

ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ СИНХРОНИЗАЦИИ В МНОГОМЕРНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

*А. В. Макаренко**

*Научно-исследовательская группа «Конструктивная кибернетика»
101000, Москва, Россия*

*Институт проблем управления Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 октября 2014 г.

Предложен новый подход к комплексному исследованию временной структуры синхронизации многомерных хаотических систем. Метод позволяет диагностировать и количественно оценивать характеристики перемежаемости при синхронизации хаотических колебаний в режиме T-синхронизации. Проведено изучение системы двух идентичных логистических отображений с односторонней связью, функционирующих в режиме развитого хаоса. Показано, что широко распространенный подход, при котором анализу подвергаются только паттерны синхронизации, а зоны десинхронизации рассматриваются как фоновый сигнал и из анализа исключаются, следует признать методологически неполным.

DOI: 10.7868/S0044451015050195

1. ВВЕДЕНИЕ

Синхронизация принадлежит к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и теории хаоса. Этот феномен широко распространен в природе, науке, технике и обществе [1]. Одно из важных проявлений этого явления — это синхронизация хаотических колебаний, которая экспериментально наблюдалась в различных физических приложениях (см. [1–5] и приведенные там ссылки), такие как радиотехнические генераторы, механические системы, лазеры, электрохимические осцилляторы, плазма и газовый разряд, квантовые системы. Изучение данного эффекта является весьма важным также с точки зрения его применения к передаче информации [6] и к криптографическому шифрованию [7] с помощью детерминированных хаотических колебаний, к квантовым вычислениям [3, 8].

Синхронизация хаотических колебаний объединяет под собой несколько различных видов [2]: обобщенная [9], полная [10], противофазная [11], с запаздыванием [12], частотная [13], фазовая [14], синхронизация временных масштабов [15]. Под каждый из них разработан соответствующий аналитический ап-

парат и методы диагностики. Тем не менее продолжают активные исследования, направленные, с одной стороны, на рассмотрение разных видов синхронизации с единых позиций, а с другой — на поиск новых видов синхронного поведения, не укладывающихся в означенные. Несмотря на продолжительную историю изучения синхронизации хаотических колебаний, множество важных вопросов в данной области остаются нерешенными. В их числе и количественное исследование временной структуры синхронизации динамических систем. Под этой структурой будем понимать всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т. е. перемежаемое поведение [16].

Понятие перемежаемости является весьма важным в физике (и не только) для исследования структурных свойств процессов и оно не ограничивается только синхронизмом хаотических систем. На это в свое время обратил внимание еще Мандельброт [17] (задача о турбулентных течениях в гидродинамике), а также несколько позже Зельдович с соавторами [16] (задачи химической кинетики и самовозбуждения магнитного поля в случайном потоке проводящей жидкости). Так, явление перемежаемости

*E-mail: avm.science@mail.ru

имеет приложение в физике частиц высоких энергий [18], космологии [19], при исследовании перестроек аттракторов нелинейных динамических систем [20–22] и в прочих областях. С физической точки зрения перемежаемость вообще означает появление неких структур различного масштаба в среде (например вихрей, локализованных деформаций, температурных неоднородностей), которая исходно могла быть совершенно бесструктурной на этих масштабах. С математической точки зрения такое поведение характеризуется наличием редких, но сильных пиков в поведении индикатора структуры — некой случайной величины [16].

Исследование структуры синхронизма имеет как теоретическую значимость для самой нелинейной динамики [20], так и прикладное значение, например, в вопросах биологии и медицины [23–25], стохастической финансовой математики [26] и т. д. Работа [27] по анализу «пузырящегося поведения» (bubbling phenomenon) является одной из первых, в которой была экспериментально зафиксирована перемежаемость между синхронным и несинхронным поведением в системе связанных осцилляторов. Но при анализе этого явления временная структура синхронизма, как таковая, не исследовалась. Со временем интерес исследователей к структурным феноменам, возникающим при синхронизации хаоса, неуклонно возрастал. В настоящее время вопросы временной, пространственной и пространственно-временной структуры синхронизма активно исследуются как с теоретических (модельных) представлений [28–31], так и с позиций прикладных аспектов, например нейрофизиологии (нейробиологии) [23, 32], энергетических сетей [33].

При всей актуальности проблематики количественного исследования временной структуры синхронизации нелинейных систем продвижение в этом вопросе тем не менее весьма отстаёт от исследования чисто пространственных паттернов синхронизации в распределённых системах. Это наглядно иллюстрируется цитированными выше работами [23, 28–33]. В числе основных причин, по мнению автора, лежат две объективные трудности. Во-первых, это отсутствие единой и полной теории нелинейных динамических систем [20]. Во-вторых, при исследовании пространственных паттернов возможно широко применять как аппарат теории сетей [34], так и аппарат теории распознавания образов на изображениях (двумерных и трёхмерных скалярных полях физических величин). В свою очередь, при анализе временной или пространственно-временной структуры существует проблема перехода от временных рядов

фазовых переменных к графам или образам, характеризующим перемежаемость процесса синхронизации. Не в последнюю очередь это вызвано неразвитостью соответствующего инструментария, поскольку исследователи в основном оперировали и продолжают оперировать так называемым интегральным коэффициентом синхронности — изучая параметры синхронизации в «среднем». Соответственно, измерительные меры разрабатывались, как правило, в рамках этой же концепции. Заметим, что парадигма изучения систем и процессов «в среднем» широко закрепились во многих экспериментальных науках. Причины распространения подобного подхода и его фундаментальные ограничения подробно изложены, к примеру, в обзоре [16].

В настоящей статье развивается оригинальный метод диагностики и количественного измерения характеристик режимов перемежаемости при синхронизации хаотических систем, направленный на комплексное изучение временной структуры синхронизма через исследование так называемой Т-синхронизации [35–37]. В основе метода лежит формализм символического СТQ-анализа, предложенного автором в работах [38, 39]. (Аббревиатура СТQ обозначает три алфавита, которыми оперирует метод: С, Т и Q.) Необходимо отметить, что символическая динамика при всей своей кажущейся внешней простоте является весьма строго обоснованным инструментом анализа нелинейных динамических систем [40] и позволяет исследовать такие сложные явления в системах, как хаос, странные аттракторы, гиперболичность, структурная устойчивость, управляемость и т. п. (см., например, [40–42] и приведенные там ссылки).

В данной работе предлагается рассматривать взаимосвязь синхронных и десинхронных доменов в комплексе. Это позволяет детально исследовать режимы перемежаемости при синхронизации хаотических систем. Кроме того, существенно переработаны положения символического СТQ-анализа: правила кодирования символов базового алфавита сформулированы в строгой и формальной форме, что позволило сформировать полный состав символов. Также предложен ряд мер для оценивания временной структуры синхронизации. В качестве изучаемого примера выбрана система логистических отображений, являющаяся, с одной стороны, эталонным объектом нелинейной динамики. С другой стороны, с учетом универсальности Фейгенбаума, многие результаты анализа этой системы распространяются на широкий класс как модельных, так и реальных объектов.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ Т-СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введем в рассмотрение траекторию динамической системы, заданную в виде дискретной последовательности (временного ряда): $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$, где фазовая переменная \mathbf{s} системы имеет размерность N , а траектория состоит из K временных отсчетов. При этом каждому k -му отсчету может быть сопоставлен момент времени t_k .

Определим исходное отображение, кодирующее в терминах конечного Т-алфавита [38, 39] форму n -й компоненты последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{s}_{k-1}^{(n)}, \mathbf{s}_k^{(n)}, \mathbf{s}_{k+1}^{(n)}\} &\Rightarrow T_k^{\alpha\varphi}|_n, \\ T_k^{\alpha\varphi} &= [T_k^{\alpha\varphi}|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_N]. \end{aligned} \quad (1)$$

Строго, отображение (1) задается через соотношения:

$$\begin{aligned} \text{T0} \quad &\Delta s_- = \Delta s_+ = 0, \\ \text{T1} \quad &\Delta s_- = \Delta s_+ < 0, \\ \text{T2} \quad &\Delta s_- = \Delta s_+ > 0, \\ \text{T3N} \quad &\Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ < \Delta s_-, \\ \text{T3P} \quad &\Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ > \Delta s_-, \\ \text{T4N} \quad &\Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ = 0, \\ \text{T4P} \quad &\Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ = 0, \\ \text{T5N} \quad &\Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ < \Delta s_-, \\ \text{T5P} \quad &\Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ > \Delta s_-, \\ \text{T6S} \quad &\Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ > -\Delta s_-, \\ \text{T6} \quad &\Delta s_- = -\Delta s_+ > 0, \\ \text{T6L} \quad &\Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ < -\Delta s_-, \\ \text{T7S} \quad &\Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ < -\Delta s_-, \\ \text{T7} \quad &\Delta s_- = -\Delta s_+ < 0, \\ \text{T7L} \quad &\Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ > -\Delta s_-, \\ \text{T8N} \quad &\Delta s_- = 0, \quad \Delta s_+ < 0, \\ \text{T8P} \quad &\Delta s_- = 0, \quad \Delta s_+ > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Delta s_- = \mathbf{s}_k^{(n)} - \mathbf{s}_{k-1}^{(n)}, \quad \Delta s_+ = \mathbf{s}_{k+1}^{(n)} - \mathbf{s}_k^{(n)}.$$

Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T^{\alpha\varphi}|_n$ для k -го отсчета и n -й фазовой переменной, приведены на рис. 1.

Таким образом, Т-алфавит включает в себя множество символов:

$$\begin{aligned} T_o^{\alpha\varphi} = \{ &\text{T0, T1, T2, T3N, T3P, T4N, T4P, T5N, T5P,} \\ &\text{T6S, T6, T6L, T7S, T7, T7L, T8N, T8P}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Как видно из формулы (3), символ $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ кодируется в виде Ti , где i — это правая часть кодов символов алфавита $T_o^{\alpha\varphi}$. В свою очередь, символ $T_k^{\alpha\varphi}$ кодируется через $Ti_1 \dots i_N$, см. (1). Полный алфавит $T_o^{\alpha\varphi}|N$, кодирующий форму траектории многомерной последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ в целом, состоит из 17^N символов.

Предположим теперь для простоты, но без потери общности, что временная последовательность $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ размерностью N формируется за счет объединения фазовых переменных N одномерных динамических систем, т. е. $\mathbf{s}_k^{(n)}$ — это значение фазовой переменной n -й системы в k -й момент времени.

Будем считать динамические системы синхронными в момент времени k , в смысле Т-синхронизации [35], если выполняется условие $J_k=1$, где

$$\begin{aligned} J_k &= \\ &= \begin{cases} 1 & \text{при } T_k^{\alpha\varphi}|_1 = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_n = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_N, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Принимая во внимание возможность наличия противофазной синхронизации [11] между системами, необходимо также рассмотреть все возможные варианты инвертирования их фазовых переменных: $\mathbf{s}_k^{(n)} \rightarrow -1 \cdot \mathbf{s}_k^{(n)}$. В этом случае для n -й системы замена символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ в k -м отсчете происходит по схеме

$$\begin{aligned} \text{T0} &\leftrightarrow \text{T0}, \\ \text{T1} &\leftrightarrow \text{T2}, \quad \text{T3N} \leftrightarrow \text{T5P}, \quad \text{T3P} \leftrightarrow \text{T5N}, \\ \text{T4N} &\leftrightarrow \text{T4P}, \quad \text{T6S} \leftrightarrow \text{T7S}, \quad \text{T6} \leftrightarrow \text{T7}, \\ \text{T6L} &\leftrightarrow \text{T7L}, \quad \text{T8N} \leftrightarrow \text{T8P}. \end{aligned} \quad (5)$$

Каждый вариант инвертирования обозначим номером m . Общее количество вариантов инвертирования есть $M = 2^{N-1}$.

Синхронизация между системами может наступать и в лаг-режиме [12]. Для ее обнаружения необходимо подвигать друг относительно друга фазовые траектории систем (сдвиги $h_n \geq 0$):

$$\{T_k^{\alpha\varphi}|_1 \rightarrow T_{k+h_1}^{\alpha\varphi}|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_N \rightarrow T_{k+h_N}^{\alpha\varphi}|_N\}. \quad (6)$$

Противофазная синхронизация и лаг-синхронизация могут присутствовать вместе, поэтому при расчете частного интегрального коэффициента синхронности учтем это обстоятельство:

$$\delta_{m,\mathbf{h}}^s = \frac{1}{K^* + 1 - k^*} \sum_{k=k^*}^{K^*} J_k|\{m, \mathbf{h}\}, \quad (7)$$

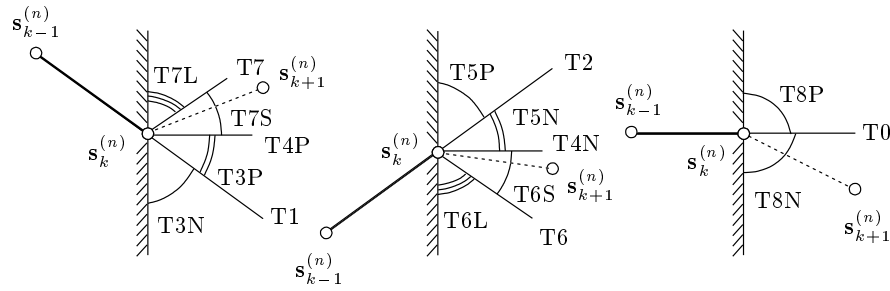


Рис. 1. Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T^{\alpha\varphi}|_n$ для k -го отсчета и n -й фазовой переменной

где

$$k^* = 1 + \max(h_1, \dots, h_N),$$

$$K^* = K + \min(h_1, \dots, h_N),$$

а K — длина последовательности $\{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K$.

Исходя из частного, рассчитаем полный интегральный коэффициент синхронности систем:

$$\delta^s = \max_m \max_h \delta_{m,h}^s, \quad 0 \leq \delta^s \leq 1, \quad (8)$$

т. е. выберем такую комбинацию сдвигов между траекториями систем и варианта инвертирования их фазовых переменных, которые в совокупности доставляют максимальное количество отсчетов k , отвечающих условию $J_k = 1$.

Из определения условия синхронизации (4) следует, что предложенный анализатор оценивает уровень полной синхронизации [10], обнаруживает противофазную синхронизацию [11] с лаг-синхронизацией [12] именно в алфавитном представлении $T_o^{\alpha\varphi}$. Но из определения геометрии символов Т-алфавита (2) полная синхронизация на уровне отсчетов $T_k^{\alpha\varphi}$ является более широким явлением, нежели полная синхронизация на уровне s_k — отсчетов самой последовательности. Т-синхронность динамических систем (по набору фазовых переменных s) рассматривается с позиций формы (структуры геометрии) траекторий систем в расширенном фазовом пространстве. Под формой (структурой геометрии) траектории динамической системы в расширенном фазовом пространстве понимается некий ее инвариант, сохраняющийся при однородных сдвигах и растяжениях траектории в пространстве фазовых переменных. Таким образом, в определенном смысле Т-синхронизация изучает топологические аспекты синхронизации динамических систем [20, 40, 43]. Следовательно, это открывает потенциальную возможность конструктивного применения предложенного анализатора к вопросам изучения обобщенной синхронизации хаоса [9].

3. ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введенная через (8) величина δ^s характеризует синхронность изучаемых систем в среднем на рассматриваемом периоде времени $t_K - t_1$. Как указано во Введении, большинство исследований по синхронизации хаоса этим обычно и ограничиваются. Но зачастую исследователя может интересовать и временная структура синхронизации систем. Напомним, что под этой структурой понимаются всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т. е. перемежаемое поведение [16].

В работе автора [35] было введено понятие синхронного домена SD — совокупности отсчетов временного ряда, для которых справедливо условие (\vee — символ логического ИЛИ)

$$SD_r : \{J_{k'} = 1, J_{k''} = 0 \vee k''' = 0, \\ J_{k'''} = 0 \vee k''' = K + 1\}, \quad (9)$$

$$k' = \overline{b_r^{SD}, b_r^{SD} + L_r}, \quad k'' = b_r^{SD} - 1,$$

$$k''' = b_r^{SD} + L_r^{SD} + 1,$$

где b_r^{SD} — момент появления, L_r^{SD} — длина и r — порядковый номер синхронного домена. При этом справедливы условия: $L_r^{SD} \leq K$ и общее количество синхронных доменов (в исходной последовательности) $R^{SD} \leq (K + 1) \operatorname{div} 2$.

Для возможности количественного описания структуры синхронизации систем автором в работе [35] была введена функция спектральной плотности синхронных доменов SD:

$$H^{SD}[L] = \sum_{r=1}^{R^{SD}} \delta[L_r^{SD}, L], \quad (10)$$

где $\delta[\dots]$ — символ Кронекера, $L = \overline{1, K}$.

С целью анализа степени вырожденности структуры синхронных доменов дополнительно определим величину E^{SD} — энтропию структуры синхронных доменов (по Шеннону) [36], имеющую смысл при $\delta^s > 0$:

$$E^{\text{SD}} = - \sum_{i=1}^K P^{\text{SD}} [i] \ln P^{\text{SD}} [i],$$

$$P^{\text{SD}} [L] = \frac{H^{\text{SD}} [L]}{\sum_{i=1}^K H^{\text{SD}} [i]}. \quad (11)$$

Из свойств энтропии Шеннона следует, что энтропия E^{SD} минимальна ($E^{\text{SD}} = 0$), когда спектр $H^{\text{SD}} [L]$ вырожден (все домены синхронизации имеют одну длину) и максимальна ($E^{\text{SD}} = \hat{E}^{\text{SD}}$) в случае равномерного гребенчатого спектра $H^{\text{SD}} [L]$ с предельным числом различных длин доменов синхронизации, равном $\hat{W}_{cmb}^{\text{SD}}$:

$$\hat{W}_{cmb}^{\text{SD}} =$$

$$= \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sqrt{1 + 8 \delta^s K} - 1}{2} \right\rfloor, K - \delta^s K + 1 \right\}, \quad (12)$$

$$\hat{E}^{\text{SD}} = \ln \hat{W}_{cmb}^{\text{SD}},$$

где $[a]$ — целая часть a .

На основе (11) и (12) определим относительную энтропию структуры синхронных доменов:

$$\Delta_E^{\text{SD}} = \frac{E^{\text{SD}}}{\hat{E}^{\text{SD}}}. \quad (13)$$

Величину Δ_E^{SD} имеет смысл применять, если перед исследователем стоит задача сравнить случаи синхронизации, различающиеся величинами δ^s и/или K .

Тем не менее для полного описания перемежаемого поведения хаотических систем при синхронизации явно недостаточно изучать только синхронные домены SD. Чтобы представление о временной структуре синхронизма динамических систем было полным и замкнутым (полное и замкнутое представление о структуре перемежаемости), в настоящей работе дополнительно вводится понятие десинхронного домена $\bar{\text{SD}}$ — совокупности отсчетов временного ряда, для которых справедливо условие

$$\bar{\text{SD}}_r : \{J_{k'} = 0, J_{k''} = 1 \vee k'' = 0,$$

$$J_{k'''} = 1 \vee k''' = K + 1\}, \quad (14)$$

$$k' = \overline{b_r^{\text{SD}}, b_r^{\text{SD}} + L_r^{\text{SD}}}, \quad k'' = b_r^{\text{SD}} - 1,$$

$$k''' = b_r^{\text{SD}} + L_r^{\text{SD}} + 1,$$

где b_r^{SD} — момент появления, L_r^{SD} — длина и r — порядковый номер десинхронного домена $\bar{\text{SD}}$.

Необходимость согласованного рассмотрения десинхронных и синхронных доменов схематично проиллюстрируем модельным примером (см. рис. 2а). Определим три варианта (А, В и С), имеющих одинаковый интегральный коэффициент синхронности, одинаковые набор и последовательность синхронных доменов SD, но существенно различающихся набором и последовательностью десинхронных доменов $\bar{\text{SD}}$.

Если указанные модельные варианты сравнивать только по параметрам доменов SD, то формулируется неверный вывод об идентичности процессов синхронизации в этих самых случаях. Но рис. 2а указывает на обратное. Поэтому дополнительно к доменам SD рассмотрим домены $\bar{\text{SD}}$. Из рис. 2б и 2в видно, что в случае А все десинхронные домены имеют длину 2 отсчета, в случае В десинхронные домены имеют длину 2 и 11 отсчетов, причем имеется единственный десинхронный домен длиной 11 отсчетов. Случай С наиболее сложно устроен: помимо того что десинхронные домены имеют четыре различные длины: 1, 2, 3 и 4 отсчета, так еще и структура переходов $\bar{\text{SD}} \leftrightarrow \text{SD}$ достаточно нетривиальна. Таким образом, согласованный анализ параметров доменов $\bar{\text{SD}}$ и SD, а также структуры переходов $\bar{\text{SD}} \leftrightarrow \text{SD}$ позволяют получить существенно больше информации о характере перестройки структуры аттракторов и перемежаемом поведении в синхронизирующихся системах. Необходимо отметить, что в большинстве случаев (см. для примера [23, 28–33]) анализу подвергаются, как правило, именно паттерны синхронизации, а зоны десинхронизации рассматриваются как фоновый сигнал, т. е. из анализа исключаются.

Количественное исследование временной структуры синхронизации возможно через изучение графа (см. рис. 2в), вершинами которого являются домены $\bar{\text{SD}}$ и SD с той или иной длиной \bar{L} и L соответственно, а дугами (ориентированными ребрами) — междоменные переходы $\bar{\text{SD}} \rightarrow \text{SD}$ и $\text{SD} \rightarrow \bar{\text{SD}}$. Разметка вершин этого графа проводится посредством вероятностей $P^{\bar{\text{SD}}}$ и P^{SD} , а разметка дуг — через условные переходные вероятности:

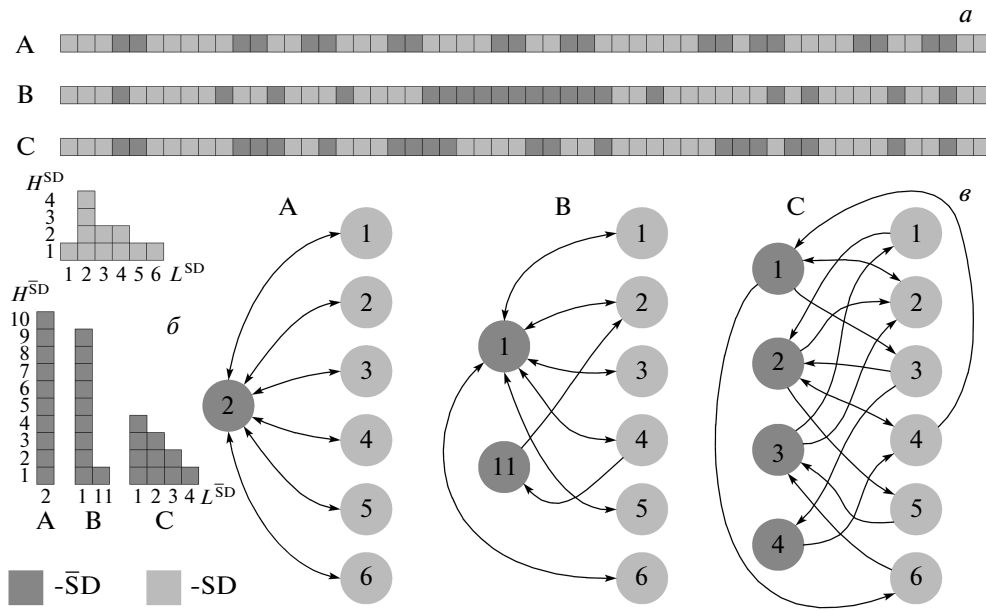


Рис. 2. Модельный пример: *a* — порядок следования десинхронных \bar{SD} и синхронных SD доменов; *б* — спектральные плотности десинхронных и синхронных доменов; *в* — схема переходов $\bar{SD} \leftrightarrow SD$ между доменами определенной длины. Буквами А, В и С обозначены три случая, имеющие различную структуру десинхронного поведения

$$P^{\bar{SD}}[\bar{L}, L] = \frac{H^{\bar{SD}}[\bar{L}, L]}{\sum_{\bar{l}=1}^K \sum_{l=1}^K H^{\bar{SD}}[\bar{l}, l]}, \tag{15}$$

$$P^{SD}[L, \bar{L}] = \frac{H^{SD}[L, \bar{L}]}{\sum_{l=1}^K \sum_{\bar{l}=1}^K H^{SD}[l, \bar{l}]},$$

где $H^{\bar{SD}}$ и H^{SD} — спектральные плотности междоменных переходов соответственно $\bar{SD} \rightarrow SD$ и $SD \rightarrow \bar{SD}$.

Анализ графа переходов $\bar{SD} \leftrightarrow SD$ потенциально открывает широкие возможности применения к исследованию временной структуры синхронизации хаотических колебаний, активно развиваемого в настоящее время в физике, инструментария теории сетей [34, 44–46], привлекая в том числе методы статистической физики [47] и символической динамики [40–42]. Отметим, что эти вопросы являются предметом наших текущих исследований.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Система связанных логистических отображений является одной из популярных моделей нелиней-

ной динамики при изучении хаотической синхронизации [38, 48]. Ее теоретическое значение обусловлено тем, что при относительной простоте логистическое отображение порождает широкий спектр сложных, в том числе и хаотических колебательных режимов [39, 49]. Переход к таким режимам осуществляется по классическому сценарию удвоения периода. А с учетом универсальности Фейгенбаума многие результаты распространяются на широкий класс как модельных, так и реальных физических, биофизических, химических и других систем, что обуславливает и прикладной интерес к логистическому отображению [49, 50].

Рассмотрим систему двух однонаправленно связанных логистических осцилляторов:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 4\lambda x_k (1 - x_k), \\ y_{k+1} &= 4\lambda [y_k + \gamma(x_k - y_k)](1 - [y_k + \gamma(x_k - y_k)]), \end{aligned} \tag{16}$$

где $\lambda \in (0, 1]$ — управляющий параметр, $\gamma \in [0, 1]$ — коэффициент связи систем, $x, y \in (0, 1)$ — фазовые переменные соответственно ведущей и ведомой систем.

Исследование отображений (16) проводилось на интервале $k \in [1 \cdot 10^5, 2 \cdot 10^5]$. Подобный сдвиг от $k = 1$ объясняется необходимостью сведения паразитного влияния переходного процесса к минимуму. Кроме того, все оценки анализируемых величин усреднялись по 1000 реализациям начальных усло-

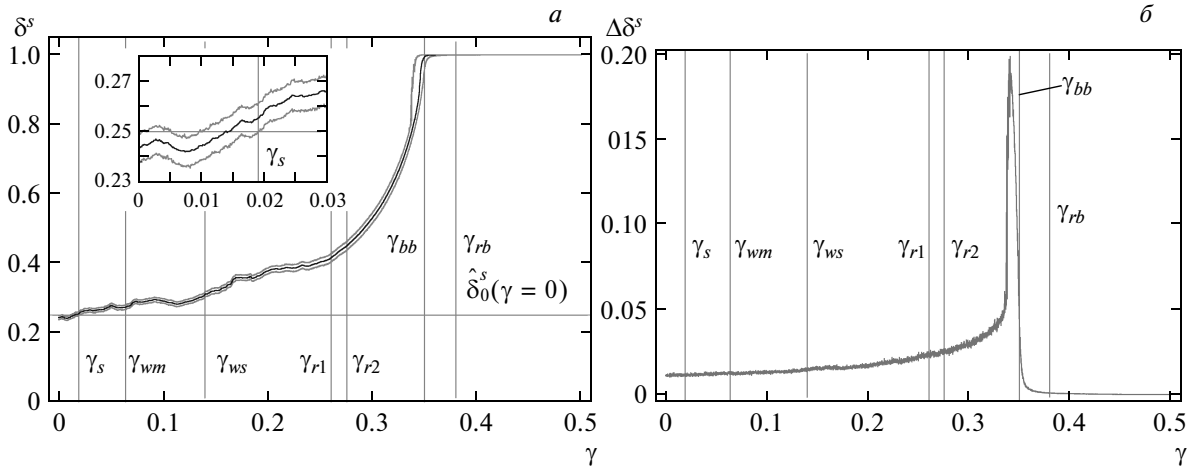


Рис. 3. Зависимости от параметра связи γ интегрального уровня синхронизации δ^s (а) (на вставке приведена область малых значений γ); ширины интервала $\Delta \delta^s = \hat{\delta}^s - \delta^s$ (б). Черные кривые — оценка медианы, серые — интервал значений с границами по вероятности $1 - \alpha$ с уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$

вий: $x_1 = \xi_1$, $y_1 = \xi_2$, где $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ — некоррелированные равномерно распределенные случайные величины. Это позволило нейтрализовать на траекториях процессов x и y эффект памяти, индуцированный начальными условиями. Значение параметра связи изменялось на интервале $\gamma \in [0, 0.5]$ с шагом $1 \cdot 10^{-4}$. Значение управляющего параметра было принято $\lambda = 0.95$, что означает режим существования в (16) развитого хаоса [50]. Необходимо отметить, что, согласно результатам работы [39], окончательное качественное усложнение хаотической траектории происходит при $\lambda = 0.98805 \dots$. Тем не менее, проведенный выбор значения управляющего параметра объясняется необходимостью взаимного анализа и согласования результатов, полученных в настоящей работе, с результатами работ [38, 48]. В них, в частности, установлено, что при $\gamma \geq \gamma_{rb} \approx 0.38$ в системе реализуется грубый режим полной синхронизации, в точке $\gamma_{bb} \approx 0.35$ устанавливается негрубый режим полной синхронизации, который существует на интервале $\gamma_{bb} \leq \gamma < \gamma_{rb}$. На шкале параметра связи отмечены еще четыре точки, ответственные за различные перестройки структуры аттрактора: $\gamma_{wm} \approx 0.0639$, $\gamma_{ws} \approx 0.14$, $\gamma_{r1} \approx 0.2606$ и $\gamma_{r2} \approx 0.2755$. Так, при γ_{ws} в аттракторе фиксируется неустойчивое квазипериодическое движение, на котором траектория проводит значительную часть времени [48], а при γ_{r1} траектория ведомой системы (y) содержит максимальную концентрацию релаксационных колебаний, отсутствующих в ведущей системе (x) [38].

На рис. 3а приведен график зависимости интегрального коэффициента синхронности δ^s от параметра связи γ . При $\gamma_s \approx 0.0191$ нижний квантиль δ^s впервые превышает верхний квантиль $\hat{\delta}^s$. Таким образом, в первом приближении, точку γ_s возможно считать статистически значимым порогом возникновения Т-синхронизации в системе (16). Отметим, что построение критических интервалов проводилось по эмпирическим функциям распределений рассчитываемых характеристик. Верхний и нижний квантили строились как двусторонние квантили соответственно порядков $1 - \alpha/2$ и $\alpha/2$. Уровень статистической значимости принят $\alpha = 10^{-3}$. При этом в качестве оценки средней величины исследуемых характеристик в работе используется медиана как более робастный индикатор по сравнению с арифметическим средним [51]. На рис. 3б приведен график зависимости от параметра γ величины $\Delta \delta^s = \hat{\delta}^s - \delta^s$.

Из рис. 3а видно, что по поведению интегрального коэффициента синхронности δ^s достоверно возможно обнаружить только область пузырящегося поведения системы вблизи точки γ_{bb} , в которой устанавливается негрубый режим полной Т-синхронизации. Негрубость проявляется в более чем пятикратном скачкообразном уширении интервала $\Delta \delta^s$ (см. рис. 3б). Существенно более полную информацию о перестройке структуры аттракторов и временной структуре синхронизации представляет анализ медиан спектральных плотностей доменов \bar{SD} и SD , которые приведены на рис. 4.

Из анализа \bar{H}^{SD} (см. рис. 4б) также можно обна-

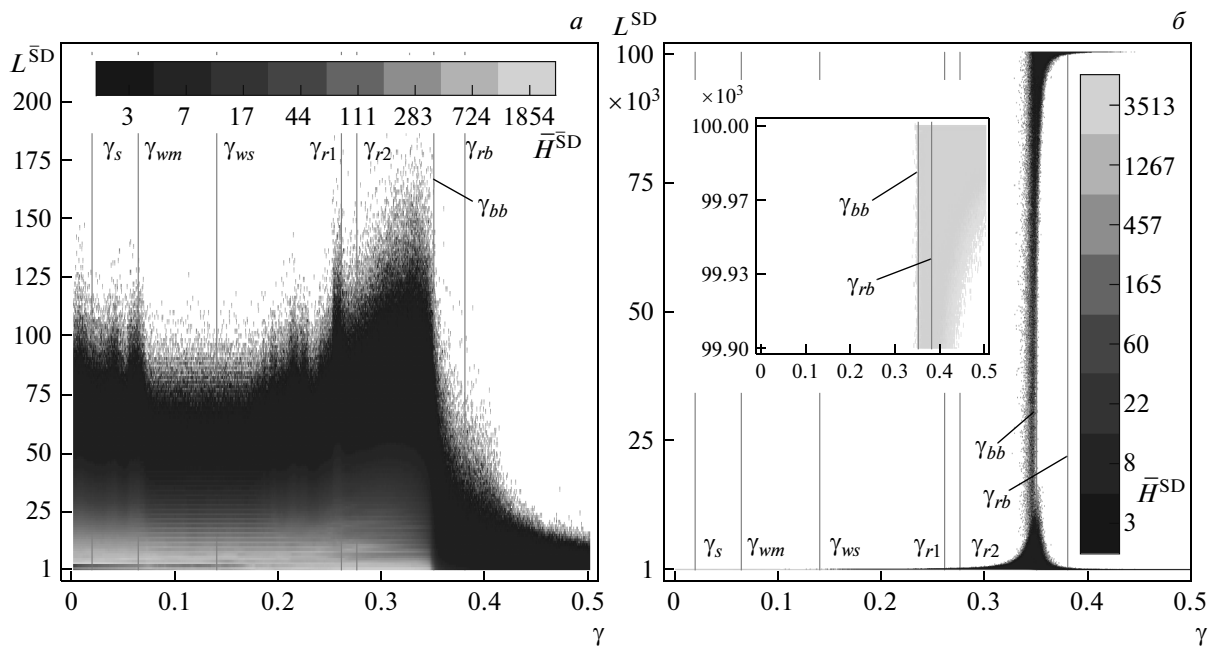


Рис. 4. Зависимости \bar{H}^{SD} (а), \bar{H}^{SD} (б) от параметра связи γ . На вставке рис. б — зависимость \bar{H}^{SD} в области доменов большой длины $L^{SD} \geq 99900$

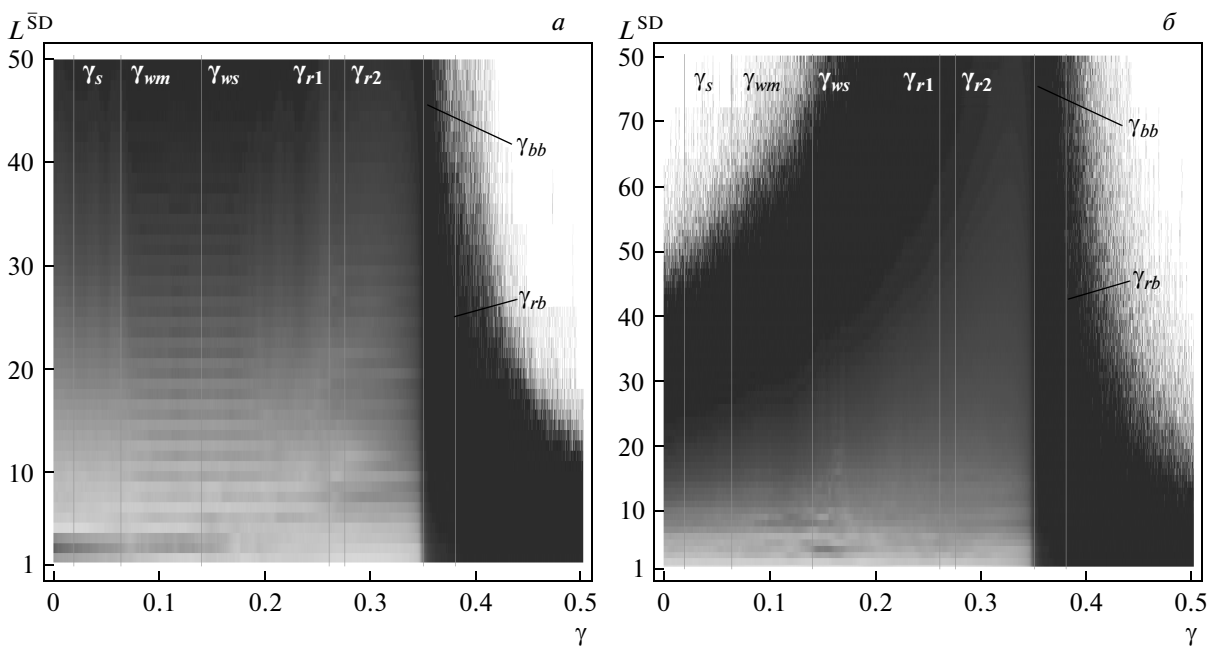


Рис. 5. Зависимости от параметра связи γ \bar{H}^{SD} (а) (для доменов длиной $L^{SD} \leq 50$), \bar{H}^{SD} (б) (для доменов длиной $L^{SD} \leq 80$). Цветовые шкалы интенсивности соответствуют приведенным на рис. 4а и 4б

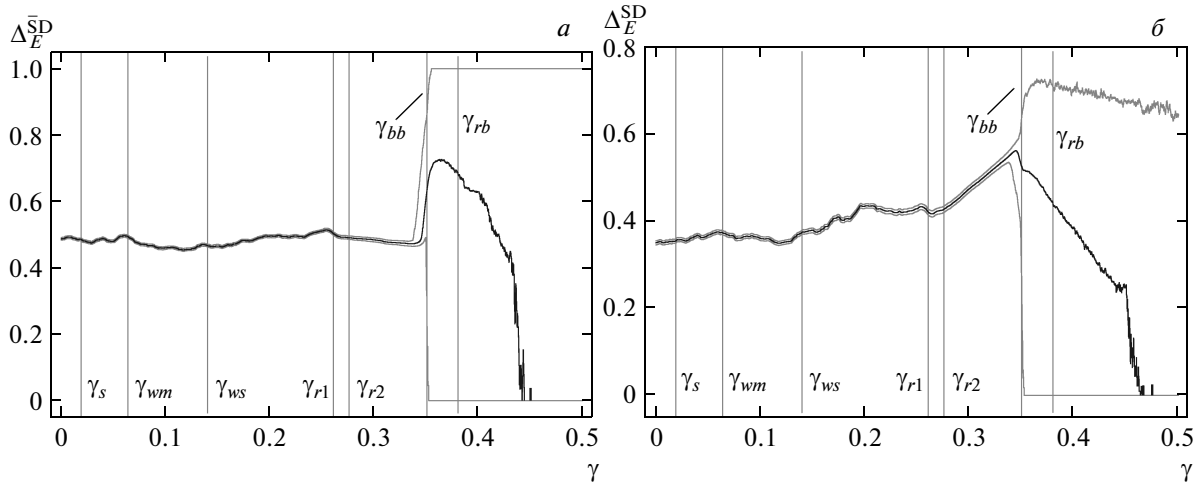


Рис. 6. Зависимости $\Delta_E^{\overline{SD}}$ (а), Δ_E^{SD} (б) от параметра связи γ . Черные кривые — оценка медианы, серые — интервал значений с границами по вероятности $1 - \alpha$ при уровне значимости $\alpha = 10^{-3}$

ружить момент установления полной Т-синхронизации в системе (16) при γ_{bb} . Этот момент проявляется по взрывному росту длины синхронных доменов (см. вставку на рис. 4б и рис. 5б), а также по «перекатке» десинхронных доменов в синхронные.

При сравнении рис. 4а и 4б видно существенное различие в поведении спектральных плотностей десинхронных \overline{SD} и синхронных SD доменов. Так, максимальная длина десинхронных доменов на всем интервале изменения величины γ не превышает величины $\max L^{\overline{SD}} = 220$ отсчетов, в то время как $\max L^{SD} = 10^5$ отсчетов (после установления грубого режима полной Т-синхронизации). С повышением величины связи от 0 до γ_{bb} наблюдается монотонный рост длины синхронных доменов и сдвиг максимума спектральной области в сторону более длинных доменов. Это свидетельствует о том, что характеристика \overline{H}^{SD} не «чувствует» перестройки структуры аттрактора, происходящих в ведомой системе (y) вплоть до момента наступления негрубого режима полной Т-синхронизации. В свою очередь, анализ \overline{H}^{SD} позволяет зафиксировать ряд перестроений структуры аттрактора в системе (y), происходящих под действием ведущей системы при изменении величины связи от 0 до γ_{bb} . Так, режимы при γ_{wm} и γ_{r1} сопровождаются локальными всплесками длины десинхронных доменов, а режим при γ_{ws} характеризуется явно выраженной гребенчатой структурой спектра \overline{SD} доменов малой длины (см. рис. 5а). Подобный вид спектра действительно соответствует неустойчивому квазипериодическому движению, на

котором траектория системы (16) проводит значительную часть времени [48].

Сравнение рис. 6а и 6б также демонстрирует различие в поведении степени вырожденности структуры десинхронных и синхронных доменов в зависимости от γ — величины связи между ведущей и ведомой системами. Из анализа рисунков следует, что практически вплоть до наступления негрубого режима полной Т-синхронизации относительная энтропия структуры доменов \overline{SD} меняется очень слабо, оставаясь вблизи уровня 0.5. Имеются локальные статистически значимые всплески вблизи зон перестройки структуры аттрактора γ_{wm} и γ_{r1} . При этом ширина коридора значений с границами по вероятности $1 - \alpha$ с уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$ остается также практически постоянной. При приближении параметра γ к критическому значению γ_{bb} и переходе системы в негрубый режим синхронизма происходит раскрытие коридора значений $\Delta_E^{\overline{SD}}$ с границами по вероятности $1 - \alpha$, а медиана $\overline{\Delta}_E^{\overline{SD}}$ испытывает скачок с 0.5 до 0.73. При дальнейшем увеличении силы связи до $\gamma = 0.5$ ширина коридора не изменяется, а медиана $\overline{\Delta}_E^{\overline{SD}}$ уменьшается до значений близких к нулевым. В свою очередь, относительная энтропия структуры синхронных доменов SD при возрастании параметра связи от $\gamma = 0$ вначале локально (статистически значимо) повышается с 0.35 до 0.375 в области γ_{wm} , затем возвращается на исходный уровень, а начиная с области около γ_{ws} вновь начинает расти. Перед зоной γ_{r1} имеется локальный максимум, в зоне $[\gamma_{r1}, \gamma_{r2}]$ — локальный минимум. При

дальнейшем увеличении силы связи вблизи γ_{bb} происходит раскрытие коридора значений Δ_E^{SD} с границами по вероятности $1 - \alpha$, а медиана $\bar{\Delta}_E^{SD}$ по достижении максимума 0.57 уменьшается до значений, близких к нулевым. Из представленного анализа следует, что относительные энтропии Δ_E^{SD} и $\bar{\Delta}_E^{SD}$ являются весьма чувствительным индикатором перестроений структуры аттрактора, происходящих в режиме синхронизации хаоса.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в настоящей работе предложен новый метод комплексного исследования временной структуры синхронизации нелинейных хаотических систем. Метод позволяет диагностировать и количественно оценивать характеристики перемежаемости при синхронизации хаотических колебаний в режиме так называемой Т-синхронизации [35, 36]. В основе подхода лежит формализм символического СТQ-анализа, предложенного автором в работах [38, 39].

В рамках демонстрации основных возможностей метода проведен анализ системы двух идентичных логистических осцилляторов с однонаправленной связью, находящихся в режиме развитого хаоса. Эта система является эталонной моделью нелинейной динамики. Кроме того, с учетом универсальности Фейгенбаума многие результаты анализа этой модели распространяются на широкий класс как теоретических, так и реальных объектов [49, 50]. В результате проведенного анализа выявлены факты установления в системе негрубого и робастного режимов полной Т-синхронизации. При этом негрубый режим сопровождается «пузырящимся» аттрактором, в котором наблюдается перемежаемость между синхронным и несинхронным поведением осцилляторов. Помимо этого, подтверждены выводы работы [48] о том, что при определенных значениях силы связи между подсистемами в аттракторе фиксируется неустойчивое квазипериодическое движение, на котором траектория проводит значительную часть времени. Также установлено, что выявленный в работе [38] режим, при котором траектория ведомой подсистемы содержит максимальную концентрацию релаксационных колебаний, отсутствующих в ведущей подсистеме, приводит к локальному росту девиации длины десинхронных доменов. Это усиливает перемежаемость между синхронным и несинхронным поведением осцилляторов.

Проведенное исследование подтвердило, что широко распространенный подход, при котором анали-

зу подвергаются только паттерны синхронизации, а зоны десинхронизации рассматриваются как фоновый сигнал и фактически не анализируются, следует признать методологически неполным из-за потери существенной информации о характере перестройки структуры аттракторов и перемежаемом поведении в синхронизирующихся системах.

В заключение отметим, что рассмотренный метод, основанный на анализе Т-синхронизации, может быть с успехом применен для исследования многомерных систем, состоящих из двух и более связанных неидентичных осцилляторов, в том числе и их многомерных решеток с произвольной топологией. Изложенный подход применим для анализа экспериментальных данных, поскольку не требует каких-либо априорных знаний об изучаемой системе. Более того, инвариантность анализатора к сдвигам и растяжениям фазовых траекторий [39] позволяет исследовать синхронизацию сильно нестационарных систем. Вполне возможно, это позволит эффективно применять предложенную методику для анализа многомерных временных рядов, порождаемых физическими и техническими [1, 4, 5], биофизическим [23–25], финансовыми [26, 37, 46], энергетическими [33] и другими системами.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: a Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).
2. S. Boccaletti, J. Kurths, G. V. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou, *Phys. Rep.* **366**, 1 (2002).
3. В. Ю. Аргонов, С. В. Пранц, Письма в ЖЭТФ **80**, 260 (2004).
4. С. П. Кузнецов, УФН **181**, 121 (2011).
5. А. П. Напартович, А. Г. Сухарев, ЖЭТФ **115**, 1593 (1999).
6. K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 65 (1993).
7. L. Larger and J.-P. Goedgebuer, *Compt. Rend. Phys.* **5**, 609 (2004).
8. M. Planat, *Neuroquantology* **2**, 292 (2004); arXiv: quant-ph/0403020.
9. H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, and M. M. Sushchik, *Phys. Rev. E* **53**, 4528 (1996).
10. L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821 (1990).

11. W. Liu, X. Qian, J. Yang et al., *Phys. Lett. A* **354**, 119 (2006).
12. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4193 (1997).
13. В. С. Анищенко, Д. Э. Постнов, *Письма в ЖТФ* **14**, 569 (1988).
14. A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, and J. Kurths, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **10**, 2291 (2000).
15. А. А. Короновский, А. Е. Храмов, *Письма в ЖЭТФ* **79**, 391 (2004).
16. Я. Б. Зельдович, С. А. Молчанов, А. А. Рuzмайкин и др., *УФН* **152**, 3 (1987).
17. В. В. Mandelbrot, *J. Fluid Mech.* **62**, 331 (1974).
18. И. М. Дрёмин, *УФН* **152**, 531 (1987).
19. С. Ф. Шандарин, А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, *УФН* **139**, 83 (1983).
20. Х. В. Брур, Ф. Дюмортье, С. Стрин, Ф. Такенс, *Структуры в динамике*, ИКИ, Москва-Ижевск (2003).
21. О. В. Геращенко, *ЖЭТФ* **116**, 1477 (1999).
22. В. К. Тюменев, *ЖЭТФ* **107**, 1357 (1995).
23. M. Ghorbani, M. Mehta, R. Bruinsma et al., *Phys. Rev. E* **85**, 021908 (2012).
24. С. В. Борисов, А. Я. Каплан, Н. Л. Горбачевская и др., *Физиология человека* **31**, 1 (2005).
25. A. Porta, G. D'Addio, G. D. Pinna et al., *Proc. Computers in Cardiology* (2005), p. 575.
26. P. Tino, C. Schittenkopf, and G. Dorffner, *Pattern Analysis Appl.* **4**, 283 (2001).
27. P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart, *Phys. Lett. A* **193**, 126 (1994).
28. D. Zueco, P. J. Martinez, L. M. Floria et al., *Phys. Rev. E* **71**, 036613 (2005).
29. V. Casagrande and A. S. Mikhailov, *Physica D* **205**, 154 (2005).
30. P. Palaniyandi, P. Muruganandam, and M. Lakshmanan, *Chaos, Solitons, and Fractals* **36**, 991 (2008).
31. J. G. Restrepo, E. Ott, and B. R. Hunt, *Phys. Rev. E* **69**, 066215 (2004).
32. S. Ahn and L. L. Rubchinsky, *Chaos* **23**, 013138 (2013).
33. L. M. Pecora, F. Sorrentino, A. M. Hagerstrom et al., *Nature Comm.* **5**, 4079 (2014).
34. F. Battiston, V. Nicosia, and V. Latora, *Phys. Rev. E* **89**, 032804 (2014).
35. А. В. Макаренко, *Письма в ЖТФ* **38**, 53 (2012).
36. А. В. Макаренко, *Наноструктуры. Матем. физика и модел.* **8**, 21 (2013).
37. А. В. Макаренко, *Abstr. Int. Conf. "Advanced Finance and Stochastics"*, Steklov Math. Inst., Moscow (2013), p. 63.
38. А. В. Макаренко, *Письма в ЖТФ* **38**, 1 (2012).
39. А. В. Макаренко, *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.* **52**, 1248 (2012).
40. Р. Боуэн, *Методы символической динамики*, Мир, Москва (1979).
41. C. S. Hsu, *Cell-to-Cell Mapping: A method of Global Analysis for Nonlinear Systems*, Springer-Verlag, New York (1987).
42. M. Dellnitz and A. Hohmann, *Numerische Mathematik* **75**, 293 (1997).
43. R. Gilmore and M. Lefranc, *The Topology of Chaos*, Wiley-Interscience (2002).
44. J. Davidsen, P. Grassberger, and M. Paczuski, *Phys. Rev. E* **77**, 066104 (2008).
45. M. Domenico, A. Sole-Ribalta, E. Cozzo et al., *Phys. Rev. X* **3**, 041022 (2013).
46. P. Fiedor, *Phys. Rev. E* **89**, 052801 (2014).
47. G. Bianconi, *Phys. Rev. E* **87**, 062806 (2013).
48. А. В. Шабунин, В. В. Демидов, В. В. Астахов и др., *Письма в ЖТФ* **27**, 78 (2001).
49. E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, and D. Postnov, *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci., Ser. A, Vol. 42, World Sci. (2002).
50. М. Фейгенбаум, *УФН* **141**, 343 (1983).
51. Э. Леман, *Проверка статистических гипотез*, Наука, Москва (1979).