

ГАУССОВ ВАРИАЦИОННЫЙ АНЗАЦ В ПРОБЛЕМЕ АНОМАЛЬНЫХ МОРСКИХ ВОЛН: СРАВНЕНИЕ С ПРЯМЫМ ЧИСЛЕННЫМ МОДЕЛИРОВАНИЕМ

В. П. Рубан^{*}

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 7 декабря 2014 г.

Нелинейная динамика косо ориентированного пакета волн на морской поверхности исследуется аналитически и численно для различных начальных значений параметров пакета в связи с проблемой так называемых волн-убийц (rogue waves). В рамках гауссова вариационного анзаца, примененного к соответствующему (1+2D)-мерному гиперболическому нелинейному уравнению Шредингера, выведена упрощенная лагранжева система дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию коэффициентов действительной и мнимой квадратичных форм, присутствующих в гауссиане. Эта модель дает количественное описание процесса нелинейной пространственно-временной фокусировки — одного из наиболее вероятных механизмов формирования аномальных волн в случайных волновых полях. Система интегрируется в квадратурах, что позволяет лучше понять качественные различия между линейным и нелинейным режимами фокусировки волнового пакета. Проводится сравнение предсказаний гауссовой модели с результатами прямого численного моделирования полностью нелинейных длинногребневых волн.

DOI: 10.7868/S0044451015050213

1. ВВЕДЕНИЕ

Аномальные волны на поверхности океана и в других физических системах (также известные как гигантские волны, «волны-убийцы», rogue waves, freak waves) в наше время стали популярным объектом исследований (см., например, обзоры [1–3] и ссылки в них). Часто используемая математическая модель для этого явления — (1+1D)-мерное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с фокусирующей нелинейностью. В частности, такое уравнение описывает комплексную амплитуду основной гармоники квазимонохроматической слабонелинейной поверхностной волны над плоскими потенциальными течениями идеальной жидкости [4]. За счет нелинейной самофокусировки в достаточно протяженной и высокой волновой группе развивается модуляционная неустойчивость [4, 5]. В результате образуется одномерная аномальная волна. Такой сценарий подтверждается численными и лабораторными экспериментами [6–11]. Полная интегрируемость делает

(1+1D)-НУШ привлекательным для аналитического исследования и позволяет получать точные решения, описывающие некоторые важные свойства реальных волн-убийц (см., например, [12–16]).

В природе, однако, морские волны далеки от одномерной модели (см., например, [17–23]). Когда имеются возмущения свободной поверхности жидкости, зависящие от обеих горизонтальных координат, тогда волновая динамика становится намного сложнее уже в рамках соответствующего НУШ, не говоря уже о сильно нелинейных режимах. Во-первых, (1+2D)-мерное НУШ не является интегрируемым. Во-вторых, в случае волн на глубокой воде пространственный дифференциальный оператор в нем оказывается гиперболическим:

$$2i\psi_t + \psi_{xx} - \psi_{yy} + |\psi|^2\psi = 0. \quad (1)$$

Здесь используются безразмерные переменные $k_0 A^* \rightarrow \psi$, $\omega_0 t \rightarrow t$, $2k_0 x \rightarrow x$, $\sqrt{2}k_0 y \rightarrow y$, где $A(x, y, t)$ — комплексная огибающая главной гармоники, k_0 — волновое число, $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \sqrt{gk_0}$ — частота несущей волны (при этом система отсчета движется с групповой скоростью $v_{gr} = (1/2)\sqrt{g/k_0}$ вдоль оси x). Хотя уравнение (1) имеет ряд су-

^{*}E-mail: ruban@itp.ac.ru

ществленных недостатков, которые мы здесь не обсуждаем, все же оно лучше приспособлено для проведения приближенных аналитических исследований, чем его модифицированные варианты, в которых неизбежно приходится вводить псевдодифференциальные операторы.

Таким образом, в поперечном направлении нелинейность действует дефокусирующим образом, а в продольном направлении она стремится сфокусировать волновой пакет. К этому добавляется линейная дисперсия. В результате действия указанных факторов поведение нелинейной группы волн на двумерной свободной поверхности жидкости оказывается более разнообразным по сравнению с одномерным. В зависимости от начальных условий нелинейность может как усилить, так и ослабить фокусировку. В случае усиления образуется аномальная волна. Кроме того, волны-убийцы могут появляться в результате взаимодействия ранее образовавшихся когерентных структур [20]. Впрочем для обычных волновых полей, где наличие когерентных структур маловероятно, более актуален сценарий появления аномальной волны путем случайной пространственно-временной фокусировки (см. [24, 25] и ссылки там).

В целом вопрос об оптимальных условиях нелинейной фокусировки остается далеко не ясным. Понятно только, что, как и в одномерном случае, начальная группа волн должна быть достаточно высокой и/или протяженной. Но влияние геометрической формы пакета и модуляции фазы на развитие высокой волны исследованы мало. При отсутствии точных решений двумерного НУШ, которые давали бы количественное описание этих процессов, представляется целесообразным провести приближенное рассмотрение динамики идеализированного волнового пакета, характеризующегося небольшим числом зависящих от времени параметров. Тем самым будет придан конкретный смысл изложенным выше качественным соображениям и поставлен своеобразный ориентир в направлении развития будущей более точной теории трехмерных волн-убийц.

Целью настоящей работы является исследование нелинейной динамики волнового пакета в рамках полного гауссова вариационного анзаца, т. е. при наличии недиагональной части у квадратичной формы под экспонентой. Такой пакет имеет эллиптическую форму с главными осями, ориентированными под некоторым, зависящим от времени углом по отношению к осям координат. В отличие от более широко известного диагонального анзаца (см., например, [26–34]), полный гауссов анзац ранее применялся

только для эллиптического НУШ [35, 36]. Данная работа заполняет этот пробел в теории. Здесь будет выведена система вариационных уравнений для параметров эллипса и продемонстрирована ее полная интегрируемость. Факт интегрируемости связан, во-первых, с согласованием третьей степени нелинейности НУШ с двумерностью пространства, а во-вторых, с наличием у уравнения (1) специального закона сохранения — гиперболического аналога углового момента:

$$\int i[y(\psi_x\psi^* - \psi\psi_x^*) + x(\psi_y\psi^* - \psi\psi_y^*)] dx dy = \text{const}. \quad (2)$$

Знание общей структуры аналитических решений вариационной модели позволит нам лучше понять качественные различия между линейным и нелинейным режимами фокусировки волнового пакета. Кроме того, с целью непосредственной проверки гауссовой модели будет проведено сравнение ее предсказаний с результатами прямого численного моделирования полностью нелинейных длиннорегневых волн. В результате окажется, что согласие может быть довольно неплохим даже в сильно нелинейных режимах, когда и само НУШ уже неприменимо.

2. ВАРИАЦИОННЫЙ АНЗАЦ

Напомним сначала, что в простейшем — диагональном — варианте гауссов анзац описывает волновой пакет, оси симметрии которого совпадают с осями координат (см., например, [26–31]):

$$\psi = \sqrt{\frac{4N}{XY}} \times \exp \left[-\frac{x^2}{2X^2} - \frac{y^2}{2Y^2} + i\frac{Ux^2}{2X} - i\frac{Vy^2}{2Y} + i\phi \right]. \quad (3)$$

Помимо продольного $X(t)$ и поперечного $Y(t)$ размеров, такой пакет характеризуется еще четырьмя действительными величинами: U , V , N и ϕ . Параметр N не зависит от времени, поскольку

$$4\pi N = \int |\psi|^2 dx dy$$

является точным интегралом движения НУШ, а сопряженная по отношению к нему переменная ϕ является циклической. Параметры U и V описывают модуляцию фазы, причем положительному значению U или V соответствует дефокусирующая конфигурация по соответствующему направлению, а отрицательному — фокусирующая. Здесь необходимо отметить, что для применимости НУШ должно быть

выполнено условие спектральной узости волнового пакета. В нашем случае это означает: $(X, Y) \gtrsim 10$, $(U, V) \lesssim 0.1$. Зависимость неизвестных величин X , Y , U и V от времени следует из подстановки вариационного анзаца (3) в лагранжиан нелинейного уравнения Шредингера,

$$\mathcal{L} = \int (i\psi_t\psi^* - i\psi\psi_t^* - |\psi_x|^2 + |\psi_y|^2 + |\psi|^4/2) dx dy. \quad (4)$$

После вычисления интегралов и составления уравнений движения оказывается, что $U = \dot{X}$, $V = \dot{Y}$, и в результате мы приходим к следующей системе дифференциальных уравнений ньютоновского типа:

$$\ddot{X} = \frac{1}{X^3} - \frac{N}{X^2Y}, \quad \ddot{Y} = \frac{1}{Y^3} + \frac{N}{Y^2X}. \quad (5)$$

Отметим, что уравнения (5) являются лагранжевой системой с лагранжианом

$$2L = \dot{X}^2 - \dot{Y}^2 - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{2N}{XY}, \quad (6)$$

в котором кинетическая энергия не является положительно определенной (вторая «частица» имеет отрицательную массу).

Следует сказать, что уравнения типа (5) и их обобщения активно используются в физике плазмы, нелинейной оптике и атомной физике при исследованиях поведения решений НУШ и уравнения Гросса–Питаевского (НУШ с внешним потенциалом) в двух и трех пространственных измерениях (см. статьи [26–34] и ссылки в них). В частности, в работе [27] были приведены аналитические и некоторые численные вариационные решения именно для интересующего нас гиперболического (1+2D)-НУШ, однако при таких значениях параметров, которые характерны для нелинейной оптики, но не для волн на воде. В связи с проблемой фокусировки морских аномальных волн этот упрощенный вариационный анзац был применен лишь совсем недавно в работе автора [37].

Обратимся теперь к гауссову анзацу в его полном варианте, т. е. с привлечением недиагональных элементов квадратичной формы. Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести линейные комбинации пространственных координат, соответствующие гиперболическому повороту с параметром χ (по аналогии с эллиптическим случаем, но с той разницей, что там поворот — обычный тригонометрический):

$$\bar{x} = x \operatorname{ch} \chi + y \operatorname{sh} \chi, \quad \bar{y} = x \operatorname{sh} \chi + y \operatorname{ch} \chi. \quad (7)$$

Вместо выражения (3) мы теперь пишем

$$\psi = \sqrt{\frac{4N}{XY}} \times \exp \left[-\frac{\bar{x}^2}{2X^2} - \frac{\bar{y}^2}{2Y^2} + i\frac{U\bar{x}^2}{2X} - i\frac{V\bar{y}^2}{2Y} - i\gamma\bar{x}\bar{y} + i\phi \right]. \quad (8)$$

Строго говоря, при $\chi \neq 0$ параметры X и Y уже не являются продольным и поперечным размерами пакета, но для краткости мы продолжим их так называть. Параметр χ не может быть слишком большим, иначе волновой пакет станет спектрально широким и выйдет за пределы применимости НУШ. Практически, как это будет следовать из приведенных далее результатов прямого численного моделирования нелинейных волн с реалистичными параметрами, должно выполняться неравенство $|\chi| \lesssim 0.5$.

Отметим, что гауссова форма (8) является одним из точных решений соответствующего линейного уравнения Шредингера при соответствующих временных зависимостях стоящих там параметров. Поэтому при малых N приближение (8) заведомо пригодно. С практической точки зрения интересны значения $N \approx 2-4$. В этом случае мы имеем право надеяться, вообще говоря, лишь на качественное согласие результатов вариационной модели (8) с решениями НУШ (и тем более, с полностью нелинейной динамикой волн на воде). Более подробно о сравнении вариационных и численных решений речь пойдет чуть ниже. Несомненная польза данного приближения заключается в том, что оно дает полуколичественное описание процесса пространственно-временной фокусировки, являющейся одним из наиболее вероятных механизмов образования волн-убийц в реальных условиях (см. [24, 25] и ссылки там).

Подставив пробную функцию (8) и ее частные производные (выраженные через \bar{x} и \bar{y}) в лагранжиан (4), после несложных вычислений убедимся, что переменная χ является циклической, а сопряженный ей импульс есть

$$M = \gamma(X^2 + Y^2) = \text{const}. \quad (9)$$

При этом временная эволюция параметра χ определяется уравнением

$$\dot{\chi} = \frac{M(Y^2 - X^2)}{(X^2 + Y^2)^2}. \quad (10)$$

Сохраняющаяся величина M представляет собой гиперболический аналог углового момента. Как и прежде, $U = \dot{X}$, $V = \dot{Y}$, но теперь динамика неизвестных функций $X(t)$ и $Y(t)$ описывается следующим лагранжианом:

$$2L_M = \dot{X}^2 - \dot{Y}^2 - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{2N}{XY} + \frac{M^2(X^2 - Y^2)}{(X^2 + Y^2)^2}. \quad (11)$$

Данный лагранжиан представляет собой гиперболический аналог эллиптической вариационной задачи, рассмотренной в работах [35, 36]. Уравнения движения, которые отсюда следуют, имеют вид

$$\ddot{X} = \frac{1}{X^3} - \frac{N}{X^2Y} + \frac{M^2X}{(X^2 + Y^2)^2} \times \left(1 - 2\frac{X^2 - Y^2}{X^2 + Y^2}\right), \quad (12)$$

$$\ddot{Y} = \frac{1}{Y^3} + \frac{N}{Y^2X} + \frac{M^2Y}{(X^2 + Y^2)^2} \times \left(1 - 2\frac{Y^2 - X^2}{X^2 + Y^2}\right). \quad (13)$$

Нахождение решений этой системы и сравнение соответствующей эволюции комплексной огибающей волнового пакета с прямым численным моделированием нелинейных волн и являются целью данной работы.

3. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МОДЕЛИ

Немаловажное достоинство системы (11) — ее полная интегрируемость, поскольку здесь, как и в эллиптическом случае, оказывается возможным разделение переменных. Интегрируемость вариационного приближения характерна именно для НУШ в двумерном пространстве, поскольку в трех измерениях в упрощенном лагранжиане вместо $2N/XY$ стояло бы $2\tilde{N}/XYZ$, что нарушило бы однородность уравнений. Как известно из аналитической механики, для интегрирования системы указанного выше типа следует перейти к гиперболическим координатам:

$$X = Q \operatorname{sh} \xi, \quad Y = Q \operatorname{ch} \xi. \quad (14)$$

Эти координаты описывают сектор $X < Y$, который наиболее интересен применительно к проблеме морских волн-убийц, поскольку длина их гребня обычно в 3–10 раз превышает длину волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, а удвоенный минимальный продольный размер пакета достигает примерно одной–двух λ_0 (что соответствует безразмерным значениям $X_{min} \approx 6$ –10). Лагранжиан (11) принимает вид

$$2L_M = Q^2 \dot{\xi}^2 - \dot{Q}^2 - \frac{F(\xi)}{Q^2}, \quad (15)$$

где функция $F(\xi)$ определена формулой

$$F(\xi) = \frac{4}{\operatorname{sh}^2(2\xi)} - \frac{4N}{\operatorname{sh}(2\xi)} + \frac{M^2}{\operatorname{ch}^2(2\xi)}. \quad (16)$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\ddot{Q} + Q\dot{\xi}^2 + \frac{F(\xi)}{Q^3} = 0, \quad (17)$$

$$2Q\dot{Q}\dot{\xi} + Q^2\ddot{\xi} + \frac{F'(\xi)}{2Q^2} = 0. \quad (18)$$

Умножив уравнение (18) на $2Q^2\dot{\xi}$, получим в его левой части полную производную по времени, из чего следует интеграл движения

$$Q^4\dot{\xi}^2 + F(\xi) = C = \text{const}. \quad (19)$$

Глядя на выражение (16), легко понять, что при достаточно малых по модулю отрицательных значениях постоянной интегрирования C уравнение $F(\xi) = C$, определяющее «точки поворота», имеет два действительных положительных корня (ξ_1 и ξ_2), между которыми и происходит движение переменной ξ . При $C \geq 0$ точка поворота всего одна.

Уравнение (17) упрощается до $\ddot{Q} = -C/Q^3$. Его общее решение записывается в явном виде как

$$Q(t) = \sqrt{I(t - t_*)^2 - C/I}, \quad (20)$$

где t_* и I — еще две константы интегрирования. Нетрудно проверить, что $I = -2E$, где E — интеграл энергии системы,

$$E = \frac{1}{2} \left(Q^2 \dot{\xi}^2 - \dot{Q}^2 + \frac{F(\xi)}{Q^2} \right). \quad (21)$$

С учетом (20) из (19) следует равенство

$$\int_0^t \frac{dt}{I(t - t_*)^2 - C/I} = \pm \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{C - F(\xi)}}, \quad (22)$$

где ξ_0 — четвертая (последняя) константа интегрирования. Формулы (20) и (22) дают решение задачи. В частности, при $I > 0$, $C < 0$ зависимость (22) может быть представлена в виде

$$\operatorname{sh}(2\xi(t)) = P \left(a_0 + \frac{1}{\sqrt{-C}} \operatorname{arctg} \frac{I(t - t_*)}{\sqrt{-C}} \right), \quad (23)$$

где четная периодическая по a функция $P(a)$ (имеющая минимум при $a = 0$) является обратной по отношению к эллиптическому интегралу (здесь переменная интегрирования $z = \operatorname{sh}(2\xi)$):

$$P \left(\pm \int_{s_1}^s \frac{z dz}{2\sqrt{(1+z^2)(Cz^2+4Nz-4)-M^2z^2}} \right) \equiv s, \quad (24)$$

причем s_1 — меньший корень уравнения

$$(1+s^2)(Cs^2+4Ns-4)-M^2s^2=0.$$

Амплитуда волнового пакета, равная $\sqrt{4N/XY}$, дается формулой

$$A(t) = \frac{\sqrt{8N}}{\sqrt{[I(t-t_*)^2 - C/I] \operatorname{sh}(2\xi(t))}}. \quad (25)$$

4. ОТБОР РЕШЕНИЙ

Фактически для нахождения зависимостей $X(t)$ и $Y(t)$ с конкретными начальными данными мы не будем пользоваться аналитическими решениями, выражающимися через специальные функции. С практической точки зрения намного проще и быстрее проделать высокоточное численное моделирование системы вариационных уравнений (12) и (13) непосредственно. Следует также помнить, что абсолютная точность при решении приближенной вариационной задачи и не требуется. Знание аналитической структуры решений нам понадобится только для общего понимания свойств рассматриваемой динамической системы.

Из всего многообразия решений нас будут интересовать в основном те, которые приводят к существенно большей амплитуде волны по сравнению с максимально возможным линейным значением

$$A_{max\ lin} = \sqrt{4NU_{-\infty}V_{-\infty}},$$

где $U_{-\infty}$ и $V_{-\infty}$ — асимптотические значения параметров фокусировки на больших отрицательных временах. Собственно, только такие волны заслуживают громкого названия «волны-убийцы». Что важно, наиболее интересные решения соответствуют значениям параметров $C \approx 0$, $M \approx 0$. Условие $C = 0$ означает, что

$$Q^2 \equiv Y^2 - X^2 = I(t-t_*)^2,$$

т. е. графики $X(t)$ и $Y(t)$ соприкасаются при $t = t_*$. В справедливости сделанного утверждения легко убедиться путем численного моделирования системы уравнений (12), (13) (с фиксированными значениями N , U_0 , V_0 , Y_0 , но с различными X_0 и M) и последующего сравнения максимальных амплитуд.

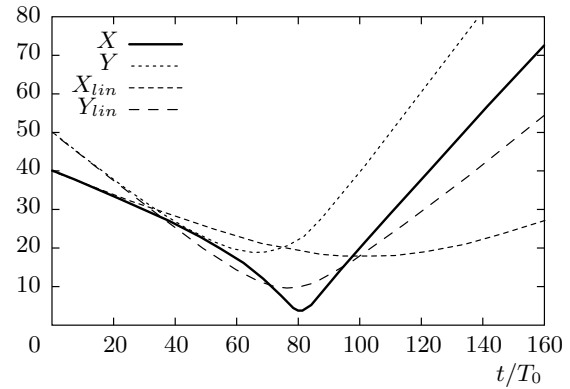


Рис. 1. Временные зависимости $X(t)$ и $Y(t)$ при $N = 3.0$, $M = 0$, $X_0 = 40$, $Y_0 = 50$, $U_0 = -0.05$, $V_0 = -0.10$. Для сравнения показаны также решения для линейного пакета с теми же начальными условиями. Для образования аномальной волны важно, что нелинейная фокусировка по продольному направлению большую часть времени идет с ускорением, тогда как в линейном случае она происходит всегда с замедлением. Минимальное значение X оказалось слишком малым, чтобы приближение НУШ оставалось справедливым, но именно начальные условия подобного типа в действительности приводят к формированию аномальных волн предельной крутизны

Типичные зависимости $X(t)$ и $Y(t)$ для такого случая показаны на рис. 1. Укажем еще, что минимальное значение отношения $(X/Y)_{min} = \operatorname{th} \xi_1$, которое достигается вблизи точки максимума амплитуды, при $M = 0$ и $C = 0$ находится из простого условия $\operatorname{sh} 2\xi_1 = 1/N$, как это видно из формулы (24).

Стоит заметить, что при $M = 0$ циклическая переменная χ остается постоянной, как это следует из уравнения (10). Ниже увидим, что физические волновые поля, соответствующие разным значениям χ , сильно различаются между собой. В частности, при $\chi = 0$ волновая картина симметрична относительно изменения знака координаты y , тогда как при $\chi \neq 0$ никакой симметрии нет (см. рис. 2, 3). Но в рамках НУШ огибающая одного решения переходит в огибающую другого при гиперболическом повороте (безразмерных) координат. Наличие этой приближенной симметрии в динамике морской поверхности существенно проясняет вопрос об оптимальных условиях формирования волн-убийц.

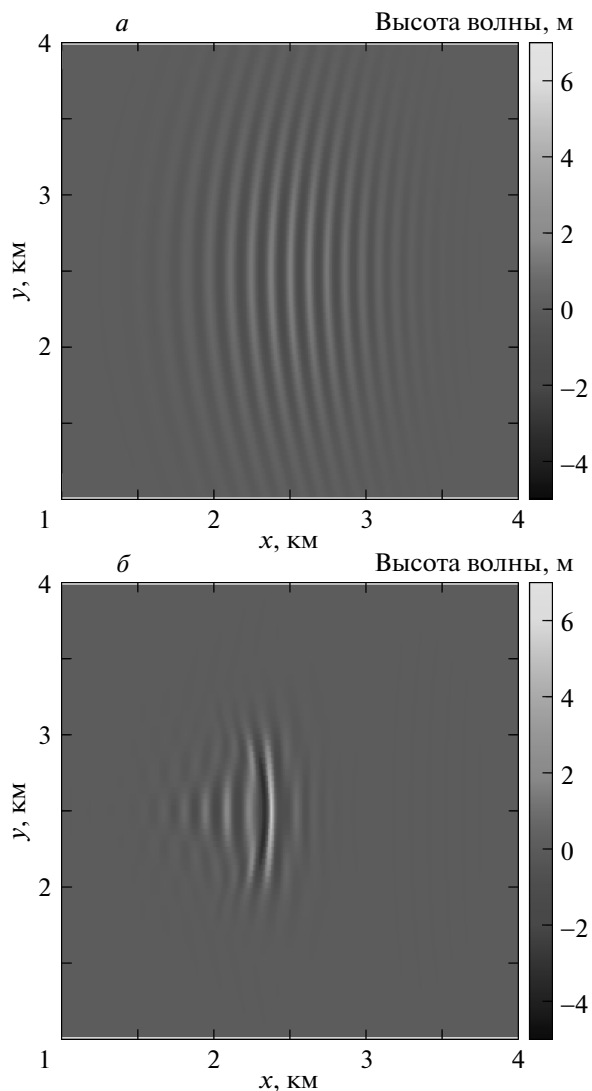


Рис. 2. Волновая картина при $\chi = 0$ (остальные параметры — как на рис. 1): *a* — волновой пакет в начальный момент времени $t = 0$; *b* — в момент подъема аномальной волны, $t = 11$ мин 15.5 с. Длина гребня высокой волны оказалась намного большей, чем было бы в линейном случае, и это находится в соответствии с предсказаниями гауссовой модели. Ясно видны отклонения от гауссовой модели — в основном в виде небольшого шлейфа более длинных волн

5. СРАВНЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМИ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Понятно, что любая упрощенная модель без проверки остается просто игрушкой. Чтобы укрепить статус вариационного приближения, необходи-

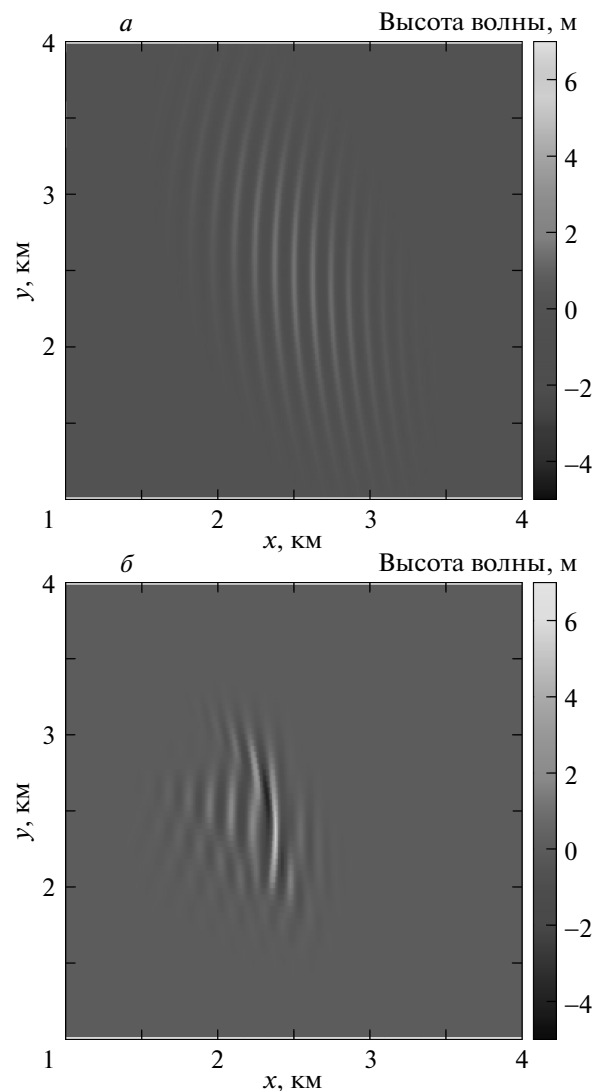


Рис. 3. Волновая картина при $\chi = 0.3$ (остальные параметры — как на рис. 1): *a* — волновой пакет в начальный момент времени $t = 0$; *b* — в момент подъема аномальной волны, $t = 11$ мин 15.5 с. Отклонения от гауссовой модели более существенные, чем при $\chi = 0$

мо провести его сравнение с какой-либо более точной моделью. В нашем случае были проделаны численные эксперименты в рамках модели полностью нелинейных длинногребневых морских волн, которая подробно описана в работах [38, 39]. Вычислительная область представляла собой квадрат со стороной 5 км с периодическими граничными условиями. Была выбрана длина несущей волны $\lambda_0 = 125$ м. Вычисления проводились для различных наборов начальных параметров пакета.

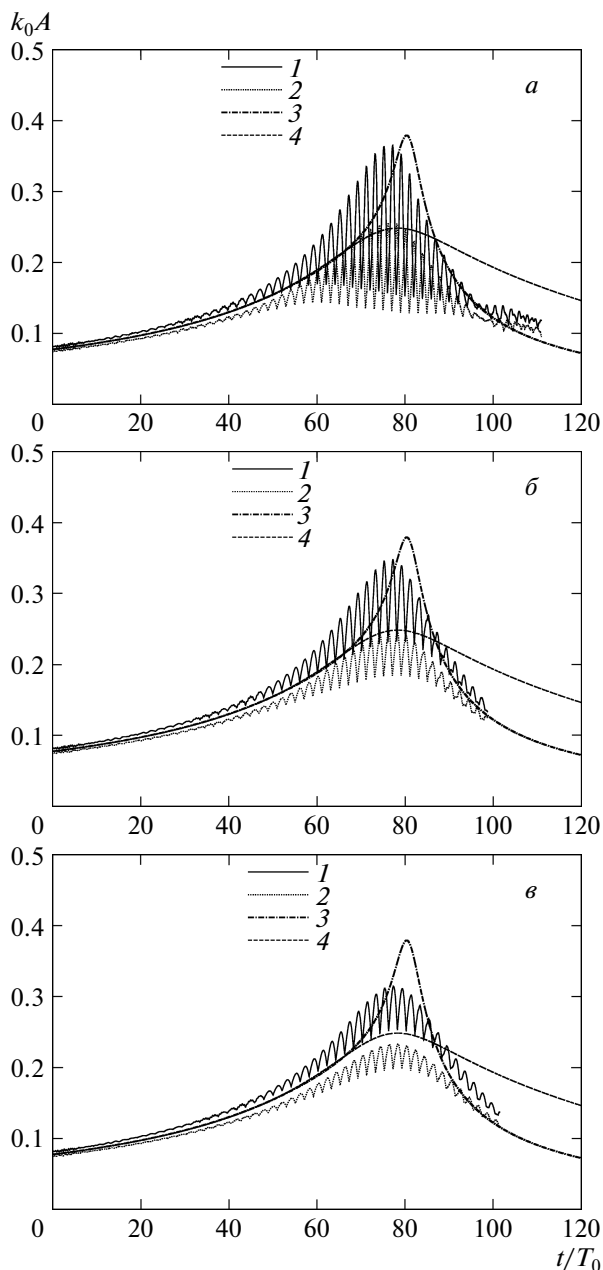


Рис. 4. Сравнение временных зависимостей максимальных амплитуд для волновых пакетов с различными значениями $\chi = 0$ (а), 0.3 (б), 0.5 (в) при прочих параметрах, как на рис. 1. Показаны найденная численно высота самого высокого гребня (1) и глубина самой глубокой впадины (2), а также предсказания нелинейной (3) и линейной (4) гауссовых моделей. Численные зависимости имеют осциллирующий характер, что связано с примерно двукратным различием между фазовой скоростью несущей волны и групповой скоростью движения пакета. Высота гребней в целом больше, чем глубина впадин — за счет старших гармоник. Поэтому сравнивать с предсказаниями теории следует полусумму огибающих численных зависимостей

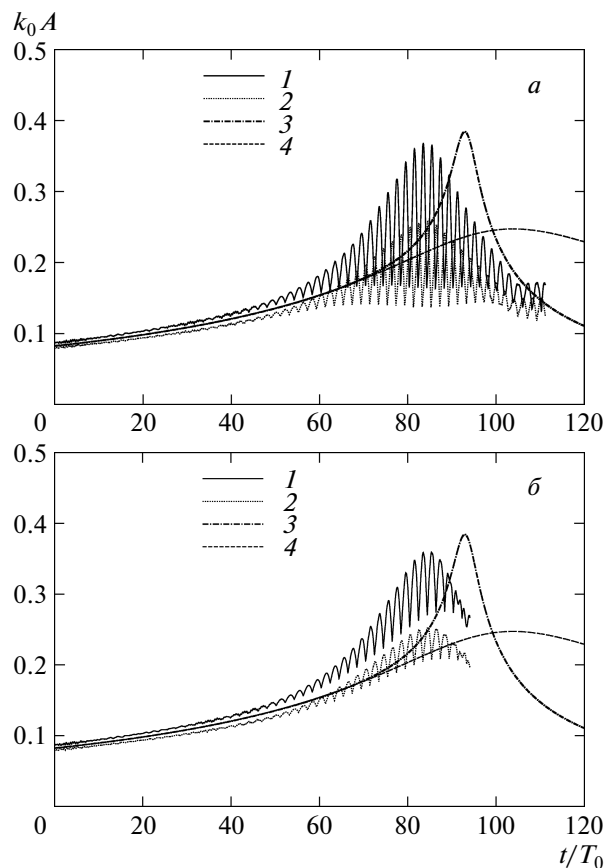


Рис. 5. Сопоставление максимальных амплитуд для следующих начальных данных: $N = 4.0$, $M = 0$; $\chi = 0$ (а), 0.3 (б); $X_0 = 47$, $Y_0 = 50$, $U_0 = -0.05$, $V_0 = -0.075$. Типы линий — как на рис. 4. Из сравнения с рис. 4 видно, что при увеличении N увеличивается временная задержка предсказанного вариационной теорией пика амплитуды по отношению к задержке, полученной численным моделированием

Примеры того, как физически выглядят гауссовы начальные условия, показаны на рис. 2а и 3а. «Портреты» аномальных волн, которые развиваются из этих условий, представлены на рис. 2б и 3б. В общем-то на рис. 2, 3 ясно видны отклонения от гауссовой формы. Несмотря на негауссову форму образующихся волн-убийц, рис. 4, 5 демонстрируют, что имеется качественное согласие между вариационной теорией и численным экспериментом в таком важном аспекте, как зависимость от времени максимальной амплитуды волнового пакета. Видно, что гауссова модель несколько переоценивает высоту аномальной волны (особенно при увеличении параметра χ до значений порядка единицы, когда приближенная

симметрия гиперболического поворота оказывается нарушенной) и отодвигает момент ее максимального подъема. Впрочем, ожидать детального соответствия от простейшего вариационного приближения не приходится. Во всяком случае, время существования аномальной волны гауссова теория предсказывает вполне неплохо. Подтверждается еще один важный эффект — увеличение поперечного размера пакета в момент наивысшего подъема по сравнению с линейной теорией (см. рис. 1). Этот эффект способствует более резкому последующему уменьшению амплитуды по сравнению с линейным случаем.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, на основании проведенного вариационного анализа и его сравнения с результатами прямого численного моделирования естественно выдвинуть следующий тезис. В главном приближении типичная длиннорегневая трехмерная морская волна-убийца на нелинейной стадии представляет собой с математической точки зрения динамическую систему всего с двумя существенными степенями свободы: $X(t)$ и $Y(t)$. Эта система содержит два постоянных параметра (N и M), связанных с законами сохранения $(1+2D)$ -НУШ и характеризующих данную волновую группу. Система является интегрируемой. Реальным условиям океана, при которых следует ожидать появления аномальных волн, отвечают значения $N \approx 2-4$. Наиболее оптимальными параметрами фокусировки для формирования аномальной волны являются следующие: 1) $M \approx 0$; 2) соотношения $X_* \approx Y_* \approx 20-40$, $-\dot{X}_* \approx -\dot{Y}_* \gtrsim 0.05$, которые должны иметь место на этапе (случайной) фокусировки в некоторый момент времени t_* . Задача оценки вероятности осуществления таких условий в случайных волновых полях требует дальнейшего рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Kharif and E. Pelinovsky, *Europ. J. Mech. B/Fluids* **22**, 603 (2003).
2. K. Dysthe, H. E. Krogstad, and P. Müller, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **40**, 287 (2008).
3. M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montina, and F. T. Arecchi, *Phys. Rep.* **528**, 47 (2013).
4. V. E. Zakharov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190 (1968).
5. T. B. Benjamin and J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
6. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Europ. J. Mech. B/Fluids* **21**, 283 (2002).
7. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **81**, 318 (2005) [*JETP Lett.* **81**, 255 (2005)].
8. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Prokofiev, *Europ. J. Mech. B/Fluids* **25**, 677 (2006).
9. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **95**, 550 (2012).
10. A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, and N. Akhmediev, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 204502 (2011).
11. A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, and N. Akhmediev, *Phys. Rev. X* **2**, 011015 (2012).
12. N. N. Akhmedieva, V. M. Eleonskii, and N. E. Kulagin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **89**, 1542 (1985) [*Sov. Phys. JETP* **62**, 894 (1985)].
13. N. Akhmediev and V. Korneev, *Theor. Math. Phys.* **69**, 1089 (1986).
14. N. N. Akhmediev, V. M. Eleonskii, and N. E. Kulagin, *Theor. Math. Phys.* **72**, 809 (1987).
15. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, and J. M. Soto-Crespo, *Phys. Rev. E* **80**, 026601 (2009).
16. M. Erkintalo, K. Hammani, B. Kibler, C. Finot et al., *Phys. Rev. Lett.* **107**, 253901 (2011).
17. M. Onorato, A. R. Osborne, and M. Serio, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 014503 (2006).
18. M. Onorato, T. Waseda, A. Toffoli, L. Cavaleri et al., *Phys. Rev. Lett.* **102**, 114502 (2009).
19. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **74**, 036305 (2006).
20. V. P. Ruban, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 044502 (2007).
21. D. H. Peregrine, *Adv. Appl. Mech.* **16**, 9 (1976).
22. I. V. Lavrenov and A. V. Porubov, *Europ. J. Mech. B/Fluids* **25**, 574 (2006).
23. V. I. Shrira and A. V. Slunyaev, *Phys. Rev. E* **89**, 041002(R) (2014).
24. C. Fochesato, S. Grilli, and F. Dias, *Wave Motion* **44**, 395 (2007).
25. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **97**, 788 (2013).
26. M. Desaix, D. Anderson, and M. Lisak, *J. Opt. Soc. Amer. B* **8**, 2082 (1991).
27. L. Bergé, *Phys. Lett. A* **189**, 290 (1994).

28. L. Bergé and J. J. Rasmussen, *Phys. Rev. E* **53**, 4476 (1996).
29. L. Bergé, J. J. Rasmussen, E. A. Kuznetsov, E. G. Shapiro, and S. K. Turitsyn, *J. Opt. Soc. Amer. B* **13**, 1879 (1996).
30. L. Berge, *Phys. Rep.* **303**, 259 (1998).
31. V. M. Pérez-Garcia, H. Michinel, J. I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5320 (1996); *Phys. Rev. A* **56**, 1424 (1997).
32. Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **55**, R18 (1997).
33. Y. Castin and R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
34. F. Haas, *Phys. Rev. A* **65**, 033603 (2002).
35. A. S. Desyatnikov, D. Buccoliero, M. R. Dennis, and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 053902 (2010).
36. J. Abdullaev, A. S. Desyatnikov, and E. A. Ostrovskaya, *J. Opt.* **13**, 064023 (2011).
37. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **100**, 853 (2014).
38. V. P. Ruban and J. Dreher, *Phys. Rev. E* **72**, 066303 (2005).
39. V. P. Ruban, *Europ. Phys. J. Special Topics* **185**, 17 (2010).