

КРУПНОМАСШТАБНАЯ КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ С МЕЛКОМАСШТАБНОЙ СПИРАЛЬНОСТЬЮ

М. И. Копн^{a,b}, *А. В. Тур*^c, *В. В. Яновский*^{a,b*}

^a *Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины
61001, Харьков, Украина*

^b *Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
61000, Харьков, Украина*

^c *Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie
31028, Toulouse, France*

Поступила в редакцию 12 августа 2014 г.

С помощью асимптотического метода многих масштабов найдена крупномасштабная неустойчивость, возникающая в стратифицированной проводящей среде при наличии мелкомасштабной спиральности поля скорости и магнитных полей. Такая спиральность поддерживается малыми внешними источниками при малых числах Рейнольдса. Обнаружены два режима неустойчивости с нулевыми частотами и частотами колебаний, отличными от нуля. Установлены критерии возникновения крупномасштабной неустойчивости в такой среде.

DOI: 10.7868/S0044451015040187

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание уделяется проблеме генерации крупномасштабных вихревых структур в гидродинамике [1–4]. Такие вихревые структуры играют важную роль в динамике атмосферы, они определяют глобальный перенос воздушных масс, формируют погоду и климат на нашей планете.

Крупномасштабные вихри также наблюдаются в виде разнообразных циклонов в атмосферах различных планет [5]. Характерной особенностью этих вихревых структур является их квазидвумерность. Это означает, что характерные масштабы поля скорости таких вихрей значительно превышают характерные масштабы турбулентных движений или волн, под воздействием которых они появляются. Поэтому возникает общая проблема рассмотрения механизмов генерации крупномасштабных структур мелкомасштабной турбулентностью. Особую роль в

процессах генерации крупномасштабных вихревых структур в атмосферах планет играет естественная конвекция [6, 7]. Этой проблеме посвящено большое число работ [8–14], в которых было показано существование крупномасштабной неустойчивости в конвективных системах с мелкомасштабной спиральной турбулентностью $\mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \neq 0$. На основе численных [10] и аналитических [8–14] расчетов была предпринята попытка применения полученных результатов в теории возникновения тропических циклонов.

Однако используемая в работах [8, 9] функциональная техника получения замкнутых уравнений сталкивается с проблемой разделения мелкомасштабных и крупномасштабных полей и не позволяет строго выделить из всей иерархии возмущений главный порядок, в котором возникает неустойчивость. Поэтому в работах [12–14] была рассмотрена теория генерации крупномасштабных вихрей в несжимаемой стратифицированной по температуре жидкости под действием мелкомасштабной спиральной силы на основе систематического асимптотического метода многомасштабных разложений. Этот метод впервые был применен в работе [15] для описания возникновения вихревых структур в отража-

*E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

тельно-неинвариантной турбулентности. В качестве малого параметра в этом методе использовалось число Рейнольдса $R \ll 1$ для мелкомасштабных пульсаций скорости, вызванных мелкомасштабной спиральной силой. На нелинейной стадии, рассмотренной в работах [12, 13], стабилизация конвективной крупномасштабной неустойчивости приводит к генерации крупномасштабных вихревых структур и к образованию спиральных вихревых солитонов или кинков нового типа.

Подобная проблема возникает при исследовании генерации крупномасштабных магнитных полей в стратифицированной электропроводящей несжимаемой среде. Разумеется, естественная конвекция наблюдается и в такой среде при наличии силы тяжести. Следует заметить, что способность мелкомасштабной спиральной турбулентности генерировать крупномасштабные магнитные поля известна достаточно давно (см., например, [16]). Это явление называют α -эффектом. С его помощью объясняется возникновение крупномасштабных магнитных полей ряда космических объектов [17, 18]. Генерация крупномасштабных полей, вызванная конвекцией в электропроводящей среде, рассматривалась и для описания недр планет в работах [19–22]. Вопросы конвективной неустойчивости жидкости с температурной стратификацией детально изложены, например, в книгах [6, 11] и в работах [23, 24]. В них основное внимание уделено устойчивости движения жидкости под воздействием таких внешних факторов, как вращательное движение, внешнее однородное магнитное поле и т. п. В результате развития неустойчивости в жидкости образуются когерентные структуры — конвективные ячейки, на нелинейной стадии возникают отбор формы ячеек и даже хаотичность ячеек [25].

С использованием метода многих масштабов в работе рассмотрена генерация крупномасштабной конвективной неустойчивости, вызванной внешней мелкомасштабной спиральной силой в электропроводящей несжимаемой среде. Генерация таких структур в электропроводящей среде представляет большой интерес для многих астрофизических и геофизических проблем. В качестве примера можно упомянуть появление гранул на поверхности Солнца и геомагнитное динамо. Получены условия, при которых возникает крупномасштабная неустойчивость, и найдены инкременты неустойчивости. Доказано существование двух типов неустойчивых мод с нулевой частотой и с отличной от нуля частотой колебаний.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим проводящую среду в постоянном гравитационном поле при постоянном градиенте температур вдоль направления оси z . Для уравнений движения несжимаемой электропроводящей среды с постоянным градиентом температуры будем использовать приближение Буссинеска

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi\rho_0} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}] + g\beta T \mathbf{e} + \mathbf{F}_0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T - v_z A, \quad (2)$$

где ν — кинематическая вязкость, \mathbf{e} — единичный вектор в направлении оси z , β — коэффициент теплового расширения и $A = dT/dz > 0$ — постоянный градиент температуры, $\rho_0 = \text{const}$ — плотность среды, χ — коэффициент теплопроводности среды. Уравнения (1), (2) дополним уравнением индукции магнитного поля \mathbf{B} и условиями соленоидальности полей \mathbf{v} и \mathbf{B} :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ — коэффициент магнитной вязкости, σ — коэффициент электропроводности среды, c — скорость света. В уравнение (1), для моделирования мелкомасштабной спиральности, включена внешняя сила, обладающая спиральными свойствами:

$$\text{div } \mathbf{F}_0 = 0, \quad \mathbf{F}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{F}_0 \neq 0,$$

$$\mathbf{F}_0 = f_0 \mathbf{F}_0 \left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{t}{t_0} \right),$$

где λ_0 — характерный масштаб, t_0 — характерное время, f_0 — амплитуда силы. Предложим, что такая сила создает в среде мелкомасштабные спиральные флуктуации поля скорости $\mathbf{v}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{v}_0 \neq 0$ с малым числом Рейнольдса $R = v_0 t_0 / \lambda_0 \ll 1$. Для простоты, среду будем предполагать безграничной. Кроме того, пренебрежем влиянием внешнего магнитного поля и вращения. В такой постановке проблема представляет интерес для теории динамо [16–18, 26].

Следует отметить, что мелкомасштабное магнитное поле \mathbf{B}_0 в линейном приближении не может возбуждаться внешней спиральной мелкомасштабной силой \mathbf{F}_0 , как следует из уравнения (3).

Поэтому далее рассмотрим два возможных сценария развития крупномасштабной неустойчивости: первый, когда мелкомасштабное магнитное поле \mathbf{B}_0 существует изначально, и второй, когда мелкомасштабное магнитное поле \mathbf{B}_0 создается внешним источником \mathbf{F}_B , обладающим спиральными свойствами:

$$\mathbf{F}_B \cdot \text{rot } \mathbf{F}_B \neq 0.$$

Необходимость такого источника связана с наличием в реальных системах некоторого стационарного уровня мелкомасштабных осцилляций магнитного поля. Для его поддержания на стационарном уровне в диссипативном уравнении (3) и нужен такой источник. В реальных системах уровень этих осцилляций магнитного поля поддерживается внешней накачкой или некоторой неустойчивостью. Примером внешней накачки может служить накачка циркулярно-поляризованной электромагнитной волной. Такая возможность широко обсуждалась в связи с проблемой «токового удержания» и состоит в генерации тока при инжекции спиральности циркулярно-поляризованной электромагнитной волной [27]. Как показано в работе [28], спиральность мелкомасштабного магнитного поля может вызвать генерацию магнитного поля. Аналогично, такая инжекция спиральности магнитного поля может возникать в космических условиях, например, под влиянием мощного излучения пульсаров. В качестве астрофизического примера источника спиральности, вызванного неустойчивостью, можно привести гидродинамическую неустойчивость во вращающейся среде. Хорошим примером может служить магниторотационная неустойчивость [29], которая вызвана дифференциальным вращением среды космического объекта.

Важно отметить, что в разных физических ситуациях могут существовать различные неуниверсальные механизмы, поддерживающие некоторый уровень мелкомасштабных спиральных осцилляций. Универсальную теорию можно построить, абстрагируясь от механизма их возникновения и постулируя наличие такого мелкомасштабного спирального магнитного поля. Для его поддержания и вводится источник \mathbf{F}_B . Естественно, что возбуждаемое таким источником магнитное поле также обладает спиральностью,

$$\mathbf{B}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{B}_0 \neq 0.$$

Удобно выбрать характерный масштаб источника λ_0^B и характерное время t_0^B совпадающими соответственно с характерными масштабами λ_0 и t_0 . Другими словами, мелкомасштабная турбулентность и мелкомасштабные магнитные поля имеют близкие характерные масштабы. Однако характерные амплитуды этих источников будем предполагать разными:

$$\mathbf{F}_B = b_0 \mathbf{F}_B \left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{t}{t_0} \right), \quad b_0 \neq f_0.$$

Теперь перейдем в уравнениях (1)–(4) к безразмерным переменным, которые, для удобства обозначения, пусть наследуют обозначения размерных переменных:

$$\mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{\lambda_0}, \quad t \rightarrow \frac{t}{t_0}, \quad \mathbf{v} \rightarrow \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad \mathbf{F}_0 \rightarrow \frac{\mathbf{F}_0}{f_0},$$

$$P \rightarrow \frac{P}{\rho_0 P_0}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}_0},$$

$$t_0 = \frac{\lambda_0^2}{\nu}, \quad P_0 = \frac{v_0 \nu}{\lambda_0}, \quad f_0 = \frac{v_0 \nu}{\lambda_0^2}, \quad T \rightarrow \frac{T}{A \lambda_0}.$$

В этих переменных уравнения (1)–(4) принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + R(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \Delta \mathbf{v} + \tilde{Q} R[\text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}] + \tilde{\text{Ra}} T \mathbf{e} + \mathbf{F}_0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \text{Pr}^{-1} \Delta T = -R(\mathbf{v} \cdot \nabla) T - v_z, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{Pm}^{-1} \Delta \mathbf{B} = R \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \mathbf{F}_B, \quad (7)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (8)$$

В уравнение (7) был также введен источник мелкомасштабных магнитных полей. В систему уравнений (5)–(8) входят пять безразмерных параметров, значения которых определяют характер эволюции входящих в нее полей. Здесь введены обозначения $\tilde{\text{Ra}} = \text{Ra}/\text{Pr}$; $\text{Ra} = g\beta\lambda_0^4 A/\nu\chi$ — число Рэлея, $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, $\tilde{Q} = Q/\text{Pm}$, $Q = \sigma B_0^2 \lambda_0^2 / c^2 \rho_0 \nu$ — число Чандрасекара, $\text{Pm} = \nu/\nu_m = 4\pi\sigma/c^2\nu$ — магнитное число Прандтля.

По постановке задачи система уравнений (5)–(8) содержит в качестве малого параметра число Рейнольдса $R = v_0 t_0 / \lambda_0 \ll 1$ мелкомасштабных осцилляций. Малость остальных параметров не предполагается. Мелкомасштабная сила и внешний источник вызывают мелкомасштабные и высокочастотные флуктуации полей на фоне равновесного состояния. Средние значения таких флуктуаций нулевые. Однако малое нелинейное взаимодействие в некоторых порядках теории возмущений порождает вклады, не обращающиеся в нуль при усреднении. Появление таких секулярных вкладов является препятствием для продолжения асимптотического разложения. Поэтому обращение в нуль этих секулярных вкладов приводит к условиям применимости асимптотического метода. В методе многомасштабных разложений эти условия совпадают с уравнениями эволюции крупномасштабных возмущений.

Изучение возникновения, нарастания крупномасштабных структур на фоне мелкомасштабных флуктуаций и является основной целью развиваемой теории.

3. МНОГОМАСШТАБНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Как отмечалось выше, многомасштабный метод разложения позволяет получать уравнения для крупномасштабных возмущений путем исключения секулярных вкладов в асимптотических уравнениях. Типичной чертой этого метода является необходимость разложения иногда до очень высокого порядка малости для извлечения крупномасштабных уравнений даже в главном порядке. Это придает определенную громоздкость этому методу. Поэтому, по возможности, мы попытаемся избегать детальных выводов некоторых уравнений, пропуская громоздкие технические преобразования уравнений.

Следуя работам [12–15], построим многомасштабное асимптотическое разложение. Для этого введем мелкомасштабные $x_0 = (\mathbf{x}_0, t_0)$ и крупномасштабные $X = (\mathbf{X}, T)$ переменные и заменим пространственные и временные производные в уравнениях (5)–(8) в соответствии с наличием мелкомасштабных и крупномасштабных переменных:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \partial_i + R^2 \nabla_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \partial_t + R^4 \partial_T.$$

Здесь ∂_i и ∂_t обозначают производные по «быстрым» переменным $x_0 = (\mathbf{x}_0, t_0)$, а ∇_i и ∂_T — производные по «медленным» переменным $X = (\mathbf{X}, T)$.

Далее, разлагая поля \mathbf{v} , T и \mathbf{B} в ряды по малому параметру R , получим

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(x_0) + R(\mathbf{W}(X) + \mathbf{v}_1) + R^2 \mathbf{v}_2 + R^3 \mathbf{v}_3 + R^4 \mathbf{v}_4 + R^5 \mathbf{v}_5 + \dots,$$

$$T(\mathbf{x}, t) = T_0(x_0) + R(\Theta_1(X) + T_1) + R^2 T_2 + R^3 T_3 + R^4 T_4 + R^5 T_5 + \dots,$$

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0(x_0) + R(\mathbf{H}_1(X) + \mathbf{B}_1) + R^2 \mathbf{B}_2 + R^3 \mathbf{B}_3 + R^4 \mathbf{B}_4 + R^5 \mathbf{B}_5 + \dots,$$

где $\mathbf{W}(X)$, $\Theta_1(X)$ и $\mathbf{H}_1(X)$ — скорость, температура и вектор магнитной индукции зависят только от крупномасштабных переменных. Давление $P(\mathbf{x}, t)$ представим в виде следующего разложения:

$$P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{R} P_{-1}(X) + P_0(x_0) + R P_1 + R^2 P_2 + R^3 [P_3(X) + P_3] + R^4 P_4 + R^5 P_5 + \dots$$

Подставим полученные разложения в систему уравнений (5)–(8). Собирая вклады при одинаковых степенях малого параметра и требуя их равенства нулю, получим исходную асимптотическую систему уравнений. Приведем алгебраическую структуру полученных уравнений в различных порядках по степеням R . В порядке R^{-1} получим только одно уравнение,

$$\partial_i P_{-1} = 0.$$

Это уравнение выполняется автоматически из-за зависимости $P_{-1} = P_{-1}(X)$ только от медленных переменных. В нулевом порядке по R система уравнений имеет вид

$$\partial_t v_0^i - \partial_k^2 v_0^i = -\partial_i P_0 + \epsilon_i \widetilde{\text{Ra}} T_0 + F_0^i, \tag{9}$$

$$\partial_t B_0^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_0^i = F_B^i, \tag{10}$$

$$\partial_t T_0 - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_0 = -v_0^z, \tag{11}$$

$$\partial_i v_0^i = \partial_i B_0^i = 0. \tag{12}$$

Из этой системы уравнений следует, что величины v_0 , T_0 , P_0 , B_0 зависят только от быстрых переменных x_0 в результате действия внешней спиральной

силы и источника F_B . В первом порядке по R получим следующую систему уравнений:

$$\partial_t v_1^i - \partial_k^2 v_1^i + v_0^k \partial_k v_0^i = -\partial_i P_1 - \nabla_i P_{-1} + e_i \widetilde{\text{Ra}}(\Theta_1 + T_1) + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \partial_m B_0^l B_0^k, \quad (13)$$

$$\partial_i B_1^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_1^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \partial_j v_0^n B_0^p, \quad (14)$$

$$\partial_t T_1 - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_1 = -v_0^k \partial_k T_0 - e_k (W_1^k + v_1^k), \quad (15)$$

$$\partial_i v_1^i = 0, \quad \partial_i B_1^i = 0. \quad (16)$$

Усредним уравнения (13)–(16) по быстрым переменным и получим секулярные уравнения вида

$$\nabla_i P_{-1} = e_i \widetilde{\text{Ra}} \Theta_i, \quad (17)$$

$$W_1^z = 0. \quad (18)$$

Осциллирующая часть в приближении R^1 имеет вид

$$\partial_t v_1^i - \partial_k^2 v_1^i + v_0^k \partial_k v_0^i = -\partial_i P_1 + e_i \widetilde{\text{Ra}} T_1 + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \partial_m B_0^l B_0^k,$$

$$\partial_i B_1^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_1^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \partial_j v_0^n B_0^p,$$

$$\partial_t T_1 - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_1 = -v_0^k \partial_k T_0 - e_k v_1^k,$$

$$\partial_i v_1^i = 0, \quad \partial_i B_1^i = 0.$$

Следовательно, поля v_1 , T_1 , P_1 , B_1 зависят только от быстрых переменных x_0 . В порядке R^2 появляется следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t v_2^i + \partial_k [v_0^k (W_1^i + v_1^i) + (W_1^k + v_1^k) v_0^i] - \partial_k^2 v_2^i = \\ = -\partial_i P_2 + e_i \widetilde{\text{Ra}} T_2 + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \times \\ \times [\partial_m B_0^l (H_1^k + B_1^k) + \partial_m (H_1^l + B_1^l) B_0^k], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \partial_t B_2^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_2^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \times \\ \times [\partial_j v_0^n (H_1^p + B_1^p) + \partial_j (W_1^n + v_1^n) B_0^p], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \partial_t T_2 - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_2 = \\ = -\partial_k [(W_1^k + v_1^k) T_0 + v_0^k (\Theta_1 + T_1)] - v_2^z, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\partial_i v_2^i = \partial_i B_2^i = 0. \quad (22)$$

Легко увидеть, что все члены в уравнениях (19)–(22) после усреднения по быстрым переменным обращаются в нуль. Секулярные члены во втором порядке по R отсутствуют, но величины

$$v_2 = v_2(x_0, X), \quad T_2 = T_2(x_0, X),$$

$$P_2 = P_2(x_0, X), \quad B_2 = B_2(x_0, X)$$

зависят как от быстрых x_0 , так и медленных X переменных.

Перейдем теперь к уравнениям в третьем порядке по R :

$$\begin{aligned} \partial_t v_3^i + v_0^k \partial_k v_2^i + v_0^k \nabla_k v_0^i + (W_1^k + v_1^k) \partial_k (W_1^i + v_1^i) + \\ + v_2^k \partial_k v_0^i - \partial_k^2 v_3^i - 2\partial_k \nabla_k (W_1^i + v_1^i) = \\ = -\partial_i P_3 - \nabla_i (P + P_1) + e_i \widetilde{\text{Ra}} T_3 + \\ + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} [(\partial_m B_0^l) B_2^k + [\partial_m (H_1^l + B_1^l)] \times \\ \times (H_1^k + B_1^k) + (\partial_m B_2^l) B_0^k + (\nabla_m B_0^l) B_0^k], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \partial_t B_3^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_3^i - \text{Pm}^{-1} 2\partial_k \nabla_k (H_1 + B_1) = \\ = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} [\partial_j v_0^n B_2^p + \partial_j (W_1^n + v_1^n) (H_1^p + B_1^p) + \\ + \partial_j v_2^n B_0^p + \nabla_j v_0^n B_0^p], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \partial_t T_3 - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_3 - \text{Pr}^{-1} 2\partial_k \nabla_k (\Theta_1 + T_1) = \\ = v_0^k \partial_k T_2 - (W_1^k + v_1^k) \partial_k (\Theta_1 + T_1) - \\ - v_0^k \nabla_k T_0 - v_2^k \partial_k T_0 - v_3^z, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\partial_i v_3^i + \nabla_i W_1^i = 0, \quad \partial_i v_3^i + \nabla_i H_1^i = 0. \quad (26)$$

Усреднение уравнений (23)–(25) по быстрым переменным не приводит к секулярным членам. Усреднение уравнений (26) приводит к следующим секулярным уравнениям:

$$\nabla_i W_1^i = 0, \quad \nabla_i H_1^i = 0. \quad (27)$$

Величины v_3 , B_3 , T_3 , P_3 остаются быстроосциллирующими, но зависят и от медленных переменных X . Перейдем теперь к четвертому порядку по малому параметру R . Уравнения в этом порядке имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t v_4^i + v_0^k \partial_k v_3^i + v_0^k \nabla_k (W_1^i + v_1^i) + (W_1^k + v_1^k) \partial_k v_2^i + \\ + (W_1^k + v_1^k) \nabla_k v_0^i + v_2^k \partial_k (W_1^i + v_1^i) + v_3^k \partial_k v_0^i - \\ - 2\partial_k \nabla_k v_2^i - \partial_k^2 v_4^i = -\partial_i P_4 - \nabla_i P_2 + e_i \widetilde{\text{Ra}} T_4 + \\ + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} [(\partial_m B_0^l) B_3^k + (\partial_m (H_1^l + B_1^l)) B_2^k + \\ + (\partial_m B_2^l) (H_1^k + B_1^k) + (\partial_m B_3^l) B_0^k + \\ + (\nabla_m B_0^l) (H_1^k + B_1^k) + (\nabla_m (H_1^l + B_1^l)) B_0^k], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t B_4^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_4^i - \text{Pm}^{-1} 2\partial_k \nabla_k B_2^i = \\ = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} [\partial_j v_0^n B_3^p + \partial_j (W_1^n + v_1^n) B_2^p + \\ + \partial_j v_2^n (H_1^p + B_1^p) + \partial_j v_3^n B_0^p + \\ + \nabla v_0^n (H_1^p + B_1^p) + \nabla_j (W_1^n + v_1^n) B_0^p], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t T_4 - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_4 - \text{Pr}^{-1} 2\partial_i \nabla_i T_2 = \\ = v_0^k \partial_k T_3 - (W_1^k + v_1^k) \partial_k T_2 - v_0^k \nabla_k (\Theta_1 + T_1) - \\ - (W_1^k + v_1^k) \nabla_k T_0 - v_2^k \partial_k (\Theta_1 + T_1) - v_3^k \partial_k T_0 - v_4^z, \end{aligned}$$

$$\partial_i v_4^i + \nabla_i v_2^i = 0, \quad \partial_i B_4^i + \nabla_i B_2^i = 0.$$

Легко увидеть, что эти уравнения не содержат секулярных членов. Поэтому перейдем к уравнениям в пятом приближении по R :

$$\begin{aligned} \partial_t v_5^i + \partial_T W_1^i + v_0^k \partial_k v_4^i + v_0^k \nabla_k v_2^i + (W_1^k + v_1^k) \partial_k v_3^i + \\ + (W_1^k + v_1^k) \nabla_k (W_1^i + v_1^i) + v_2^k \partial_k v_2^i + v_2^k \nabla_k v_0^i + \\ + v_3^k \partial_k (W_1^i + v_1^i) + v_4^k \partial_k v_0^i - \partial_k^2 v_5^i - 2\partial_k \nabla_k v_3^i - \Delta W_1^i = \\ = -\partial_i P_5 - \nabla_i P_3 + e_i \widetilde{\text{Ra}} T_5 + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \times \\ \times [(\partial_m B_0^l) B_4^k + (\partial_m (H_1^l + B_1^l)) B_3^k + \\ + (\partial_m B_2^l) B_2^k + (\partial_m B_3^l) (H_1^k + B_1^k) + (\partial_m B_4^l) B_0^k + \\ + (\nabla_m (H_1^l + B_1^l)) (H_1^k + B_1^k) + (\nabla_m B_2^l) B_0^k + \\ + (\nabla_m B_0^l) B_2^k], \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t B_5^i + \partial_T H_1^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_5^i - \text{Pm}^{-1} 2\partial_k \nabla_k B_3^i - \\ - \text{Pm}^{-1} \Delta H_1^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \times \\ \times [\partial_j (v_0^n B_4^p) + \partial_j ((W_1^n + v_1^n) B_3^p) + \partial_j (v_2^n B_2^p) + \\ + \partial_j (v_3^n (H_1^p + B_1^p)) + \partial_j (v_0^n B_2^p) + \\ + \nabla_j ((W_1^n + v_1^n) (H_1^p + B_1^p)) + \nabla_j (v_2^n B_0^p)], \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t T_5 + \partial_T \Theta_1 - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_5 - \text{Pr}^{-1} 2\partial_k \nabla_k T_3 - \\ - \text{Pr}^{-1} \Delta \Theta_1 = -v_0^k \partial_k T_4 - (W_1^k + v_1^k) \partial_k T_3 - \\ - v_0^k \nabla_k T_2 - (W_1^k + v_1^k) \nabla_k (\Theta_1 + T_1) - v_2^k \partial_k T_2 - \\ - v_2^k \nabla_k T_0 - v_3^k \partial_k (\Theta_1 + T_1) - v_4^k \partial_k T_0 - v_5^z, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\partial_i v_5^i + \nabla_i V_3^i, \quad \partial_i B_5^i + \nabla_i B_3^i = 0. \quad (31)$$

После усреднения системы уравнений (28)–(31) по быстрым переменным получим основную систему секулярных уравнений для описания эволюции крупномасштабных возмущений:

$$\begin{aligned} \partial_T W_1^i + W_1^k \nabla_k W_1^i - \Delta W_1^i = \\ = -\nabla_i \bar{P}_3 - \nabla_k (v_0^k v_2^i + v_0^i v_2^k) + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \times \\ \times [(\nabla_m H_1^l) H_1^k + (\nabla_m B_0^l) B_2^k + (\nabla_m B_2^l) B_0^k], \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_T H_1^i - \text{Pm}^{-1} \Delta H_1^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \times \\ \times \left[\nabla_j \overline{(v_0^n B_2^p)} + \nabla_j \overline{(v_2^n B_0^p)} + \nabla_j (W_1^n H_1^p) \right], \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_T \Theta_1 - \text{Pr}^{-1} \Delta \Theta_1 = \\ = -\nabla_k (W_1^k \Theta_1) - \nabla_k (\overline{v_0^k T_2} + \overline{v_2^k T_0}), \quad (34) \end{aligned}$$

где черта сверху означает усреднение по мелкомасштабным переменным.

Используя известные тензорные тождества

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} = \delta_{km} \delta_{il} - \delta_{im} \delta_{kl}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} = \delta_{in} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jn},$$

преобразуем уравнения (32), (33) к более удобному виду:

$$\begin{aligned} \partial_T W_1^i + \nabla_k (W_1^k W_1^i - \tilde{Q} H_1^i H_1^k) - \Delta W_1^i + \\ + \nabla_k \left(\overline{v_0^i V_2^k} + \overline{v_0^k V_2^i} - \right. \\ \left. - \tilde{Q} (\overline{B_0^i B_2^k} + \overline{B_2^i B_0^k}) \right) = -\nabla_i \bar{P}, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_T H_1^i + (W_1^k \nabla_k) H_1^i - (H_1^k \nabla_k) W_1^i - \text{Pm}^{-1} \Delta H_1^i = \\ = \nabla_p \left(\overline{v_0^i B_2^p} + \overline{v_2^i B_0^p} \right) - \nabla_n \left(\overline{v_0^n B_2^i} + \overline{v_2^n B_0^i} \right), \quad (36) \end{aligned}$$

где $\bar{P} = \bar{P}_3 + \tilde{Q} (H_1^k)^2 / 2 + \tilde{Q} \overline{(B_0^k B_2^k)}$. Эти уравнения нужно дополнить секулярными уравнениями (18) и (27), полученными ранее:

$$W_1^z = 0, \quad \nabla_i W_1^i = 0, \quad \nabla_i H_1^i = 0.$$

Таким образом, для получения замкнутой системы уравнений, описывающей эволюцию крупномасштабных полей \mathbf{W}_1 и \mathbf{H}_1 , потребовалось дойти до пятого порядка теории возмущений. Это довольно характерное явление при применении метода многомасштабных разложений. Окончательное замыкание, достигается после вычисления корреляционных функций

$$\overline{v_0^i v_2^k} + \overline{v_2^i v_0^k}, \quad \overline{B_0^i B_2^k} + \overline{B_2^i B_0^k}, \quad \overline{v_0^i B_2^k} + \overline{v_2^i B_0^k}.$$

Их вычисление легко осуществить, используя решения полученных уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом и втором порядках по R .

4. МЕЛКОМАСШТАБНЫЕ ПОЛЯ

Для вычисления соответствующих корреляционных функций и достижения замыкания уравнений крупномасштабных полей обсудим более детально

мелкомасштабные поля. В этом разделе найдем мелкомасштабные поля в нулевом и втором порядках теории возмущений. Рассмотрим вначале уравнения (9)–(12), полученные в нулевом порядке по R . Введем более компактные обозначения для операторов:

$$\hat{D}_0 = \partial_t - \partial_k^2, \quad \hat{D}_\Theta = \partial_t - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2,$$

$$\hat{D}_H = \partial_t - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2.$$

После этого система уравнений (9)–(12) принимает вид

$$\hat{D}_0 v_0^i = \partial_i P_0 + e_i \widetilde{\text{Ra}} T_0 + F_i, \quad (37)$$

$$\hat{D}_H B_0^i = F_B^i, \quad (38)$$

$$\hat{D}_\Theta T_0 = e_k v_0^k, \quad (39)$$

$$\partial_i v_0^i = \partial_i B_0^i = 0, \quad \partial_i F_0^i = 0. \quad (40)$$

Подставляя значение T_0 , найденное из уравнения (39), в уравнение (37) и используя условие соленоидальности (40), получим давление P_0 :

$$P_0 = -\frac{\widetilde{\text{Ra}}}{\partial^2 \hat{D}_\Theta} e_p e_k \partial_p v_0^k.$$

Исключая P_0 из уравнения (37), преобразуем его к виду

$$\left(\hat{D}_0 \delta_{ik} + \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{\hat{D}_\Theta} e_p e_k \hat{P}_{ip} \right) v_0^k = F_0^i.$$

Здесь $\hat{P}_{ip} = \delta_{ip} - \partial_i \partial_p / \partial^2$ — проекционный оператор. Запишем это уравнение в более компактном виде:

$$\hat{L}_{ik} v_0^k = \frac{F_0^i}{\hat{D}_0}, \quad (41)$$

где для \hat{L}_{ik} введено обозначение [12]

$$\hat{L}_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta} e_p e_k \hat{P}_{ip}.$$

Из уравнения (41) находим поле скорости v_0^k , используя обратный оператор \hat{L}_{kj}^{-1} :

$$v_0^k = \hat{L}_{kj}^{-1} \frac{F_0^j}{\hat{D}_0},$$

где

$$\hat{L}_{kj}^{-1} = \delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{kp} e_p e_j}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta + \widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{qs} e_q e_s}.$$

Теперь легко получить мелкомасштабные пульсации скорости v_0^k в виде

$$v_0^k = \left[\delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{kp} e_p e_j}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta + \widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{qs} e_q e_s} \right] \frac{F_0^j}{\hat{D}_0}. \quad (42)$$

Используя уравнение (39), находим мелкомасштабные пульсации температуры T_0 :

$$T_0 = - \left[1 - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{kp} e_k e_p}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta + \widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{qs} e_q e_s} \right] \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_0}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta}. \quad (43)$$

Аналогично из уравнения (38) находим мелкомасштабные пульсации магнитной индукции:

$$B_0^i = \frac{F_B^i}{\hat{D}_H}. \quad (44)$$

После нахождения мелкомасштабных полей для вычисления их корреляторов следует в явном виде задать спиральную внешнюю силу F_0^j и внешний источник F_B^i , обладающие спиральностью:

$$\mathbf{F}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{F}_0 \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_B \cdot \text{rot } \mathbf{F}_B \neq 0.$$

Для упрощения вычислений зададим внешнюю силу и источник следующим образом:

$$\mathbf{F}_0 = f_0 \{ \mathbf{i} \cos \varphi_2 + \mathbf{j} \sin \varphi_2 + \mathbf{k} [\cos \varphi_1 + \sin \varphi_2] \}, \quad (45)$$

$$\mathbf{F}_B = b_0 \{ \mathbf{i} \cos \varphi_2 + \mathbf{j} \sin \varphi_2 + \mathbf{k} [\cos \varphi_1 + \sin \varphi_2] \}, \quad (46)$$

где $\varphi_1 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_0 t$, $\varphi_2 = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega_0 t$, а $\mathbf{k}_1 = k_0(1, 0, 0)$, $\mathbf{k}_2 = k_0(0, 1, 0)$. Легко проверить, что спиральность приведенной спиральной силы и источника равны

$$\mathbf{F}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{F}_0 = k_0 \mathbf{F}_0^2, \quad \mathbf{F}_B \cdot \text{rot } \mathbf{F}_B = k_0 \mathbf{F}_B^2.$$

Эта сила соответствует моде Бельтрами с периодичностью по горизонтальным координатам. Выбор моды Бельтрами вызван простой причиной. Естественно предположить, что моды магнитного поля стремятся к состоянию с минимальной энергией. Как известно, такие состояния являются бессильовыми. В бессильовых конфигурациях возникает корреляция между током и магнитным полем, т.е. ненулевая спиральность магнитного поля. Соотношения (45), (46) удобно записать в комплексной форме:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{A} \exp(i\varphi_1) + \mathbf{A}^* \exp(-i\varphi_1) + \mathbf{B} \exp(i\varphi_2) + \mathbf{B}^* \exp(-i\varphi_2),$$

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{A}_H \exp(i\varphi_1) + \mathbf{A}_H^* \exp(-i\varphi_1) + \mathbf{B}_H \exp(i\varphi_2) + \mathbf{B}_H^* \exp(-i\varphi_2),$$

где комплексные векторы имеют вид

$$\mathbf{A} = \frac{f_0}{2}(\mathbf{k} - i\mathbf{j}), \quad \mathbf{A}_H = \frac{b_0}{2}(\mathbf{k} - i\mathbf{j}),$$

$$\mathbf{B} = \frac{f_0}{2}(i - i\mathbf{k}), \quad \mathbf{B}_H = \frac{b_0}{2}(i - i\mathbf{k}).$$

Здесь $i^2 = -1$, а φ_1 и φ_2 определяются прежними соотношениями. Действие введенных выше операторов на собственные функции $\exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ имеет очевидный вид:

$$\hat{D}_0 \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = D_0(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

$$\hat{D}_\Theta \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = D_\Theta(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

$$\hat{D}_H \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = D_H(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

где

$$\begin{aligned} D_0(\omega, \mathbf{k}) &= i\omega + \mathbf{k}^2, \\ D_\Theta(\omega, \mathbf{k}) &= i\omega + \text{Pr}^{-1} \mathbf{k}^2, \\ D_H(\omega, \mathbf{k}) &= i\omega + \text{Pm}^{-1} \mathbf{k}^2. \end{aligned} \quad (47)$$

Из соотношений (42)–(44) следует, что мелкомасштабные поля \mathbf{v}_0 , \mathbf{B}_0 , T_0 состоят из четырех слагаемых, которые будем обозначать следующим образом:

$$\begin{aligned} v_0^k &= {}_1v_0^k + {}_2v_0^k + {}_3v_0^k + {}_4v_0^k, \\ B_0^k &= {}_1B_0^k + {}_2B_0^k + {}_3B_0^k + {}_4B_0^k, \\ T_0 &= {}_1T_0 + {}_2T_0 + {}_3T_0 + {}_4T_0. \end{aligned} \quad (48)$$

Эти слагаемые обладают рядом специальных свойств, которые используются далее. В частности, легко проверить, что

$$\begin{aligned} {}_2v_0^k &= ({}_1v_0^k)^*, \quad {}_4v_0^k = ({}_3v_0^k)^*, \quad {}_2B_0^i = ({}_1B_0^i)^*, \\ {}_4B_0^i &= ({}_3B_0^i)^*, \quad {}_2T_0 = ({}_1T_0)^*, \quad {}_4T_0 = ({}_3T_0)^*. \end{aligned}$$

С учетом этих свойств достаточно привести два слагаемых мелкомасштабной скорости (остальные легко получить комплексным сопряжением):

$${}_1v_0^k = \exp(i\varphi_1) \left[\delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \hat{D}_{kp} e_p e_j}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta^* + \widetilde{\text{Ra}}} \right] \frac{A_j}{\hat{D}_0^*}, \quad (49)$$

$${}_3v_0^k = \exp(i\varphi_2) \left[\delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \hat{D}_{kp} e_p e_j}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta^* + \widetilde{\text{Ra}}} \right] \frac{B_j}{\hat{D}_0^*}. \quad (50)$$

Учитывая, что внешняя сила и источник зависят от безразмерных пространственно-временных аргументов, для упрощения вычислений можно положить

$\omega_0 = 1$, $\mathbf{k}_1 = k_0(1, 0, 0)$, $\mathbf{k}_2 = k_0(0, 1, 0)$, $k_0 = 1$. Тогда скалярные операторы \hat{D}_0 , \hat{D}_Θ , \hat{D}_H принимают простой вид:

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 &= 1 + i, \\ \hat{D}_\Theta &= \text{Pr}^{-1} + i, \\ \hat{D}_H &= \text{Pm}^{-1} + i, \end{aligned} \quad (51)$$

а их произведения, которые входят в мелкомасштабные поля, также упрощаются:

$$\hat{D}_0^* \hat{D}_\Theta^* = \text{Pr}^{-1} - 1 - i(1 + \text{Pr}^{-1}) = p^*,$$

$$(\hat{D}_0^*)^2 = (1 - i)^2, \quad (\hat{D}_0^* \hat{D}_\Theta^*)^2 = p^{*2},$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^* \hat{D}_\Theta^* + \widetilde{\text{Ra}} &= \\ &= (i(1 + \text{Pr}^{-1}) + \text{Pr}^{-1} - 1 + \widetilde{\text{Ra}})^* = r^* = p^* + \widetilde{\text{Ra}}. \end{aligned}$$

После использования этих соотношений и простых преобразований соотношения для v_0^k приводятся к виду

$${}_1v_0^k = \exp(i\varphi_1) \left[\delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} e_k e_j}{r^*} \right] \frac{A_j}{1 - i}, \quad (52)$$

$${}_3v_0^k = \exp(i\varphi_2) \left[\delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} e_k e_j}{r^*} \right] \frac{B_j}{1 - i}. \quad (53)$$

Эти соотношения позволяют получить v_0^k с учетом соотношений (48), приведенных выше. Аналогично получаем соотношения, определяющие мелкомасштабные пульсации температуры T_0 и поля \mathbf{B}_0 :

$${}_1T_0 = -\exp(i\varphi_1) \left[1 - \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{r^*} \right] \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{A}}{p^*}, \quad (54)$$

$${}_3T_0 = -\exp(i\varphi_2) \left[1 - \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{r^*} \right] \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{B}}{p^*}, \quad (55)$$

$${}_1B_0^i = \frac{A_H^i}{\text{Pm}^{-1} - i} \exp(i\varphi_1) = \tilde{A}_i \exp(i\varphi_1), \quad (56)$$

$${}_3B_0^i = \frac{B_H^i}{\text{Pm}^{-1} - i} \exp(i\varphi_2) = \tilde{B}_i \exp(i\varphi_2). \quad (57)$$

Из структуры корреляторов входящих, в уравнения (35), (36), видно, что для их вычисления необходимы вклады и полей \mathbf{v}_2 , \mathbf{B}_2 , T_2 во втором порядке

по R . Приведем уравнения для этих вкладов, используя введенные выше обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 v_2^i + \partial_k [v_0^k (W_1^i + v_1^i) + (W_1^k + v_1^k) v_0^i] = \\ = -\partial_i P_2 + e_i \widetilde{Ra} T_2 + \tilde{Q} \{ (\partial_k B_0^i - \partial_i B_0^k) (H_1^k + B_1^k) + \\ + [\partial_k (H_1^i + B_1^i) - \partial_i (H_1^k + B_1^k)] B_0^k \}, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_H B_2^i = \partial_p [v_0^i (H_1^p + B_1^p) + (W_1^i + v_1^i) B_0^p] - \\ - \partial_p [v_0^n (H_1^i + B_1^i) + (W_1^n + v_1^n) B_0^i], \end{aligned} \quad (59)$$

$$\hat{D}_\Theta T_2 = -\partial_k ((W_1^k + v_1^k) T_0 + v_0^k (\Theta_1 + T_1)) - v_2^z. \quad (60)$$

Поддействуем оператором \hat{D}_Θ на уравнение (58), используя уравнение (60). После этого исключим из полученного уравнения давление P_2 , используя бездивергентность поля скорости \mathbf{v}_2 и соотношение

$$\begin{aligned} P_2 = -\frac{e_i \widetilde{Ra}}{\hat{D}_\Theta \partial^2} \{ \partial_k [(W_1^k + v_1^k) T_0 + \\ + v_0^k (\Theta_1 + T_1)] + e_k v_2^k \} + \frac{\partial_i F_i^*}{\partial^2}, \end{aligned} \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} F_i^* = -\partial_k [v_0^k (W_1^i + v_1^i) + (W_1^k + v_1^k) v_0^i] + \\ + \tilde{Q} \{ (\partial_k B_0^i - \partial_i B_0^k) (H_1^k + B_1^k) + (\partial_k (H_1^i + B_1^i) - \\ - \partial_i (H_1^k + B_1^k)) B_0^k \}. \end{aligned}$$

Подставляя значение P_2 в уравнение (58), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \hat{L}_{il} v_2^l = -\frac{\hat{P}_{ip}}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0} \times \\ \times \left\{ \widetilde{Ra} e_p \partial_k [(W_1^k + v_1^k) T_0 + v_0^k (\Theta_1 + T_1)] + \right. \\ \left. + \hat{D}_\Theta \partial_k [v_0^k (W_1^p + v_1^p) + (W_1^k + v_1^k) v_0^p] \right\} + \\ + \frac{\hat{P}_{ip} \tilde{Q}}{\hat{D}_0} \{ (\partial_k B_0^p - \partial_p B_0^k) (H_1^k + B_1^k) + \\ + [\partial_k (H_1^p + B_1^p) - \partial_p (H_1^k + B_1^k)] B_0^k \}. \end{aligned} \quad (62)$$

Свойство операторов $\hat{L}_{il} \hat{L}_{lj} = \delta_{ij}$ позволяет найти мелкокомасштабные пульсации скорости v_2^i :

$$\begin{aligned} v_2^l = \hat{L}_{lj}^{-1} \frac{\hat{P}_{jp}}{\hat{D}_0} \tilde{Q} \{ (\partial_k B_0^p - \partial_p B_0^k) (H_1^k + B_1^k) + \\ + [\partial_k (H_1^p + B_1^p) - \partial_p (H_1^k + B_1^k)] B_0^k \} - \\ - \hat{L}_{lj} \frac{\hat{P}_{jp}}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0} \left\{ \widetilde{Ra} e_p \partial_k [(W_1^k + v_1^k) T_0 + v_0^k (\Theta_1 + T_1)] + \right. \\ \left. + \hat{D}_\Theta \partial_k [v_0^k (W_1^p + v_1^p) + (W_1^k + v_1^k) v_0^p] \right\}, \end{aligned} \quad (63)$$

где оператор \hat{L}_{lj}^{-1} , обратный к \hat{L}_{lj} , имеет вид

$$\hat{L}_{lj}^{-1} = \delta_{lj} - \frac{\widetilde{Ra} \hat{P}_{ls} e_s e_j}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0 + \widetilde{Ra} \hat{P}_{mn} e_m e_n}. \quad (64)$$

Учитывая несжимаемость среды и зависимость крупномасштабных полей только от медленных переменных, запишем соотношение (63) следующим образом:

$$\begin{aligned} v_2^l = - \left(\delta_{lj} - \frac{\widetilde{Ra} \hat{P}_{ls} e_s e_j}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0 + \widetilde{Ra} \hat{P}_{mn} e_m e_n} \right) \frac{\hat{P}_{jp}}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0} \times \\ \times \left(\widetilde{Ra} e_p W_1^k \partial_k T_0 + \hat{D}_\Theta W_1^k \partial_k v_0^p + N_p^{(1)} \right) + \\ + \left(\delta_{lj} - \frac{\widetilde{Ra} \hat{P}_{ls} e_s e_j}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0 + \widetilde{Ra} \hat{P}_{mn} e_m e_n} \right) \times \\ \times \frac{\hat{P}_{jp}}{\hat{D}_0} \tilde{Q} \left[H_1^k (\partial_k B_0^p - \partial_p B_0^k) + N_p^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (65)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} N_p^{(1)} = \widetilde{Ra} e_p (v_1^k \partial_k T_0 + v_0^k \partial_k T_1) + \\ + \hat{D}_\Theta (v_0^k \partial_k v_1^p + v_1^k \partial_k v_0^p), \\ N_p^{(2)} = B_1^k (\partial_k B_0^p - \partial_p B_0^k) + \\ + (\partial_k B_1^p - \partial_p B_1^k) B_0^k. \end{aligned} \quad (66)$$

Отметим, что в пределе бесконечно малой электропроводности среды, $\sigma \rightarrow 0$, соотношение (65) совпадает с соответствующим уравнением работы [12]. Теперь перейдем к уравнению (60), решение которого имеет вид

$$B_2^i = \hat{D}_H^{-1} \left(H_1^p \partial_p v_0^i - W_1^n \partial_n B_0^i + N_i^{(3)} \right). \quad (67)$$

Здесь

$$N_i^{(3)} = B_1^p \partial_p v_0^i + B_0^p \partial_p v_1^i - v_1^n \partial_n B_0^i. \quad (68)$$

Аналогично находим решение уравнения (60):

$$T_2 = -\hat{D}_\Theta^{-1} \left(W_1^k \partial_k T_0 + e_k v_2^k + N^{(4)} \right), \quad (69)$$

где

$$N^{(4)} = v_0^k \partial_k T_1 + v_1^k \partial_k T_0. \quad (70)$$

Следует заметить, что при вычислении напряжений Рейнольдса $\nabla v_0 v_2$, $\nabla B_0 B_2$, $\nabla v_0 B_2$ вклады $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$ выпадают из-за зависимости величин v_1 , T_1 , v_0 , T_0 , B_1 , B_0 только от быстрых переменных. Поэтому для нахождения корреляторов можно использовать упрощенную форму записи решений:

$$v_2^l = -W_1^k T_{(1)}^{kl} - W_1 T_{(2)}^{kl} + H_1^k S^{kl}, \quad (71)$$

$$T_{(1)}^{kl} = \left(\delta_{lj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{ls} e_s e_j}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0 + \widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{mn} e_m e_n} \right) \times \frac{\hat{P}_{jp} e_p}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0} \widetilde{\text{Ra}} \partial_k T_0, \quad (72)$$

$$T_{(2)}^{kl} = \left(\delta_{lj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{ls} e_s e_j}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0 + \widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{mn} e_m e_n} \right) \times \frac{\hat{P}_{jp}}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0} \hat{D}_\Theta \partial_k v_0^p, \quad (73)$$

$$S^{kl} = \left(\delta_{lj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{ls} e_s e_j}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0 + \widetilde{\text{Ra}} \hat{P}_{mn} e_m e_n} \right) \times \frac{\hat{P}_{jp} \tilde{Q}}{\hat{D}_0} (\partial_k B_0^p - \partial_p B_0^k), \quad (74)$$

$$B_2^i = \epsilon_{(1)}^{ni} H_1^n + \epsilon_{(2)}^{ni} W_1^n, \quad (75)$$

$$\epsilon_{(1)}^{ni} = \hat{D}_H^{-1} \partial_n v_0^i, \quad \epsilon_{(2)}^{ni} = -\hat{D}_H^{-1} \partial_n B_0^i, \quad (76)$$

$$T_2 = -W_1^k C_{(1)}^k - H_1^k C_{(2)}^k, \quad (77)$$

$$C_{(1)}^k = \hat{D}_\Theta^{-1} \partial_k T_0 - \hat{D}_\Theta^{-1} (e_l T_{(1)}^{kl}) - \hat{D}_\Theta^{-1} (e_l T_{(2)}^{kl}), \quad (78)$$

$$C_{(2)}^k = \hat{D}_\Theta^{-1} (e_l S^{kl}). \quad (79)$$

Поскольку величины v_2 , T_2 , B_2 связаны с полями нулевого порядка v_0 , T_0 , B_0 , структура полей v_2 , T_2 , B_2 имеет подобный вид:

$$\begin{aligned} v_2^l &= {}_1v_2^l + {}_2v_2^l + {}_3v_2^l + {}_4v_2^l, \\ B_2^l &= {}_1B_2^l + {}_2B_2^l + {}_3B_2^l + {}_4B_2^l, \\ T_2 &= {}_1T_2 + {}_2T_2 + {}_3T_2 + {}_4T_2. \end{aligned} \quad (80)$$

Слагаемые, входящие в эти соотношения, также обладают полезными для дальнейших вычислений симметриями:

$$\begin{aligned} ({}_1v_2^l)^* &= {}_2v_2^l, & ({}_3v_2^l)^* &= {}_4v_2^l, & ({}_1B_2^l)^* &= {}_2B_2^l, \\ ({}_3B_2^l)^* &= {}_4B_2^l, & {}_2T_2 &= ({}_1T_2)^*, & {}_4T_2 &= ({}_3T_2)^*. \end{aligned}$$

Использование этих свойств делает менее громоздким вычисление напряжений Рейнольдса.

5. НАПРЯЖЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА И ЗАМКНУТЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ПОЛЕЙ

Теперь перейдем к вычислению корреляционных функций и определению напряжений Рейнольдса, необходимых для замыкания крупномасштабных уравнений. Для вычисления напряжений Рейнольдса нужно вычислить следующие средние:

$$\begin{aligned} \overline{v_0^k v_2^l} &= 2 \operatorname{Re} (\overline{{}_1v_{02}^k v_2^l} + \overline{{}_3v_{04}^k v_2^l}), \\ \overline{B_0^i B_2^k} &= 2 \operatorname{Re} (\overline{{}_1B_{02}^i B_2^k} + \overline{{}_3B_{04}^i B_2^k}), \\ \overline{v_0^i B_2^p} &= 2 \operatorname{Re} (\overline{{}_1v_{02}^i B_2^p} + \overline{{}_3v_{04}^i B_2^p}), \\ \overline{v_2^i B_0^p} &= 2 \operatorname{Re} (\overline{{}_1v_{22}^i B_0^p} + \overline{{}_3v_{24}^i B_0^p}). \end{aligned} \quad (81)$$

Здесь черта сверху обозначает, как и выше, усреднение по мелкомасштабным переменным. Используя полученные ранее точные решения для мелкомасштабных полей, после громоздких преобразований получим корреляционную функцию

$$\begin{aligned} \overline{v_0^p v_2^l} &= 2 \operatorname{Re} (\overline{{}_1v_{02}^p v_2^l} + \overline{{}_3v_{04}^p v_2^l}) = 2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{iW_x e_l \widetilde{\text{Ra}}}{(1-i)p^2} \times \right. \\ &\quad \times \left(A_p - \frac{e_p \widetilde{\text{Ra}} A_3}{r^*} \right) \left(1 - \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{r} \right)^2 A_3^* + \\ &\quad + \frac{iW_x}{2(1+i)} \left(A_p - \frac{e_p \widetilde{\text{Ra}} A_3}{r^*} \right) \times \\ &\quad \times \left(A_l^* - \frac{k_1^l}{k_1} A_1^* - \frac{2\widetilde{\text{Ra}} e_p A_3^*}{r} + \frac{\widetilde{\text{Ra}}^2 e_p A_3^*}{r^2} \right) - \\ &\quad \left. - \frac{iH_x}{2} \tilde{Q} \left(A_p - \frac{\widetilde{\text{Ra}} e_p}{r^*} A_3 \right) \left(\tilde{A}_l^* - \frac{k_1^l}{k_1} \tilde{A}_1^* - \frac{e_l \tilde{A}_3^* \widetilde{\text{Ra}}}{r} \right) \right\} + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{iW_y e_l \widetilde{\text{Ra}}}{(1-i)p^2} \left(B_p - \frac{e_p \widetilde{\text{Ra}} B_3}{r^*} \right) \left(1 - \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{r} \right)^2 B_3^* + \right. \\ &\quad + \frac{iW_y}{2(1+i)} \left(B_p - \frac{e_p \widetilde{\text{Ra}} B_3}{r^*} \right) \times \\ &\quad \times \left(B_l^* - \frac{k_2^l}{k_2} B_2^* - \frac{2\widetilde{\text{Ra}} e_l B_3^*}{r} + \frac{\widetilde{\text{Ra}}^2 e_l B_3^*}{r^2} \right) - \\ &\quad \left. - \frac{iH_y}{2} \tilde{Q} \left(B_p - \frac{e_p \widetilde{\text{Ra}} B_3}{r^*} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\tilde{B}_l^* - \frac{k_2^l}{k_2} \tilde{B}_2^* - \frac{\widetilde{\text{Ra}} e_l \tilde{B}_3^*}{r} \right) \right\}. \quad (82) \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется коррелятор магнитной индукции:

$$\begin{aligned} \overline{B_0^i B_2^k} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{i H_x \tilde{A}_i}{(1+i)(\operatorname{Pm}^{-1}+i)} \times \right. \\ &\quad \times \left(A_k^* - \frac{e_k \widetilde{\operatorname{Ra}} A_3^*}{r} \right) + \frac{i W_x \tilde{A}_i \tilde{A}_k^*}{\operatorname{Pm}^{-1}+i} \left. \right\} + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{i H_y \tilde{B}_i}{(1+i)(\operatorname{Pm}^{-1}+i)} \left(B_k^* - \frac{e_k \widetilde{\operatorname{Ra}} B_3^*}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i W_y \tilde{B}_i \tilde{B}_k^*}{\operatorname{Pm}^{-1}+i} \right\}, \end{aligned}$$

и, наконец, находим смешанные корреляторы:

$$\begin{aligned} \overline{v_0^i B_2^p} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{i H_x}{2(\operatorname{Pm}^{-1}+i)} \times \right. \\ &\quad \times \left(A_i - \frac{e_i \widetilde{\operatorname{Ra}} A_3}{r^*} \right) \left(A_p^* - \frac{e_p \widetilde{\operatorname{Ra}} A_3^*}{r} \right) + \\ &\quad + \frac{i W_x A_p^*}{(1-i)(\operatorname{Pm}^{-1}+i)} \left(A_i - \frac{e_i \widetilde{\operatorname{Ra}} A_3}{r^*} \right) - \\ &\quad - \frac{i H_y}{2(\operatorname{Pm}^{-1}+i)} \left(B_i - \frac{e_i \widetilde{\operatorname{Ra}} B_3}{r^*} \right) \left(B_p^* - \frac{e_p \widetilde{\operatorname{Ra}} B_3^*}{r} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{i W_y B_p^*}{(1-i)(\operatorname{Pm}^{-1}+i)} \left(B_i - \frac{e_i \widetilde{\operatorname{Ra}} B_3}{r^*} \right) \right\}, \\ \overline{v_2^i B_0^p} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{i W_x e_i \widetilde{\operatorname{Ra}}}{p^{*2}} \left(1 - \frac{\widetilde{\operatorname{Ra}}}{r^*} \right)^2 A_3 \tilde{A}_p^* - \right. \\ &\quad - \frac{i W_x}{(1-i)^2} \left(A_i - \frac{k_1^i}{k_1} A_1 - \frac{2 \widetilde{\operatorname{Ra}} e_i A_3}{r^*} + \frac{\widetilde{\operatorname{Ra}}^2 e_i A_2}{r^{*2}} \right) \tilde{A}_p^* + \\ &\quad \left. + \frac{i H_x \tilde{Q}}{1-i} \left(\tilde{A}_i \tilde{A}_p^* - \frac{k_1^i}{k_1} \tilde{A}_1 \tilde{A}_p^* - \frac{e_i \tilde{A}_3 \tilde{A}_p^* \widetilde{\operatorname{Ra}}}{r^*} \right) \right\} + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{i W_y e_i \widetilde{\operatorname{Ra}}}{p^{*2}} \left(1 - \frac{\widetilde{\operatorname{Ra}}}{r^*} \right)^2 B_3 \tilde{B}_p^* - \frac{i W_y}{(1-i)^2} \times \right. \\ &\quad \times \left(B_i - \frac{k_2^i}{k_2} B_2 - \frac{2 \widetilde{\operatorname{Ra}} e_i B_3}{r^*} + \frac{\widetilde{\operatorname{Ra}}^2 e_i B_3}{r^{*2}} \right) \tilde{B}_p^* + \\ &\quad \left. + \frac{i H_y \tilde{Q}}{1-i} \left(\tilde{B}_i - \frac{k_2^i}{k_2} \tilde{B}_2 - \frac{e_i \widetilde{\operatorname{Ra}} B_3}{r^*} \right) \tilde{B}_p^* \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, установлена зависимость корреляторов (81) от крупномасштабного поля скорости \mathbf{W}_1 и магнитного поля \mathbf{H}_1 , что необходимо для замыкания уравнений (35), (36). Структура внешней спиральной силы \mathbf{F}_0 и источника \mathbf{F}_B выбраны так, что корреляторы выражаются через компоненты x ,

y крупномасштабных полей (W_x, W_y) и (H_x, H_y). Поэтому естественно рассмотреть уравнения (35), (36) в рамках квазидвумерной задачи, когда

$$\frac{\partial}{\partial Z} \gg \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y},$$

а крупномасштабные возмущения (W_x, W_y), (H_x, H_y) зависят только от крупномасштабной координаты Z ,

$$\begin{aligned} W_x &= W_x(Z), & W_y &= W_y(Z), \\ H_x &= H_x(Z), & H_y &= H_y(Z). \end{aligned}$$

На начальном этапе эволюцию крупномасштабных возмущений можно представить в виде плоской волны с волновым вектором \mathbf{K} , направленным вдоль оси Z . Тогда из условия соленоидальности крупномасштабного магнитного поля (27) ($\mathbf{K} \cdot \mathbf{H}_1 = 0$) ясно, что поле \mathbf{H}_1 имеет только компоненты (H_x, H_y). Для исследования устойчивости малых крупномасштабных возмущений в уравнениях (35), (36) можно пренебречь нелинейными членами. Тогда упрощенная система уравнений (35), (36) в координатном представлении принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_T W_x - \Delta W_x + \nabla_Z (\overline{v_0^x v_2^x} + \overline{v_0^x v_2^z} - \tilde{Q} (\overline{B_0^x B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^x})) &= 0, \\ \partial_T W_y - \Delta W_y + \nabla_Z (\overline{v_0^y v_2^y} + \overline{v_0^y v_2^z} - \tilde{Q} (\overline{B_0^y B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^y})) &= 0, \\ \partial_T H_x - \operatorname{Pm}^{-1} \Delta H_x = \nabla_Z (\overline{v_0^x B_2^z} + \overline{B_0^z v_2^x}) - \nabla_Z (\overline{v_0^z B_2^x} + \overline{B_0^x v_2^z}), \\ \partial_T H_y - \operatorname{Pm}^{-1} \Delta H_y = \nabla_Z (\overline{v_0^y B_2^z} + \overline{B_0^z v_2^y}) - \nabla_Z (\overline{v_0^z B_2^y} + \overline{B_0^y v_2^z}). \end{aligned} \tag{83}$$

Используя общий вид коррелятора скорости (82), легко найти коррелятор $\overline{v_0^z v_2^x}$ в виде

$$\begin{aligned} \overline{v_0^z v_2^x} &= W_y \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_0^2}{4(1+i)} \left(1 - \frac{\widetilde{\operatorname{Ra}}}{r^*} \right) \right\} - \\ &- H_y \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_0 b_0}{4} \frac{\tilde{Q}}{\operatorname{Pm}^{-1}+i} \left(1 - \frac{\widetilde{\operatorname{Ra}}}{r^*} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \overline{v_0^x v_2^z} &= W_y \operatorname{Re} \left\{ \frac{\widetilde{\operatorname{Ra}} f_0^2}{2(1-i)p^2} \left(1 - \frac{\widetilde{\operatorname{Ra}}}{r} \right)^2 - \right. \\ &- \frac{f_0^2}{4(1+i)} \left(1 - \frac{2 \widetilde{\operatorname{Ra}}}{r} + \frac{\widetilde{\operatorname{Ra}}^2}{r^2} \right) \left. \right\} + \\ &+ H_y \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_0 b_0}{4} \frac{\tilde{Q}}{\operatorname{Pm}^{-1}+i} \left(1 - \frac{\widetilde{\operatorname{Ra}}}{r} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Запись этих корреляторов можно упростить, учитывая, что

$$1 - \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{r^*} = \frac{p^*}{r^*}, \quad 1 - \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{r} = \frac{p}{r},$$

$$1 - \frac{2\widetilde{\text{Ra}}}{r} + \frac{\widetilde{\text{Ra}}^2}{r^2} = \frac{p^2}{r^2},$$

где $p = (\text{Pm}^{-1} - 1) + i(\text{Pm}^{-1} + 1)$ и $r = p + \widetilde{\text{Ra}}$.

Напряжение Рейнольдса $\nabla_Z(\overline{v_0^z v_2^x} + \overline{v_0^x v_2^z})$ с учетом этих соотношений приводится к виду

$$\nabla_Z(\overline{v_0^z v_2^x} + \overline{v_0^x v_2^z}) = \text{Re} \left\{ \frac{f_0^2}{4(1+i)} \frac{p^*}{r^*} + \frac{f_0^2}{2} \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{r^2(1-i)} - \frac{f_0^2}{4(1+i)} \frac{p^2}{r^2} \right\} \nabla_Z W_y + \text{Re} \left\{ \frac{f_0 b_0}{4} \frac{\tilde{Q}}{\text{Pm}^{-1} + i} \left(\frac{p}{r} - \frac{p^*}{r^*} \right) \right\} \nabla_Z H_y = \alpha \nabla_Z W_y + \beta \nabla_Z H_y. \quad (84)$$

Отметим, что в (84) коэффициент α указывает на наличие α -эффекта в электропроводящей среде, вызванного внешней спиральной силой с амплитудой f_0 . Величина коэффициента α в (84) для случая чисел Прандтля $\text{Pr} \approx 1$ совпадает с результатами работы [12]:

$$\alpha = -\text{Ra} \frac{4 - 2\text{Ra}}{(\text{Ra}^2 + 4)^2} f_0^2, \quad (85)$$

коэффициент β приводит к новому эффекту, связанному с совместным действием спиральной силы и источника МГД-турбулентности с амплитудами соответственно f_0 и b_0 :

$$\beta = \frac{\text{Ra} \tilde{Q}}{(\text{Ra}^2 + 4)(\text{Pm}^{-2} + 1)} f_0 b_0 \quad \text{для чисел } \text{Pr} \approx 1. \quad (86)$$

Ниже обсудим роль β -эффекта на генерацию крупномасштабных полей \mathbf{W}_1 и \mathbf{H}_1 , пока же обратим внимание на то, что оба эффекта существуют в средах с температурной стратификацией. Другими словами, когда $\nabla T_{00} \neq 0$, равновесный градиент температуры отличен от нуля.

Аналогичные вычисления позволяют найти напряжения Рейнольдса, нужные для замыкания второго уравнения системы уравнений (83):

$$\nabla_Z(\overline{v_0^z v_2^y} + \overline{v_0^y v_2^z}) = -\text{Re} \left\{ \frac{f_0^2}{4(1+i)} \frac{p^*}{r^*} + \frac{f_0^2}{2} \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{r^2(1-i)} - \frac{f_0^2}{4(1+i)} \frac{p^2}{r^2} \right\} \nabla_Z W_x - \text{Re} \left\{ \frac{f_0 b_0}{4} \frac{\tilde{Q}}{\text{Pm}^{-1} + i} \left(\frac{p}{r} - \frac{p^*}{r^*} \right) \right\} \nabla_Z H_x = -\alpha \nabla_Z W_x - \beta \nabla_Z H_x. \quad (87)$$

Легко заметить, что соотношения (84) и (87) различаются только знаками. В общем случае для чисел Прандтля $\text{Pr} \neq 1$ значения коэффициентов α и β имеют вид

$$\alpha = \frac{f_0^2}{4} (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3), \quad (88)$$

где

$$\xi_1 = \frac{1 + \text{Pr}^2 - \text{Ra} \text{Pr}}{(1 + \text{Ra} - \text{Pr})^2 + (1 + \text{Pr})^2},$$

$$\xi_2 = \frac{[\text{Pr}(\text{Ra} + 2) + \text{Pr}^2 - 1][\text{Ra}^2 + 2\text{Ra}(1 - \text{Pr}) - 4\text{Pr}]}{[(1 + \text{Ra} - \text{Pr})^2 + (1 + \text{Pr})^2]^2},$$

$$\xi_3 = \frac{2[\text{Pr}(\text{Ra} - 2) + \text{Pr}^2 - 1][\text{Ra}(\text{Pr} + 1) + 1 - \text{Pr}^2]}{[(1 + \text{Ra} - \text{Pr})^2 + (1 + \text{Pr})^2]^2},$$

и

$$\beta = \frac{f_0 b_0}{2} \frac{Q \text{Pm} \text{Ra}(1 + \text{Pr})}{(1 + \text{Pm}^2)[(1 + \text{Ra} - \text{Pr})^2 + (1 + \text{Pr})^2]}. \quad (89)$$

Аналогично вычисляются напряжения Рейнольдса для флуктуаций магнитного поля:

$$\tilde{Q}(\overline{B_0^x B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^x}) = \beta_b \nabla_Z H_y, \quad (90)$$

$$\tilde{Q}(\overline{B_0^y B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^y}) = -\beta_b \nabla_Z H_x. \quad (91)$$

Здесь

$$\beta_b = \frac{f_0 b_0}{4} \frac{Q \text{Pm} \text{Ra}(2\text{Pr} - \text{Ra})}{(1 + \text{Pm}^2)[(1 + \text{Ra} - \text{Pr})^2 + (1 + \text{Pr})^2]}.$$

Коэффициент β_b представляет дополнительную поправку к β -эффекту, вызванную влиянием мелко-масштабных спиральных полей \mathbf{B}_0 при наличии стратификации среды по температуре.

Сравнивая соотношения (84), (87) и (90), (91), получим

$$\nabla_Z[\overline{v_0^z v_2^x} + \overline{v_0^x v_2^z} - \tilde{Q}(\overline{B_0^x B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^x})] = \alpha \nabla_Z W_y + (\beta - \beta_b) \nabla_Z H_y = \alpha \nabla_Z W_y + \beta_q \nabla_Z H_y,$$

$$\nabla_Z [\overline{v_0^z v_2^y} + \overline{v_0^y v_2^z} - \tilde{Q} (\overline{B_0^y B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^y})] = -\alpha \nabla_Z W_x - (\beta - \beta_b) \nabla_Z H_x = -\alpha \nabla_Z W_y - \beta_q \nabla_Z H_y.$$

Здесь введено обозначение

$$\beta_q = \frac{f_0 b_0}{4} \frac{Q \text{Pm} \text{Ra} (2 + \text{Ra})}{(1 + \text{Pm}^2)((1 + \text{Ra} - \text{Pr})^2 + (1 + \text{Pr})^2)} = \beta - \beta_q.$$

Вычисление смешанных корреляторов приводит к соотношению

$$\nabla_Z (\overline{v_0^x B_2^z} + \overline{v_2^x B_0^z}) - \nabla_Z (\overline{v_0^z B_2^x} + \overline{B_0^x v_2^z}) = \alpha_W \nabla_Z W_y + \alpha_H \nabla_Z H_y,$$

где коэффициенты α_W и α_H определяются выражениями

$$\alpha_W = -\frac{f_0 b_0}{4} \text{Re} \left\{ \frac{(1+i)(\text{Pm}^{-1}-i)^2}{(\text{Pm}^{-2}+1)^2} + \frac{(1+i)(\text{Pm}^{-1}-i)^2}{(\text{Pm}^{-2}+1)^2} \frac{p^*}{r^*} + \frac{2\text{Ra}(\text{Pm}^{-1}-i)}{(\text{Pm}^{-2}+1)r^{*2}} - \frac{i(\text{Pm}^{-1}-i)p^{*2}}{(\text{Pm}^{-2}+1)r^{*2}} - \frac{i(\text{Pm}^{-1}-i)}{\text{Pm}^{-2}+1} \right\},$$

$$\alpha_H = \frac{f_0^2}{4} \text{Re} \left\{ \frac{\text{Pm}^{-1}-i}{\text{Pm}^{-2}+1} \left(\frac{p}{r} + \frac{p^*}{r^*} \right) \right\} - \frac{b_0^2}{4} \tilde{Q} \text{Re} \left\{ \frac{1+i}{\text{Pm}^{-2}+1} \left(1 + \frac{p^*}{r^*} \right) \right\}, \quad (92)$$

$$\nabla_Z (\overline{v_0^y B_2^z} + \overline{v_2^y B_0^z}) - \nabla_Z (\overline{v_0^z B_2^y} + \overline{B_0^y v_2^z}) = -\alpha_W \nabla_Z W_x - \alpha_H \nabla_Z H_x. \quad (93)$$

После вычисления вещественной части в соотношениях (92) и (93) получим

$$\alpha_W = -\frac{f_0 b_0}{4} (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4), \quad (94)$$

где

$$\nu_1 = \frac{2\text{Pm}^3(1-\text{Pm})}{(1+\text{Pm}^2)^2},$$

$$\nu_2 = \frac{(1+2\text{Pm}-\text{Pm}^2)[2(1+\text{Pr}^2)+(1-\text{Pr})\text{Ra}]+\text{Ra}(1+\text{Pr})(1-2\text{Pm}-\text{Pm}^2)}{\text{Pm}^2((1-\text{Pr}+\text{Ra})^2+(1+\text{Pr})^2)},$$

$$\nu_3 = \frac{2\text{Ra}\text{Pr}[(1-\text{Pr}+\text{Ra})^2-(1+\text{Pr})^2+2\text{Pm}(1+\text{Pr})(1-\text{Pr}+\text{Ra})]}{\text{Pm}((1+\text{Ra}-\text{Pr})^2+(1+\text{Pr})^2)},$$

$$\nu_4 = -\frac{[2(1-\text{Pr}^2)-4\text{Pm}\text{Pr}][(1+\text{Ra}-\text{Pr})^2-(1+\text{Pr})^2]}{\text{Pm}((1+\text{Ra}-\text{Pr})^2+(1+\text{Pr})^2)} + \frac{2(1+\text{Pr})(1-\text{Pr}+\text{Ra})[2\text{Pm}(1-\text{Pr}^2)+4\text{Pr}]}{\text{Pm}[(1+\text{Ra}-\text{Pr})^2+(1+\text{Pr})^2]},$$

и

$$\alpha_H = \frac{f_0^2}{2} \mu_1 - \frac{b_0^2}{4} \mu_2, \quad (95)$$

где

$$\mu_1 = \frac{\text{Pm}[2(1+\text{Pr}^2)+\text{Ra}(1-\text{Pr})]}{(1+\text{Pm}^2)[(1-\text{Pr}+\text{Ra})^2+(1+\text{Pr})^2]},$$

$$\mu_2 = \frac{Q\text{Pm}[(1-\text{Pr}+\text{Ra})^2+(1+\text{Pr})^2+2(1+\text{Pr}^2)+2\text{Ra}]}{(1+\text{Pm}^2)[(1-\text{Pr}+\text{Ra})^2+(1+\text{Pr})^2]}.$$

Таким образом, после подстановки приведенных выше соотношений в систему уравнений (83) получим замкнутую систему уравнений, которая описывает эволюцию крупномасштабных полей скорости \mathbf{W}_1 и магнитной индукции \mathbf{H}_1 :

$$\begin{cases} \partial_T W_x - \Delta W_x + \alpha \nabla_Z W_y + \beta_q \nabla_Z H_y = 0, \\ \partial_T W_y - \Delta W_y - \alpha \nabla_Z W_x - \beta_q \nabla_Z H_x = 0, \\ \partial_T H_x - \text{Pm}^{-1} \Delta H_x = \alpha_H \nabla_Z H_y + \alpha_W \nabla_Z W_y, \\ \partial_T H_y - \text{Pm}^{-1} \Delta H_y = -\alpha_H \nabla_Z H_x - \alpha_W \nabla_Z W_x. \end{cases} \quad (96)$$

Легко заметить, что коэффициенты α_W и β_q определяют положительную обратную связь в самосогласованной динамике полей \mathbf{W}_1 и \mathbf{H}_1 . Если предположить отсутствие источника мелкомасштабных магнитных полей ($b_0 = 0$), то система уравнений (96) расщепляется на две пары несвязанных уравнений для крупномасштабной скорости \mathbf{W}_1 :

$$\begin{aligned} \partial_T W_x - \Delta W_x + \alpha \nabla_Z W_y &= 0, \\ \partial_T W_y - \Delta W_y - \alpha \nabla_Z W_x &= 0, \end{aligned} \quad (97)$$

и для крупномасштабных магнитных полей \mathbf{H}_1 :

$$\begin{aligned} \partial_T H_x - \text{Pm}^{-1} \Delta H_x &= \alpha_H \nabla_Z H_y, \\ \partial_T H_y - \text{Pm}^{-1} \Delta H_y &= -\alpha_H \nabla_Z H_x. \end{aligned} \quad (98)$$

Система уравнений (97) совпадает с уравнениями гидродинамического α -эффекта (см., например, [2, 4]), который приводит к генерации крупномасштабных вихревых структур с нетривиальной топологией $\mathbf{W} \cdot \text{rot } \mathbf{W} \neq 0$. Система уравнений (98) описывает хорошо известный в теории динамо [16–18, 26] магнитогидродинамический α -эффект. Он означает генерацию крупномасштабного магнитного поля спиральной турбулентностью. Ниже обсудим, как происходит генерация крупномасштабных возмущений в более общем случае, который соответствует системе уравнений (96).

6. КРУПНОМАСШТАБНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Начнем с анализа возможности появления крупномасштабной неустойчивости в системе уравнений (96). Для этого выберем крупномасштабные возмущения скорости (W_x, W_y) и магнитной индукции (H_x, H_y) в виде

$$\begin{aligned} W_x &= A_W \exp(iKZ - i\omega T), \\ W_y &= B_W \exp(iKZ - i\omega T), \\ H_x &= A_H \exp(iKZ - i\omega T), \\ H_y &= B_H \exp(iKZ - i\omega T). \end{aligned} \quad (99)$$

Подставляя их в систему уравнений (96), после обычных вычислений получим дисперсионное уравнение вида

$$\begin{aligned} [(K^2 - i\omega)^2 - \alpha^2 K^2] [(\text{Pm}^{-1} K^2 - i\omega)^2 - \alpha_H^2 K^2] + \\ + 2\alpha_W \beta_q K^2 (K^2 - i\omega) (\text{Pm}^{-1} K^2 - i\omega) - \\ - 2\alpha_H \alpha_W \beta_q K^4 + \alpha_W^2 \beta_q^2 K^4 = 0. \end{aligned} \quad (100)$$

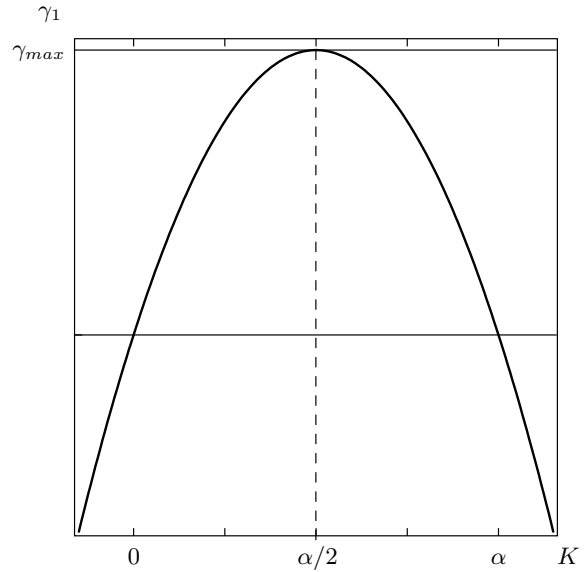


Рис. 1. Типичный вид зависимости инкремента $\gamma_1 = \alpha K - K^2$ от волнового числа K . Нарастание в области $0 < K < \alpha$. Для моды $\gamma_1 = -\alpha K - K^2$ область неустойчивости $-\alpha < K < 0$ и вид инкремента совпадают с отраженным графиком относительно вертикальной оси

Это дисперсионное уравнение существенно упрощается в случае отсутствия источника мелкомасштабных магнитных полей ($b_0 = 0$ и, следовательно, $\beta_q = 0$). В таком физическом случае дисперсионное уравнение распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned} (K^2 - i\omega)^2 - \alpha^2 K^2 &= 0, \\ (\text{Pm}^{-1} K^2 - i\omega)^2 - \alpha_H^2 K^2 &= 0. \end{aligned} \quad (101)$$

Из этих уравнений следует отсутствие вещественной части частоты и наличие чисто мнимой. Следовательно, инкремент неустойчивости равен

$$\gamma_1 = \pm \alpha K - K^2, \quad (102)$$

$$\gamma_2 = \pm \alpha_H K - \text{Pm}^{-1} K^2. \quad (103)$$

Решение, растущее с первым инкрементом, описывает генерацию крупномасштабных вихревых структур. Максимальный инкремент $\gamma_{max} = \alpha^2/4$ достигается на волновых числах $K = K_{max} = \alpha/2$ (рис. 1).

Нарастающие возмущения подобны течению Бельтрами, для которых нелинейное слагаемое $\mathbf{W} \cdot \nabla \mathbf{W}$ в уравнениях движения обращается в нуль. Явный вид коэффициента α определяется соотношением (88), а частный случай для чисел

Прандтля $Pr \approx 1$ — соотношением (85). Из этих соотношений следует, что если внешняя спиральная сила отсутствует ($f_0 = 0$), то α -эффект исчезает. Кроме того, гидродинамический α -эффект (как и в неэлектропроводящей среде [12]) существует только при наличии температурной стратификации независимо от значений числа Прандтля Pr . Интересно отметить, что при $Ra = 2$ линейная неустойчивость существует при числах Прандтля $Pr \neq 1$. Коэффициент α в этом случае равен

$$\alpha = \frac{f_0^2}{4} \frac{(Pr - 1)(1 - 2Pr - 3Pr^2)}{(5 - 2Pr + Pr^2)^2}. \quad (104)$$

Область положительных значений второго инкремента $\gamma_2 > 0$ соответствует росту крупномасштабного магнитного поля. Максимальный инкремент $\gamma_{2max} = (\alpha_H^2)/4Pm$ достигается при $K = K_{max} = (\alpha_H)/2Pm$. Эффект генерации крупномасштабных магнитных полей мелкомасштабной спиральной турбулентностью в электропроводящих средах хорошо известен (см., например, [16–18, 26]) и носит название магнитогидродинамического α -эффекта или α_H -эффекта.

Значение коэффициента α_H определяется соотношением

$$\alpha_H = \frac{f_0^2}{2} \times \frac{Pm[2(1 + Pr^2) + Ra(1 - Pr)]}{(1 + Pm^2)[(1 - Pr + Ra)^2 + (1 + Pr)^2]}. \quad (105)$$

Из этого соотношения следует, что в однородной по температуре ($T_0 = \text{const}$, $Ra = 0$) электропроводящей среде генерация магнитного поля происходит лишь за счет внешней спиральной силы \mathbf{F}_0 , в то время как генерация вихревых возмущений не возникает. Таким образом, развитие конвективной крупномасштабной неустойчивости в электропроводящей среде на линейной стадии приводит одновременно к усилению крупномасштабных вихревых движений среды и магнитного поля. Рост амплитуды крупномасштабных возмущений оказывает влияние на динамику мелкомасштабных полей скорости \mathbf{v}_0 и магнитного поля \mathbf{B}_0 .

Учет этих эффектов можно провести в рамках нелинейной теории аналогично развитой для крупномасштабной конвективной неустойчивости в непроводящих средах [13–15]. Для ряда астрофизических и геофизических проблем представляет интерес влияние мелкомасштабного магнитного поля на динамику крупномасштабных возмущений еще на линейной стадии развития [30, 31]. Выше было показано, что генерация крупномасштабных магнитных

полей на линейной стадии развития неустойчивости возможна при наличии мелкомасштабного магнитного поля \mathbf{B}_0 или магнитного поля, известного в литературе [26] как «затравочное». К настоящему времени в теории динамо выяснено множество механизмов генерации «затравочных» магнитных полей, например, при термоэффекте [32], при развитии плазменных неустойчивостей [33] и др.

Абстрагируясь от физической природы механизма возбуждения «затравочных» магнитных полей, будем моделировать их действие в виде внешнего источника \mathbf{F}_B , возбуждающего мелкомасштабные спиральные поля $\mathbf{v}_0 \cdot \text{rot} \mathbf{B}_0 \neq 0$ [30]. Динамика крупномасштабных полей в этих условиях описывается самосогласованной системой уравнений (96), в которой видно взаимное влияние крупномасштабного магнитного поля на вихревые движения среды и наоборот.

Перейдем теперь к общему случаю при наличии мелкомасштабных стационарных флуктуаций и магнитных полей, уровень которых поддерживается источником мелкомасштабной МГД-турбулентности.

Дисперсионное уравнение (100) можно записать в другом более удобном виде:

$$[(K^2 - i\omega)(Pm^{-1}K^2 - i\omega) - \alpha\alpha_H K^2 + \alpha_W \beta_q K^2]^2 = [\alpha_H K(K^2 - i\omega) - \alpha K(Pm^{-1}K^2 - i\omega)]^2. \quad (106)$$

Легко заметить, что это дисперсионное уравнение распадается на два квадратных уравнения:

$$\begin{aligned} \omega^2 + i\omega[(\alpha_H - \alpha)K + K^2(1 + Pm^{-1})] + [(Pm^{-1}K^2 + \alpha_H K)(\alpha K - K^2) - \alpha_W \beta_q K^2] &= 0, \\ \omega^2 + i\omega[(\alpha - \alpha_H)K + K^2(1 + Pm^{-1})] - [(Pm^{-1}K^2 - \alpha_H K)(\alpha K + K^2) + \alpha_W \beta_q K^2] &= 0. \end{aligned} \quad (107)$$

Решения этих уравнений, несмотря на громоздкость, можно получить точно:

$$\omega_{1,2} = \frac{i}{2} [(\alpha - \alpha_H)K - (1 + Pm^{-1})K^2] \pm i\sqrt{P_{(1)}^4}, \quad (108)$$

$$\omega_{3,4} = \frac{i}{2} [(\alpha_H - \alpha)K - (1 + Pm^{-1})K^2] \pm i\sqrt{P_{(2)}^4}, \quad (109)$$

где

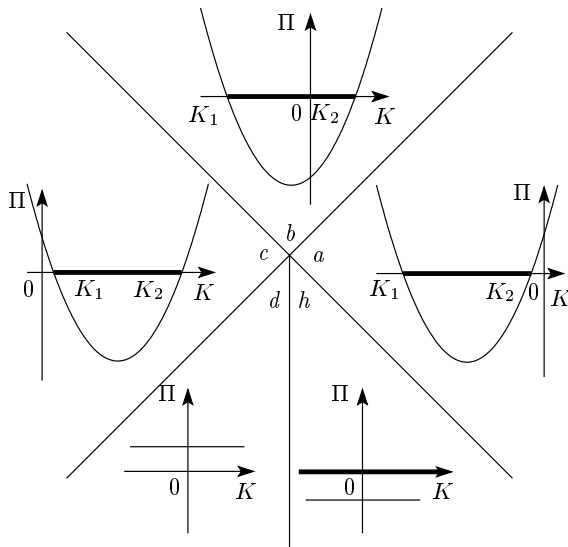


Рис. 2. Показаны характерные зависимости полинома $\Pi(K)$ в различных областях параметров. Жирными линиями выделены интервалы волновых чисел K , где присутствует частота $\omega = \text{Im} \sqrt{P_{(1)}^4}$

$$P_{(1)}^4 = \frac{1}{4}[(\alpha - \alpha_H)K - (1 + \text{Pm}^{-1})K^2]^2 + (\alpha_H K + K^2 \text{Pm}^{-1})(\alpha K - K^2) - \alpha_W \beta_q K^2, \quad (110)$$

$$P_{(2)}^4 = \frac{1}{4}[(\alpha_H - \alpha)K - (1 + \text{Pm}^{-1})K^2]^2 + (\alpha K + K^2)(\alpha_H K - \text{Pm}^{-1} K^2) - \alpha_W \beta_q K^2.$$

Перейдем к анализу полученных дисперсионных соотношений. Начнем с обсуждения поведения величины $P_{(1)}^4$. Этот полином после громоздких вычислений преобразуется к виду

$$P_{(1)}^4 = K^2 \left\{ \frac{(1 - \text{Pm}^{-1})^2}{4} K^2 - \frac{(\alpha + \alpha_H)(1 - \text{Pm}^{-1})}{2} K + \frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} - \alpha_W \beta_q \right\} \equiv K^2 \Pi.$$

Знак этого выражения определяет наличие колебательной моды с частотой, равной мнимой части этого корня, $\omega = \text{Im} \sqrt{P_{(1)}^4}$. В области $P_{(1)}^4 > 0$ корень из него определяет добавку к инкременту $\Delta\gamma = \text{Re} \sqrt{P_{(1)}^4}$. Из вида полинома $P_{(1)}^4$ следует, что его знак определяется знаком полинома второго порядка Π . Все возможные варианты поведения Π как функции K в различных областях параметров показаны на рис. 2. Значения волновых чисел K_1 и K_2 определяются из уравнения $\Pi = 0$ и равны

$$K_1 = \min \left(-\frac{\alpha + \alpha_H + 2\sqrt{\alpha_W \beta_q}}{\text{Pm}^{-1} - 1}, \frac{-\alpha - \alpha_H + 2\sqrt{\alpha_W \beta_q}}{\text{Pm}^{-1} - 1} \right),$$

$$K_2 = \max \left(-\frac{\alpha + \alpha_H + 2\sqrt{\alpha_W \beta_q}}{\text{Pm}^{-1} - 1}, \frac{-\alpha - \alpha_H + 2\sqrt{\alpha_W \beta_q}}{\text{Pm}^{-1} - 1} \right).$$

Обсудим теперь область реализуемости случаев приведенных на рис. 2. Так, используя теорему Виета, легко доказать, что корни уравнения $\Pi = 0$ при условиях

$$\frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} > \alpha_W \beta_q, \quad (111a)$$

$$(\alpha + \alpha_H)(\text{Pm}^{-1} - 1) > 0$$

оба отрицательны (рис. 2a), при условии

$$\frac{1}{4}(\alpha + \alpha_H)^2 < \alpha_W \beta_q \quad (111b)$$

имеют противоположные знаки (рис. 2b), а при

$$\frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} > \alpha_W \beta_q, \quad (111c)$$

$$(\alpha + \alpha_H)(\text{Pm}^{-1} - 1) < 0$$

оба положительны (рис. 2c).

Вырожденному случаю, $\text{Pm}^{-1} = 1$ соответствуют (рис. 2d) и 2t. Случай рис. 2d (отсутствие частоты, $\omega = 0$) выполняется при

$$\frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} > \alpha_W \beta_q, \quad \text{Pm}^{-1} = 1, \quad (111d)$$

а случай рис. 2d ($\omega \neq 0$) — при всех волновых числах, если

$$\frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} < \alpha_W \beta_q, \quad \text{Pm}^{-1} = 1. \quad (111e)$$

Перейдем теперь к анализу первого вклада в частоту (108). Это слагаемое чисто мнимое и поэтому дает вклад только в инкремент. При этом возможно только два расположения области неустойчивости, как показано на рис. 3. Граничное значение волнового вектора K_3 легко получить:

$$K_3 = \frac{\alpha - \alpha_H}{1 + \text{Pm}^{-1}}.$$

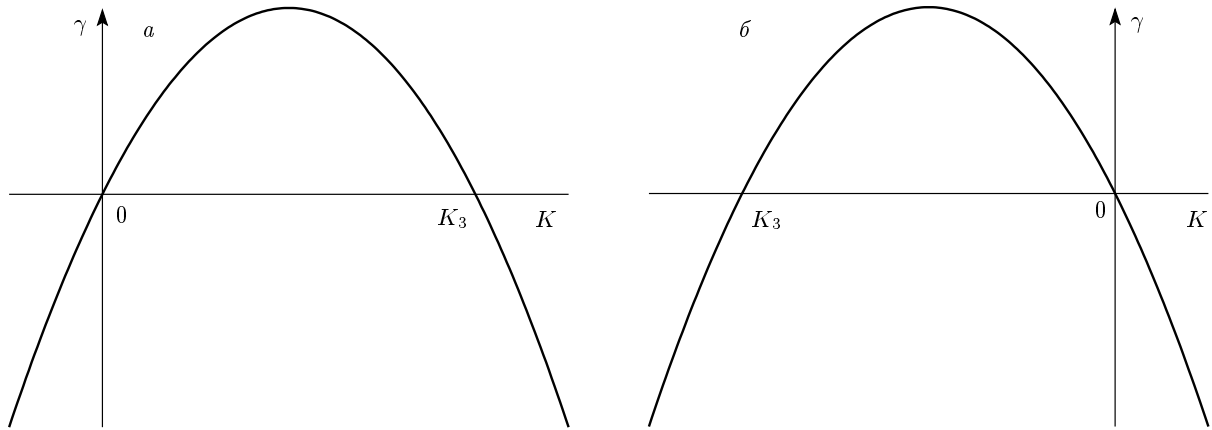


Рис. 3. Нарастающие моды с инкрементом (114) в областях волновых векторов $0 < K < K_3$ (а) и $K_3 < K < 0$ (б). Частота неустойчивой моды определяется выражением (115)

Условие реализации случая, изображенного на рис. 3а сводится к

$$\alpha > \alpha_H, \tag{112a}$$

а случая на рис. 3б — к

$$\alpha < \alpha_H. \tag{112b}$$

Теперь для окончательного выяснения неустойчивых режимов следует совместить все приведенные условия.

Так, при выполнении условий (111а) и (112а) инкремент нарастающей моды с нулевой частотой равен

$$\gamma = \frac{1}{2}[(\alpha - \alpha_H)K - (1 + \text{Pm}^{-1})K^2] + |K|\sqrt{\Pi} \tag{113}$$

и положителен при значении K , принадлежащем конечному интервалу волновых чисел. Пример инкремента в этой области параметров приведен на рис. 4а.

Аналогично выглядит инкремент в областях параметров (111а) и (112б) с частотой $\omega = 0$ (см. рис. 4б).

Перейдем теперь к области условий (111б) и (112а). Априори при этих условиях могут реализоваться случаи как $K_2 > K_3$, так и $K_3 > K_2$. При этом характеры неустойчивой моды качественно различаются. Условие $K_2 > K_3$ соответствует условию

$$\sqrt{\alpha_W \beta_q}(1 + \text{Pm}^{-1}) > \alpha_H + \alpha \text{Pm}^{-1}.$$

Тогда инкремент неустойчивости равен

$$\gamma = \frac{1}{2}[(\alpha - \alpha_H)K - (1 + \text{Pm}^{-1})K^2], \tag{114}$$

а частота неустойчивой моды определяется как

$$\omega = \pm \text{Im} |K| \sqrt{\Pi}. \tag{115}$$

Область, где $K_3 > K_2$, соответствует условию

$$\sqrt{\alpha_W \beta_q}(1 + \text{Pm}^{-1}) < \alpha_H + \alpha \text{Pm}^{-1},$$

которое не совместимо с условиями (111б) и (112а). Поэтому такой случай не реализуется. При выполнении условий (111б) и (112а) инкремент определяется соотношением (114) с положительным значением в области отрицательных волновых чисел $K_3 < K < 0$ и частотой (115).

Перейдем теперь к области параметров (111с) и (112а). В этой области параметров $K_2 > K_3$, поэтому инкремент совпадает с инкрементом (113), а частота $\omega = 0$.

Совершенно аналогично осуществляется анализ мод (109). Вид полинома $P_{(2)}^4$ отличается от полинома $P_{(1)}^4$ только знаком при кубическом члене,

$$P_{(2)}^4 = K^2 \left\{ \frac{(1 - \text{Pm}^{-1})^2}{4} K^2 + \frac{(\alpha + \alpha_H)(1 - \text{Pm}^{-1})}{2} K + \frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} - \alpha_W \beta_q \right\}.$$

Легко заметить, что при замене знака $(1 - \text{Pm}^{-1}) \rightarrow -(1 - \text{Pm}^{-1})$ этот полином переходит в полином, проанализированный выше. Поэтому анализ инкремента и условий его реализуемости сводится к использованию этого свойства. Мы упускаем очевидное, но громоздкое описание этого случая. Анализ

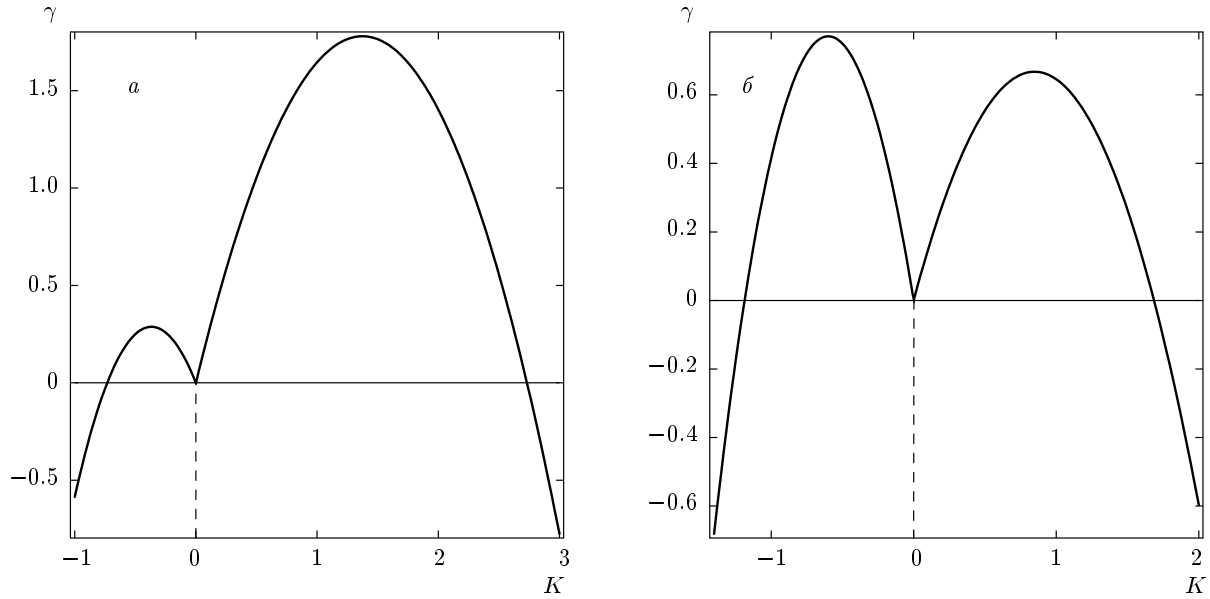


Рис. 4. а) Инкремент неустойчивости в зависимости от волнового числа K в областях параметров (111а) и (112а). Зависимость построена для $\alpha = 3$, $\alpha_H = 2$, $\text{Pm}^{-1} = 2$ и $\alpha_W \beta_q = 2$. б) Инкремент в областях параметров (111а) и (112б) при значениях параметров $\alpha = 2$, $\alpha_H = 3$, $\text{Pm}^{-1} = 2$ и $\alpha_W \beta_q = 2$

вырожденных случаев $\text{Pm}^{-1} = 1$ тривиален и сводится к обращению полинома Π в постоянную

$$\Pi = \frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} - \alpha_W \beta_q,$$

знак которой определяет, будет ли это добавка к частоте или к инкременту.

Таким образом, в общем случае можно наблюдать только два режима. Один соответствует волновой моде с частотой (115) и инкрементом (114), второй — неустойчивости с инкрементом (113) и частотой $\omega = 0$. Области параметров, в которых они реализуются, описаны выше. Эти условия сформулированы в терминах параметров α , α_H , $\alpha_W \beta_q$, которые зависят от безразмерных чисел Ra , Pr , Pm , Q . Поэтому важно проверить наличие областей реализации неустойчивых мод в терминах исходных безразмерных чисел. Связь параметров с безразмерными числами приведена выше в разд. 5. Используя их, построим области параметров, в которых реализуются два описанных выше режима. На рис. 5 области показаны на плоскости (Pr, Ra) при фиксированных значениях $\text{Pm} = 2$ и $Q = 2$. Кроме того, амплитуды f_0 и b_0 выбраны единичными.

Разумеется, при изменении Pm и Q соответствующие области меняют свою форму, но сами области присутствуют и при других значениях Pm и Q .

В заключение этого раздела приведем количе-

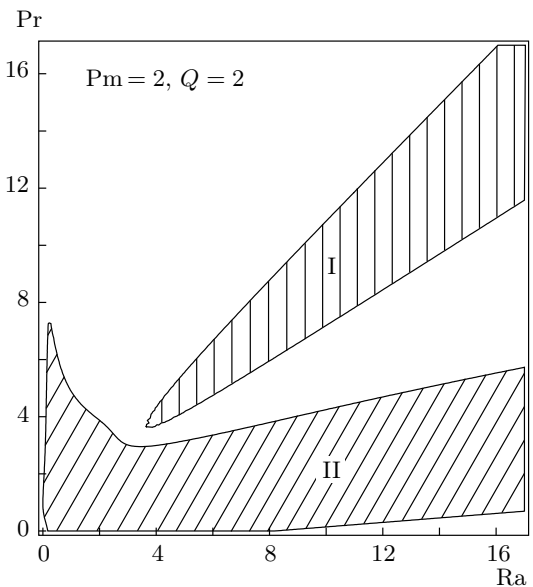


Рис. 5. Область I соответствует условиям (111а) и (112б), при которых $\omega = 0$, а инкремент описывается выражением (113), область II — условиям (111б) и (112а), инкремент определяется соотношением (114), а частота — соотношением (115)

ственные оценки характерных масштабов и времен крупномасштабной неустойчивости для солнечной

плазмы. Для этого нужно оценить коэффициенты усиления α и α_N . Полученные ранее соотношения (102), (103), (114) определяют максимальное значение инкремента $\gamma_{max} \sim \alpha^2$. Соответственно, характерный масштаб неустойчивой моды $L_{max} \sim 1/\alpha$ и характерный временной масштаб ее нарастания $T \sim 1/\gamma_{max}$. Приведенные соотношения записаны в безразмерных переменных. Для их оценки прежде всего определим величину источника, поддерживающего стационарный уровень мелкомасштабной скорости. Предполагая в стационарном случае баланс между источником и диссипацией, из уравнения (1) получим

$$F_0 \approx \nu v_0 / l^2.$$

Учитывая, что источник должен обладать спиральностью, оценим его амплитуду через гидродинамическую спиральность $\alpha_v = \tau \langle \mathbf{v}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{v}_0 \rangle / 3$. Выражая скорость через амплитуду источника, получаем

$$\alpha_v \approx \frac{\tau v_0^2}{3l} \approx \frac{\tau}{3l} \left(\frac{F_0 l^2}{\nu v_0} \right)^2 v_0^2 \approx \frac{\tau v_0^2}{3l} f_0^2,$$

где f_0 — безразмерная сила, входящая в коэффициент усиления α (см. соотношение (104)). Таким образом, амплитуду силы можно оценить как

$$f_0^2 \approx 3\alpha_v \nu / l v_0^2.$$

Напомним, что l — это пространственный масштаб мелкомасштабных движений. Этот масштаб удобно оценить через число Рейнольдса мелкомасштабных пульсаций: $l \approx R\nu/v_0$. Окончательно получим

$$f_0^2 \approx 3\alpha_v / Rv_0.$$

Возвращаясь к соотношению (88) при малых числах Прандтля, легко получить коэффициент α в виде

$$\alpha \approx \frac{f_0^2}{\text{Ra}^2} \approx \frac{3\alpha_v}{R \text{Ra}^2 v_0}.$$

Тогда характерный масштаб крупномасштабной неустойчивости определяется как

$$L \approx l \frac{v_0 R \text{Ra}^2}{3\alpha_v}. \tag{116}$$

Если выразить масштаб l мелкомасштабных движений через число Рейнольдса, то оценка принимает вид

$$L \approx \frac{\nu (R \text{Ra})^2}{3\alpha_v}.$$

Аналогично получим оценку для характерных времен в виде

$$T \approx \frac{1}{\nu} \left(\frac{R^2 \text{Ra}^2}{3\alpha_v} \right)^2.$$

Из соотношения (116) легко заметить, что величина, на которую крупный масштаб превосходит масштаб мелкомасштабных движений, определяется произведением $R \text{Ra}^2$. Для оценок часто используют $\alpha_v \approx v_0$ (см., например, работу [34]).

Теперь в качестве примера рассмотрим конвективную зону Солнца. Как известно, она состоит из конвективных ячеек с вертикальным размером порядка 100 км и горизонтальным размером порядка 500 км [35]. Кроме того, имеется супергрануляция с горизонтальным масштабом порядка 20000 км. Сами конвективные ячейки являются квазистационарными с характерным временем жизни порядка 10 мин. Будем рассматривать движение газа внутри конвективной ячейки как мелкомасштабное вплоть до 1/3 высоты ячейки, другими словами, вплоть до масштабов порядка $l_0 \approx 30$ км. Масштабы, превышающие эти, будем рассматривать как крупномасштабные. Турбулентная вязкость и турбулентная теплопроводность практически одинаковы и равны $10^{11} - 10^{12}$ см²/с. Поэтому число Прандтля порядка единицы. Сами конвективные ячейки можно считать примерно находящимися на границе устойчивости, поэтому их число Рэлея можно оценить из решения задачи о конвекции со свободными границами, что, как известно, дает $\text{Ra} \approx (27/4)\pi^4$. Поскольку градиент температуры внутри ячейки считается примерно постоянным, легко оценить число Рэлея Ra_0 на масштабе $l_0 \approx 30$ км:

$$\text{Ra}_0 \approx \text{Ra} \frac{1}{(3.3)^4} = 5.5.$$

Скорость движения газа в ячейке составляет $v_0 \approx 1$ км/с [35]. Отсюда можно оценить турбулентное число Рейнольдса $R = l_0 v_0 / \nu_T$ на масштабе $l_0 \approx 30$ км. Учитывая значение турбулентной вязкости ν_T , получим

$$R = \frac{l_0 v_0}{\nu_T} \approx 0.3 \dots 3.0 \sim 1.$$

Тот факт, что турбулентное число Рейнольдса порядка единицы, ясен уже из квазистационарного характера конвекции. Используя для α соотношение (85) с числом Рэлея Ra_0 и $f_0^2 \sim 3/R$ и формулу $L = 2\pi l_0 / \alpha$ для характерного масштаба неустойчивости можем оценить численное значение $L \approx 61l_0 = 1830$ км. С учетом характерного размера ячеек видно, что неустойчивость закручивает примерно три-четыре ячейки.

Аналогично можно оценить характерное время T развития неустойчивости по формуле:

$$T = t_0 \frac{4}{\alpha^2}, \quad t_0 = \frac{l_0^2}{v}.$$

Подставляя численные значения параметров, получаем

$$T \approx 37.2 \text{ ч.}$$

В результате развития неустойчивости в конвективной зоне Солнца генерируется вихревая структура типа циклона, который захватывает несколько конвективных ячеек. При $R \sim 1$ его горизонтальные и вертикальные масштабы примерно одинаковы.

7. ВЫВОДЫ

Применяя асимптотический метод многих масштабов, мы нашли условия возникновения крупномасштабной неустойчивости в стратифицированной проводящей среде при наличии мелкомасштабной спиральности. Показано существование двух неустойчивых мод, которые возникают в определенных областях параметров. Одна мода имеет инкремент (113) и нулевую частоту. Типичная зависимость ее инкремента от волновых чисел K показана на рис. 4 и имеет ярко выраженный максимум. Положение и величина этого максимума зависят от параметров и легко определяются из соотношения (113). Вторая мода с отличной от нуля частотой равной (115) и инкрементом (114) реализуется при других значениях параметров, обсуждаемых выше. Максимум инкремента этой моды достигается при значении волновых чисел $K = K_3/2$, частота при этом равна $\omega = \pm \text{Im} |K_3/2| \sqrt{\Pi}|_{K=K_3/2}$. При умеренных числах $\text{Ra} \approx 1$ и $\text{Pr} \approx 1$ нарастает именно эта мода. С ростом амплитуды эти неустойчивости выходят на нелинейную стадию и формируют стационарные крупномасштабные структуры. Эта нелинейная стадия также может быть систематически исследована методом многих масштабов аналогично изложенному ранее [4, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные вихри в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
2. *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, Наукова думка, Киев (1990).
3. О. Г. Онищенко, О. А. Похотелов, Н. М. Астафьева, УФН **178**, 605 (2008).
4. А. В. Тур, В. В. Яновский, *Гидродинамические вихревые структуры*, Институт монокристаллов, Харьков (2012).
5. J. Sommeria, S. P. Meyers, and H. L. Swinney, Nature **331**, 689 (1988).
6. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
7. W. Zdunkovski and A. Bott, *Dynamics of the Atmosphere: A Course in Theoretical Meteorology*, Cambridge Univ. Press (2003).
8. С. С. Моисеев, П. Б. Руткевич, А. В. Тур, В. В. Яновский, ЖЭТФ **94**(2), 144 (1988).
9. Е. А. Лупян, А. А. Мазуров, П. Б. Руткевич, А. В. Тур, ЖЭТФ **102**, 1540 (1992).
10. G. V. Levina, S. S. Moiseev, and P. B. Rutkevich, Adv. Fluid Mech. **25**, 111 (2000).
11. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover Publ., New York (1961).
12. A. Tur and V. Yanovsky, arXiv:1204.5024v1.
13. A. V. Tur and V. V. Yanovsky, Open J. Fluid Dyn. **3**, 64 (2013).
14. A. V. Tur, M. Chabane1, and V. V. Yanovsky, Open J. Fluid Dyn. **3**, 340 (2013).
15. U. Frisch, Z. S. She, and P. L. Sulem, Physica D **28**, 382 (1987).
16. Г. Моффат, *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде*, Мир, Москва (1980).
17. Ю. Паркер, *Беседы об электрических и магнитных полях в космосе*, Изд-во Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск (2010).
18. Д. Д. Соколов, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик, УФН **184**, 313 (2014).
19. F. H. Busse, Phys. Earth. Planet. Inter. **12**, 350 (1976).
20. K. K. Zang and F. H. Busse, Phys. Earth. Planet. Inter. **59**, 202 (1990).
21. C. A. Jones, Phil. Trans. Roy. Soc. London A **358**, 873 (2006).
22. G. A. Glantzmaier and P. H. Roberts, Contemp. Phys. **38**, 269 (1998).
23. O. Podvigina, arXiv:1102.4092v1.
24. О. М. Подвигина, Изв. РАН. МЖГ **46**, 29 (2009).
25. А. В. Гетлинг, *Конвекция Рэлея – Бенара*, Эдиториал УРСС, Москва (1999).

26. Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *Магнитные поля в астрофизике*, Изд-во Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск (2006).
27. T. Ohkawa, V. C. Chan, M. S. Chu et al., in *Proc. 12th Int. Conf. in Plasma Physics Control of Nuclear Fusion Res.*, Nice, France (1988), CN50/1-4.
28. И. В. Соколов, УФН **161**(10), 175 (1991).
29. S. A. Balbus and J. F. Hawley, *Astrophys. J.* **376**, 214 (1991).
30. С. И. Вайнштейн, *Магнитные поля в космосе*, Наука, Москва (1983).
31. D. Montgomery and H. Chen, *Plasma Physics and Controlled Fusion* **26**(10), 1199 (1984).
32. А. З. Долгинов, В. А. Урпин, ЖЭТФ **77**, 1921 (1978).
33. С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, *Турбулентное динамо в астрофизике*, Наука, Москва (1980).
34. Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, УФН **152**, 263 (1987).
35. С. А. Каплан, С. Б. Пикельнер, В. Н. Цытович, *Физика плазмы солнечной атмосферы*, Наука, Москва (1977).