

ФЛЕКСОМАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В НЕОДНОРОДНЫХ ВНЕШНИХ ПОЛЯХ В ИЗОТРОПНЫХ ЦЕНТРОСИММЕТРИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

*А. Ф. Кабыченков, Ф. В. Лисовский**

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук
141190, Фрязино, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 14 июня 2013 г.

Представлены результаты теоретического анализа особенностей флексомагнитоэлектрических эффектов в изотропных центросимметричных нелинейных средах с пространственной дисперсией в неоднородных внешних полях. Общие теоретические положения применены к случаю заполненного нелинейным диэлектриком конденсатора с металлическими обкладками в виде двух бесконечных цилиндров с конфокальными эллиптическими образующими. Выполнено обобщение теории на случай изотропного центросимметричного коллинеарного антиферромагнетика в неупорядоченной фазе.

DOI: 10.7868/S0044451014040156

1. ВВЕДЕНИЕ

В узком смысле под эффектами, обозначаемыми сложными словами с первым корнем «флекс», понимают изменение электрической поляризации исключительно при неоднородных деформациях типа изгиба. В широком смысле слова в настоящее время такие термины используют для обозначения явлений, сводящихся к изменению электрической поляризации или намагниченности в присутствии любых неоднородных внешних воздействий (упругих напряжений, электрического и магнитного полей) или внутренних неоднородностей среды (например, доменных границ).

Исторически первыми в середине прошлого века теоретически и экспериментально изучались флексоэлектрические эффекты в жидких кристаллах и твердых телах, причем в последнем случае они первоначально рассматривались как разновидность пьезоэлектрического эффекта (см., например, [1–5]; более подробная библиография приведена в обзоре [6]). Вплоть до 90-х гг. прошлого века изучением флексомагнитоэлектрических, т. е. флексоэлектрических, флексомагнитных и «смешанных» явле-

ний в твердых телах занимался небольшой круг исследователей из-за малой величины эффектов и возможности их наблюдения только при низких температурах. Ситуация коренным образом изменилась в связи с колоссальным прогрессом в области синтеза новых высокотемпературных сегнетомагнетиков (мультиферроиков), в которых были обнаружены разнообразные и достаточно сильные однородные и неоднородные магнитоэлектрические эффекты [7–12].

Количество публикаций по различным аспектам флексомагнитоэлектрических эффектов в настоящее время настолько велико, что даже для их классификации потребовалась бы отдельная статья. Тем не менее перечислим ряд содержащих достаточно неожиданные результаты работ (выбор продиктован исключительно личными пристрастиями авторов настоящей статьи).

В работе [13] сообщалось о гигантском флексоэлектрическом эффекте в эпитаксиальных сегнетоэлектрических пленках HoMnO_3 , возникающем за счет создания в последних огромного градиента упругих деформаций, в 10^6 – 10^7 раз превышающего предельно достижимое значение в объемных монокристаллах аналогичного состава.

Авторами работы [14] была продемонстрирована возможность получения искусственных пьезоэлек-

*E-mail: lisf@rambler.ru

триков на основе использования не обладающих пьезоэлектрическими свойствами композитных диэлектриков с наноразмерными неоднородностями. Было установлено также [15], что пьезоэлектрические свойства можно придать даже графену, если нарушить centrosymmetrichность гексагональной решетки последнего наноразмерными отверстиями с другой симметрией.

Достаточно полный (в списке литературы 146 наименований) обзор современного состояния исследований и возможных применений флексоэлектрических эффектов в твердых телах содержится в работе [16].

Основное внимание в последние годы уделялось экспериментальным исследованиям монокристаллов и теоретическому описанию наблюдаемых в них явлений без учета пространственной дисперсии. Теоретически было установлено, например, что флексомагнитный эффект в безграничных средах может существовать в 69 из 90 магнитных классов, а в образцах конечных размеров вблизи поверхности — в любом из магнитных классов [17, 18].

Подавляющее большинство выполненных к настоящему времени работ относится к ситуациям, когда в изучаемых объектах либо созданы неоднородные деформации, либо существуют спонтанные неоднородности намагниченности или электрической поляризации (доменные структуры в магнетиках и сегнетоэлектриках, несоизмеримые магнитные структуры и др.), а внешние электрические и магнитные поля либо вообще отсутствуют, либо являются однородными (в последнем случае магнитоэлектрический эффект существует только в средах, не инвариантных относительно и пространственной, и временной инверсии [19]). При этом из рассмотрения бесосновательно исключается целый класс существующих даже в изотропных centrosymmetrichных средах флексомагнитоэлектрических эффектов, которые могут иметь совершенно неожиданные и впечатляющие проявления. Так, например, наиболее ярко выраженный из всех экспериментально обнаруженных до сих пор магнитоэлектрических эффектов (наблюдаемое визуально смещение доменных границ в эпитаксиальных пленках магнитных гранатов состава $(\text{LuBi})_3(\text{FeGa})_5\text{O}_{12}$ с ориентацией (210) под действием электрического поля, создаваемого иглообразным электродом [10, 20]), по-видимому, обусловлен не внутренними неоднородностями магнитной структуры, приводящими к существованию заряженных доменных границ, а именно сильной неоднородностью внешнего воздействия, вызывающей значительное изменение эффективного поля на-

веденной одноосной магнитной анизотропии H_u [21]. В пользу этого говорят полученные авторами работы [22] результаты исследования магнитоэлектрического эффекта в пленках магнитных гранатов близкого состава и той же кристаллографической ориентации, согласно которым изменение эффективного поля $H_u \approx 4$ кЭ под действием однородного электрического поля с напряженностью 12 кВ/см не превышало 0.15 Э, в то время как в экспериментах, описанных в работах [10, 20], индуцированные неоднородным электрическим полем эффективные магнитные поля доходили до 100 Э.

Следует также иметь в виду, что все реально используемые в экспериментах поля в той или иной степени являются неоднородными, а неоднородности полей (т. е. их пространственные производные) характеризуются другой (по отношению к самим полям) симметрией. Неоднородность электрического поля имеет четный тип, т. е. не изменяется при пространственной и временной инверсиях. Неоднородность магнитного поля, изменяющая знак при инверсии и пространства, и времени, относится к магнитоэлектрическому типу. Таким образом, напряженности электрического и магнитного полей вместе с их производными образуют полный набор типов тензоров (электрический, магнитный, магнитоэлектрический и четный) по отношению к магнитной группе симметрии.

В общем случае в средах любой симметрии неоднородное магнитное поле может давать вклад в электрическую поляризацию, в то время как неоднородное электрическое поле может давать вклад в намагниченность только в присутствии неоднородного магнитного поля. Воздействие неоднородных электрических и магнитных полей на среду любой симметрии может приводить также к возникновению градиентов намагниченности и поляризации, в том числе к появлению квадрупольных и тороидных моментов. При этом становится возможной реализация фазовых переходов между состояниями с неоднородной поляризацией и с квадрупольными моментами в неоднородном электрическом поле и состояниями с неоднородной намагниченностью и с тороидными моментами в неоднородном магнитном поле. Вблизи физических источников, таких как точечный заряд (полярон), электрический или магнитный диполь (экситоны), влияние неоднородностей создаваемых ими полей на окружающую среду усиливается по сравнению с влиянием самих полей из-за более резкой степенной зависимости от расстояния до источников.

Настоящая работа была выполнена с целью те-

оретического анализа особенностей флексоэлектрических и флексомагнитных эффектов в центросимметричных изотропных средах с пространственной дисперсией в неоднородных внешних полях.

2. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В стационарном состоянии распределение векторов напряженности внутренних электрического \mathbf{E} и магнитного полей \mathbf{H} в идеальном диэлектрике без сторонних зарядов и токов подчиняется уравнениям электростатики

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

и магнитостатики

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ — векторы соответственно электрической и магнитной индукции, \mathbf{P} и \mathbf{M} — векторы электрической поляризации и намагниченности [19]. Из приведенных выше уравнений для статических полей непосредственно следует возможность введения векторных и скалярных потенциалов, подчиняющихся уравнениям Пуассона. В нашем случае более удобным является использование скалярных электрического ($\Psi^{(E)}$) и магнитного ($\Psi^{(H)}$) потенциалов, определяемых выражениями

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Psi^{(E)}, \quad \mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Psi^{(H)}. \quad (3)$$

В отсутствие пространственной дисперсии и нелинейности среды зависимости $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ являются линейными и задаются соотношениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

где ε_0 и μ_0 — линейные соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости. С учетом пространственной дисперсии функциональные зависимости $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ определяются интегральными соотношениями [19]. При слабой дисперсии эти соотношения можно приближенно заменить рядами Тейлора по полям и их производным, однако, более содержательным является использование энергетического подхода с термодинамическим потенциалом в виде функционала

$$W = \int_V w \left(E_i, \frac{\partial E_i}{\partial x_j}, P_i, \frac{\partial P_i}{\partial x_j}, H_i, \frac{\partial H_i}{\partial x_j}, M_i, \frac{\partial M_i}{\partial x_j}, T, \rho \right) dv, \quad (4)$$

где T — температура, V и ρ — объем и плотность среды, а w — плотность функционала, равная

$$w = w_0(T, \rho) + w_e + w_m + w_{me}. \quad (5)$$

Здесь первый член равен плотности функционала в отсутствие внешних полей, два последующих соответствуют вкладам электрической и магнитной подсистем, а последний — вкладу магнитоэлектрического взаимодействия.

Рассмотрим изотропную центросимметричную неупорядоченную среду, где неоднородные флексоэлектрические и флексомагнитные эффекты проявляются наиболее отчетливо ввиду отсутствия маскировки пониженной симметрией среды (исходной или возникшей при упорядочении). Поскольку поляризация и намагниченность в рассматриваемой ситуации появляются только в присутствии \mathbf{E} и \mathbf{H} , целесообразно раскладывать термодинамический потенциал по этим полям и их производным [19].

С точностью до слагаемых не выше четвертой степени по полям и второй степени по их производным в общем случае с учетом безвихревого характера полей имеем

$$w_e = \frac{a_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{a_1}{4} \mathbf{E}^4 + \frac{a_2}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_i} \right)^2 + a_3 \mathbf{E}^2 \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad (6)$$

$$w_m = \frac{b_0}{2} \mathbf{H}^2 + \frac{b_1}{4} \mathbf{H}^4 + \frac{b_2}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i} \right)^2, \quad (7)$$

$$w_{me} = \frac{c_1}{2} \mathbf{E}^2 \mathbf{H}^2 + \frac{c_2}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2 + c_3 \mathbf{H}^2 \operatorname{div} \mathbf{E} + c_4 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{div} \mathbf{H}, \quad (8)$$

где a_i , b_i и c_i — материальные константы, зависящие от T и ρ .

Нахождение экстремумов функционала (4) при фиксированных (неварьируемых) значениях $\Psi^{(E)}$ и $\Psi^{(H)}$ на границе среды дает известные соотношения (1) и (2) при следующих уравнениях состояния с участием вариационных производных:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial (\mathbf{E}/\partial x_i)}, \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{H}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial (\mathbf{H}/\partial x_i)}. \quad (10)$$

Полагая a_i , b_i , c_i постоянными и подставляя в формулы (9), (10) соотношения (6), (7), (8), получаем следующие выражения для электрической и магнитной индукции:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} - a_2 \Delta \mathbf{E} + \nu \mathbf{H} + \mathbf{D}^{(g)}, \quad (11)$$

$$\mathbf{V} = \mu \mathbf{H} - b_2 \Delta \mathbf{H} + \nu \mathbf{E} + \mathbf{V}^{(g)}. \quad (12)$$

Здесь $a_0 = \varepsilon_0$, $b_0 = \mu_0$ и

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + a_1 \mathbf{E}^2 + c_1 \mathbf{H}^2 + 2a_3 \operatorname{div} \mathbf{E}, \\ \mu &= \mu_0 + b_1 \mathbf{H}^2 + c_1 \mathbf{E}^2 + 2c_3 \operatorname{div} \mathbf{E}, \end{aligned}$$

$$\nu = c_2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) + c_4 \operatorname{div} \mathbf{H} \quad (13)$$

— нелинейные электрическая, магнитная и «магнитоэлектрическая» проницаемости, а

$$\mathbf{D}^{(g)} = -a_3 \operatorname{grad} \mathbf{E}^2 - c_3 \operatorname{grad} \mathbf{H}^2,$$

$$\mathbf{V}^{(g)} = -c_4 \operatorname{grad} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})$$

— градиентные составляющие соответственно электрической и магнитной индукции. Если коэффициенты при слагаемых с производными зависят от координат, то в формулах для индукций появятся слагаемые с градиентами этих коэффициентов.

Соотношения (11) и (12) можно переписать в виде

$$D_i = \varepsilon_{ij}^{(e)} E_j + \varepsilon_{ij}^{(n)} \Delta E_j + \varepsilon_{ij}^{(h)} H_j, \quad (14)$$

$$B_i = \mu_{ij}^{(m)} H_j + \mu_{ij}^{(n)} \Delta H_j + \mu_{ij}^{(e)} E_j, \quad (15)$$

где

$$\varepsilon_{ij}^{(e)} = \varepsilon \delta_{ij} + c_2 H_i H_j - 2a_3 \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right)$$

— перенормированные электрическим полем и его производными и магнитным полем компоненты тензора диэлектрической проницаемости,

$$\mu_{ij}^{(m)} = \mu \delta_{ij} + c_2 E_i E_j - c_4 \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right)$$

— перенормированные электрическим полем и его производными компоненты тензора магнитной проницаемости,

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = -a_2 \delta_{ij}, \quad \mu_{ij}^{(n)} = -b_2 \delta_{ij}$$

— компоненты тензоров неоднородной соответственно электрической и магнитной проницаемости,

$$\varepsilon_{ij}^{(h)} = c_4 \operatorname{div} \mathbf{H} \delta_{ij} - 2c_3 \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right),$$

$$\mu_{ij}^{(e)} = c_4 \left(\operatorname{div} \mathbf{H} \delta_{ij} - \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right)$$

— компоненты тензоров соответственно неоднородной магнитоэлектрической и электромагнитной проницаемости.

Компоненты тензора наведенной неоднородным электрическим полем магнитной проницаемости, которые можно записать в виде

$$\mu_{ij}^{(ne)} = (2c_3 \delta_{ij} - c_4) \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right),$$

в общем случае в зависимости от соотношения между материальными константами и знака градиента компонент электрического поля могут быть как положительными, так и отрицательными, т. е. может иметь место как индуцированный парамагнетизм, так и индуцированный диамагнетизм. В отличие от случая однородного магнитоэлектрического эффекта компоненты тензоров проницаемости $\varepsilon_{ij}^{(h)}$ и $\mu_{ij}^{(e)}$ отличны от нуля даже в centrosymmetric средах.

Плотности импульсов электромагнитного поля в форме Минковского

$$\mathbf{Q}_{DB} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \times \mathbf{V}$$

и в форме Абрагама

$$\mathbf{Q}_{EH} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

определяемые соответственно индукциями и полями, в рассматриваемом случае, т. е. в нелинейных centrosymmetric средах с пространственной дисперсией, связаны соотношением

$$\mathbf{Q}_{DB} = (\varepsilon \mu - \nu^2) \mathbf{Q}_{EH} + \mathbf{Q}_n,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n &= \frac{1}{4\pi c} \left(\left[(\mu \mathbf{D}^{(n)} - \nu \mathbf{V}^{(n)}) \mathbf{H} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[(\nu \mathbf{D}^{(n)} - \varepsilon \mathbf{V}^{(n)}) \mathbf{E} \right] + \mathbf{D}^{(n)} \times \mathbf{V}^{(n)} \right) \end{aligned}$$

— определяемая пространственными производными напряженностей электрического и магнитного полей плотность импульса,

$$\mathbf{D}^{(n)} = -a_2 \Delta \mathbf{E} + \mathbf{D}^{(g)}, \quad \mathbf{V}^{(n)} = -b_2 \Delta \mathbf{H} + \mathbf{V}^{(g)}$$

— неоднородные слагаемые индукций.

Соответственно плотности моментов импульса электромагнитного поля, обусловленные индукциями $\mathbf{G}_{DB} = \mathbf{r} \times \mathbf{Q}_{DB}$ и полями $\mathbf{G}_{EH} = \mathbf{r} \times \mathbf{Q}_{EH}$, связаны соотношением

$$\mathbf{G}_{DB} = (\varepsilon \mu - \nu^2) \mathbf{G}_{EH} + \mathbf{G}_n,$$

где $\mathbf{G}_n = \mathbf{r} \times \mathbf{Q}_n$.

Детальное обсуждение вопросов, относящихся к импульсу и моменту импульса электромагнитного поля, для различных статических систем заряженных электродов, помещенных в постоянное магнитное поле, дано в работе [23].

Подставляя формулы (11), (12) в (1), (2), получим систему нелинейных уравнений для полей в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E} - a_2 \Delta \mathbf{E} + \nu \mathbf{H} + \mathbf{D}^{(g)}) &= 0, \\ \operatorname{div} (\mu \mathbf{H} - b_2 \Delta \mathbf{H} + \nu \mathbf{E} + \mathbf{B}^{(g)}) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Условием устойчивости решений системы уравнений (16) является положительность второй вариации термодинамического потенциала (4), а границы устойчивости данного решения соответствуют обращению второй вариации в нуль. При перекрытии областей устойчивости стабильному состоянию отвечает решение с наименьшей энергией, другое решение является метастабильным. Равенству энергий соответствует линия фазовых переходов первого рода.

Найти точное аналитическое решение системы (16) в общем случае не представляется возможным; для получения приближенных решений можно воспользоваться методом последовательных приближений с разложением полей \mathbf{E} и \mathbf{H} в ряд по формальному малому параметру $\delta \ll 1$, т. е., предположив, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \delta \mathbf{E}_1 + \delta^2 \mathbf{E}_2 + \delta^3 \mathbf{E}_3 + \dots, \\ \mathbf{H} &= \delta \mathbf{H}_1 + \delta^2 \mathbf{H}_2 + \delta^3 \mathbf{H}_3 + \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

где поля k -го приближения связаны со скалярными потенциалами соответствующего приближения соотношениями $\mathbf{E}_k = -\operatorname{grad} \Psi_k^{(E)}$ и $\mathbf{H}_k = -\operatorname{grad} \Psi_k^{(H)}$.

В первом приближении система (16) сводится к системе двух несвязанных полигармонических уравнений для скалярных электрического и магнитного потенциалов

$$\begin{aligned} \Delta (l_e^2 \Delta \Psi_1^{(E)} - \Psi_1^{(E)}) &= 0, \\ \Delta (l_h^2 \Delta \Psi_1^{(H)} - \Psi_1^{(H)}) &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где Δ — оператор Лапласа, а $l_e^2 = a_3/\varepsilon_0$ и $l_h^2 = b_2/\mu_0$ — обратные масштабы неоднородностей потенциалов.

Второе приближение приводит к системе связанных уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta (l_e^2 \Delta \Psi_2^{(E)} - \Psi_2^{(E)}) &= f_2^{(e)}, \\ \Delta (l_h^2 \Delta \Psi_2^{(H)} - \Psi_2^{(H)}) &= f_2^{(h)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} f_2^{(e)} &= -\varepsilon_0^{-1} \operatorname{div} (\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 + \nu_1 \mathbf{H}_1 - a_3 \operatorname{grad} \mathbf{E}_1^2 - c_3 \operatorname{grad} \mathbf{H}_1^2), \\ f_2^{(h)} &= -\mu_0^{-1} \operatorname{div} (\mu_1 \mathbf{H}_1 + \nu_1 \mathbf{E}_1 - c_4 \operatorname{grad} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{H}_1)) \end{aligned}$$

— функции нелинейной связи полей, $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ — поля первого приближения; $\varepsilon_1 = 2a_3 \operatorname{div} \mathbf{E}_1$, $\mu_1 = 2c_3 \operatorname{div} \mathbf{E}_1$, $\nu_1 = c_4 \operatorname{div} \mathbf{H}_1$ — проницаемости первого приближения. Заметим, что в системе (19) присутствуют градиентные слагаемые, аналогичные силам в механике жидкости и физике плазмы.

В третьем приближении получаем

$$\begin{aligned} \Delta (l_e^2 \Delta \Psi_3^{(E)} - \Psi_3^{(E)}) &= f_3^{(e)}, \\ \Delta (l_h^2 \Delta \Psi_3^{(H)} - \Psi_3^{(H)}) &= f_3^{(h)}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} f_e^{(3)} &= -\varepsilon_0^{-1} \operatorname{div} (\varepsilon_1 \mathbf{E}_2 + \varepsilon_2 \mathbf{E}_1 + \nu_2 \mathbf{H}_1 + \nu_1 \mathbf{H}_2 + D_3^{(g)}), \\ f_h^{(3)} &= -\mu_0^{-1} \operatorname{div} (\mu_1 \mathbf{H}_2 + \mu_2 \mathbf{H}_1 + \nu_2 \mathbf{E}_1 + \nu_1 \mathbf{E}_2 + B_3^{(g)}) \end{aligned}$$

— функции нелинейной связи полей, $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ — поля второго приближения,

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= a_1 \mathbf{E}_1^2 + c_1 \mathbf{H}_1^2 + 2a_3 \operatorname{div} \mathbf{E}_2, \\ \mu_2 &= b_1 \mathbf{H}_1^2 + c_1 \mathbf{E}_1^2 + 2c_3 \operatorname{div} \mathbf{E}_2, \\ \nu_2 &= c_2 (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{H}_1) + c_4 \operatorname{div} \mathbf{H}_2 \end{aligned}$$

— проницаемости второго приближения,

$$\begin{aligned} D_3^{(g)} &= -2a_3 \operatorname{grad} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) - 2c_3 \operatorname{grad} (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2), \\ B_3^{(g)} &= -c_4 (\operatorname{grad} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{H}_2) + \operatorname{grad} (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{H}_1)) \end{aligned}$$

— градиентные слагаемые электрической и магнитной индукции в третьем приближении.

Изложенная в настоящем разделе теория, учитывающая нелинейную зависимость электрической поляризации и намагниченности от электрического и магнитного полей, применима к параэлектрикам и парамагнетикам, не являющимися спонтанно поляризуемыми средами [24, 25], а также и к спонтанно поляризуемым средам (сегнетоэлектрикам и упорядоченным магнетикам) в неупорядоченной фазе (парафазе), т. е. выше температуры Кюри.

Решения уравнений (18)–(20) представляют собой сумму общих решений однородных уравнений и частных решений неоднородных уравнений. Решения однородных уравнений, представляющих собой уравнения Гельмгольца для потенциалов, выражаются через специальные функции (см., например, [26]), тип которых определяется тем, какая система координат выбрана для теоретического анализа (декартова, цилиндрическая, сферическая или

др.). Решения неоднородных уравнений можно получить с помощью разложения неоднородных членов уравнений по базису однородных решений. Эта процедура довольно сложна и громоздка, поэтому ниже будут получены приближенные решения для некоторых частных случаев.

Рассмотрим расположенный в непроводящей изотропной среде с материальными постоянными ϵ_0 и μ_0 точечный объект с зарядом e и магнитным моментом \mathbf{m} . Нетрудно убедиться, что в данном случае решения первого приближения для потенциалов (18) можно представить в виде

$$\Psi_1^{(E)}(\mathbf{r}) = \frac{e}{\epsilon_0 r} \left(1 + c^{(e)} \exp\left(-\frac{r}{l_e}\right) \right),$$

$$\Psi_1^{(H)}(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})}{\mu_0 r^2} \left(1 + c^{(h)} \exp\left(-\frac{r}{l_h}\right) \right),$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — орт в направлении радиуса-вектора, $r = |\mathbf{r}|$, c_e, c_h — константы. Если дисперсия является слабой, то экспоненциально малые слагаемые можно не учитывать, и тогда

$$E_1(\mathbf{r}) = \frac{e\mathbf{n}}{\epsilon_0 r^2}, \quad H_1(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})\mathbf{n} - \mathbf{m}}{\mu_0 r^3}. \quad (21)$$

Вектор плотности импульса электромагнитного поля

$$\mathbf{Q}_{EH} = -\frac{e}{4\pi c \epsilon_0 \mu_0 r^5} \mathbf{n} \times \mathbf{m}$$

является нечетной функцией \mathbf{r} , поэтому полный импульс равен нулю, однако вектор плотности момента импульса

$$\mathbf{G}_{EH} = -\frac{e}{4\epsilon_0 \mu_0 r^4} \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{m}]$$

является четной функцией \mathbf{r} , поэтому полный момент импульса отличен от нуля и направлен вдоль \mathbf{m} .

С учетом приведенных выше выражений для первого приближения находим, что в уравнениях второго приближения

$$f_e^{(2)} = -\epsilon_0^{-1} \Delta (a_3 \mathbf{E}_1^2 + c_3 \mathbf{H}_1^2),$$

$$f_h^{(2)} = -\mu_0^{-1} c_4 \Delta (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{H}_1).$$

Решение однородного уравнения определяется модифицированными функциями Бесселя второго рода. Решение неоднородного уравнения представляет собой ряд по собственным функциям краевой задачи с коэффициентами, определяемыми разложением по собственным функциям. Определение коэффициентов представляет собой довольно сложную процедуру, поэтому ниже мы ограничимся нахождением приближенного решения.

Используя метод возмущений, частные решения для потенциалов можно приближенно записать в виде

$$\Psi_2^{(E)} = -\lambda_{e4} r^{-4} - \lambda_{e6} r^{-6} - \lambda_{e8} r^{-8},$$

$$\Psi_2^{(H)} = \lambda_h r^{-5} \left(1 + 18 \left(\frac{l_h}{r} \right)^2 \right) \cos \vartheta,$$

где

$$\lambda_{e4} = \epsilon_0^{-1} a_3 \left(\frac{e}{\epsilon_0} \right)^2,$$

$$\lambda_{e6} = 12 l_e^2 \lambda_{e4} + \lambda_{m6} (3 \cos^2 \vartheta + 1),$$

$$\lambda_{m6} = \epsilon_0^{-1} c_3 \left(\frac{m}{\mu_0} \right)^2,$$

$$\lambda_{e8} = 36 l_e^2 (10 \lambda_{e4} + \lambda_{m6} (2 \cos^2 \vartheta + 1)),$$

$$\lambda_h = 2 \mu_0^{-1} c_4 \frac{em}{\epsilon_0 \mu_0},$$

ϑ — угол между векторами \mathbf{m} и \mathbf{n} .

Во втором приближении магнитное поле вызывает появление угловой зависимости радиального электрического поля $E_{2r} = -4\lambda_{e4} r^{-5} - 6\lambda_{e6} r^{-7} + 8\lambda_{e8} r^{-9}$ и создает тангенциальное электрическое поле $E_{2\vartheta} = 3\lambda_{m6} \sin 2\vartheta (1 + 24(l_e^2/r^2)) r^{-7}$. Электрическое поле наводит магнитное поле с нормальной

$$H_{2r} = \lambda_h \cos \vartheta r^{-6} \left(5 + 126 \left(\frac{l_h}{r} \right)^2 \right)$$

и тангенциальной

$$H_{2\vartheta} = \lambda_h \sin \vartheta r^{-6} \left(1 + 18 \left(\frac{l_h}{r} \right)^2 \right)$$

компонентами, угловая зависимость которых соответствует угловой зависимости собственного поля диполя. При слабой пространственной дисперсии потенциалы определяются только правыми частями уравнений. Как и для первого приближения, полный импульс электромагнитного поля обращается в нуль, а полный момент импульса отличен от нуля и направлен вдоль \mathbf{m} .

Третье приближение (подробности не приводятся) дает более сложную угловую зависимость и более высокую степенную зависимость полей от r .

Из общих соображений следует, что влияние магнитного поля диполя на электрическое поле заряда будет слабым, как в силу релятивистской природы магнитного поля, так и из-за различной зависимости полей от расстояния. Рассмотрим взаимное влияние расположенных в одной и той же точке изотропно пространства с материальными постоянными ϵ_0 и

μ_0 электрического и магнитного диполей с моментами \mathbf{d} и \mathbf{m} , поля которых в первом приближении (в данном случае — собственные поля) определяются соотношением

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{\varepsilon_0 r^3}$$

и вторым уравнением в системе (21). В данном приближении полный импульс электромагнитного поля отличен от нуля и направлен по нормали к плоскости, содержащей векторы \mathbf{d} и \mathbf{m} , полный момент импульса равен нулю.

Во втором приближении при слабой дисперсии с учетом сделанных ранее замечаний находим, что в данном случае частные решения для потенциалов имеют одинаковую радиальную зависимость и могут быть представлены в следующем виде:

$$\Psi_2^{(E)} = r^{-6} [a_d(3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_d)^2 + 1) + b_m(3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_m)^2 + 1)],$$

$$\Psi_2^{(H)} = c_{dm} r^{-6} [3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_m)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_d) + (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_d)],$$

где

$$a_d = \frac{a_3 d^2}{\varepsilon_0^3}, \quad b_m = \frac{c_3 d^2}{\varepsilon_0 \mu_0^2},$$

$$c_{dm} = \frac{c_4 m d}{\varepsilon_0 \mu_0^2}, \quad \mathbf{e}_d = \frac{\mathbf{d}}{d}, \quad \mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{m}}{m},$$

откуда следует, что напряженности электрического и магнитного полей равны

$$\mathbf{E}_2 = \frac{6}{r^7} [c_{re} \mathbf{n} - a_d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_d)\mathbf{e}_d - b_m(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_m)\mathbf{e}_m],$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{3c_{dm}}{r^7} [c_{rh} \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_m)\mathbf{e}_d - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_d)\mathbf{e}_m],$$

где

$$c_{re} = a_d [4(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_d) + 1] + b_m [4(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_m) + 1],$$

$$c_{rh} = 8(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_d)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_m) + 2(\mathbf{e}_d \cdot \mathbf{e}_m).$$

Таким образом, решение второго приближения показывает, что в электрическое поле системы вносит вклад магнитный дипольный момент, а в магнитное поле — электрический дипольный момент. Момент импульса направлен по нормали к плоскости, образуемой векторами \mathbf{d} и \mathbf{m} .

3. ФЛЕКСОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КОНДЕНСАТОРЕ С КОЛЬЦЕВЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Выше было показано, что существующая в нелинейных изотропных центросимметричных неупоря-

доченных средах зависимость статической электрической (магнитной) проницаемости от напряженности внешнего однородного электрического (магнитного) поля видоизменяется, если внешнее воздействие становится неоднородным, причем величина наблюдаемых изменений возрастает при увеличении степени неоднородности внешнего воздействия.

Для наблюдения подобных явлений в неоднородном электрическом поле можно использовать, например, заполненные нелинейным диэлектриком конденсаторы с неплоскими обкладками: цилиндрическими, сферическими или эллипсоидальными. Если измерять зависимость емкости таких конденсаторов от напряжения на обкладках, то, как было показано в предыдущем разделе (см. формулу (11) и пояснения к ней), должны наблюдаться отклонения от зависимости, существующей в конденсаторах с плоскопараллельными обкладками, вызванные неоднородностью \mathbf{E} . Наибольший интерес представляют конденсаторы с эллипсоидальными обкладками, где все производные напряженности электрического поля $\partial E_i / \partial x_j$ отличны от нуля, однако мы выберем более простой вариант, относящийся к цилиндрическим конденсаторам с кольцевым эллиптическим поперечным сечением.

Применим изложенные выше теоретические положения к случаю заполненного нелинейным диэлектриком конденсатора с металлическими обкладками в виде двух бесконечных (вдоль оси z) цилиндров с конфокальными эллиптическими поперечными сечениями в плоскостях $z = \text{const}$. В таком конденсаторе можно получить очень сильные градиенты компонент электрического поля, особенно в том случае, если эксцентриситет эллиптической образующей внутренней обкладки стремится к единице.

Анализ выполним в эллиптической системе координат (ρ, η) , где семейство конфокальных эллипсов ($\rho = \text{const}$) отображает эквипотенциали (поверхности равного уровня для скалярного электрического потенциала $\Psi^{(E)}$), а ортогональное семейство конфокальных гипербол ($\eta = \text{const}$) соответствует электрическим силовым линиям. Эллиптические координаты связаны с декартовыми соотношениями

$$x = a \operatorname{ch} \rho \cos \eta, \quad y = a \operatorname{sh} \rho \sin \eta,$$

где $\rho > 0$, $\eta \in (0, 2\pi)$, $x = \pm a$ — положение фокусов эллипса на оси x . Длина полуосей эллипса по осям x , y равна $a \operatorname{sh} \rho$, $a \operatorname{ch} \rho$ [27].

На поверхности раздела между диэлектриком и внутренней ($\rho = \rho_1$) и внешней ($\rho = \rho_2$) металлическими обкладками нормальные и тангенциальные

компоненты \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} должны удовлетворять стандартным граничным условиям:

$$\begin{aligned} E_t &= 0, & D_n &= 4\pi\sigma, \\ H_{t1} &= H_{t2}, & B_{n1} &= B_{n2}, \end{aligned} \quad (22)$$

где σ — поверхностная плотность заряда. Будем считать, что конденсатор находится в постоянном однородном магнитном поле с вектором напряженности вдоль оси z , т. е. $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_z$.

Анализ уравнения состояния первого приближения (18) показывает, что напряженность магнитного поля в конденсаторе составляет $\mathbf{H}_1 = \mu_0^{-1} \mathbf{H}_0$. Далее, учитывая граничные условия (22), находим, что при $l_e^2 \ll d_e$, где d_e — характерный масштаб неоднородности электрического поля, выражения для компонент напряженности электрического поля $\mathbf{E}_1 = E_{1\eta} \mathbf{e}_\eta + E_{1\rho} \mathbf{e}_\rho$ и разности потенциалов на обкладках имеют вид

$$E_{1\eta} = 0, \quad E_{1\rho} = \frac{\sigma_\varepsilon}{ad_c^{1/2}}, \quad (23)$$

$$\Psi_1^{(E)}(\rho_2) - \Psi_1^{(E)}(\rho_1) = \frac{\sigma_\varepsilon}{\rho_2 - \rho_1}, \quad (24)$$

где σ_0 — заряд на обкладках конденсатора, $\sigma_\varepsilon = 2\sigma_0/\varepsilon_0$, $d_c = \text{sh}^2 \rho + \sin^2 \eta$, откуда в первом приближении получаем формулу для емкости конденсатора с эллиптическими конфокальными образующими цилиндрических обкладок на единицу длины:

$$C = \frac{\varepsilon_0}{2(\rho_2 - \rho_1)}. \quad (25)$$

Приведенные выше результаты полностью совпадают с известными для конденсатора, заполненного обычным диэлектриком (см. [28]), т. е. в первом приближении при выбранных ограничениях флексоэлектрический эффект отсутствует. Вектор плотности импульса для первого приближения в любой точке среды лежит в плоскости $z = \text{const}$ и направлен вдоль касательной к эквипотенциали, а вектор плотности момента импульса везде направлен вдоль оси z .

В пределе, при $a \rightarrow 0$, и заменах $(a/2) \text{exr } \rho$ на r и η на φ формулы (23) и (25) переходят в выражения для поля и емкости круглого цилиндрического конденсатора [28, 29], а именно

$$E_{1r} = \sigma_\varepsilon/r, \quad C = \varepsilon_0/\ln(r_2/r_1).$$

Заметим, что в круглом цилиндрическом конденсаторе отсутствует зависимость напряженности электрического поля \mathbf{E} от азимутального угла φ .

Учитывая решение первого приближения, находим, что во втором приближении скалярный электрический потенциал $\Psi_2^{(E)}$ и скалярный магнитный потенциал $\Psi_2^{(H)}$ удовлетворяют соответственно неоднородному и однородному уравнению Гельмгольца, т. е.

$$\begin{aligned} l_e^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi_2^{(E)}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2^{(E)}}{\partial \eta^2} \right) - a^2 d_c \Psi_2^{(E)} &= f_2^{(E)}, \\ l_h^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi_2^{(H)}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2^{(H)}}{\partial \eta^2} \right) - b^2 d_c \Psi_2^{(H)} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$f_2^{(E)} = -\frac{a_3 \sigma_\varepsilon^2}{\varepsilon_0 d_c^3} (\text{sh}^2 2\rho + \sin^2 2\eta).$$

Однородное уравнение для $\Psi_2^{(H)}$ во втором приближении удовлетворяется при $\mathbf{H}_2 = 0$. Решение неоднородного уравнения для скалярного электрического потенциала в общем случае следует искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, т. е. $\Psi_2^{(E)} = \Psi_{2u}^{(E)} + \Psi_{2nu}^{(E)}$. При разделении переменных в виде $\Psi_2^{(E)} = \Psi_{2\eta}^{(E)}(\eta) \Psi_{2\rho}^{(E)}(\rho)$ однородное уравнение распадается на два уравнения Матье:

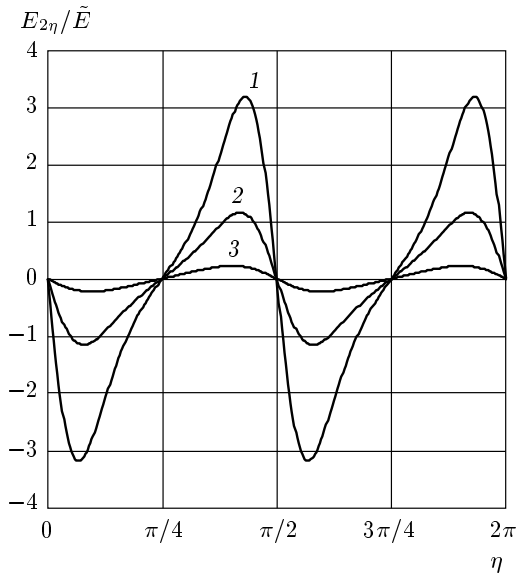
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_{2\eta}^{(E)}}{\partial \eta^2} + (b - 2q \cos 2\eta) \Psi_{2\eta}^{(E)} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Psi_{2\rho}^{(E)}}{\partial \rho^2} + (b - 2q \text{ch } 2\rho) \Psi_{2\rho}^{(E)} &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где $b = 2q + c$, $q = -a^2/(4l_e^2)$, c — константа; второе уравнение получается из первого путем замены ρ на $i\eta$.

Периодическими решениями первого уравнения системы (27) являются функции Матье целого порядка $\text{se}_m(\eta, q)$ и $\text{se}_m(\eta, q)$, которые при $q \rightarrow 0$ стремятся соответственно к $\cos m\eta$ и $\sin m\eta$. Параметры b и q связаны характеристическими уравнениями $F_m(b, q) = 0$, $F_m(m^2, q) = 0$ для se_m и $\Phi_m(b, q) = 0$, $\Phi_m(m^2, q) = 0$ для se_m , из которых определяется константа c (графики функций F_m и Φ_m см. на диаграмме Айнса–Стретта [30]). Решениями второго уравнения служат присоединенные функции Матье целого порядка $\text{Se}_m(\rho, q)$ и $\text{Se}_m(\rho, q)$.

Частное решение неоднородного уравнения в области геометрических параметров $a^2 d_c^3 (\text{sh}^2 2\rho + \sin^2 2\eta) \ll 2l_e^2$ можно приближенно представить в виде

$$\Psi_{2nu}^{(E)} = -\frac{a_3 \sigma_\varepsilon^2 d_c^{-3}}{\varepsilon_0} (\text{sh}^2 2\rho + \sin^2 2\eta),$$



Азимутальная зависимость тангенциальной компоненты напряженности электрического поля в цилиндрическом конденсаторе с эллиптическим кольцевым поперечным сечением при $\rho = 1.03$ — кривая 1, $\rho = 1.35$ — кривая 2 и $\rho = 1.5$ — кривая 3

откуда следует, что нормальная и тангенциальная компоненты напряженности электрического поля во втором приближении составляют

$$\begin{aligned} E_{2\rho} &= -\tilde{E}d_c^{-9/2} \times \\ &\times \operatorname{sh} 2\rho[-3(\operatorname{sh}^2 2\rho + \sin^2 2\eta) + 4d_c \operatorname{ch} 2\rho], \\ E_{2\eta} &= -\tilde{E}d_c^{-9/2} \times \\ &\times \sin 2\eta[-3(\operatorname{sh}^2 2\rho + \sin^2 2\eta) + 4d_c \cos 2\eta], \end{aligned} \quad (28)$$

где $\tilde{E} = a_3\sigma_\varepsilon^2 (a\varepsilon_0)^{-1}$.

Из второго уравнения системы (28) следует, что в цилиндрическом конденсаторе с эллиптическим кольцевым поперечным сечением, в отличие от круглого цилиндрического конденсатора, за счет нелинейности среды возникает неоднородная тангенциальная компонента напряженности электрического поля, которая является знакопеременной, т. е. четырекратно меняет направление в точках $\eta = n\pi/4$, где $n = 0, 1, 2, 3$, как показано на рисунке. При этом распределение заряда в среде в любой плоскости $z = \operatorname{const}$ приобретает квадрупольный характер. Обращает на себя внимание резкое возрастание максимальной величины компоненты $E_{2\eta}$ при увеличении эксцентриситета образующей эквипотенциальной поверхности.

Обусловленная компонентой $E_{2\rho}$ составляющая вектора плотности импульса $Q_{2\rho} = (1/4\pi c)E_{2\rho}H_1$ в

любой точке среды лежит в плоскости $z = \operatorname{const}$, направлена вдоль касательной к эквипотенциали и является знакопостоянной, а обусловленная компонентой $E_{2\eta}$ составляющая вектора плотности момента импульса $Q_{2\rho} = (1/4\pi c)E_{2\eta}H_1$ везде направлена вдоль оси z и является знакопеременной. Обусловленные радиальной и тангенциальной компонентами вектора \mathbf{E} составляющие вектора плотности момента импульса обе направлены вдоль оси z , но первая является знакопостоянной, а вторая — знакопеременной.

Аналогичные расчеты были выполнены и для третьего приближения; полученные результаты в связи с громоздкостью на приводятся. Отметим лишь, что однородное уравнение для $\Psi_3^{(H)}$ и в третьем приближении удовлетворяется при $\mathbf{H}_3 = 0$, т. е. наличие только однородного магнитного поля не приводит к появлению связи между электрической и магнитной подсистемами.

4. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ НА СЛУЧАЙ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКОВ

В антиферромагнетиках (АФМ) вблизи точки Нееля, где происходит фазовый переход и наиболее сильно проявляются нелинейные свойства среды, необходимо в выражение (5) для плотности термодинамического потенциала добавить слагаемое w_l , учитывающее собственную энергию антиферромагнитной подсистемы, и слагаемое w_{le} , учитывающее энергию взаимодействия АФМ с электрическим полем.

В общем случае для изотропного центросимметричного коллинеарного двухподрешеточного АФМ с вектором антиферромагнетизма \mathbf{L} имеем

$$w_l = w_{ll} + w_{lh} + w_{lhs}, \quad (29)$$

где w_{ll} — термодинамический потенциал подрешеток, w_{lh} и w_{lhs} — соответственно не зависящий и зависящий от типа подрешеток потенциал взаимодействия подрешеток с магнитным полем. Явные выражения для перечисленных выше вкладов в потенциал имеют вид

$$w_{ll} = \frac{1}{2} \left[b_1^{(l)} \mathbf{L}^2 + \frac{1}{2} b_2^{(l)} \mathbf{L}^4 + b_3^{(l)} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \right)^2 + b_4^{(l)} (\operatorname{div} \mathbf{L})^2 \right],$$

$$w_{lh} = \frac{1}{2} \left[b_1^{(lh)} \mathbf{L}^2 \mathbf{H}^2 + b_2^{(lh)} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{L})^2 \right],$$

$$w_{lhs} = b_1^{(lhs)} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{H}^2 + b_2^{(lhs)} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{L}^2 + b_3^{(lhs)} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}$$

для АФМ с эквивалентными подрешетками и

$$w_{lhs} = b_4^{(lhs)} (\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{L}),$$

для АФМ с неэквивалентными подрешетками. Различие в форме записи вкладов в термодинамический потенциал в двух последних случаях обусловлено тем, что в АФМ с эквивалентными подрешетками операция пространственной инверсии переставляет спины внутри одной и той же подрешетки, а в АФМ с неэквивалентными подрешетками — между разными подрешетками (см., например, [31]).

Вклад в плотность термодинамического потенциала взаимодействия электрического поля с АФМ-подсистемой определяется выражением

$$w_{le} = w_{lel} + w_{les}, \quad (30)$$

где первое слагаемое, не зависящее от типа подрешеток, определяется выражением

$$w_{lel} = \frac{1}{2} \left(c_1^{(l)} \mathbf{L}^2 \mathbf{E}^2 + c_2^{(l)} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{E})^2 \right) + c_3^{(l)} \mathbf{L}^2 \text{div } \mathbf{E} + c_4^{(l)} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{E}) \text{div } \mathbf{L} + c_5^{(l)} \mathbf{E} (\mathbf{L} \cdot \text{grad}) \cdot \mathbf{L},$$

а зависящее от типа подрешеток слагаемое равно

$$w_{les} = c_1^{(ls)} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{H}) \text{div } \mathbf{E} + c_2^{(ls)} \mathbf{H} (\mathbf{L} \cdot \text{grad}) \cdot \mathbf{E} + c_3^{(ls)} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{E}) \text{div } \mathbf{H} + c_4^{(ls)} \mathbf{E} (\mathbf{L} \cdot \text{grad}) \cdot \mathbf{H} + c_5^{(ls)} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}) \text{div } \mathbf{L}$$

для АФМ с эквивалентными подрешетками и

$$w_{les} = c_6^{(ls)} (\mathbf{H} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{L}])$$

для АФМ с неэквивалентными подрешетками.

Используя формулы (9) и (30), находим, что вклад антиферромагнитной подсистемы в электрическую индукцию составляет

$$\mathbf{D}^{(l)} = c_1^{(l)} \mathbf{E} \mathbf{L}^2 + c_2^{(l)} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{L} - c_3^{(l)} \text{grad } \mathbf{L}^2 - c_4^{(l)} \mathbf{L} \text{div } \mathbf{L} + c_5^{(l)} (\mathbf{L} \cdot \text{grad}) \mathbf{L} + \mathbf{D}^{(ls)}. \quad (31)$$

Зависящая от типа подрешеток доля этого вклада для АФМ с эквивалентными подрешетками, определяемая градиентами компонент магнитного поля и вектора антиферромагнетизма, равна

$$\mathbf{D}^{(ls)} = -c_1^{(ls)} \text{grad } (\mathbf{L} \cdot \mathbf{H}) - c_2^{(ls)} \mathbf{L} \text{grad } \mathbf{H} - c_25^{(ls)} \mathbf{H} \text{div } \mathbf{L} + c_3^{(ls)} \mathbf{L} \text{div } \mathbf{H},$$

где $c_{24}^{(ls)} = c_2^{(ls)} - c_4^{(ls)}$, $c_{25}^{(ls)} = c_2^{(ls)} - c_5^{(ls)}$, а выражение для доли этого же вклада для АФМ с неэквивалентными подрешетками, определяемое векторами антиферромагнетизма и магнитного поля, имеет вид

$$\mathbf{D}^{(ls)} = c_6^{(ls)} \mathbf{L} \times \mathbf{H}.$$

Вклад антиферромагнитной подсистемы в магнитную индукцию, как следует из выражений (10), (29), (30), равен

$$\mathbf{B}^{(l)} = b_1^{(lh)} \mathbf{H} \mathbf{L}^2 + b_2^{(lh)} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{L} + \mathbf{B}^{(ls)}. \quad (32)$$

Для АФМ с эквивалентными подрешетками $\mathbf{B}^{(ls)} = \mathbf{B}^{(lsh)} + \mathbf{B}^{(lse)}$, где определяемая векторами антиферромагнетизма и магнитного поля магнитная индукция составляет

$$\mathbf{B}^{(lsh)} = 2b_1^{(lhs)} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{H} + \left(b_1^{(lhs)} \mathbf{H}^2 + b_2^{(lhs)} \mathbf{L}^2 \right) \mathbf{L} - b_3^{(lhs)} \Delta \mathbf{L},$$

а определяемая векторами антиферромагнетизма и электрического поля магнитная индукция равна

$$\mathbf{B}^{(lse)} = c_1^{(ls)} \mathbf{L} \text{div } \mathbf{E} + c_{24}^{(ls)} \mathbf{L} \cdot \text{grad } \mathbf{E} - c_3^{(ls)} \text{grad } (\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}) - c_{45}^{(ls)} \mathbf{E} \text{div } \mathbf{L},$$

где $c_{24}^{(ls)} = c_2^{(ls)} - c_4^{(ls)}$, $c_{45}^{(ls)} = c_4^{(ls)} - c_5^{(ls)}$.

Для АФМ с неэквивалентными подрешетками вклад антиферромагнитной подсистемы в магнитную индукцию

$$\mathbf{B}^{(ls)} = b_4^{(lhs)} \text{rot } \mathbf{L} + c_6^{(ls)} \mathbf{E} \times \mathbf{L}$$

определяется вихрем вектора антиферромагнетизма и векторным произведением этого вектора на вектор напряженности электрического поля.

Из приведенных выше рассуждений следует, что эффективное магнитное поле АФМ, равное вариационной производной от вклада антиферромагнитной подсистемы в термодинамический потенциал, в рассматриваемом случае может быть представлено в виде суммы

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H}_{eff}^{(l)} + \mathbf{H}_{eff}^{(lel)} + \mathbf{H}_{eff}^{(les)}, \quad (33)$$

где первое слагаемое представляет собой эффективное поле при $\mathbf{E} = 0$, а второе и третье учитывают не зависящие и зависящие от типа подрешеток эффективные поля, возникающие при взаимодействии антиферромагнитной подсистемы с электрическим

полем. Первое и второе слагаемые могут быть представлены соответственно следующим образом:

$$\mathbf{H}_{eff}^{(l)} = \left(b_1^{(l)} + b_2^{(l)} \mathbf{L}^2 + b_1^{hl} \mathbf{H}^2 \right) \mathbf{L} + b_2^{hl} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{H} - b_3^{(l)} \Delta \mathbf{L} - b_4^{(l)} \text{grad div } \mathbf{L},$$

$$\mathbf{H}_{eff}^{(lel)} = \left(c_1^{(l)} \mathbf{E}^2 + 2c_3^{(l)} \text{div } \mathbf{E} \right) \mathbf{L} + \left[c_2^{(l)} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}) + c_{45}^{(l)} \text{div } \mathbf{L} \right] \mathbf{E} - c_4^{(l)} \text{grad } (\mathbf{L} \cdot \mathbf{E}) + c_5^{(l)} (\mathbf{E} \cdot \text{grad } \mathbf{L} - \mathbf{L} \cdot \text{grad } \mathbf{E}).$$

Эффективное поле, отображаемое третьим слагаемым в формуле (33), в случае АФМ с эквивалентными подрешетками содержит однородную и неоднородную части, т. е.

$$\mathbf{H}_{eff}^{(les)} = \mathbf{H}_{eff}^{(lesu)} + \mathbf{H}_{eff}^{(lesnu)},$$

где

$$\mathbf{H}_{eff}^{(lesu)} = (b_1^{(l)hs} \mathbf{H}^2 + b_2^{(l)hs} \mathbf{L}^2) \mathbf{H} + 2b_2^{(l)hs} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{L},$$

$$\mathbf{H}_{eff}^{(lesnu)} = -b_3^{(l)hs} \text{graddiv } \mathbf{H} + c_1^{(l)hs} \mathbf{H} \text{div } \mathbf{E} + c_2^{(l)hs} \mathbf{H} \cdot \text{grad } \mathbf{E} + c_3^{(l)hs} \mathbf{E} \text{div } \mathbf{H} + c_4^{(l)hs} \mathbf{E} \cdot \text{grad } \mathbf{H} - c_5^{(l)hs} \text{grad } (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}).$$

Для АФМ с неэквивалентными подрешетками соответствующее эффективное поле всегда однородно и определяется формулой

$$\mathbf{H}_{eff}^{(les)} = c_6^{(l)hs} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Система уравнений для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} в АФМ получается из уравнений (11) и (12), в левые части которых необходимо добавить соответственно выражения (31) и (32) при значении \mathbf{L} , определяемом из уравнения состояния

$$\mathbf{H}_{eff}^{(l)} = 0. \tag{34}$$

Рассмотрим частный случай отсутствия магнитного поля, когда из формул (16), (31) и (34) можно получить следующую систему уравнений:

$$\text{div} \left[\varepsilon_L \mathbf{E} - a_2 \Delta \mathbf{E} - a_3 \text{grad } \mathbf{E}^2 + \xi \mathbf{L} - c_{35}^{(l)} \text{grad } \mathbf{L}^2 - c_5^{(l)} \mathbf{L} \times \text{rot } \mathbf{L} \right] = 0,$$

$$b_1^{(l)} \mathbf{L} - b_3^{(l)} \Delta \mathbf{L} - b_4^{(l)} \text{graddiv } \mathbf{L} + \xi \mathbf{E} - c_4^{(l)} \text{grad } (\mathbf{L} \cdot \mathbf{E}) + c_5^{(l)} (\mathbf{E} \cdot \text{grad } \mathbf{L} - \mathbf{L} \cdot \text{grad } \mathbf{E}) = 0, \tag{35}$$

где

$$\varepsilon_L = \varepsilon_0 + a_1 \mathbf{E}^2 + 2a_3 \text{div } \mathbf{E} + c_1^{(l)} \mathbf{L}^2$$

— нелинейная проницаемость,

$$\xi = c_2^{(l)} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}) + c_{45}^{(l)} \text{div } \mathbf{L}$$

— антиферромагнитоэлектрическая проницаемость,

$$c_{35}^{(l)} = c_3^{(l)} - \frac{1}{2} c_5^{(l)},$$

$$b_L^{(l)} = b_1^{(l)} + c_1^{(l)} \mathbf{E}^2 + 2c_3^{(l)} \text{div } \mathbf{E} + b_2^{(l)} \mathbf{L}^2$$

— перенормированная константа однородного обменного взаимодействия.

Для легкоосного АФМ с осью легкого намагничивания, направленной вдоль оси z , в однородном состоянии из второго уравнения системы (35) следует, что у вектора антиферромагнетизма компоненты $L_x = L_y = 0$, а компонента L_z удовлетворяет соотношению

$$L_z^2 = L_{z0}^2 \left(1 - c_{1b}^{(l)} \mathbf{E}^2 - c_{2b}^{(l)} E_z^2 - c_{3b}^{(l)} \text{div } \mathbf{E} + c_{4b}^{(l)} \frac{\partial E_z}{\partial z} \right), \tag{36}$$

где $L_{z0}^2 = -b_1^{(l)}/b_2^{(l)}$ — спонтанный вектор антиферромагнетизма в отсутствие поля, $b_1^{(l)} < 0$, $b_2^{(l)} > 0$, а

$$c_{1b}^{(l)} = -\frac{c_1^{(l)}}{b_1^{(l)}}, \quad c_{2b}^{(l)} = -\frac{c_2^{(l)}}{b_1^{(l)}},$$

$$c_{3b}^{(l)} = -\frac{c_3^{(l)}}{b_1^{(l)}}, \quad c_{4b}^{(l)} = -\frac{c_4^{(l)} + c_5^{(l)}}{b_1^{(l)}}$$

— перенормированные константы. Анализ выражения (36) показывает, что электрическое поле смещает температуру фазового перехода и модифицирует константу одноосной анизотропии, причем для четных по полю членов эти изменения не зависят от направления поля, а для нечетных — изменяют знак при смене полярности \mathbf{E} .

В случае одномерной неоднородности

$$L_z = L_{z0} \left(1 - \exp \frac{z}{\delta_L} \right) / \left(1 + \exp \frac{z}{\delta_L} \right), \tag{37}$$

где $\delta_L = ((b_3^{(l)} + b_{(4)}^{(l)})/2b_2^{(l)} L_{z0}^2)^{1/2}$ — ширина неоднородности. Поле и его градиент перенормируют параметры неоднородности.

Для определения векторов индукций и антиферромагнетизма в парафазе, как и ранее, воспользуемся методом последовательных приближений с разложением по формальному малому параметру $\delta \ll 1$, представив вектор антиферромагнетизма \mathbf{L} в виде

$$\mathbf{L} = \delta \mathbf{L}_1 + \delta^2 \mathbf{L}_2 + \delta^3 \mathbf{L}_3 + \dots \tag{38}$$

Подставляя разложения векторов напряженности электрического и магнитного полей (17) и вектора антиферромагнетизма (38) в (31), получим разложение для связанной с вектором \mathbf{L} электрической индукции в виде

$$\mathbf{D}^{(l)} = \delta^2 \mathbf{D}_2^{(l)} + \delta^3 \mathbf{D}_3^{(l)} + \dots$$

Дополнительная электрическая индукция во втором приближении определяется выражением

$$\mathbf{D}_2^{(l)} = -c_3^{(l)} \text{grad } \mathbf{L}_1^2 + c_4^{(l)} \mathbf{L}_1 \text{div } \mathbf{L}_1 + c_5^{(l)} L_{1i} \frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial x_i} + \mathbf{D}_2^{(ls)}, \quad (39)$$

причем для АФМ с эквивалентными подрешетками

$$\mathbf{D}_2^{(ls)} = -c_1^{(ls)} \text{grad } (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{H}_1) - c_{24}^{(ls)} \mathbf{L}_1 \cdot \text{grad } \mathbf{H}_1 - c_{25}^{(ls)} \mathbf{H}_1 \text{div } \mathbf{L}_1 + c_3^{(ls)} \mathbf{L}_1 \text{div } \mathbf{H}_1,$$

а для АФМ с неэквивалентными подрешетками

$$\mathbf{D}_2^{(ls)} = c_6^{(ls)} \mathbf{L}_1 \times \mathbf{H}_1.$$

Разложение для вектора электрической индукции начинается со второго члена, поскольку в первом приближении наличие антиферромагнетизма в среде не изменяет \mathbf{D} . Если в АФМ с эквивалентными подрешетками индукция определяется только вектором напряженности магнитного поля и неоднородностями вектора антиферромагнетизма, то в АФМ с неэквивалентными подрешетками индукция имеет и однородное слагаемое.

Для третьего приближения находим, что

$$\mathbf{D}_3^{(l)} = c_1^{(l)} \mathbf{E}_1 \mathbf{L}_1^2 + c_2^{(l)} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{L}_1) \mathbf{L}_1 - c_3^{(l)} \text{grad } (2\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2) + c_4^{(l)} (\mathbf{L}_1 \text{div } \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_2 \text{div } \mathbf{L}_1) + c_4^{(l)} \left(L_{1i} \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial x_i} + L_{2i} \frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial x_i} \right) + \mathbf{D}_3^{(l)},$$

где для АФМ с эквивалентными подрешетками

$$\mathbf{D}_3^{(ls)} = -c_1^{(ls)} \text{grad } (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{H}_2 + \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{H}_1) - c_{25}^{(ls)} (\mathbf{H}_2 \text{div } \mathbf{L}_1 + \mathbf{H}_1 \text{div } \mathbf{L}_2) + c_3^{(ls)} (\mathbf{L}_1 \text{div } \mathbf{H}_2 + \mathbf{L}_2 \text{div } \mathbf{H}_1),$$

а для АФМ с неэквивалентными подрешетками

$$\mathbf{D}_3^{(ls)} = c_6^{(ls)} (\mathbf{L}_1 \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{L}_2 \times \mathbf{H}_1).$$

В третьем приближении, в отличие от второго, связанная с АФМ-вектором индукция зависит от электрического поля.

Подставляя разложения векторов напряженности электрического и магнитного полей (17) и вектора антиферромагнетизма (38) в (32), получим разложение для связанной с вектором \mathbf{L} магнитной индукции в виде

$$\mathbf{B}^{(l)} = \delta \mathbf{B}_1^{(l)} + \delta^2 \mathbf{B}_2^{(l)} + \delta^3 \mathbf{B}_3^{(l)} + \dots$$

Анализ формул первого приближения для дополнительной магнитной индукции в парафазе показывает, что $\mathbf{B}_1^{(l)} = \mathbf{B}_1^{(ls)}$, где $\mathbf{B}_1^{(ls)} = -b_3^{(l,hs)} \Delta \mathbf{L}_1$ и $\mathbf{B}_1^{(ls)} = b_4^{(l,hs)} \text{rot } \mathbf{L}_1$ для АФМ с эквивалентными и неэквивалентными подрешетками.

Во втором приближении для $\mathbf{B}_2^{(l)} = \mathbf{B}_2^{(ls)}$ получаем, что

$$\mathbf{B}_2^{(ls)} = -b_3^{(l,hs)} \Delta \mathbf{L}_2 + c_{15}^{(ls)} \mathbf{L}_1 \text{div } \mathbf{E}_1 + c_{24}^{(ls)} \mathbf{L}_1 \cdot \text{grad } \mathbf{E}_1 - c_3^{(ls)} \text{grad } (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{L}_1) - c_{45}^{(ls)} \mathbf{E}_1 \text{div } \mathbf{L}_1$$

для АФМ с эквивалентными подрешетками, и

$$\mathbf{B}_2^{(ls)} = -b_4^{(l,hs)} \text{rot } \mathbf{L}_2 + c_6^{(ls)} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{L}_1$$

для АФМ с неэквивалентными подрешетками.

В третьем приближении выражение для дополнительной магнитной индукции имеет вид

$$\mathbf{B}_3^{(l)} = b_1^{(l,hs)} \mathbf{H}_1 \mathbf{L}_1^2 + b_2^{(l,hs)} (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{L}_1) \mathbf{L}_1 + \mathbf{B}_3^{(ls)}.$$

Для АФМ с эквивалентными подрешетками дополнительная магнитная индукция создается как магнитным, так и электрическим полем, т.е. $\mathbf{B}_3^{(l)} = \mathbf{B}_3^{(l,hs)} + \mathbf{B}_3^{(l,es)}$, где

$$\mathbf{B}_3^{(l,hs)} = 2b_1^{(l,hs)} (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{L}_1) \mathbf{H}_1 + b_2^{(l,hs)} \mathbf{L}_1^2 \mathbf{L}_1 - b_3^{(l,hs)} \Delta \mathbf{L}_3,$$

$$\mathbf{B}_3^{(l,es)} = c_{15}^{(ls)} (\mathbf{L}_1 \text{div } \mathbf{E}_2 + \mathbf{L}_2 \text{div } \mathbf{E}_1) + c_{24}^{(ls)} (\mathbf{L}_1 \cdot \text{grad } \mathbf{E}_2 + \mathbf{L}_2 \cdot \text{grad } \mathbf{E}_1) - c_3^{(ls)} \text{grad } (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{L}_2 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{L}_1) - c_{45}^{(ls)} (\mathbf{E}_1 \text{div } \mathbf{L}_2 + \mathbf{E}_2 \text{div } \mathbf{L}_1).$$

Для АФМ с неэквивалентными подрешетками в третьем приближении имеем

$$\mathbf{B}_3^{(l)} = b_4^{(l,hs)} \text{rot } \mathbf{L}_3 + c_6^{(ls)} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{L}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{L}_1),$$

т.е. в данном случае магнитная индукция содержит и однородные слагаемые.

Подставляя разложения векторов электрического, магнитного полей (17) и АФМ-вектора (38) в формулу (34), получим уравнения состояния в различных приближениях. В первом приближении условие (34) дает следующее уравнение состояния для АФМ с эквивалентными подрешетками:

$$b_1^{(l)} \mathbf{L}_1 - b_3^{(l)} \Delta \mathbf{L}_1 - b_4^{(l)} \text{grad div } \mathbf{L}_1 - b_3^{(l,hs)} \Delta \mathbf{H}_1 = 0$$

и то же самое уравнение без последнего слагаемого для АФМ с неэквивалентными подрешетками, которое подобно уравнению для смещений в теории упругости. Отсюда следует, что слабонеоднородное внешнее магнитное поле наводит антиферромагнитный момент $\mathbf{L}_1 = (b_3^{(hs)}/b_1^{(l)})\Delta\mathbf{H}_1$ в АФМ с эквивалентными подрешетками; в однородном магнитном поле $\mathbf{L}_1 = 0$ для любых АФМ. Электрическое поле в первом приближении не оказывает никакого влияния на среду.

Во втором приближении получаем, что

$$b_1^{(l)}\mathbf{L}_2 - b_3^{(l)}\Delta\mathbf{L}_2 - b_4^{(l)}\text{grad div } \mathbf{L}_2 = \mathbf{H}_{20}^{(lh)},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{20}^{(lh)} = & -2c_3^{(l)}\mathbf{L}_1\text{div } \mathbf{E}_1 - c_{45}^{(l)}\mathbf{E}_1\text{div } \mathbf{L}_1 + \\ & + c_4^{(l)}\text{grad } (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{E}_1) - c_5^{(l)}(\mathbf{E}_1 \cdot \text{grad } \mathbf{L}_1 - \\ & - \mathbf{L}_1 \cdot \text{grad } \mathbf{E}_1) - \mathbf{H}_2^{(les)}, \end{aligned}$$

причем для АФМ с эквивалентными подрешетками эффективное поле $\mathbf{H}_2^{(les)}$ отличается от нуля только для неоднородных магнитных и электрических полей и составляет

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2^{(les)} = & -b_3^{(hs)}\Delta\mathbf{H}_2 + c_1^{(ls)}\mathbf{H}_1\text{div } \mathbf{E}_1 + \\ & + c_{25}^{(ls)}\mathbf{H}_1 \cdot \text{grad } \mathbf{E}_1 + c_3^{(ls)}\mathbf{E}_1\text{div } \mathbf{H}_1 + c_{45}^{(ls)}\mathbf{E}_1 \cdot \text{grad } \mathbf{H}_1, \end{aligned}$$

а для АФМ с неэквивалентными подрешетками неоднородность полей не является необходимым условием существования этого эффективного поля, поскольку

$$\mathbf{H}_2^{(les)} = c_6^{(ls)}\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1.$$

Для однородных внешних полей существуют однородные стационарные состояния, в которых $\mathbf{L}_2 = 0$ для АФМ с эквивалентными подрешетками и $\mathbf{L}_2 = (c_6^{(ls)}/b_1^{(l)})\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1$ для АФМ с неэквивалентными подрешетками. В последнем случае измерение вектора антиферромагнетизма \mathbf{L}_2 позволяет получить прямую информацию об импульсе электромагнитного поля [29]. Если заполнить антиферромагнетиком, находящимся в парафазе, полость круглого цилиндрического конденсатора, где модуль радиального поля $E_{1\rho} = \sigma_\varepsilon/r$, то во втором приближении в однородном внешнем поле $H_{1z} = H_0/\mu_0$ для эквивалентных подрешеток $\mathbf{L}_2 = 0$, а для неэквивалентных подрешеток $\mathbf{L}_2 = -\mathbf{e}_\varphi c_6^{(ls)} H_0 \sigma_\varepsilon / (b_1^{(l)} \mu_0 r) \neq 0$, где \mathbf{e}_φ — тангенциальный орт. В результате возникает ненулевой тороидный момент с плотностью $\mathbf{t} = \mathbf{L}_2 \times \mathbf{r}$, несмотря на то что циркуляции векторов \mathbf{L}_2 и \mathbf{E}_2 по любой окружности в плоскости $z = \text{const}$ обращаются в нуль (т.е. нет результирующих электрических и дипольных моментов). Величина момента на единицу высоты конденсатора составляет

$$T_z = c_6^{(ls)} H_0 \sigma_\varepsilon (r_2 - r_1) / b_1^{(l)} \mu_0,$$

где r_1 и r_2 — радиусы внутренней и внешней обкладок. По аналогии в конденсаторе с эллипсоидальными обкладками в сходной ситуации будет создаваться квадрупольный момент. В переменном электрическом поле наличие тороидных и квадрупольных моментов будет приводить к излучению соответствующих типов волн.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты приведенного в предыдущих разделах теоретического анализа показывают, что в изотропных центросимметричных нелинейных средах с пространственной дисперсией, подвергнутых воздействию неоднородных электрических и магнитных полей, могут наблюдаться различные флексоэлектрические и флексомагнитные эффекты. Проявления таких эффектов могут быть весьма разнообразными: возникает «перекрестная» зависимость электрической поляризации и намагнитченности (или электрической и магнитной проницаемости) соответственно от магнитного и электрического поля, скалярные проницаемости изотропных сред становятся тензорными, изменяется характер нелинейной зависимости проницаемостей от напряженности полей и др.

Необходимая для возникновения таких эффектов нелинейность существует при реально достижимых в экспериментах напряженностях электрического и магнитного поля, например, в поляризуемых средах в неупорядоченном состоянии в окрестности точки Кюри или точки Нееля. Связь между магнитной и электрической подсистемами в среде может обеспечиваться, например, за счет зависимости g -фактора от электрического поля, за счет влияния смещения ионов при поляризации на ориентацию магнитных моментов и обменное взаимодействие между ними, за счет стрикции и др. [32].

Заметим, что тензор пространственных производных поляризации $p_{ij} = (\partial\mathbf{P}_i/\partial x_j)$ (или тензор пространственных производных электрической индукции $d_{ij} = (\partial\mathbf{D}_i/\partial x_j)$) и тензор пространственных производных электрического поля $e_{ij} = (\partial\mathbf{E}_i/\partial x_j)$ можно уподобить соответственно тензорам дисторсий и упругих напряжений, а взаимодействие неоднородной поляризации с намагнитченностью — магнитоупругому взаимодействию. Тензор «поляризационных дисторсий» можно разделить на симметричную $p_{[ij]}$ и антисимметричную $p_{\{ij\}}$ части, подобные тензорам деформаций и вращений. Тензор

«вращений поляризации» $p_{\{ij\}} = -e_{ijk}N_k$, где e_{ijk} — единичный полностью антисимметричный тензор, а

$$N_k = -\frac{1}{2}e_{ijk}p_{\{ij\}} = -\frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{P})_k$$

— компоненты «вектора вращений» поляризации. В квазистатике сопряженный \mathbf{N} вектор $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ и, следовательно, потенциальная часть \mathbf{E} наводит только поляризационные деформации. В динамике существует вихревая часть \mathbf{E} , которая может породить вектор \mathbf{N} , и, наоборот, переменный вектор \mathbf{N} может возбуждать вихрь вектора \mathbf{E} .

В переменных гармонических полях с ограниченной пространственной апертурой и медленноменяющейся амплитудой наличие нелинейности среды приводит к появлению неоднородных постоянных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} , которые могут давать эффекты, подобные тем, что дают внешние постоянные неоднородные поля. В частности, в фокусе светового луча в среде может возникнуть область с радикальным электрическим полем, как вокруг уединенного заряда в вакууме. Переменные циркулярно поляризованные поля с комплексными амплитудами \mathbf{E} и \mathbf{H} , создающие эффективные поля магнитного типа ($\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*$, $\mathbf{H} \times \mathbf{H}^*$) и магнитоэлектрического типа ($\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{H} \times \mathbf{E}^*$), могут приводить к возникновению новых флексомагнитоэлектрических эффектов [33].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Машкевич, К. Б. Толшго, ЖЭТФ **32**, 520 (1957).
2. Ш. М. Коган, ФТТ **5**, 2829 (1963).
3. R. V. Mindlin, Int. J. Sol. Struct. **4**, 637 (1968).
4. И. С. Желудев, Кристаллография **14**, 514 (1969).
5. R. V. Meyer, Phys. Rev. Lett. **22**, 918 (1969).
6. А. К. Таганцев, УФН **152**, 423 (1981).
7. А. К. Звездин, А. П. Пятаков, УФН **174**, 9 (2004).
8. M. Fiebig, J. Phys. D: Appl. Phys. **38**, 123 (2005).
9. K. F. Wang, J.-M. Liu, and Z. F. Ren, Adv. Phys. **58**, 321 (2009).
10. А. К. Звездин, А. П. Пятаков, УФН **179**, 897 (2009).
11. I. E. Chupis, arXiv:1012.2024.
12. W. Kleeman, P. Borisov, V. V. Shvartsman et al., EPJ Web of Conferences, **29**, 00046 (2012).
13. D. Lee, A. Yoon, S. Y. Jang et al., Phys. Rev. Lett. **107**, 057602 (2011).
14. N. D. Sharma, R. Maranganti, and P. Sharma, J. Mech. Phys. Sol. **55**, 2328 (2007).
15. S. Chandrarte and P. Sharma, Appl. Phys. Lett. **100**, 023114 (2012).
16. P. Zubko, G. Catalan, and A. K. Tagantsev, Ann. Rev. Mat. Res. **43**, 387 (2013). DOI: 10.1146/annurev-matsci-071312-121634.
17. E. A. Eliseev, M. D. Glinchik, V. Khist et al., arXiv: 1103.5206.
18. E. A. Eliseev, M. D. Glinchik, V. Khist et al., Phys. Rev. B **84**, 174112 (2011).
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
20. A. S. Logginov, G. A. Meshkov, A. V. Nikolaev et al., J. Magn. Magn. Mater. **310**, 2569 (2004).
21. А. Ф. Кабыченков, Ф. В. Лисовский, Е. Г. Мансветова, Письма в ЖЭТФ **304**, 97 (2013). DOI: 10.11304/50021364013050081.
22. Б. Б. Кричевцов, В. В. Павлов, Р. В. Писарев, Письма в ЖЭТФ **49**, 466 (1989).
23. D. Babson, S. P. Reynolds, R. Bjorkquist et al., Amer. J. Phys. **77**, 826 (2009).
24. Ю. М. Поплавко, Л. П. Переверзева, И. П. Равевский, *Физика активных диэлектриков*, Изд-во ЮФУ, Ростов-на-Дону (2009).
25. С. В. Вонсовский, *Ферромагнетизм*, Наука, Москва (1971).
26. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Уравнения в частных производных математической физики*, Высшая школа, Москва (1970).
27. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1974). [G. A. Korn and T. M. Korn, *Mathematical Handbook*, McGraw-Hill Book Co., New York (1968).]
28. A. Majumdar and C.-H. Lin, Appl. Phys. Lett. **98**, 073506 (2011).
29. И. Е. Тамм, *Основы теории электричества*, Наука, Москва (1989).
30. А. Анго, *Математика для электро- и радиоинженеров*, Наука, Москва (1964).
31. Е. А. Туров, А. В. Колчанов, В. В. Меньшенин и др., *Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков*, Наука, Москва (2001).
32. G. A. Gehring, Ferroelectrics **161**, 275 (1994).
33. A. Kabychenkov, in *Nonlinear Electromagnetic Systems*, ed. by V. Kose and J. Sievert, IOS Press, Amsterdam (1998), p. 879.