

## ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДВУХБАРЬЕРНЫХ НАНОСТРУКТУРАХ

*В. Ф. Елесин\**

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 12 декабря 2013 г.

Найдено аналитическое решение задачи о переходных процессах в двухбарьерной наноструктуре. Получены явные выражения для переходного тока, возникающего под действием мгновенно прилаемого слабого электрического поля. Возникающий ток за время, равное  $\hbar/\Gamma$  ( $\Gamma$  — ширина резонансного уровня), релаксирует к стационарному значению, совершая осцилляции с частотой  $\xi = \varepsilon - \varepsilon_R$ , где  $\varepsilon$  — энергия поступающих из эмиттера электронов,  $\varepsilon_R$  — энергия резонансного уровня. В квазиклассическом приближении найден переходный ток для взаимодействующих электронов. Показано, что учет взаимодействия может кардинально менять вид переходного тока, особенно при наличии гистерезиса ВАХ. Вблизи экстремальных значений ВАХ в области отрицательной дифференциальной проводимости частота осцилляций стремится к нулю и становится мнимой, компенсируя затухание. Таким образом, переходный ток релаксирует с очень большими временами без осцилляций. Наоборот, при положительной дифференциальной проводимости частота осцилляций становится очень большой, а время релаксации остается прежним —  $1/\Gamma$ .

DOI: 10.7868/S0044451014060123

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время двухбарьерная наноструктура (так называемый резонансно-туннельный диод — РТД) [1, 2] является одним из наиболее перспективных кандидатов в качестве высокоскоростных переключающих электронных устройств. Однако о реальных скоростях переключения известно мало. Поэтому остается важным вопрос о предельных параметрах РТД, в частности, характерных временах переходных процессов. Экспериментальное измерение характерных времен переходных процессов представляет большие трудности. Они связаны, во-первых, с очень малой ожидаемой величиной времен ( $10^{-13}$ – $10^{-14}$  с), а во-вторых, с влиянием ряда побочных эффектов типа паразитных емкостей, индуктивностей и т. д.

Поэтому представляет интерес теоретический расчет переходных процессов, в частности предельных значений характерных времен в зависимости от параметров РТД.

Поскольку РТД представляет собой квантовый прибор, наиболее последовательной моделью является так называемая когерентная модель туннелирования, включающая систему уравнений Шредингера и Пуассона с открытыми граничными условиями. Однако эта система очень трудна для решения в нестационарном случае, что обусловлено необычайно сложными граничными условиями, имеющими интегральную форму [3–5]. Они весьма трудны в реализации и требуют большого объема памяти и машинного времени. Ввиду сложности граничных условий, а также проблем со сходимостью, результаты, полученные с помощью компьютерного моделирования [6–8], часто противоречивы и носят в основном методический характер.

Цель настоящей работы — развить аналитическую теорию переходных процессов в модели когерентного туннелирования, в том числе с учетом межэлектронного взаимодействия. Ключевым является тот факт, что фурье-компонента нестационарной волновой функции удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению для стационарной волновой функции РТД в слабом высокочастотном переменном поле  $U(x)\cos(\omega t)$ , решения которого были найдены в работе [9]. В работе [9] для широкого интер-

\*E-mail: VFElesin@mephi.ru

вала частот получены точные волновые функции, активный (синфазный полю)  $J_c$  и реактивный  $J_s$  токи. С использованием естественных для РТД малых параметров  $\omega/\varepsilon_R$  и  $\Gamma/\varepsilon_R$  выражения для  $\psi_n$ ,  $J_c$  и  $J_s$  без потери общности были приведены к простому и наглядному виду за счет компенсации ряда расходящихся членов. Полученные выражения удовлетворяют соотношению Крамерса–Кронига, закону сохранения заряда, требованиям теории излучения, имеют правильный низкочастотный предел. Результаты выполненных позднее численных расчетов [10] совпали с аналитическими [9] с высокой степенью точности. Именно справедливость найденных решений вплоть до высоких частот ( $\omega \gg \Gamma$ ) и является ключевой для их использования в теории переходных процессов РТД.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 дана постановка задачи и приведены основные уравнения. В разд. 3 найдены по теории возмущений нестационарные волновые функции и ток, возникающие под действием мгновенно включаемого поля. Раздел 4 посвящен квазиклассическому приближению. Переходные процессы в РТД с учетом межэлектронного взаимодействия рассматриваются в разд. 5. Анализ влияния межэлектронного взаимодействия на переходный ток проводится в разд. 6.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Следуя работе [9], рассмотрим модель когерентного туннелирования для одномерной квантовой ямы с барьерами в точках  $x = 0$  и  $x = a$  в виде  $\delta$ -функций (см. рис. 1). Слева ( $x \rightarrow -\infty$ ) из эмиттера подводится стационарный поток электронов, пропорциональный  $q^2$ , с энергией  $\varepsilon$ , примерно равной

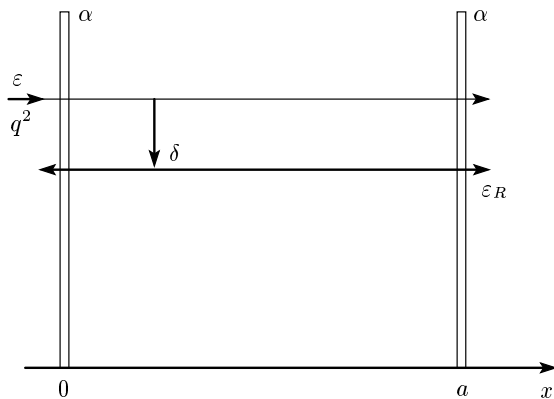


Рис. 1. Схема двухбарьерной структуры (РТД)

энергии резонансного уровня  $\varepsilon_R$ . В области квантовой ямы действует переменное электрическое поле с потенциалом  $V(x, t)$ . Волновая функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha [\delta(x) + \delta(x-a)] \psi + V(x, t) \psi. \quad (1)$$

Здесь  $\alpha$  — «мощность» барьеров,  $\hbar = 2m = 1$ ,  $m$  — масса электрона,  $V(x, t) = xV(t)$ . Потенциал  $V(t)$  предполагается равным нулю при  $t < 0$ , так что система находится в стационарном состоянии и описывается волновой функцией

$$\psi_0(x, t) = \psi_0(x) \exp(-i\varepsilon t),$$

удовлетворяющей уравнению (1) с  $V(t) = 0$  и граничными условиями (см. [9])

$$\begin{aligned} \psi_0(0)(1-\beta) + \frac{\psi_0'(0)}{ip} &= q, & \varepsilon &= p^2, & \psi_0' &= \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \\ \psi_0(a)(1-\beta) - \frac{\psi_0'(a)}{ip} &= 0, & \beta &= \frac{\alpha}{ip}. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение для  $\psi_0(x)$  имеет вид [9]

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \gamma_0 \cos(px) + i\delta_0 \sin(px), \\ \gamma_0 &= A + B, & \delta_0 &= A - B, & B &= \frac{2\beta}{\Delta_0}, \\ A &= \frac{q(2-\beta) \exp(-2ipa)}{\Delta_0}, & \Delta_0 &= \frac{4i(\xi+i\Gamma)}{\Gamma}, & (3) \\ \Gamma &= \frac{4p^3}{\alpha^2 a}, & \xi &= \varepsilon - \varepsilon_R, \\ \varepsilon_R &\approx \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{\alpha a} + \frac{12}{\alpha^2 a^2}\right). \end{aligned}$$

В момент  $t \geq 0$  прикладывается слабое переменное поле  $V(x, t)$  и волновая функция становится нестационарной:

$$\psi(x, t) = \exp(-i\varepsilon t) \left( \psi_0(x) + \tilde{\psi}(x, t) \right), \quad \tilde{\psi} \ll \psi_0, \quad (4)$$

причем  $\tilde{\psi}(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \varepsilon \tilde{\psi} = -\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + \alpha [\delta(x) + \delta(x-a)] \tilde{\psi} + V(x, t) \psi_0(x) \quad (5)$$

и начальному условию

$$\tilde{\psi}(x, t) = 0, \quad t \leq 0. \quad (6)$$

Переменное поле вызывает изменение тока  $\tilde{I}(x, t)$ :

$$\tilde{I}(x, t) = I(x, t) - I_0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}(x, t) &= \\ &= -ie \left\{ \left[ \psi_0^* \frac{\partial \tilde{\psi}(x, t)}{\partial x} - \tilde{\psi}(x, t) \frac{\partial \psi_0^*}{\partial x} \right] - \text{c.c.} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

### 3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РЕЗОНАНСНО-ГУННЕЛЬНОМ ДИОДЕ

Совершая в (5) фурье-преобразование

$$\tilde{\psi}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(i\omega t) \tilde{\psi}(x, \omega), \quad (9)$$

приходим к уравнению

$$(\varepsilon - \omega) \tilde{\psi}(x, \omega) = -\frac{\partial^2 \tilde{\psi}(x, \omega)}{\partial x^2} + \alpha [\delta(x) + \delta(x - a)] \tilde{\psi}(x, \omega) + xV(\omega) \psi_0(x) \quad (10)$$

для фурье-компоненты  $\tilde{\psi}(x, \omega)$

$$\tilde{\psi}(x, \omega) = \int_0^{\infty} dt \exp(-i\omega t) \tilde{\psi}(x, t), \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(0, \omega)(1 - \beta_{-1}) + \frac{\tilde{\psi}'(0, \omega)}{ip_{-1}} &= 0, & \beta_{-1} &= \frac{\alpha}{ip_{-1}}, \\ \tilde{\psi}(a, \omega)(1 - \beta_{-1}) - \frac{\tilde{\psi}'(a, \omega)}{ip_{-1}} &= 0, & p_{-1}^2 &= p^2 - \omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $V(\omega)$  — фурье-компонента переменного поля  $V(t)$ ,

$$V(\omega) = \int_0^{\infty} dt \exp(-i\omega t) V(t). \quad (13)$$

Принципиальным является тот факт, что уравнение (10) для фурье-компоненты аналогично уравнению для парциальной волновой функции  $\psi_n(x)$ ,  $n = -1$ , электронов с квазиэнергиями  $\varepsilon - \omega$  в задаче о резонансном туннелировании (РТД) в слабом высокочастотном поле  $U \cos(\omega t)$ , решения которого были найдены в работе автора [9]. Разница состоит лишь в замене  $U$  на  $V(\omega)$ , и  $\cos(\omega t)$  на  $\exp(i\omega t)$ .

Решение  $\tilde{\psi}(x, \omega)$  имеет вид (см. [9])

$$\tilde{\psi}(x, \omega) = V(\omega) \gamma_{-1}(\omega) \times [\cos(p_{-1}x) + i(\beta - 1) \sin(p_{-1}x)], \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{-1}(\omega) &= -\frac{4a^2 \alpha A}{p^2 \Delta_{-1}(\omega)}, \\ \Delta_{-1} &= \frac{4i}{\Gamma} (\xi - \omega + i\Gamma), \quad p_{-1} \approx p - \frac{\omega}{2p}. \end{aligned} \quad (15)$$

В (14) и (15) опущены малые члены порядка  $\omega/\varepsilon_R$  (в РТД  $\omega$  всегда меньше  $\varepsilon_R$ ) и  $\Gamma/\varepsilon_R$ , поскольку рассматривается наиболее интересный случай квантовой ямы с «сильными» барьерами, когда  $p/\alpha \ll 1$  и  $\Gamma/\varepsilon_R \ll 1$ .

Подставляя  $\psi_0(x)$  из (3) и  $\tilde{\psi}(x, \omega)$  из (14) в формулу (8) и учитывая (9), найдем фурье-компоненту тока:

$$\frac{\tilde{I}(x, \omega)}{eQ} = -\frac{i\Gamma V(\omega)}{(\xi^2 + \Gamma^2)(\omega - \xi - i\Gamma)} \left[ \xi + \frac{\omega}{a} x \right], \quad (16)$$

$$Q = 4pq^2.$$

Ограничимся вычислением тока  $\tilde{I}(x, t)$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{I}(x, t) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(i\omega t) V(\omega) \tilde{I}(x, \omega) - \text{c.c.} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

для мгновенного включения поля  $V(t)$ ,

$$V(t) = V_0 \exp(-\gamma t) \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$V(\omega) = \frac{-iV_0}{\omega - i\gamma}, \quad \gamma \rightarrow +0.$$

После взятия интеграла (17) с помощью теории вычетов находим

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{I}(x, t)}{eQ} &= -\frac{V_0 \Gamma^2 \xi}{(\xi^2 + \Gamma^2)^2} \left\{ 1 - \exp(-\Gamma t) \cos(\xi t) + \right. \\ &\left. + \exp(-\Gamma t) \sin(\xi t) \left[ \frac{\xi}{\Gamma} - \frac{x}{a} \frac{\xi^2 + \Gamma^2}{\xi \Gamma} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из выражения (19) следует, что после мгновенного включения потенциала  $V(t)$  появляется ток  $\tilde{I}$ , который за времена  $1/\Gamma$  ( $\Gamma$  — ширина резонансного уровня) переходит в стационарную добавку к первоначальному току  $I_0$ . Переход сопровождается осцилляциями с частотой  $\xi = \varepsilon - \varepsilon_R$ .

Этот результат имеет ясный физический смысл. Затухание тока связано с уходом электронов из квантовой ямы с вероятностью, пропорциональной  $\Gamma$ . Осциллирующий член обусловлен мгновенным включением поля (аналогично нестационарной теории возмущений в квантовой механике), причем частота  $\xi = \varepsilon - \varepsilon_R$  равна разности характерных энергий. Стоит отметить, что вместо  $x$  в (19), строго говоря, следует поставить  $x - \sin(2x)/2$ . Но такая добавка не вносит вклад в средний (приведенный,  $\bar{I} = \int \tilde{I} dx$ ) ток, а также эмиттерный  $I(0, t)$  и коллекторный  $I(a, t)$  токи, поэтому ее опускаем. В работе [11] формула (19) проверялась с помощью компьютерного моделирования и было продемонстрировано совпадение результатов с высокой точностью.

**4. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ**

В этом разделе используем для решения нестационарной задачи квазиклассический метод [12], который удается обобщить для переходных процессов взаимодействующих электронов, что и сделано в следующем разделе.

В работе [12] по методу [13, 14] была найдена квазиклассическая волновая функция  $\psi(x, t)$  и ток  $I(x, t)$  в переменном поле  $V(x, t) = Vx \cos(\omega t)$  для широкого интервала частот. Решалось уравнение Шредингера (1) с граничными условиями, аналогичными (12). Полученное в работе [12] выражение для тока имеет вид

$$I(x, t) = eQ \left\{ |f(z)|^2 + \frac{\alpha^2}{4p^2} [|f(z)|^2 - |f(\tilde{z})|^2] \right\} \equiv I_1(t) + I_2(x, t). \quad (20)$$

Здесь  $f(z)$  — функция туннелирования ( $\psi(x, t) = f(z) \exp(ipx)$  для  $x \geq a$ ):

$$|f(z)|^2 = \Gamma^2 \int_0^\infty d\tau_1 \exp[-(\Gamma - i\xi)\tau_1] \times \int_0^\infty d\tau_2 \exp[-(\Gamma + i\xi)\tau_2] \times \exp \left[ iA \frac{\bar{V}}{\omega} \sin(\omega z) + iB \frac{\bar{V}}{\omega} \cos(\omega z) \right], \quad (21)$$

$$A = [\cos(\omega\tau_2) - \cos(\omega\tau_1)], \quad (22)$$

$$B = [\sin(\omega\tau_2) - \sin(\omega\tau_1)],$$

$$\bar{V} = \frac{1}{a} \int_0^a V(x) dx, \quad z = -t + \eta, \quad (23)$$

$$\tilde{z} = -t - \eta, \quad \eta = \frac{x - a}{2p}.$$

Первое слагаемое в (20)  $I_1(t)$  дает вклад в ток, слабо зависящий от координат, так как координатная поправка в выражении для  $f(z)$  пропорциональна малой величине

$$\omega \frac{x - a}{2p} \approx \frac{\omega}{\varepsilon_R} \ll 1.$$

Второе слагаемое  $I_2(x, t)$  зависит от координаты, поскольку присутствующая в нем малая величина  $\omega(x - a)/2p$  умножается на большой множитель

$\alpha^2/p^2$ , возникающий из-за конструктивной интерференции в квантовой яме.

Из предыдущего раздела следует, что для отыскания фурье-компоненты тока в линейном по полю приближении необходимо выделить из  $|f(z)|^2$  и  $|f(\tilde{z})|^2$  составляющие, пропорциональные  $\exp(i\omega t)$ :

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &\rightarrow -\bar{V} \exp(-i\omega\eta)G(\omega), \\ |f(\tilde{z})|^2 &\rightarrow -\bar{V} \exp(i\omega\eta)G(\omega), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$G(\omega) = \frac{\xi\Gamma^2}{(\xi^2 + \Gamma^2)(\omega + \xi - i\Gamma)(\omega - \xi - i\Gamma)}. \quad (25)$$

Тогда для фурье-компонент переходного тока получаем

$$\frac{\tilde{I}_1(\omega)}{eQ} = -V_0(\omega)G(\omega), \quad (26)$$

$$\frac{\tilde{I}_2(x, \omega)}{eQ} = V_0(\omega) \frac{i\omega}{\Gamma} \frac{x - a}{a} G(\omega). \quad (27)$$

Временная зависимость переходного тока

$$\tilde{I}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(i\omega t) [\tilde{I}_1(\omega) + \tilde{I}_2(x, \omega)] \quad (28)$$

в случае мгновенного включения поля имеет следующие виды

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{I}_1(t)}{eQ} &= -\frac{V_0\Gamma^2\xi}{(\xi^2 + \Gamma^2)^2} \times \\ &\times \left[ 1 - \exp(-\Gamma t) \left( \cos(\xi t) + \frac{\Gamma}{\xi} \sin(\xi t) \right) \right], \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\tilde{I}_2(x, \omega)}{eQ} = \frac{\Gamma V_0}{\xi^2 + \Gamma^2} \frac{x - a}{a} \exp(-\Gamma t) \sin(\xi t). \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что суммарный ток (29) и (30) в точности совпадает с выражением (19), полученным ранее другим методом. Отметим, что  $\tilde{I}(x, t) = 0$ ,  $t < 0$ , так как функция  $G(\omega)$  аналитична в нижней полуплоскости комплексной переменной  $\omega$ .

**5. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РТД С УЧЕТОМ МЕЖЭЛЕКТРОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

Межэлектронное кулоновское отталкивание может приводить к кардинальному изменению статических и динамических характеристик. В статическом случае ВАХ при определенных условиях становится гистерезисной [15, 16]. Причина высокой чувствительности резонансного туннелирования к взаимодействию заключается в том, что сдвиг резонансного уровня на малую по сравнению с  $\varepsilon_R$  величину,

но сопоставимую с шириной резонансного уровня  $\Gamma$ , резко изменяет ток.

Недавно в работе [17] было показано, что взаимодействие способно существенно менять и динамические свойства РТД. Поэтому представляется важным исследовать влияние взаимодействия на переходные процессы. Для этого мы используем результаты работы [17], в которой удалось найти квазиклассические волновые функции и токи с учетом межэлектронного взаимодействия (в приближении Хартри) в переменном поле для широкого интервала частот  $\omega \gg \Gamma$ . В работе [17] решалось уравнение Шредингера (1) с добавлением потенциала

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x) + \varphi_c(x) \cos(\omega t) + \varphi_s(x) \sin(\omega t), \quad (31)$$

удовлетворяющего уравнению Пуассона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{4\pi e^2}{\kappa} |\psi(x, t)|^2 = \\ &= -\frac{4\pi e^2}{\kappa} \frac{4q^2 a^2}{p^2} |\tilde{f}(z)|^2 \sin^2(px). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь  $\kappa$  — диэлектрическая проницаемость полупроводника,  $|\tilde{f}(z)|^2$  — обобщенная функция туннелирования, которая отличается от  $|f(z)|^2$  из (21), (23) заменой  $A\bar{V}/\omega$  и  $B\bar{V}/\omega$  на  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{A(\bar{V} + \bar{\varphi}_c) - B\bar{\varphi}_s}{\omega}, \\ \tilde{B} &= \frac{B(\bar{V} + \bar{\varphi}_c) + A\bar{\varphi}_s}{\omega}, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $A$  и  $B$  даются формулой (22), а также  $\xi$  на  $\delta$ :

$$\delta = \xi - \bar{\varphi}_0. \quad (34)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0 &= \frac{1}{a} \int_0^a \varphi_0(x) dx, \quad \bar{\varphi}_c = \frac{1}{a} \int_0^a \varphi_c(x) dx, \\ \bar{\varphi}_s &= \frac{1}{a} \int_0^a \varphi_s(x) dx. \end{aligned} \quad (35)$$

Выражение для тока дается формулой (20) с заменой  $f(z)$  на  $\tilde{f}(z)$ .

Как видно из формул (33), (34), функция  $|\tilde{f}(z)|^2$  зависит только от средних значений потенциалов  $\bar{\varphi}_0$ ,  $\bar{\varphi}_c$ ,  $\bar{\varphi}_s$ , поэтому уравнение Пуассона имеет универсальное решение с граничными условиями

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi(a) = 0 \quad \text{или} \\ \varphi'(a) = -\varphi'(0), \quad \varphi(0) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

В результате получается

$$\bar{\varphi} = f\Gamma|\tilde{f}(z)|^2, \quad f = \frac{4\pi e^2 \gamma_0}{\kappa} \frac{Qa}{\Gamma^2}, \quad \gamma_0 = \frac{0.18}{\pi}. \quad (37)$$

Следуя рассмотрению в разд. 4, выделим из  $|\tilde{f}(z)|^2$  и  $|\tilde{f}(\tilde{z})|^2$  составляющие, пропорциональные  $\exp(i\omega t)$ :

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(z)|^2 &\rightarrow -(\bar{V} + \bar{\varphi}_c - i\bar{\varphi}_s) \exp(-i\omega\eta) G_\varphi(\omega), \\ |\tilde{f}(\tilde{z})|^2 &\rightarrow -(\bar{V} + \bar{\varphi}_c - i\bar{\varphi}_s) \exp(i\omega\eta) G_\varphi(\omega), \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$G_\varphi(\omega) = \frac{\delta\Gamma^2}{(\delta^2 + \Gamma^2)(\omega + \delta - i\Gamma)(\omega - \delta - i\Gamma)}. \quad (39)$$

Здесь  $\delta$  зависит от среднего постоянного во времени потенциала  $\bar{\varphi}_0$  (см. (34)). Видим, что множители при  $\exp(i\omega t)$  в (38) отличаются от множителей в (24) на фурье-компоненту потенциала:

$$\bar{\varphi}_+ = \bar{\varphi}_c - i\bar{\varphi}_s. \quad (40)$$

Из (37) получаем уравнение для  $\bar{\varphi}_+$ :

$$\bar{\varphi}_+ = -2\Gamma f [V(\omega) + \bar{\varphi}_+] G_\varphi(\omega). \quad (41)$$

Отсюда находим фурье-компоненту  $\bar{\varphi}_+(\omega)$ :

$$\bar{\varphi}_+(\omega) = -\frac{2f\Gamma V_0(\omega)G_\varphi(\omega)}{1 + 2f\Gamma G_\varphi(\omega)}. \quad (42)$$

Пользуясь модифицированным выражением для тока (20) и выражениями (38), приходим к фурье-компоненте переходного тока взаимодействующих электронов  $\tilde{I}_\varphi(x, \omega)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{I}_\varphi(x, \omega)}{eQ} &= -(V_0(\omega) + \bar{\varphi}_+(\omega)) G_\varphi(\omega) \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{i\omega}{\Gamma} \frac{x-a}{a} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставляя сюда  $\bar{\varphi}_+(\omega)$  из (42), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\varphi(x, \omega) &= \tilde{I}_{1\varphi}(x, \omega) + \tilde{I}_{2\varphi}(x, \omega) = \\ &= \frac{-V_0(\omega)\delta\Gamma^2 \left[ 1 - \frac{i\omega}{\Gamma} \frac{x-a}{a} \right] eQ}{(\delta^2 + \Gamma^2) \left[ (\omega - i\Gamma)^2 - \delta^2 + 2f \frac{\delta\Gamma^3}{\delta^2 + \Gamma^2} \right]}. \end{aligned} \quad (44)$$

При выключении взаимодействия,  $f = 0$ , выражения для слагаемых (44) переходят в (26) и (27). Таким образом, учет межэлектронного взаимодействия приводит к появлению в знаменателе дополнительного слагаемого

$$\delta^2 \rightarrow \delta^2 - \frac{2\delta f\Gamma^3}{\delta^2 + \Gamma^2},$$

меняющего спектральные характеристики  $\tilde{I}_\varphi(x, \omega)$ . Действительно,  $\tilde{I}_\varphi(x, \omega)$  можно представить в виде

$$\tilde{I}_\varphi(x, \omega) = -\frac{V_0(\omega)\delta\Gamma^2 \left(1 - \frac{i\omega}{\Gamma} \frac{x-a}{a}\right)}{(\delta^2 + \Gamma^2)(\omega - i\Gamma - R)(\omega - i\Gamma + R)}, \quad (45)$$

где

$$R = \sqrt{\delta^2 - \frac{2f\Gamma^3\delta}{\delta^2 + \Gamma^2}} \equiv \Gamma\sqrt{\tilde{\delta}^2 - \frac{2f\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^2 + 1}}, \quad \tilde{\delta} = \delta/\Gamma. \quad (46)$$

Из соотношений (46) видно, что случаи  $\delta < 0$  и  $\delta > 0$  принципиально отличаются. В последнем подкоренное выражение может, вообще говоря, менять знак, делая величину  $R$  мнимой. Это означает, что взаимодействие оказывает влияние на процессы релаксации (затухания), увеличивая или уменьшая их скорости.

Подставляя (45) в выражение

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\varphi(x, t) &= \tilde{I}_{1\varphi}(t) + \tilde{I}_{2\varphi}(x, t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(i\omega t) \tilde{I}_\varphi(x, \omega), \end{aligned} \quad (47)$$

получим для случая мгновенного включения поля:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{I}_{1\varphi}(t)}{eQ} &= \frac{-\delta\Gamma^2 V_0}{(\delta^2 + \Gamma^2)^2(1 - \Phi)} \times \\ &\times \left[ 1 - \exp(-\Gamma t) \left( \cos(Rt) + \frac{\Gamma}{R} \sin(Rt) \right) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

$$\frac{\tilde{I}_{2\varphi}(x, t)}{eQ} = \frac{\delta\Gamma V_0}{\delta^2 + \Gamma^2} \frac{x-a}{a} \exp(-\Gamma t) \frac{\sin(Rt)}{R}, \quad (49)$$

где

$$\Phi = \frac{2f\Gamma^3\delta}{(\delta^2 + \Gamma^2)^2}, \quad R = \sqrt{(\delta^2 + \Gamma^2)(1 - \Phi) - \Gamma^2}. \quad (50)$$

### 6. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ МЕЖЭЛЕКТРОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РТД

Из формул (48) и (50) очевидно, что влияние взаимодействия будет существенным, если величина  $\Phi$  приближается к единице. В этом случае величина  $R$  становится мнимой (достигая  $i\Gamma$ ), а знаменатель в выражении для  $\tilde{I}_{1\varphi}$  стремится к нулю. Как увидим ниже, это происходит, когда  $f$  превышает некоторое критическое значение  $f_c$ ,

$$f_c = \frac{8}{3\sqrt{3}}. \quad (51)$$

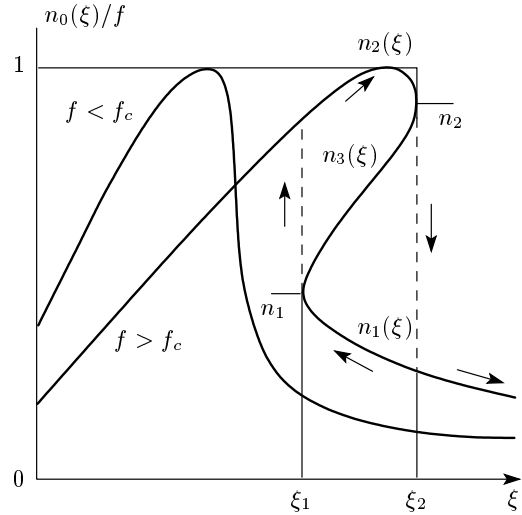


Рис. 2. Нормированная постоянная концентрация электронов РТД  $n_0(\xi)/f$  в зависимости от энергии электронов эмиттера  $\xi = (\varepsilon - \varepsilon_R)/\Gamma$

Условие  $f > f_c$  является также критерием появления гистерезиса на зависимостях постоянного резонансного тока и концентрации от энергии (аналога ВАХ). Это было показано в работе [16] (см. также [17]), где в рамках когерентной модели найдены выражения для резонансного тока взаимодействующих электронов:  $I_0 = ena\Gamma$ , и концентрации электронов  $n$  РТД:

$$n = \frac{f}{(\tilde{\xi} - n)^2 + 1}. \quad (52)$$

Здесь введены безразмерные величины

$$\tilde{\xi} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_R}{\Gamma}, \quad n = \frac{\bar{\varphi}_0}{\Gamma} = \frac{3gn_0}{2\Gamma}, \quad f = \frac{3Qg}{4a\Gamma^2}, \quad (53)$$

$$g = \frac{16\pi e^2 a^2 \gamma_0}{3\kappa}, \quad n_0 = \frac{1}{a} \int_0^a |\psi_0(x)|^2 dx. \quad (54)$$

Следует отметить, что выражение (52) представляет собой кубическое относительно  $n$  уравнение. Оно хорошо известно в теории нелинейных колебаний (см. [18]). В нашем случае уравнение описывает зависимость концентрации электронов  $n$  от «растройки»  $\xi$  и  $f$ . При малых  $f$  концентрация  $n(\xi)$  является симметричной функцией  $\xi$ . С увеличением  $f$  кривая  $n(\xi)$  деформируется и ее максимум сдвигается в сторону положительных значений  $\xi$ .

При  $f > f_c$  появляются три решения  $n(\xi)$  (см. рис. 2), соответствующие одному и тому же значению  $\xi$ . Одно из решений,  $n_3(\xi)$ , растущее с увеличе-

нием  $\xi$ , неустойчиво. Второе решение  $n_2(\xi)$ , достигнув максимума с ростом  $\xi$ , начинает уменьшаться и при  $\xi = \xi_2$  скачком переходит в уменьшающееся решение  $n_1$ . Если теперь уменьшать  $\xi$ , решение  $n_1$  переходит скачком в «верхнее» решение  $n_2(\xi_1)$  при  $\xi = \xi_1$  ( $n_1(\xi_1) = n_1$ ,  $n_2(\xi_2) = n_2$ ). Таким образом, имеет место гистерезис.

Очевидно, что в точках срыва решений  $n_1$  и  $n_2$  должно выполняться условие экстремума

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dn} = 0. \tag{55}$$

Покажем, что равенство  $\Phi = 1$  выполняется при значениях  $\tilde{\delta} = \tilde{\xi} - n$ , где выполнено условие экстремума (55) (см. рис. 2).

Рассматривая  $\tilde{\xi}(n)$  как функцию  $n$ , найдем решение уравнения (52)

$$\tilde{\xi}^2 - 2\tilde{\xi}n + n^2 + 1 - \frac{f}{n} = 0 \tag{56}$$

в виде

$$\tilde{\xi} = n \pm \sqrt{\frac{f}{n} - 1}. \tag{57}$$

Подставляя в уравнение (55)

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dn} = 1 - \frac{f}{2n^2\sqrt{\frac{f}{n} - 1}} = 0 \tag{58}$$

выражение для  $n$  из (52), приходим к равенству

$$1 = \frac{2f\tilde{\delta}}{(\tilde{\delta}^2 + 1)^2} \equiv \Phi. \tag{59}$$

Таким образом,  $R = i\Gamma$  при экстремальных значениях  $\delta$  на гистерезисной кривой, начиная с  $f > f_c$ . При  $f = f_c$  решения  $n_1$  и  $n_2$  сливаются:

$$n_{1c} = n_{2c} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \xi_c = \sqrt{3}, \quad \tilde{\delta}_c = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{60}$$

Экстремальные значения  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\tilde{\delta}_1$ ,  $\tilde{\delta}_2$  найдены в работе [16] для предельных случаев. При  $\tilde{f} = (f - f_c)/f_c \ll 1$  имеем

$$\begin{aligned} n_{2,1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \tilde{f}^{1/2} \right), \\ \tilde{\delta}_{2,1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \tilde{f}^{1/2} \right), \end{aligned} \tag{61}$$

а при  $\tilde{f} \gg 1$  —

$$\begin{aligned} n_1 &= \left(\frac{f}{4}\right)^{1/3} \left[ 1 + \frac{1}{3(2f)^{2/3}} + \frac{1}{3(2f)^{4/3}} \right], \\ \tilde{\delta}_1 &= (2f)^{1/3} \left[ 1 - \frac{2}{3(2f)^{2/3}} - \frac{1}{3(2f)^{4/3}} \right], \\ n_2 &= f \left( 1 - \frac{1}{4f^2} - \frac{3}{(2f)^4} \right), \\ \tilde{\delta}_2 &= \frac{1}{2f} \left( 1 + \frac{2}{(2f)^2} \right). \end{aligned} \tag{62}$$

Следует отметить, что небольшие отклонения от экстремальных значений  $\delta$ , например

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + y), \quad y \ll 1,$$

приводят к квадратичной поправке  $y^2$  в  $R$ :

$$R = i\Gamma \sqrt{1 - \frac{2y^2}{3}}. \tag{63}$$

Очевидно, что наибольшее влияние на процессы релаксации имеет взаимодействие вблизи экстремальных значений  $\delta$ . Рассмотрим ситуацию, когда  $1 - \Phi \ll 1$ , так что

$$R \approx i\Gamma(1 - r), \quad r = \frac{1 - \Phi}{2\Gamma^2}(\delta^2 + \Gamma^2). \tag{64}$$

Подставляя  $R$  в (48) и (49), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{I}_{1\varphi}}{eQ} &= -\frac{\delta V_0}{2r(\delta^2 + \Gamma^2)} \times \\ &\times [1 - \exp(-\Gamma r t) + r \exp(-\Gamma t) \operatorname{sh}(\Gamma t)], \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{I}_{2\varphi}}{eQ} &= \frac{V_0\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2} \times \\ &\times [\exp(-\Gamma r t) - \exp(-2\Gamma t)] \frac{x - a}{a}, \end{aligned} \tag{66}$$

при этом вторые слагаемые в (65) и (66) малы по сравнению с первыми при  $\Gamma t > 1$ .

Как следует из (65) и (66), времена релаксации становятся очень большими (порядка  $1/\Gamma r$ ) вблизи экстремальных точек гистерезисной ВАХ, а осцилляции исчезают. Каков физический смысл компенсации затухания? Он состоит в следующем. Включение поля изменяет волновую функцию  $\tilde{\psi}$ , что в свою очередь приводит к возникновению потенциала  $\tilde{\varphi}_+$ , который сдвигает резонансную энергию (т. е.  $\delta^2 \rightarrow \delta^2 - 2\delta f\Gamma^3/(\delta^2 + \Gamma^2)$ , см. (44)) таким образом, чтобы приход электронов за счет резонансного туннелирования увеличился.

Это можно продемонстрировать на упрощенном примере. Обобщим уравнение (52) на нестационарный случай:

$$\frac{dn}{dt} = -n + \frac{f}{(\tilde{\xi} - n)^2 + 1}. \quad (67)$$

Найдем уравнение для отклонения  $\tilde{n} = n - n_0$ :

$$\frac{d\tilde{n}}{dt} = -\tilde{n} \left( 1 - \frac{2f\tilde{\delta}_0}{(\tilde{\delta}_0^2 + 1)^2} \right), \quad (68)$$

$$n_0 = \frac{f}{(\tilde{\xi} - n_0)^2 + 1}, \quad \tilde{\delta}_0 = \tilde{\xi} - n_0.$$

Нетрудно видеть, что время релаксации

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{1 - \Phi}$$

стремится к  $\infty$ , когда  $\Phi \rightarrow 1$ , как и в (65), а компенсирующий вклад проистекает из второго слагаемого, описывающего приход электронов в яму за счет резонансного туннелирования.

Иного рода результаты получаются, если  $\delta < 0$  на верхней ветви  $n_2(\xi)$ . Полагая, например,  $\tilde{\delta} = -1$  и  $f \gg 1$ , получаем

$$R \approx \Gamma f^{1/2} = \omega_p, \quad (69)$$

$$\frac{\tilde{I}_{1\varphi}}{eQ} = -\frac{V_0}{2\delta f} \times \left[ 1 - \exp(-\Gamma t) \left( \cos(\omega_p t) + \frac{\Gamma}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right) \right], \quad (70)$$

$$\frac{\tilde{I}_{2\varphi}}{eQ} = \frac{V_0}{\omega_p} \frac{x - a}{a} \exp(-\Gamma t) \sin(\omega_p t), \quad (71)$$

где  $\omega_p$  совпадает со значением для частоты специфических плазменных колебаний (см. [17]).

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что характер переходного процесса определяется параметром  $f$  из формулы (37). Если  $f < 1$  (отсутствует гистерезис), то реакция на мгновенное включение поля представляет собой переход к новому стационарному состоянию за времена  $1/\Gamma$  (время нахождения электрона в квантовой яме), сопровождающийся осцилляциями с частотой

$$\sqrt{\delta^2 - \frac{2\delta f}{\delta^2 + 1}}, \quad \delta = \varepsilon - \varepsilon_R - \bar{n}.$$

В случае  $f > 1$  ситуация радикально меняется. При  $\delta > 0$  частота осцилляций  $R$  из формулы (46) уменьшается, а вблизи экстремальных точек гистерезисной ВАХ обращается в нуль и становится мнимой, компенсируя затухание. Таким образом, время перехода к стационарному состоянию становится очень большим и осцилляции исчезают. Отсюда вытекает невозможность слабым полем (что было бы интересно для практических применений) быстро, за времена  $1/\Gamma$ , перевести РТД из состояния с большим током ( $n_2, \delta_2$ ) в состояние с малым током ( $n_1, \delta_1$ ) и наоборот. Если же  $\delta < 0$  (верхняя ветвь,  $n_2$ ), частота осцилляции растет с увеличением  $f$ , достигая при  $f \gg 1$  ( $\tilde{\delta} = -1$ ) величины  $R \approx \Gamma f^{1/2} = \omega_p$ , совпадающей с частотой специфических плазменных колебаний (см. [17]).

Автор благодарен К. С. Гришакову за помощь в подготовке рукописи к публикации. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 2.5808.2011).

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Выведем граничные условия для стационарной волновой функции  $\psi_0(x)$  (см. (2)). Решения стационарного уравнения Шредингера для  $\psi_0(x)$ ,

$$\varepsilon \psi_0(x) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \alpha [\delta(x) + \delta(x - a)] \psi, \quad (A.1)$$

в области  $x < 0$  и  $x > a$  имеют вид

$$\psi_{01}(x) = qe^{ipx} + B_1 e^{-ipx}, \quad x < 0, \quad (A.2)$$

$$\psi_{03}(x) = A_3 e^{ipx}, \quad x > a. \quad (A.3)$$

Первое слагаемое в формуле (A.2) соответствует электронам,двигающимся слева, второе слагаемое — отраженным электронам. Функция  $\psi_{03}(x)$  описывает электроны, выходящие из ямы в направлении  $x \rightarrow \infty$ .

Записав функцию и ее производную при  $x = 0$  в виде

$$\psi_{01}(0) = q + B_1, \quad \frac{\psi'_{01}(0)}{ip} = q - B_1$$

и исключив  $B_1$ , получим

$$\psi_{01}(0) + \frac{\psi'_{01}(0)}{ip} = 2q. \quad (A.4)$$



Воспользовавшись условиями непрерывности

$$\psi_{01}(0) = \psi_0(0)$$

и скачка производной

$$\psi'_0(0) - \psi'_{01}(0) = \alpha\psi_0(0) \quad (\text{A.5})$$

(которое получается интегрированием уравнения (A.1) вблизи  $x = 0$ ), приходим к граничному условию (2) при  $x = 0$ .

Граничные условия (2) при  $x = a$  получаем аналогично, исключением коэффициента  $A_3$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. L. Esaki and R. Tsu, Appl. Phys. Lett. **22**, 562 (1973).
2. L. L. Chang, L. Esaki, and R. Tsu, Appl. Phys. Lett. **24**, 593 (1974).
3. V. A. Baskakov and A. V. Popov, Wave Motion **14**, 123 (1991).
4. A. Arnold, VLSI Design **6**, 313 (1998).
5. A. Arnold, Transp. Theory Stat. Phys. **30**, 561 (2001).
6. O. Pinaud, J. Appl. Phys. **92**, 1987 (2002).
7. R. K. Mains and C. Haddad, J. Appl. Phys. **67**, 591 (1990).
8. J. F. Mennemann, A. Juugel, and H. Kosina, J. Comp. Phys. **239**, 187 (2013).
9. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **116**, 704 (1999).
10. В. Ф. Елесин, И. Ю. Катеев, А. И. Подливаев, ФТП **36**, 1133 (2002).
11. В. Ф. Елесин, И. Ю. Катеев, А. Ю. Сукочев, Российские нанотехнологии **8**, 60 (2013).
12. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **124**, 379 (2003).
13. D. Sokolovski and M. Yu. Sumetsij, ТМФ **64**, 233 (1985).
14. D. Sokolovski, Phys. Rev. B **37**, 4201 (1988).
15. F. W. Sheard and C. A. Tooms, Appl. Phys. Lett. **52**, 1228 (1988).
16. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **119**, 816 (2001).
17. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **144**, 1086 (2013).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Физматлит, Москва (1958).