

# ТРЕХМЕРНАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТООПТИЧЕСКОЙ ЛОВУШКИ

*О. Н. Прудников\*, А. В. Тайченачев, В. И. Юдин*

*Новосибирский государственный университет,  
Институт лазерной физики Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

*Новосибирский государственный технический университет  
630092, Новосибирск, Россия*

*Российский квантовый центр  
143025, Сколково, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 9 июля 2014 г.

Рассмотрена кинетика атомов в трехмерной магнитооптической ловушке (МОЛ). Для атома с оптическим переходом  $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$  ( $J_{g,e}$  — полные угловые моменты в основном и возбужденном состояниях) в квазиклассическом приближении построена трехмерная модель МОЛ с учетом влияния относительных фаз световых полей на кинетику атомов. Показано, что влиянием относительных фаз можно пренебречь только в пределе малых интенсивностей световых полей. В общем случае выбор относительных фаз может оказывать сильное влияние на кинетику атомов в МОЛ.

DOI: 10.7868/S0044451015040023

## 1. ВВЕДЕНИЕ

С середины 1980-х гг. лазерное охлаждение атомов является быстро развивающимся направлением на стыке лазерной и атомной физики. В настоящее время лазерно охлажденные атомы широко используются в прецизионной спектроскопии, квантовых стандартах частоты, для достижения конденсации Бозе–Эйнштейна, для моделирования квантовых эффектов в конденсированных средах, при изучении межатомных столкновений и в других исследованиях. Основным источником холодных атомов является магнитооптическая ловушка (МОЛ), которая позволяет охлаждать до сверхнизких температур (мкК–мК) сравнительно большое количество атомов. За прошедшее время было выполнено большое количество экспериментальных и теоретических исследований МОЛ различных типов [1–6]. Аналитические модели МОЛ, как правило, являются одномерными [7–11]. Это связано с тем, что теоретическое описание кинетики атомов в трехмерной модели МОЛ встречает значительные трудности, связанные со

сложной пространственной структурой светового поля, образованного тремя парами интерферирующих лазерных пучков. Насколько нам известно, существует только две работы, посвященные построению трехмерной аналитической модели МОЛ в квазиклассическом приближении [12, 13]. В работе [12] авторы ограничиваются линейным приближением по интенсивности поля. В этом приближении основные характеристики МОЛ, усредненные по пространственному периоду, совпадают с предсказаниями одномерной модели. В работе [13] эти характеристики найдены в виде ряда по интенсивности поля (до четвертого порядка). При этом были обнаружены определенные отклонения от предсказаний одномерной модели. Следует отметить ограниченность подхода работы [13]. Во-первых, ряды по интенсивности поля сходятся только при малом насыщении перехода. Во-вторых, при проведении расчетов в работе использовалась конфигурация поля с фиксированными (нулевыми) относительными фазами волн, распространяющихся в ортогональных направлениях, в то время как в экспериментах, как правило, эти фазы меняются неконтролируемым образом. От значений относительных фаз зависит простран-

\*E-mail: llf@laser.nsc.ru

ственная конфигурация поля (локальные значения амплитуды, фазы и поляризации), что может быть существенным при вычислении характеристик МОЛ. В настоящей работе для атомного перехода  $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$  ( $J_{g,e}$  — полные угловые моменты в основном и возбужденном состояниях) в квазиклассическом приближении строится трехмерная модель МОЛ, свободная от указанных выше ограничений. Получены аналитические выражения для основных характеристик МОЛ, пригодные для любых значений насыщения перехода и для произвольной конфигурации поля. Усреднение по пространственному периоду проводится для произвольных значений относительных фаз. При этом обнаружена существенная зависимость усредненных характеристик МОЛ от этих фаз. Результаты, полученные в данной работе, могут оказаться важными для оптимизации параметров МОЛ для атомов Mg, Ca, Sr, Yb, которые используются при разработке и исследовании оптических стандартов частоты нового поколения [14–17].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение атомов с полными угловыми моментами  $J_g = 0$  и  $J_e = 1$  в основном и возбужденном состояниях в монохроматическом поле произвольной пространственной конфигурации:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  — комплексная векторная амплитуда поля. Кроме того, будем полагать, что на систему наложено статическое неоднородное магнитное поле квадрупольной конфигурации:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \beta \left[ \mathbf{e}_z z - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y) \right], \quad (2)$$

формирующее совместно с полем (1) потенциал МОЛ. Здесь коэффициент  $\beta$  имеет смысл градиента магнитного поля вдоль оси  $z$  в центре ловушки. В квазиклассическом приближении, когда импульс фотона много меньше дисперсии атомного импульса ( $\hbar k \ll \Delta p$ ), кинетика атомов описывается уравнением типа Фоккера–Планка:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{M} \cdot \nabla \right) \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \left[ - \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \right] \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (3)$$

где  $M$  — масса атома,  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  — вигнеровская функция распределения атомов в фазовом пространстве, а  $F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  и  $D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  представляют собой декартовы компоненты силы и тензора диффузии (в пространстве импульсов) в точке  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Для описания распределения холодных атомов вблизи центра ловушки ( $\mathbf{r} = 0$ ) достаточно ограничиться линейными членами в разложении силы по магнитному полю и скорости атома ( $\mathbf{v} = \mathbf{p}/M$ ):

$$F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \approx F^{(0)}(\mathbf{r}) + F^{(1)}(\mathbf{r}) + \sum_j \xi_{ij}(\mathbf{r}) v_j, \quad (4)$$

где  $F^{(0)}(\mathbf{r})$  — сила светового давления, действующая на неподвижный атом в нулевом магнитном поле,  $F^{(1)}(\mathbf{r})$  — линейная по магнитному полю магнитооптическая сила, действующая на неподвижный атом,  $\xi_{ij}(\mathbf{r})$  — тензор, который определяет линейную по скорости атома поправку к силе светового давления в нулевом магнитном поле. Симметричная часть тензора  $\xi_{ij}^{(sym)} = (\xi_{ij} + \xi_{ji})/2$  есть тензор диссипации, задающий линейное по скорости трение. Для тензора диффузии, как правило, достаточно ограничиться вкладом нулевого порядка как по магнитному полю, так и по скорости:

$$D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \approx D_{ij}(\mathbf{r}). \quad (5)$$

## 3. КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ В ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Используя методы работ [18, 19], можно получить явные аналитические выражения для векторов  $\mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{r})$  и тензоров  $\xi_{ij}$  и  $D_{ij}$  в поле произвольной конфигурации (1) и при произвольном насыщении перехода. Сила светового давления линейна по градиенту поля (1):

$$F_j^{(0)} = -\hbar\gamma \frac{\Omega^2}{\gamma^2/4 + \delta^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2} \times \left( \frac{\delta}{\gamma} \nabla_j |\mathbf{U}|^2 + \frac{i}{2} [\mathbf{U}^* \cdot \nabla_j \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \nabla_j \mathbf{U}^*] \right), \quad (6)$$

где  $\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})/E_0$  — безразмерная векторная амплитуда поля, нормированная на скалярную амплитуду  $E_0$ , не зависящую от координат. Выбор  $E_0$  достаточно произволен. Например, в качестве  $E_0$  можно выбрать амплитуду одной из волн, формирующих поле (1), либо среднеквадратичную амплитуду поля. В формуле (6) введены следующие обозначения:  $\delta = \omega - \omega_0$  — отстройка частоты поля от частоты

перехода  $\omega_0$ ,  $\gamma$  — скорость спонтанного распада возбужденного состояния,  $\Omega = dE_0/\hbar$  — частота Раби, соответствующая скалярной амплитуде  $E_0$  ( $d$  — приведенный матричный элемент оператора дипольного

момента). Магнитооптическая сила  $F^{(1)}(\mathbf{r})$  линейна как по градиенту поля (1), так и по магнитному полю (2):

$$F_j^{(1)} = \hbar\mu_0g \frac{(2\Omega^2|\mathbf{U}|^2 - \gamma^2 - 2i\delta\gamma)\Omega^2}{(\gamma^2/4 + \delta^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)[2\delta\gamma + i(\gamma^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)]} (\nabla_j \mathbf{U}^* \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{U}]) - \hbar\mu_0g \times \\ \times \frac{(\gamma^2 + 8\Omega^2|\mathbf{U}|^2 - 6i\delta\gamma)\Omega^4}{(\gamma^2/4 + \delta^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^2 [2\delta\gamma + i(\gamma^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)]} (\mathbf{U}^* \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{U}]) (\nabla_j \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{U}) + \text{с.с.} \quad (7)$$

Здесь  $\mu_0$  — магнетон Бора,  $g$  — фактор Ланде возбужденного состояния. Тензор диссипации можно представить в виде

$$\xi_{ij}^{(sym)} = \frac{4\hbar\delta\gamma^3\Omega^2}{(\gamma^2/4 + \delta^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)[4\delta^2\gamma^2 + (\gamma^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^2]} G_{ij}^{(1)} + \\ + \frac{2\hbar\gamma\delta(\gamma^2 - \Omega^2|\mathbf{U}|^2)\Omega^4}{(\gamma^2/4 + \delta^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^2 [4\delta^2\gamma^2 + (\gamma^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^2]} G_{ij}^{(2)} - \\ - \frac{\hbar\delta(5\gamma^6 + 31\gamma^4\Omega^2|\mathbf{U}|^2 + 40\gamma^2\Omega^4|\mathbf{U}|^4 + 32\Omega^6|\mathbf{U}|^6 + 20\delta^2\gamma^4 + 28\delta^2\gamma^2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)\Omega^4}{2\gamma(\gamma^2/4 + \delta^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^3 [4\delta^2\gamma^2 + (\gamma^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^2]} G_{ij}^{(3)} + \\ + \frac{\hbar(\gamma^2/2 + \Omega^2|\mathbf{U}|^2)\Omega^4}{(\gamma^2/4 + \delta^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^3} G_{ij}^{(4)} + \frac{\hbar(4\delta^2\gamma^2 - \gamma^4 + 4\Omega^4|\mathbf{U}|^4)\Omega^2}{(\gamma^2/4 + \delta^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)[4\delta^2\gamma^2 + (\gamma^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^2]} A_{ij}^{(1)} + \\ + \frac{\hbar(96\Omega^6|\mathbf{U}|^6 + (64\delta^2 + 48\gamma^2)\Omega^4|\mathbf{U}|^4 + (104\delta^2 - 6\gamma^2)\Omega^2|\mathbf{U}|^2 + 48\delta^4\gamma^2 - 3\gamma^6)\Omega^4}{8(\gamma^2/4 + \delta^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^3 [4\delta^2\gamma^2 + (\gamma^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^2]} A_{ij}^{(2)}, \quad (8)$$

где  $G_{ij}^{(n)}$  — вещественные симметричные тензоры, квадратичные по градиентам поля (1):

$$G_{ij}^{(1)} = \nabla_i \mathbf{U}^* \cdot \nabla_j \mathbf{U} + \nabla_j \mathbf{U}^* \cdot \nabla_i \mathbf{U}, \\ G_{ij}^{(2)} = (\mathbf{U} \cdot \nabla_i \mathbf{U}^* - \mathbf{U}^* \cdot \nabla_i \mathbf{U}) \times \\ \times (\mathbf{U} \cdot \nabla_j \mathbf{U}^* - \mathbf{U}^* \cdot \nabla_j \mathbf{U}), \\ G_{ij}^{(3)} = (\mathbf{U} \cdot \nabla_i \mathbf{U}^* + \mathbf{U}^* \cdot \nabla_i \mathbf{U}) \times \\ \times (\mathbf{U} \cdot \nabla_j \mathbf{U}^* + \mathbf{U}^* \cdot \nabla_j \mathbf{U}), \quad (9) \\ G_{ij}^{(4)} = i(\mathbf{U} \cdot \nabla_i \mathbf{U}^* - \mathbf{U}^* \cdot \nabla_i \mathbf{U}) \times \\ \times (\mathbf{U} \cdot \nabla_j \mathbf{U}^* + \mathbf{U}^* \cdot \nabla_j \mathbf{U}) + \\ + i(\mathbf{U} \cdot \nabla_j \mathbf{U}^* - \mathbf{U}^* \cdot \nabla_j \mathbf{U}) \times \\ \times (\mathbf{U} \cdot \nabla_i \mathbf{U}^* + \mathbf{U}^* \cdot \nabla_i \mathbf{U}),$$

и  $A_{ij}^{(n)}$  — вещественные антисимметричные тензоры, квадратичные по градиентам поля:

$$A_{ij}^{(1)} = i(\nabla_i \mathbf{U}^* \cdot \nabla_j \mathbf{U} - \nabla_j \mathbf{U}^* \cdot \nabla_i \mathbf{U}), \\ A_{ij}^{(2)} = i(\mathbf{U}^* \cdot \nabla_i \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \nabla_i \mathbf{U}^*) \times \\ \times (\mathbf{U} \cdot \nabla_j \mathbf{U}^* + \mathbf{U}^* \cdot \nabla_j \mathbf{U}) - \\ - i(\mathbf{U} \cdot \nabla_i \mathbf{U}^* + \mathbf{U}^* \cdot \nabla_i \mathbf{U}) \times \\ \times (\mathbf{U}^* \cdot \nabla_j \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \nabla_j \mathbf{U}^*). \quad (10)$$

Тензор диффузии содержит две компоненты:

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = D_{ij}^{(sp)}(\mathbf{r}) + D_{ij}^{(ind)}(\mathbf{r}).$$

Первое слагаемое  $D_{ij}^{(sp)}$ , обусловленное флуктуациями направления вылета спонтанных фотонов, зависит от локальных значений поля (1) и не зависит от его градиентов:

$$D_{ij}^{(sp)} = \frac{\gamma(\hbar k)^2}{5} \frac{\Omega^2}{\gamma^2/4 + \delta^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2} \times \\ \times \left\{ \delta_{ij}|\mathbf{U}|^2 - \frac{1}{4}(\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_j^* + \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{U}_i^*) \right\}, \quad (11)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Второе слагаемое, тензор индуцированной диффузии  $D_{ij}^{(ind)}$ , вызвано флуктуациями силы светового давления. Тензор  $D_{ij}^{(ind)}$ , так же как и  $\xi_{ij}^{(sym)}$ , квадратичен по градиентам поля:

$$D_{ij}^{(ind)} = \gamma \hbar^2 \left[ \frac{\Omega^2}{\gamma^2 + 4\delta^2 + 8\Omega^2|\mathbf{U}|^2} G_{ij}^{(1)} + \frac{4(3\gamma^2 - 4\delta^2)\Omega^4}{(\gamma^2 + 4\delta^2 + 8\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^3} G_{ij}^{(2)} + \frac{4[-12\delta^2\gamma^2 + (\gamma^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^2]\Omega^4}{\gamma^2(\gamma^2 + 4\delta^2 + 8\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^3} G_{ij}^{(3)} + \frac{32\delta(\gamma^2 + 2\Omega^2|\mathbf{U}|^2)\Omega^4}{\gamma(\gamma^2 + 4\delta^2 + 8\Omega^2|\mathbf{U}|^2)^3} G_{ij}^{(4)} \right]. \quad (12)$$

Формулы (6)–(12) обобщают аналитические выражения для кинетических коэффициентов, полученные ранее в различных предельных случаях. Например, в низшем приближении по интенсивности поля (1), т.е. ограничиваясь членами порядка  $\Omega^2$ , получим из (6)–(12) результаты работы [12]. Для простых одномерных конфигураций поля (1) полученные нами формулы воспроизводят хорошо известные результаты одномерных моделей (также представлены в [13]).

#### 4. СТАНДАРТНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ МОЛ

Обычно для охлаждения и захвата атомов в МОЛ используются три пары встречных взаимно ортогональных лазерных пучков. Встречные пучки имеют ортогональные циркулярные поляризации (так называемая  $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурация). Вблизи центра ловушки лазерные пучки можно аппроксимировать плоскими волнами. Тогда соответствующая конфигурация поля с учетом фаз интерферирующих волн может быть представлена в виде

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \left( \mathbf{e}_{+1}^{(z)} e^{ikz} + \mathbf{e}_{-1}^{(z)} e^{-ikz} \right) + \left( \mathbf{e}_{-1}^{(x)} e^{ikx} + \mathbf{e}_{+1}^{(x)} e^{-ikx} \right) e^{i\Phi_x} + \left( \mathbf{e}_{-1}^{(y)} e^{iky} + \mathbf{e}_{+1}^{(y)} e^{-iky} \right) e^{i\Phi_y}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{e}_{\pm 1}^{(j)}$  — циклические орты, соответствующие правой и левой циркулярным поляризациям по отношению к оси  $j = x, y, z$  (рис. 1).

Из-за произвольности выбора начала отсчета времени и начала координат достаточно двух фаз (в нашем случае  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$ ) для однозначной параметризации полевой конфигурации (13). Поле (13) нормировано таким образом, что  $E_0$  соответствует амплитуде одной волны. Отметим, что выбор поляризации волн в (13) согласован с квадрупольным магнитным полем (2) так, чтобы обеспечивать устойчивый захват атомов в МОЛ по всем направлениям. Для перехода  $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$  температура атомов

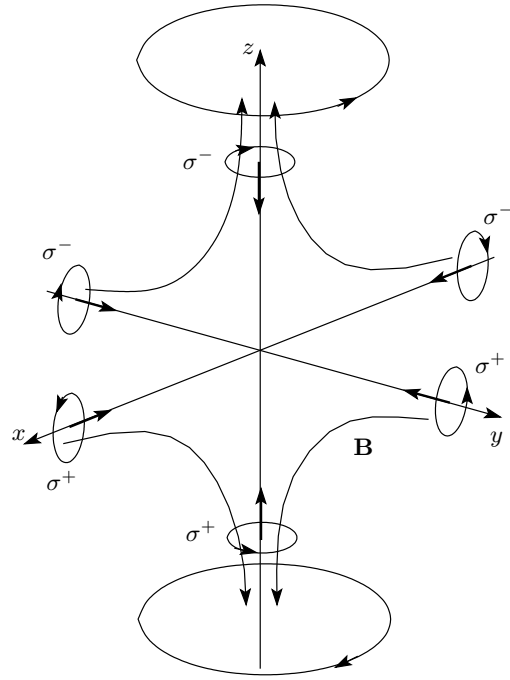


Рис. 1. Пространственная конфигурация световых полей и магнитного поля магнитооптической ловушки

в МОЛ ограничена доплеровским пределом, а глубина потенциальных ям недостаточна для сильной локализации атомов, поэтому для расчета параметров МОЛ достаточно знать кинетические коэффициенты, усредненные по пространственному периоду световой волны вблизи центра ловушки. Поскольку магнитное поле  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  на размерах порядка длины волны меняется слабо, при расчете усредненных характеристик МОЛ этим изменением можно пренебречь. Сила светового давления  $\mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{r})$  в общем случае содержит как потенциальную, так и вихревую составляющие. Для конфигурации (13) обе эти составляющие при усреднении обращаются в нуль при любых значениях фаз  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$ :

$$\langle \mathbf{F}^{(0)} \rangle = 0.$$

Усредненные декартовы компоненты магнитооптической силы (7) пропорциональны отклонению от центра ловушки в соответствующем направлении:

$$\langle F_j^{(1)} \rangle = -\chi_j r_j, \quad (14)$$

где  $\chi_j$  — коэффициенты упругости, в общем случае не равные друг другу. После усреднения тензоры диссипации и диффузии становятся диагональными:

$$\langle \xi_{ij}^{(sym)} \rangle = -\alpha_j \delta_{ij}, \quad \langle D_{ij} \rangle = d_j \delta_{ij}, \quad (15)$$

где  $\alpha_j$  и  $d_j$  — коэффициенты трения и диффузии вдоль  $j$ -й координатной оси. Кинетические коэффициенты  $\chi_j$ ,  $\alpha_j$  и  $d_j$  полностью определяют стационарное распределение атомов по координатам и импульсам (стационарное решение уравнения (3)), которое является гауссовским:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \prod \mathcal{F}^{(j)}(r_j, p_j), \\ \mathcal{F}^{(j)}(r_j, p_j) &= C_j \exp \left[ -\frac{p_j^2}{2Mk_B T_j} \right] \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{\chi_j r_j^2}{2k_B T_j} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где  $C_j$  — нормировочные коэффициенты,  $T_j = d_j/k_B \alpha_j$  — эффективная температура. Для конфигурации (13) все коэффициенты  $\chi_j$ ,  $\alpha_j$  и  $d_j$  зависят от фаз  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$ . В этом легко убедиться, представляя эти коэффициенты в виде рядов по степеням параметра насыщения  $S = \Omega^2/(\gamma^2/4 + \delta^2)$ . Первый член разложения по  $S$  коэффициента  $\chi_z$  совпадает с результатами одномерной модели:

$$\begin{aligned} \chi_x &= -\hbar k \mu_0 g \beta \frac{2\delta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2/4} \times \\ &\times \left\{ S - \left( 22 + \cos(2\Phi_x - 2\Phi_y) + \cos(2\Phi_x) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\gamma}{2\delta} [\sin(2\Phi_x - 2\Phi_y) + \sin(2\Phi_x)] \right) S^2 \right\} + O(S^3), \\ \chi_y &= -\hbar k \mu_0 g \beta \frac{2\delta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2/4} \times \\ &\times \left\{ S - \left( 22 + \cos(2\Phi_x - 2\Phi_y) + \cos(2\Phi_y) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\gamma}{2\delta} [\sin(2\Phi_x - 2\Phi_y) - \sin(2\Phi_y)] \right) S^2 \right\} + O(S^3), \\ \chi_z &= -\hbar k \mu_0 g \beta \frac{4\delta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2/4} \times \\ &\times \left\{ S - \left( 22 + \cos(2\Phi_x) + \cos(2\Phi_y) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\gamma}{2\delta} [\sin(2\Phi_y) + \sin(2\Phi_x)] \right) S^2 \right\} + O(S^3). \end{aligned} \quad (17)$$

В коэффициенте трения

$$\begin{aligned} \alpha_x &= -\hbar k^2 \frac{4\delta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2/4} \times \\ &\times \left\{ S - \left( 21 + \cos(2\Phi_x) + \cos(2\Phi_x - 2\Phi_y) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\gamma}{2\delta} [\sin(2\Phi_x) + \sin(2\Phi_x - 2\Phi_y)] \right) S^2 \right\} + O(S^3), \\ \alpha_y &= -\hbar k^2 \frac{4\delta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2/4} \times \\ &\times \left\{ S - \left( 21 + \cos(2\Phi_x) + \cos(2\Phi_x - 2\Phi_y) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\gamma}{2\delta} [\sin(2\Phi_y) - \sin(2\Phi_x - 2\Phi_y)] \right) S^2 \right\} + O(S^3), \\ \alpha_z &= -\hbar k^2 \frac{4\delta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2/4} \times \\ &\times \left\{ S - \left( 21 + \cos(2\Phi_x) + \cos(2\Phi_y) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\gamma}{2\delta} [\sin(2\Phi_x) + \sin(2\Phi_y)] \right) S^2 \right\} + O(S^3) \end{aligned} \quad (18)$$

также появляется зависимость от относительных фаз полей  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$  в членах разложения по  $S$  выше первого порядка. Заметим, что, в силу того что есть прямая зависимость между коэффициентами трения и коэффициентами упругости [11], данные коэффициенты имеют подобную зависимость от фаз полей. Приведем усредненные по пространственному периоду коэффициенты спонтанной диффузии:

$$\begin{aligned} d_x^{(sp)} &= \hbar^2 k^2 \gamma S \left( 1 - \frac{2S}{5} [35 + 2 \cos(2\Phi_x - 2\Phi_y) + \right. \\ &\left. + 2 \cos(2\Phi_x) + \cos(2\Phi_y)] \right) + O(S^3), \\ d_y^{(sp)} &= \hbar^2 k^2 \gamma S \left( 1 - \frac{2S}{5} [35 + 2 \cos(2\Phi_x - 2\Phi_y) + \right. \\ &\left. + \cos(2\Phi_x) + 2 \cos(2\Phi_y)] \right) + O(S^3), \\ d_z^{(sp)} &= \hbar^2 k^2 \gamma S \left( 1 - \frac{2S}{5} [35 + \cos(2\Phi_x - 2\Phi_y) + \right. \\ &\left. + 2 \cos(2\Phi_x) + 2 \cos(2\Phi_y)] \right) + O(S^3), \end{aligned} \quad (19)$$

и вынужденной диффузии:

$$\begin{aligned}
d_x^{(ind)} &= \hbar^2 k^2 \gamma S \times \\
&\times \left( 1 + \left[ \frac{\gamma^2/2 - 2\delta^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} \left( \cos(2\Phi_x - 2\Phi_y) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \cos(2\Phi_x) \right) - 14 \right] S \right) + O(S^3), \\
d_y^{(ind)} &= \hbar^2 k^2 \gamma S \times \\
&\times \left( 1 + \left[ \frac{\gamma^2/2 - 2\delta^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} \left( \cos(2\Phi_x - 2\Phi_y) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \cos(2\Phi_y) \right) - 14 \right] S \right) + O(S^3), \\
d_z^{(ind)} &= \hbar^2 k^2 \gamma S \left( 1 + \left[ \frac{\gamma^2/2 - 2\delta^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} \left( \cos(2\Phi_x) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \cos(2\Phi_y) \right) - 14 \right] S \right) + O(S^3).
\end{aligned} \tag{20}$$

Дополнительно приведем усредненные по фазам выражения:

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}_x &= \bar{\chi}_y = \frac{\bar{\chi}_z}{2} = -\hbar k \mu_0 g \beta \frac{2\delta\gamma S}{(\delta^2 + \gamma^2/4)} \times \\
&\times \left[ 1 - 22S + \left( \frac{1605}{4} - \frac{47\delta^2}{\gamma^2} \right) S^2 \right] + O(S^4), \\
\bar{\alpha}_x &= \bar{\alpha}_y = \bar{\alpha}_z = -\hbar k^2 \frac{4\delta\gamma S}{\delta^2 + \gamma^2/4} \times \\
&\times \left[ 1 - 21S + \left( 381 - \frac{60\delta^2}{\gamma^2} \right) S^2 \right] + O(S^4), \\
\bar{d}_x^{(sp)} &= \bar{d}_y^{(sp)} = \bar{d}_z^{(sp)} = \gamma \hbar^2 k^2 \times \\
&\times [S - 14S^2 + 216S^3] + O(S^4), \\
\bar{d}_x^{(ind)} &= \bar{d}_y^{(ind)} = \bar{d}_z^{(ind)} = \gamma \hbar^2 k^2 \times \\
&\times [S - 14S^2 + 246S^3] + O(S^4).
\end{aligned} \tag{21}$$

В частности, при нулевых фазах  $\Phi_x = \Phi_y = 0$  имеем

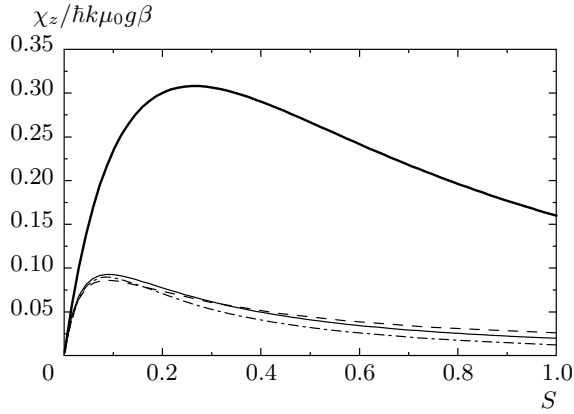
$$\begin{aligned}
\chi_x &= \chi_y = \frac{\chi_z}{2} = -\hbar k \mu_0 g \beta \frac{2\delta\gamma S}{\delta^2 + \gamma^2/4} \times \\
&\times \left[ 1 - 24S + \left( 486 - \frac{72\delta^2}{\gamma^2} \right) S^2 \right] + O(S^4), \\
\alpha_x &= \alpha_y = \alpha_z = -\hbar k^2 \frac{4\delta\gamma S}{\delta^2 + \gamma^2/4} \times \\
&\times \left[ 1 - 23S + \left( \frac{975}{2} - \frac{90\delta^2}{\gamma^2} \right) S^2 \right] + O(S^4), \\
d_x^{(sp)} &= d_y^{(sp)} = d_z^{(sp)} = \gamma \hbar^2 k^2 \times \\
&\times [S - 16S^2 + 288S^3] + O(S^4), \\
d_x^{(ind)} &= d_y^{(ind)} = d_z^{(ind)} = \gamma \hbar^2 k^2 \times \\
&\times \left[ S - 2 \frac{9\delta^2 + 5\gamma^2/4}{\delta^2 + \gamma^2/4} S^2 + \right. \\
&\quad \left. + 12 \frac{35\delta^2 + 11\gamma^2/4}{\delta^2 + \gamma^2/4} S^3 \right] + O(S^4),
\end{aligned} \tag{22}$$

т. е. пространственные компоненты коэффициентов трения и диффузии вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны. Температуру лазерного охлаждения оценим как отношение средних по пространственному периоду коэффициента диффузии и коэффициента трения:

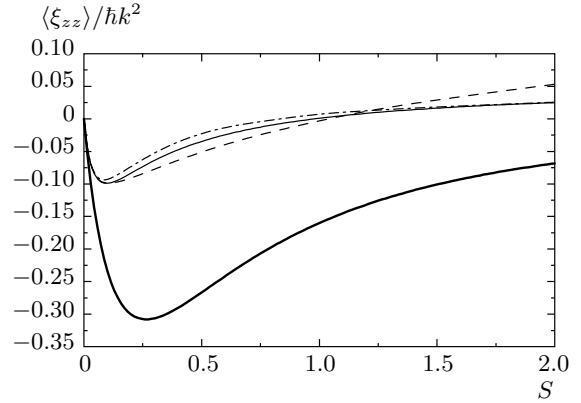
$$k_B T = -\frac{\langle D \rangle}{\langle \xi \rangle},$$

где в качестве средних коэффициентов трения и диффузии рассмотрим  $\langle \xi \rangle = (\xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{zz})/3$  и  $\langle D \rangle = (D_{xx} + D_{yy} + D_{zz})/3$  (см. рис. 4 ниже).

Как видно из (18), в низшем порядке по параметру насыщения  $S$  кинетические коэффициенты не зависят от фаз  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$  и совпадают с соответствующими выражениями для одномерной модели. Однако уже в следующем порядке по  $S$  появляется зависимость от  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$ . При этом четные по  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$  члены имеют ту же четность по отстройке  $\delta$ , что и основные, не зависящие от  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$  члены, в то время как нечетные по  $\Phi_{x,y}$  члены имеют противоположную четность по отстройке. Это общее свойство характерно для всех членов в разложении кинетических коэффициентов по степеням  $S$ . Что касается количественных характеристик фазовых зависимостей, то при малых  $S \ll 1$ , когда ограничение конечным числом членов ряда является хорошим приближением, эти зависимости оказываются слабыми (18). Мы провели анализ усредненных кинетических коэффициентов с точностью до  $S^{10}$ . При этом наблюдаются следующие тенденции: коэффициенты упругости и трения меньше, чем предсказывает одномерная модель, а коэффициент диффузии больше. Соответственно, температура и размер локализации в трехмерной модели будут несколько больше, чем в одномерной, что согласуется с результатами Миногина и др. [13]. Более того, можно отметить следующие качественные отличия от одномерной теории. Так, в одномерной  $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации светового поля отсутствуют пространственные градиенты локальной амплитуды светового поля, приводящие к «сизифовскому» механизму трения [19, 20]. Соответственно, в одномерной  $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации светового поля коэффициент трения знакопостоянен при любых значениях параметра насыщения, а значит, должен приводить к устойчивому охлаждению при любых интенсивностях полей. В отличие от одномерной теории, в трехмерной конфигурации (13) всегда имеется модуляция интенсивности светового поля  $|\mathbf{U}|^2(\mathbf{r})$ , зависящая от выбора относительных фаз  $\Phi_x$ ,  $\Phi_y$ , что приводит к «сизифовским» механизмам трения, меняющим знак диссипативной силы при некоторых умеренных значениях параметра насыщения. В за-



**Рис. 2.** Зависимости коэффициента упругости  $\chi_z$  от параметра насыщения  $S$  при различных значениях относительной фазы полей:  $\Phi_x = 0, \Phi_y = 0$  — штриховая линия,  $\Phi_x = \pi/2, \Phi_y = 0$  — штрихпунктирная линия. Тонкой сплошной линией показана зависимость коэффициента трения, усредненного по фазам. Жирная сплошная линия соответствует результатам для одномерной  $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации светового поля. Отстройка  $\delta = -\gamma/2$



**Рис. 3.** Зависимости среднего по пространственному периоду коэффициента трения  $\langle \xi_{zz} \rangle$  от параметра насыщения  $S$  при различных значениях относительной фазы полей:  $\Phi_x = 0, \Phi_y = 0$  — штриховая линия,  $\Phi_x = \pi/2, \Phi_y = 0$  — штрихпунктирная линия. Тонкой сплошной линией показана зависимость коэффициента трения, усредненного по фазам. Жирная сплошная линия соответствует результатам для одномерной  $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации светового поля. Отстройка  $\delta = -\gamma/2$

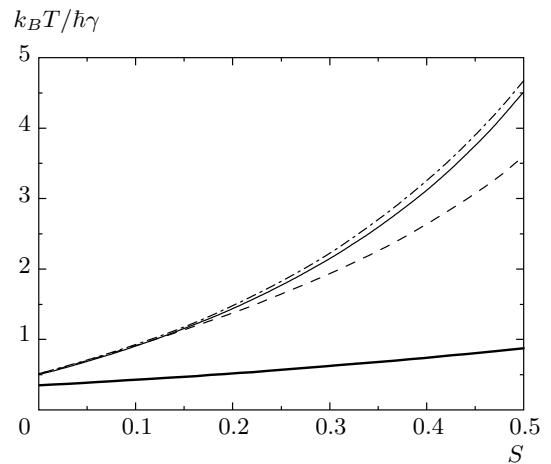
висимости от выбора относительных фаз изменение знака диссипативной силы с ростом интенсивности поля обязательно происходит вдоль двух осей, что приводит к выходу из режима охлаждения для магнитооптической ловушки. Так, для трехмерной конфигурации поля (13)

$$|\mathbf{U}|^2 = 6 + 4 \sin(kz) \cos(ky) \cos \Phi_y - 4 \cos(kz) \sin(kx) \cos \Phi_x - 4 \cos(kx) \sin(ky) \cos(\Phi_x - \Phi_y) \quad (23)$$

видно, что отсутствие градиента интенсивности, а значит, и знакопостоянность коэффициента трения в одном из направлений возможны лишь при следующем выборе относительных фаз:

- 1) при  $\Phi_x = \Phi_y = \pi/2$ , т. е. при отсутствии градиента интенсивности вдоль  $z$ ;
- 2) при  $\Phi_x = 0$  и  $\Phi_y = \pi/2$ , т. е. при отсутствии градиента интенсивности вдоль  $y$ ;
- 3) при  $\Phi_x = \pi/2$  и  $\Phi_x = 0$ , т. е. при отсутствии градиента интенсивности вдоль  $x$ .

Наибольшие отклонения от результатов одномерной теории соответствуют нулевым относительным фазам. Это связано с вкладами, обусловленными градиентами локальной амплитуды поля, которые максимальны при  $\Phi_x = \Phi_y = 0$ . Сильная зависимость от фаз наблюдается в умеренных и сильных полях, когда разложения по степеням  $S$  непримени-



**Рис. 4.** Температура как функция параметра насыщения  $S$  при различных значениях относительной фазы полей:  $\Phi_x = 0, \Phi_y = 0$  — штриховая линия,  $\Phi_x = \pi/2, \Phi_y = 0$  — штрихпунктирная линия,  $\Phi_x = \pi/4, \Phi_y = 0$  — тонкая сплошная. Жирной сплошной линией приведена зависимость коэффициента трения для одномерной  $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации светового поля. Отстройка  $\delta = -\gamma/2$

мы. В этом случае мы использовали численную процедуру усреднения по пространственному периоду поля (рис. 2, 3, 4).

Так, при отстройках  $\delta = -\gamma/2$  (в условиях рис. 3) выход из режима охлаждения для МОЛ происходит при параметре насыщения  $S \approx 1$ , что, например, для атомов  $^{88}\text{Sr}$  (оптический переход  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ ,  $\lambda = 461$  нм) соответствует интенсивности  $I \approx \approx 85$  мВт/см<sup>2</sup> на одну волну.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развита теория трехмерной магнитооптической ловушки. Получены аналитические выражения для магнитооптической силы, коэффициентов трения и диффузии. Приведены результаты и важные отличия от ранее развитых моделей и, в частности, от трехмерных теорий МОЛ [12, 13].

1. В отличие от одномерной теории, трехмерная МОЛ образована тремя парами интерферирующих лазерных пучков и имеет более сложную пространственную структуру. В таком поле всегда имеется пространственная модуляция интенсивности  $|U|^2(r)$ , зависящая от выбора относительных фаз  $\Phi_x$ ,  $\Phi_y$  (13). Модуляция интенсивности приводит к «сизифовским» механизмам трения, меняющим знак диссипативной силы при некоторых больших значениях параметра насыщения, что качественно отличает результаты трехмерной теории от результатов одномерной в умеренных по интенсивности полях.

2. В пределе малых интенсивностей световых полей «сизифовские» механизмы трения несущественны, что приводит к отсутствию фазовой зависимости в работе МОЛ. Соответственно, в первом порядке по параметру насыщения  $S$  результаты совпадают с одномерной моделью, а также с результатами работы [12].

3. В умеренных по интенсивности световых полях проявляется существенная зависимость от относительных фаз световых полей, формирующих поле МОЛ. В частных случаях выбора относительных фаз:  $\Phi_x = \Phi_y = \pi/2$ ;  $\Phi_x = 0$  и  $\Phi_y = \pi/2$ ;  $\Phi_x = \pi/2$  и  $\Phi_y = 0$ , диссипативный характер силы трения сохраняется при любых интенсивностях лишь вдоль одной из осей. В большинстве случаев, когда относительные фазы полей не контролируются (либо меняются на временах, соответствующих кинетическим временам эволюции,  $\tau \approx \omega_R^{-1}$ ), трение меняется на нагрев с ростом интенсивности вдоль

всех трех осей, что ведет к выходу из режима охлаждения для магнитооптической ловушки. В том числе при малых параметрах насыщения это приводит к температурам большим, чем предсказывает одномерная модель. В частности, при  $\Phi_x = \Phi_y = 0$  результаты разложения кинетических коэффициентов по параметру насыщения совпадают с результатами работы [13].

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (в рамках базовой части государственного задания № 2014/139, проект № 825) и Президиума СО РАН, а также РФФИ (гранты №№ 14-02-00806, 14-02-00939, 12-02-00454, 14-02-00712).

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 2631 (1987).
2. F. Shimizu, K. Shimizu, and H. Takuma, *Opt. Lett.* **16**, 339 (1991).
3. T. Walker, D. Hoffmann, P. Feng, and R. S. Williamson III, *Phys. Lett. A* **163**, 309 (1992).
4. C. Chesman, E. G. Lima, F. A. M. de Oliveira, S. S. Viana, and J. W. R. Tabosa, *Opt. Lett.* **19**, 1237 (1994).
5. M. Vangeley, P. F. Griffin, E. Riis, and A. S. Arnold, *Opt. Express* **17**, 13601 (2009).
6. J. Lee, J. A. Grover, L. A. Orozco, and S. L. Rolston, *J. Opt. Soc. Amer. B* **30**, 2869 (2013).
7. M. Drewsen, Ph. Laurent, A. Nadir et al., *Appl. Phys. B* **59**, 283 (1994).
8. H. J. Metcalf and P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping*, Springer, New York (1999).
9. V. I. Balykin, V. G. Minogin, and V. S. Letokhov, *Rep. Progr. Phys.* **63**, 1429 (2000).
10. S. Chang, T. Y. Kwon, H. S. Lee, and V. G. Minogin, *Phys. Rev. A* **66**, 043404 (2002).
11. O. N. Prudnikov, A. V. Taichenachev, A. M. Tumai-kin, and V. I. Yudin, *Phys. Rev. A* **77**, 033420 (2008).
12. M. Gajda and J. Mostowski, *Phys. Rev. A* **49**, 4864 (1994).
13. S.-K. Choi, S. E. Park, J. Chen, and V. G. Minogin, *Phys. Rev. A* **77**, 015405 (2008).
14. T. Hong, C. Cramer, W. Nagourney, and E. N. Fortson, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 050801 (2005).



15. R. Santra, E. Arimondo, T. Ido, C. Greene, and J. Ye, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 173002 (2005).
16. A. V. Taichenachev, V. I. Yudin, C. W. Oates, C. W. Hoyt, Z. W. Barber, and L. Hollberg, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 083001 (2006).
17. Z. W. Barber, C. W. Hoyt, C. W. Oates, L. Hollberg, A. V. Taichenachev, and V. I. Yudin, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 083002 (2006).
18. А. В. Безвербный, О. Н. Прудников, А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **123**, 437 (2003).
19. О. Н. Прудников, А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **125**, 499 (2004).
20. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, В. П. Яковлев, *Механическое действие света на атомы*, Наука, Москва (1991).