изменения  $\alpha$  при тех же условиях несколько сужается, но все равно остается широким (0.36–1.46). Самое удивительное, что картина не сильно изменяется в термодинамическом пределе  $L \rightarrow \infty$  (рис. 6в), если  $|\mathbf{r}|$  составляет конечную долю от  $L$ . Действительно, полагая  $\mathbf{r} = \mathbf{y}L$ ,  $mL = z_0$ , получим из (78) (пределы интегрирования указаны для модуля  $\mathbf{q}$ )

$$\Pi(\mathbf{r}) = L^{2-d} \sum_{\mathbf{s}} \int_0^{\Lambda L} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{s})}}{q^2 + z_0^2}, \quad (82)$$

так что в пределе больших  $L$  имеем  $\Lambda L \rightarrow \infty$  и обрезание эффективно снимается, после чего  $L$  входит только в общий множитель, не влияющий на зависимости от  $\mathbf{y}$ . Теоретическое значение  $\alpha = 1$  должно получаться в пределе  $|\mathbf{r}|/L \rightarrow 0$  независимо от  $z_0$ . Однако практически этот предел не достигается даже для размеров  $L \sim 100$ , максимально достижимых в настоящее время [51, 52]. Как ясно из рис. 6в, для  $|\mathbf{r}|$ , сравнимых с  $L$ , показатель  $\alpha$  определяется значением  $z_0$ , характерным для данной модели, и имеет разброс 0.55–1.43 для  $z_0 = 1$ –4. Удовлетворительные степенные зависимости наблюдаются для  $|\mathbf{r}| > 0.05L$ , что соответствует условию  $|\mathbf{r}| > 5$  для  $L = 100$ ; масштабы же  $|\mathbf{r}| \lesssim 5$  всегда выпадают из скейлинговой картины, так как для них существенно влияние обрезания. Согласно (61),  $\Pi(\mathbf{r})$  определяет поведение  $n$ -точечных корреляторов, и ввиду сказанного мы не считаем невероятным, что приводимые в настоящее время значения фрактальных размерностей могут на десятки процентов отличаться от истинных. В частности, мы не считаем возможным делать принципиальные утверждения на основании расхождения в третьем знаке [38].

Таблица. Оценки  $\eta$  и  $D_2 = d - \eta$  для систем различного размера  $L$

$L$	$\eta$	$D_2$	Публикация
10	$1.4 \pm 0.1$	$1.6 \pm 0.1$	[47]
16	$1.3 \pm 0.3$	$1.7 \pm 0.3$	[48]
20	$1.67 \pm 0.02$	$1.33 \pm 0.02$	[49]
40	$1.3 \pm 0.2$	$1.7 \pm 0.2$	[12]
40	$1.5 \pm 0.3$	$1.5 \pm 0.3$	[12]
47	1.32	1.68	[50]
48	$1.48 \pm 0.11$	$1.52 \pm 0.11$	[27]
60	$1.38 \pm 0.18$	$1.62 \pm 0.18$	[37]
80	$1.70 \pm 0.05$	$1.30 \pm 0.05$	[36]
120	$1.76 \pm 0.03$	$1.24 \pm 0.03$	[32]
240	$1.76 \pm 0.07$	$1.24 \pm 0.07$	[51]

Примечание. В отношении последнего результата см. примечание 4 к работе [34].

Ввиду (58) справедливо соотношение  $\eta = 2\alpha$ , и в силу сказанного можно ожидать разброса  $\eta = 1.1$ –2.8. В таблице приведены значения  $\eta$  и  $D_2 = d - \eta$ , полученные разными авторами для  $d = 3$ . Нетрудно видеть их большой разброс и систематический дрейф при увеличении размеров системы. Последняя оценка  $\eta = 1.76 \pm 0.07$  всего лишь на 10% отличается от значения  $\eta = 2$ , следующего из первого  $\epsilon$ -приближения, которое по приведенным аргументам может оказаться точным. Обнаруженные отклонения от параболического спектра также не превышают 10% [27, 32, 37].

## 6. О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ

Из приведенного изложения ясно, что вся картина, связанная с мультифрактальностью волновых функций, может быть получена в предположении отсутствия пространственной дисперсии коэффициента диффузии  $D(\omega, q)$ . На первый взгляд, это означает полную несостоятельность гипотезы Чолкера [11]. В действительности ситуация более сложная ввиду неоднозначности определения  $D(\omega, q)$ .

Аргументация работ [11, 12] основана на соотношении

$$\mathcal{K}(q) = \frac{\nu_F}{\pi} \frac{D(\omega, q)q^2}{\omega^2 + [D(\omega, q)q^2]^2} \quad (83)$$

для фурье-образа коррелятора (19) и на предполо-

жении об одинаковом поведении  $\mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  и  $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  в критической области [34]. Тогда из  $K(\mathbf{r}, 0) \sim r^{-\eta}$  следует  $\mathcal{K}(q) \sim K(q) \sim q^{-d+\eta}$  и  $D(\omega, q) \sim q^{d-2-\eta}$ . Фактически правильное соотношение имеет вид (см. ниже)

$$\mathcal{K}(q) = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left[ \frac{2\pi\nu_F}{-i\omega + D(\omega, q)q^2} + \phi_{reg}(q) \right] \quad (84)$$

и сводится к (83) в предположении действительности коэффициента диффузии и в пренебрежении регулярной частью  $\phi_{reg}(q)$ . Одинаковое поведение  $\mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  и  $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  можно гарантировать в пределе закрытых систем (см. разд. 2.4), когда  $D(\omega, q) \propto (-i\omega)$  и полюсный член в (84) не дает вклада в главном порядке по  $\omega$ . В общем случае комплексность коэффициента диффузии не позволяет делать надежных утверждений относительно  $D(\omega, q)$  на основе известного поведения  $\mathcal{K}(q)$ .

Как показано в работе [9], использование формул Кубо позволяет установить связь фурье-образа (12) при  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3$ ,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4$  с наблюдаемым коэффициентом диффузии,

$$\phi(q) = \frac{2\pi\nu_F}{-i\omega + D(\omega, q)q^2} + \phi_{reg}(q), \quad (85)$$

что после подстановки в выражение для  $\mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , аналогичное (11), дает соотношение (84), где регулярная часть отлична от (85) в связи со вкладом  $\Phi^{RR}$ . Разбиение на полюсную и регулярную части неоднозначно и допускает «калибровочное преобразование»

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{reg}(q) &= \phi_{reg}(q) - 2\pi\nu_F C(q), \\ \tilde{D}(\omega, q)q^2 &= \\ &= \frac{D(\omega, q)q^2 + i\omega C(q)[-i\omega + D(\omega, q)q^2]}{1 + C(q)[-i\omega + D(\omega, q)q^2]}, \end{aligned} \quad (86)$$

где  $C(q) = O(q^2)$  при малых  $q$ . Другое представление для  $\phi(q)$  следует из спектральных свойств квантового оператора столкновений [9]; если  $\lambda_s(q)$  — его собственные значения, то

$$\phi(q) = \frac{A_0(q)^2}{-\omega + \lambda_0(q)} + \sum_{s \neq 0} \frac{A_s(q)^2}{-\omega + \lambda_s(q)}, \quad (87)$$

где  $A_0^2(q) = -2\pi i\nu_F + O(q^2)$ ,  $A_s(q)^2 = O(q^2)$ . Собственное значение с  $s = 0$  при малых  $q$  имеет поведение  $\lambda_0(q) \sim q^2$ , и можно принять по определению

$$\lambda_0(q) = -iD(\omega, q)q^2. \quad (88)$$

Тогда (87) совпадает с (85), где регулярная часть имеет поведение  $q^2$  при малых  $q$  и может быть

полностью исключена калибровочным преобразованием. Калибровку (88) будем называть «естественной». Именно для нее в работе [9] установлено отсутствие существенной пространственной дисперсии. Другая выделенная калибровка определяется условием  $\phi_{reg}(q) \equiv 0$ ; в частности, она актуальна в локализованной фазе, когда  $D(\omega, q) = -i\omega d(q)$  и справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + d(q)q^2} &= \mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{A}(\mathbf{r}), \\ \mathcal{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\nu_F} \left\langle \sum_s |\psi_s(\mathbf{r})|^2 |\psi_s(0)|^2 \delta(E - \epsilon_s) \right\rangle, \end{aligned} \quad (89)$$

следующее из критерия Березинского–Горькова [9]. Член с  $s = s'$  в корреляторе (19) дает в локализованной фазе вклад  $\delta(\omega)$ , который при переходе к  $\phi(q)$  преобразуется в сингулярность  $1/\omega$ , отождествляемую с диффузионным полюсом в (85). При этом принципиально важно включить в полюсный член все вклады порядка  $1/\omega$ , которые могут содержаться в  $\phi_{reg}(q)$ . Они заведомо присутствуют в  $\phi_{reg}(q)$  для калибровки (88), так как в сумме (87) имеются члены с  $\lambda_s(q) \sim \omega$  [9]. Включение всех таких вкладов в диффузионный знаменатель гарантировано при  $\phi_{reg}(q) \equiv 0$ . Поэтому именно такая калибровка подразумевается в соотношении (89). Сопоставление (89) с (4) показывает, что  $\mathcal{A}(r) \sim r^{-\eta}$  при  $r \lesssim \xi$  и  $d(q) \sim q^{d-2-\eta}$  при  $q \gtrsim \xi^{-1}$  в соответствии с гипотезой Чолкера (при этом  $d(q) = \text{const} = \xi^2$  при  $q \lesssim \xi^{-1}$  и  $\mathcal{A}(r) \sim \exp(-r/\xi)$  при  $r \gtrsim \xi$ )<sup>14</sup>. Если же используется калибровка с  $d(q) = \text{const}$ , то вклад  $q^{-d+\eta}/\omega$  содержится в  $\phi_{reg}(q)$ .

«Естественная» калибровка (88) использовалась в анализе работы [9], и именно такое определение коэффициента диффузии подразумевается в вершине  $U^{RA}$ . Если в формуле (12) работы [9] использовать полюсное приближение, полагая  $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$  в функции  $F(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$ , то формула (65) этой работы дает  $F(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, \mathbf{q}) = 2U_0\gamma$ , если принять, что  $\operatorname{Im} \Sigma_{\mathbf{k}}^R = -\gamma$  не зависит от  $\mathbf{k}$  и определить  $U_0$  соотношением  $\gamma = \pi U_0 \nu_F$ . В результате полюсный член вершины  $U^{RA}$  получается из куперонного вклада (14) заменой  $D_0$  на  $D(\omega, q)$  и пренебрежением зависимости от  $q$ . Такая форма вершины и использовалась выше. Успешное воспроизведение мультифрактальных свойств подтверждает выводы работы [9].

<sup>14</sup> Результаты для  $D(\omega, q)$  в локализованной фазе и критической области сшиваются при  $\xi \sim L_\omega$ . Поэтому в критической точке имеем  $D(\omega, q) \sim \omega L_\omega^2 \sim \omega^{(d-2)/d}$  при  $qL_\omega \lesssim 1$  и  $D(\omega, q) \sim \omega L_\omega^2 (qL_\omega)^{d-2-\eta} \sim \omega \eta^{1/d} q^{d-2-\eta}$  при  $qL_\omega \gtrsim 1$ .



В работе [9] допущена неточность, состоящая в слишком серьезном отношении к «регулярности» функции  $\phi_{reg}(q)$ . Предполагалось, что переход Андерсона полностью определяется диффузионными полюсами, а  $\phi_{reg}(q)$  перехода не чувствует и не содержит информации о корреляционном радиусе  $\xi$ . Поэтому величина  $C(q)$  в (86), связывающая две такие регулярные функции, также не содержит информации о  $\xi$ . Тогда отсутствие аномальной пространственной дисперсии (связанной с масштабом  $\xi$ ) в одной калибровке означает ее отсутствие в любой другой калибровке. Фактически, как мы видим, информация о  $\xi$  неизбежно присутствует либо в  $D(\omega, q)$ , либо в  $\phi_{reg}(q)$ .

Последнее означает, что нельзя сказать ничего определенного относительно того, какая калибровка соответствует наблюдаемому коэффициенту диффузии. Поэтому показатель  $\eta'$  в соотношении (9) в общем случае отличен от  $\eta$ . Наиболее детальная численная проверка соотношения  $\eta' = \eta$  проводилась в работе [12]. Фактически получены оценка  $\eta' = 1.20 \pm \pm 0.15$  для индекса  $\eta'$  и две оценки ( $\eta = 1.3 \pm 0.2$  и  $\eta = 1.5 \pm 0.3$ ) для индекса  $\eta$ , что, по мнению авторов, было достаточно для установления равенства  $\eta' = \eta$ . Однако за последние годы оценка  $\eta$  сдвинулась до 1.76 (см. таблицу), тогда как для  $\eta'$  нам не известно свежих данных. Заметим, что первичные данные работы [12] для автокорреляционной зависимости  $t^{-(d-\eta')/d}$  (рис. 7) прекрасно согласуются со значением  $\eta' = 1$ , соответствующим отсутствию пространственной дисперсии. Заметим также, что физический эксперимент по расплыванию волнового пакета [53] также хорошо описывается самосогласованной теорией локализации.

## 7. О ДЕФЕКТНОСТИ $\sigma$ -МОДЕЛЕЙ

В разд. 3 установлена дефектность  $\sigma$ -моделей за пределами однопетлевого приближения. Такая ситуация не является неожиданной: вывод  $\sigma$ -моделей обоснован только при малых  $\epsilon$ , и вопрос о точности их соответствия исходной неупорядоченной системе всегда оставался открытым. В частности, вызывала сомнения ситуация с верхней критической размерностью [5]. В настоящем разделе предложено объяснение, почему дефектность  $\sigma$ -моделей для ортогонального ансамбля возникает именно на четырехпетлевом уровне.

Предположим (в соответствии с аргументами разд. 3), что двухкуперонная форма коррелятора  $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  является точной. Тогда отсутствие пространственной дисперсии коэффициента диффузии

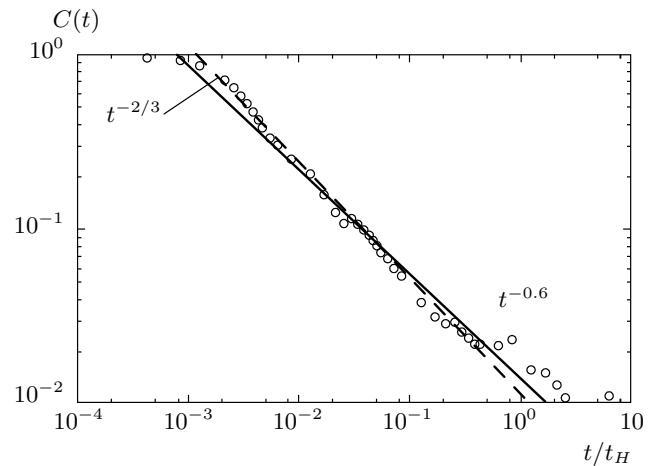


Рис. 7. Первичные данные Брандеса и др. [12] по расплыванию волнового пакета; автокорреляционная функция  $C(t) \sim t^{-(d-\eta')/d}$  описывает изменение амплитуды возмущения в центре пакета в зависимости от времени. Зависимость  $t^{-2/3}$  соответствует отсутствию пространственной дисперсии коэффициента диффузии, зависимость  $t^{-0.6}$  — результат, указанный в [12]

$D(\omega, q)$  соответствует точному равенству  $\eta = 2\epsilon$ . Нарушение же последнего равенства означает появление пространственной дисперсии.

Результат Вегнера (3) получен в «минимальной»  $\sigma$ -модели, в которой ограничиваются низшими (вторыми) степенями градиентов, что соответствует пренебрежению пространственной дисперсией  $D(\omega, q)$ . В первых трех порядках по  $\epsilon$  равенство  $\eta = 2\epsilon$  имеет место и приближение является самосогласованным. На четырехпетлевом уровне равенство  $\eta = 2\epsilon$  нарушается, а следовательно, нарушается и самосогласованность. Поэтому необходим учет членов с высшими градиентами, что приводит к неустойчивости ренормгруппы из-за «градиентной катастрофы» [54]. Для устранения неустойчивости необходимо введение дополнительных контрчленов, что приводит к существенной модификации лагранжиана  $\sigma$ -модели и делает неопределенной судьбу четырехпетлевого вклада. Заметим, что, согласно анализу работы [9], пространственная дисперсия определяется атомным масштабом: она несущественна в практическом смысле, но ее наличие является совершенно принципиальным ввиду бесконечного числа компонент параметра порядка.

Имеются и другие свидетельства дефектности  $\sigma$ -моделей. Если теория Вольхардта–Вольфле является точной, то формализм размерной регуляриза-

ции изначально несовместим с физической сутью проблемы [2]. Его применение должно приводить к неразрешимым проблемам, проявлением которых, возможно, и является градиентная катастрофа. Последняя, по-видимому, устраняется при переходе к другой регуляризации (см. обсуждение в [55] работы [56]), но изменение ренормировочной схемы неизбежно изменяет многопетлевые вклады.

Заметим, что расхождение между самосогласованной теорией и  $\sigma$ -моделями возникает именно на четырехпетлевом уровне. Не исключено, что оно устраняется в результате указанной модификации лагранжиана  $\sigma$ -моделей.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше показано, что мультифрактальные свойства волновых функций могут быть получены из самосогласованной теории локализации Вольхардта–Вольфле, вопреки многочисленным утверждениям, имеющимся в литературе. Диаграммная интерпретация результатов позволяет вывести все скейлинговые соотношения, используемые в численных экспериментах. Сопоставление с последними подтверждает тенденцию, обнаруженную в предыдущих работах [1–5]: первичные численные данные вполне совместимы с теорией Вольхардта–Вольфле, а противоположные утверждения оригинальных работ связаны с неоднозначностью обработки и наличием малых параметров типа числа Гинзбурга.

Анализ первого  $\epsilon$ -приближения теории  $2 + \epsilon$  обнаруживает наличие двух качественных моментов: а) несущественности корреляционного радиуса  $\xi$  в металлической фазе как характерного масштаба длины; б) реализации максимально симметричной формы (56) для  $n$ -точечного коррелятора волновых функций. Ввиду их качественного характера, эти свойства могут оказаться точными. Тогда мультифрактальный спектр является строго параболическим и определяется однопетлевым результатом Вегнера. Удивительная точность этого результата в применении к  $d = 3$  и  $d = 4$  уже отмечалась в литературе, а имеющиеся отклонения вполне объяснимы медленной сходимостью к термодинамическому пределу, обнаруженной в разд. 5. Четырехпетлевой вклад в аномальные размерности является заведомо дефектным и может исчезать в результате модификации лагранжиана  $\sigma$ -моделей, которая необходима для учета пространственной дисперсии коэффициента диффузии  $D(\omega, q)$  и для устранения градиентной катастрофы. При этом могут исчезнуть и дру-

гие расхождения между самосогласованной теорией и  $\sigma$ -моделями, которые имеются на четырехпетлевом уровне. Как уже указывалось в разд. 3, справедливость самосогласованной теории прямо связана со свойством а).

Вопрос о связи мультифрактальности с пространственной дисперсией коэффициента диффузии  $D(\omega, q)$  решается компромиссным образом. Определение  $D(\omega, q)$  неоднозначно и допускает «калибровочное преобразование». Пространственная дисперсия отсутствует в «естественной» калибровке (88), тогда как в калибровке с  $\phi_{reg}(q) \equiv 0$  справедлива гипотеза Чолкера [11]. Первичные численные данные работы [12] по расплыванию волнового пакета и физический эксперимент [53] указывают на отсутствие пространственной дисперсии для наблюдаемого коэффициента диффузии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Суслов, ЖЭТФ **141**, 122 (2012).
2. И. М. Суслов, ЖЭТФ **142**, 1020 (2012).
3. И. М. Суслов, ЖЭТФ **142**, 1230 (2012).
4. И. М. Суслов, ЖЭТФ **145**, 1031 (2014).
5. И. М. Суслов, ЖЭТФ **146**, 1272 (2014).
6. P. Markos, Acta Phys. Slov. **56**, 561 (2006); arXiv:cond-mat/0609580.
7. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980); Phys. Rev. Lett. **48**, 699 (1982).
8. H. Kunz and R. Souillard, J. de Phys. Lett. **44**, L506 (1983).
9. И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).
10. F. Wegner, Nucl. Phys. B **316**, 663 (1989).
11. J. T. Chalker, Physica A **167**, 253 (1990).
12. T. Brandes, B. Huckestein, and L. Schweitzer, Ann. Phys. **5**, 633 (1996).
13. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
14. I. M. Suslov, arXiv:cond-mat/0612654.
15. A. Kawabata, arXiv:cond-mat/0104289.
16. A. M. Garcia-Garcia, Phys. Rev. Lett. **100**, 076404 (2008).
17. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).

18. F. Wegner, Z. Phys. B **25**, 327 (1976).
19. B. Shapiro and E. Abrahams, Phys. Rev. B **24**, 4889 (1981).
20. S. Hikami, Phys. Rev. B **24**, 2671 (1981).
21. P. Lambrianides and H. B. Shore, Phys. Rev. B **50**, 7268 (1994).
22. M. L. Mehta, *Random Matrices*, Academ. Press, Elsevier (2004).
23. D. Belitz, Sol. St. Comm. **52**, 989 (1984); Э. З. Кучинский, М. В. Садовский, СФХТ **4**, 2278 (1991).
24. Э. З. Кучинский, М. В. Садовский, В. Г. Суворов, М. А. Эркабаев, ЖЭТФ **107**, 2027 (1995).
25. E. Hofstetter, arXiv:cond-mat/9611060.
26. K. Slevin and T. Ohtsuki, Phys. Rev. Lett. **78**, 4083 (1997).
27. T. Terao, Phys. Rev. B **56**, 975 (1997).
28. F. Evers and A. D. Mirlin, Rev. Mod. Phys. **80**, 1355 (2008).
29. S. Waffenschmidt, C. Pfleiderer, and H. V. Loehneysen, Phys. Rev. Lett. **83**, 3005 (1999).
30. Н. Г. Жданова, М. С. Каган, Е. Г. Ландсберг, ЖЭТФ **117**, 761 (2000).
31. I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. Lett. **111**, 066601 (2013).
32. A. Rodriguez, L. J. Vasquez, K. Slevin, and R. A. Romer, Phys. Rev. B **84**, 134209 (2011).
33. М. В. Садовский, *Диаграмматика*, Москва–Ижевск (2004).
34. М. V. Feigelman, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. Cuevas, Ann. Phys. (NY) **325**, 1368 (2010).
35. И. М. Суслов, УФН **168**, 503 (1998).
36. A. M.ildenberger, F. Evers, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. B **66**, 033109 (2002).
37. H. Grussbach and M. Schreiber, Phys. Rev. B **51**, 663 (1995).
38. F. Evers, A. M. Mildenberger, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. Lett. **101**, 116803 (2008).
39. M. Zirnbauer, arXiv:hep-th/9905054.
40. M. J. Bhasen, I. I. Kogan, O. A. Soloviev et al., Nucl. Phys. B **580**, 688 (2000).
41. A. M. Tsvelik, Phys. Rev. B **75**, 184201 (2007).
42. I. M. Suslov, arXiv:1412.5339.
43. J. Brndiar and P. Markos, Phys. Rev. B **74**, 153103 (2006).
44. K. Slevin and T. Ohtsuki, Phys. Rev. Lett. **82**, 382 (1999).
45. I. M. Suslov, arXiv:cond-mat/0105325.
46. E. Cuevas and V. E. Kravtsov, Phys. Rev. B **76**, 235119 (2007).
47. M. Schreiber, Physica A **167**, 188 (1990).
48. C. M. Soukoulis and E. N. Economou, Phys. Rev. Lett. **52**, 565 (1984).
49. S. N. Evangelou, Physica A **167**, 199 (1990).
50. M. Schreiber and H. Grussbach, Phys. Rev. Lett. **67**, 607 (1991).
51. A. Rodriguez, L. J. Vasquez, and R. A. Romer, Phys. Rev. Lett. **102**, 106406-4 (2009).
52. A. Rodriguez, L. J. Vasquez, and R. A. Romer, Phys. Rev. B **78**, 195107 (2008).
53. G. Lemarie, H. Lignier, D. Delande et al., arXiv:1005.1540.
54. В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, В. И. Юдсон, ЖЭТФ **94**, 255 (1988).
55. F. Wegner, Z. Phys. B **78**, 33 (1990).
56. P. K. Mitter and H. R. Ramadas, Comm. Math. Phys. **122**, 575 (1989).