

О НОВОМ ТИПЕ СИНХРОНИЗАЦИИ ГЕНЕРАТОРОВ С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

М. А. Ковалева^{a,}, Л. И. Маневич^{a,**}, В. Н. Филиппчук^b*

^a *Институт химической физики им. Н. Н. Семенова Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

^b *Wayne State University
MI 48202, Detroit, USA*

Поступила в редакцию 15 февраля 2013 г.

Показано, что в системе двух слабо связанных активных осцилляторов (генераторов) с пороговым возбуждением могут существовать устойчивые предельные циклы, которые соответствуют нелинейным биениям с полным энергообменом между осцилляторами. Колебательный режим такого типа, реализующий новый тип синхронизации в активной системе, представляет собой альтернативу хорошо изученной синхронизации в режиме, близком к одной из нелинейных нормальных мод. При этом области значений диссипативных параметров, соответствующие различным типам синхронизации, не пересекаются. Аналитическое описание выявленных аттракторов основано на концепции предельных фазовых траекторий, развитой ранее одним из авторов применительно к консервативным системам. В рамках этой концепции естественно описывается переход (в параметрическом пространстве) от полного энергообмена между осцилляторами к преимущественной локализации энергии на одном из осцилляторов. Локализованная нормальная мода является аттрактором в той области параметров, в которой ни предельная фазовая траектория, ни какая-либо из коллективных нормальных мод аттрактором не является.

DOI: 10.7868/S0044451013080191

1. ВВЕДЕНИЕ

Цепочка связанных осцилляторов, описываемых уравнениями Ван дер Поля или Ван дер Поля–Дуффинга (уравнения автогенераторов), является одной из фундаментальных моделей нелинейной динамики [1, 2], получившей применение во многих областях физики и биофизики [1, 3, 4]. В континуальном пределе ее описание может быть сведено к комплексному уравнению Гинзбурга–Ландау [3–7], которое может иметь как периодические, так и локализованные решения [1, 4–6]. Простейшая дискретная модель такого типа, состоящая из двух нелинейных диссипативных осцилляторов, рассматривалась в ряде работ, например [3, 8]. Основное внимание обычно уделялось синхронизации осцилляторов в режимах, близких к нелинейным нормальным модам (ННМ) [1, 3, 4, 8, 9] (в данном случае мы рассматриваем резонанс 1:1), которые характеризуются

сохранением первоначально сообщенной им энергии [10, 11]. Недавно было показано, что в консервативном случае биения с полным обменом энергией между осцилляторами фактически представляют собой фундаментальный тип движения, альтернативный ННМ. Для обозначения этого типа движения используется термин «предельная фазовая траектория» (ПФТ) [12–14]. В ряде работ [12, 14] было показано, что решения, соответствующие ПФТ, могут быть весьма просто получены в рамках аналитического подхода, использующего негладкие временные подстановки, который был разработан ранее для совершенно иных задач [15]. В терминах ПФТ может быть адекватно описан и переход от интенсивного обмена энергией к ее локализации [13, 14]. Понятно, что в консервативных системах ПФТ, как и ННМ, не может быть аттрактором. Что же касается активных диссипативных систем, то изучавшиеся их аттракторы, соответствующие синхронизации осцилляторов на одной из ННМ [1, 3, 4, 8, 9]. В настоящей работе аналитически показано и численным исследованием подтверждено, что ПФТ, соответствующая полному обмену энергией между двумя слабо свя-

*E-mail: margo.kovaleva@gmail.com

**E-mail: manevitchleonid3@gmail.com

занными осцилляторами, может быть аттрактором, существенно отличающимся от ННМ. Обнаружение нового класса аттракторов может служить отправной точкой для более глубокого понимания проблемы синхронизации и поиска новых областей применения этого фундаментального явления.

2. МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В общем случае целесообразно начать с системы двух линейно связанных осцилляторов Лъенара, каждый из которых описывается уравнением

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + f(u) \frac{du}{dt} + g(u) = 0.$$

Известно, что такой осциллятор имеет устойчивые периодические аттракторы (предельные циклы), если функции f и g удовлетворяют условию известной теоремы Пуанкаре–Бендиксона. Обычно f — четная, а g — нечетная аналитические функции, представимые в виде усеченных степенных рядов:

$$\begin{aligned} f(u) &= a_0 + a_2 u^2 + a_4 u^4 + O(u^6), \\ g(u) &= b_1 u + b_3 u^3 + O(u^5), \end{aligned}$$

где коэффициенты выбираются феноменологически, чтобы описать изучаемые физические процессы. Знаки коэффициентов определяют качественное поведение модели. Если, например, $a_0 < 0$, $a_2 > 0$, $a_4 = 0$, $b_1 > 0$, то осциллятор принимает форму Ван дер Поля–Дуффинга. В этом случае положение равновесия $(u, du/dt) = (0, 0)$ является неустойчивым фокусом [4]. В результате вблизи неустойчивого равновесия приток энергии в систему доминирует над ее рассеиванием при сколь угодно малой амплитуде начального возмущения. Однако в реально функционирующих активных системах с устойчивым положением равновесия часто существует некоторый порог возбуждения, выше которого глобальная динамика системы существенно изменяется. В рамках полиномиального представления функции $f(u)$ естественно ввести такой порог с помощью следующего выбора коэффициентов: $a_0 > 0$, $a_2 < 0$, $a_4 > 0$. Такой выбор обеспечивает локальную устойчивость положения равновесия, а приток энергии, доминирующий после достижения определенного уровня возбуждения, «уравновешивается» ее рассеиванием в стационарном режиме предельного цикла (случай «жесткого» возбуждения) [4]. В настоящей работе показано, что наличие энергетического порога позволяет обнаружить новый тип синхронизации двух слабо связанных активных осцилляторов.

В дальнейшем принимаются следующие обозначения коэффициентов в уравнениях движения: $a_0 = 2\varepsilon\gamma$, $a_2 = -8\varepsilon b$, $a_4 = 16\varepsilon d$ и $b_1 = 1$, $b_3 = 8\varepsilon\alpha$, причем параметр связи определяется как $2\varepsilon\beta$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. В результате система уравнений в рамках рассматриваемой модели принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 + 8\varepsilon\alpha u_1^3 + 2\varepsilon\beta(u_1 - u_2) + \\ + 2\varepsilon(\gamma - 4bu_1^2 + 8du_1^4) \frac{du_1}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 + 8\varepsilon\alpha u_2^3 + 2\varepsilon\beta(u_2 - u_1) + \\ + 2\varepsilon(\gamma - 4bu_2^2 + 8du_2^4) \frac{du_2}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

3. РЕДУКЦИЯ СИСТЕМЫ

Вводя комплексные переменные $\psi_j = v_j + iu_j$ и $\psi_j^* = v_j - iu_j$, где $v_j = du_j/dt$, преобразуем систему (1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} + i\psi_1 - \varepsilon [i\alpha(\psi_1 - \psi_1^*)^3 + i\beta((\psi_1 - \psi_1^*) - \\ - (\psi_2 - \psi_2^*)) + (\gamma + b(\psi_1 - \psi_1^*)^2 + d(\psi_1 - \psi_1^*)^4) \times \\ \times (\psi_1 + \psi_1^*)] &= 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} + i\psi_2 - \varepsilon [i\alpha(\psi_2 - \psi_2^*)^3 + i\beta((\psi_2 - \psi_2^*) - \\ - (\psi_1 - \psi_1^*)) + (\gamma + b(\psi_2 - \psi_2^*)^2 + d(\psi_2 - \psi_2^*)^4) \times \\ \times (\psi_2 + \psi_2^*)] &= 0. \end{aligned}$$

Разделяя «быстрое» $\tau_0 = t$ и «медленное» $\tau_1 = \varepsilon\tau_0$ времена, учитывая, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial\tau_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial\tau_1},$$

и представляя решение в виде

$$\psi_j = [\phi_{j,0}(\tau_0, \tau_1) + \varepsilon\phi_{j,1}(\tau_0, \tau_1) + \dots] \exp(i\tau_0),$$

$$j = 1, 2,$$

после применения процедуры многомасштабных разложений [16] получаем систему уравнений движения в главном асимптотическом приближении:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{d\tau_1} - 3i\alpha|f_1|^2 f_1 + (\gamma - b|f_1|^2 + d|f_1|^4) f_1 + \\ + i\beta f_2 &= 0, \\ \frac{df_2}{d\tau_1} - 3i\alpha|f_2|^2 f_2 + (\gamma - b|f_2|^2 + d|f_2|^4) f_2 + \\ + i\beta f_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь новые комплексные функции f_j определяются заменой переменных:

$$\phi_{j,0} = f_j \exp(i\beta\tau_1).$$

Наконец, переходя к полярному представлению $f_1 = R_1 \exp(i\delta_1)$ и $f_2 = R_2 \exp(i\delta_2)$, получаем следующую систему вещественных уравнений ($\Delta = \delta_1 - \delta_2$):

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{d\tau_1} + \gamma R_1 - bR_1^3 + dR_1^5 + \beta R_2 \sin \Delta &= 0, \\ \frac{dR_2}{d\tau_1} + \gamma R_2 - bR_2^3 + dR_2^5 - \beta R_1 \sin \Delta &= 0, \\ R_1 R_2 \frac{d\Delta}{d\tau_1} + 3\alpha R_1 R_2 (R_2^2 - R_1^2) + \beta (R_2^2 - R_1^2) \times \\ &\times \cos \Delta = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

4. СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ МОД И ПРЕДЕЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

Система (3) в общем случае является неинтегрируемой, но обладает дискретной симметрией, а именно, является инвариантной при преобразованиях:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad R_1 &\rightarrow R_2, \quad R_2 \rightarrow R_1, \quad \Delta \rightarrow -\Delta; \\ \text{(b)} \quad R_1 &\rightarrow -R_2, \quad R_2 \rightarrow -R_1, \quad \Delta \rightarrow \Delta. \end{aligned} \quad (4)$$

Симметрии (а) и (б) обеспечивают существование соответственно синфазной ($R_1 = R_2, \Delta = 0$) и антифазной ($R_1 = R_2, \Delta = \pi$) ННМ. В общем случае какая-либо дополнительная симметрия, дискретная или непрерывная, за исключением трансляционной симметрии по времени, отсутствует. Если же любая нетривиальная непрерывная симметрия существует при некоторых дополнительных условиях, то она может быть найдена при помощи аппарата теории групп Ли [17]. Инфинитезимальный дифференциальный оператор динамической системы (3) может быть представлен следующим образом:

$$X = X_0 + X_1,$$

где

$$\begin{aligned} X_0 &= \xi(R_1, R_2, \Delta) \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \eta(R_1, R_2, \Delta) \frac{\partial}{\partial R_1} + \\ &+ \zeta(R_1, R_2, \Delta) \frac{\partial}{\partial R_2} + \zeta(R_1, R_2, \Delta) \frac{\partial}{\partial \Delta}, \end{aligned}$$

X_1 — первое продолжение оператора X_0 с компонентами, которые определяются временными производными в системе (3) (см. Приложение). Применение

процедуры, описанной в работе [17], к системе дифференциальных уравнений в частных производных для компонент оператора X , позволяет показать существование вращательной группы симметрии на плоскости R_1, R_2 с инвариантом $I \equiv N = R_1^2 + R_2^2$ при соотношении между диссипативными параметрами

$$b^2 = 9\gamma d/2, \quad (5a)$$

если начальные условия обеспечивают определенный уровень возбуждения

$$N = 2b/3d. \quad (5b)$$

В этом случае преобразование координат с инвариантом N ,

$$R_1 = \sqrt{N} \sin \theta, \quad R_2 = \sqrt{N} \cos \theta,$$

приводит к системе двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau_2} &= \frac{1}{2} (\sin \Delta - \lambda \sin 4\theta), \\ \sin 2\theta \frac{d\Delta}{d\tau_2} &= \cos 2\theta \cos \Delta + 2k \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tau_2 = \beta\tau_1$, а параметры

$$k = \frac{3\alpha N}{2\beta}, \quad \lambda = \frac{N^2 d}{8\beta}$$

характеризуют, соответственно, нелинейность и диссипацию, отнесенные к параметру связи генераторов.

5. АНАЛИЗ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Начнем анализ с частного случая $\lambda = 0$, в котором система (6) является консервативной ([14], гл. 2), а обе ННМ устойчивы (рис. 1а). Фазовая траектория, максимально удаленная от стационарных точек, содержащая две ветви и соответствующая полному энергообмену между генераторами, обозначается как ПФТ [14]. Параметр нелинейности k выбран в диапазоне между 0 и 1/2, чтобы избежать «консервативной» бифуркации ННМ, которая наблюдается при $k = 1/2$ и не является существенной в данном рассмотрении. При параметре нелинейности $k = 0.2$, диссипативном параметре $\lambda = 0$ имеет место консервативная система, стационарные точки $(0, \pi/4)$ и $(\pi, \pi/4)$ отвечают соответственно устойчивым синфазной и антифазной ННМ; две ветви ПФТ (жирная линия) соответствуют полному энергообмену между осцилляторами: если $\theta = 0$

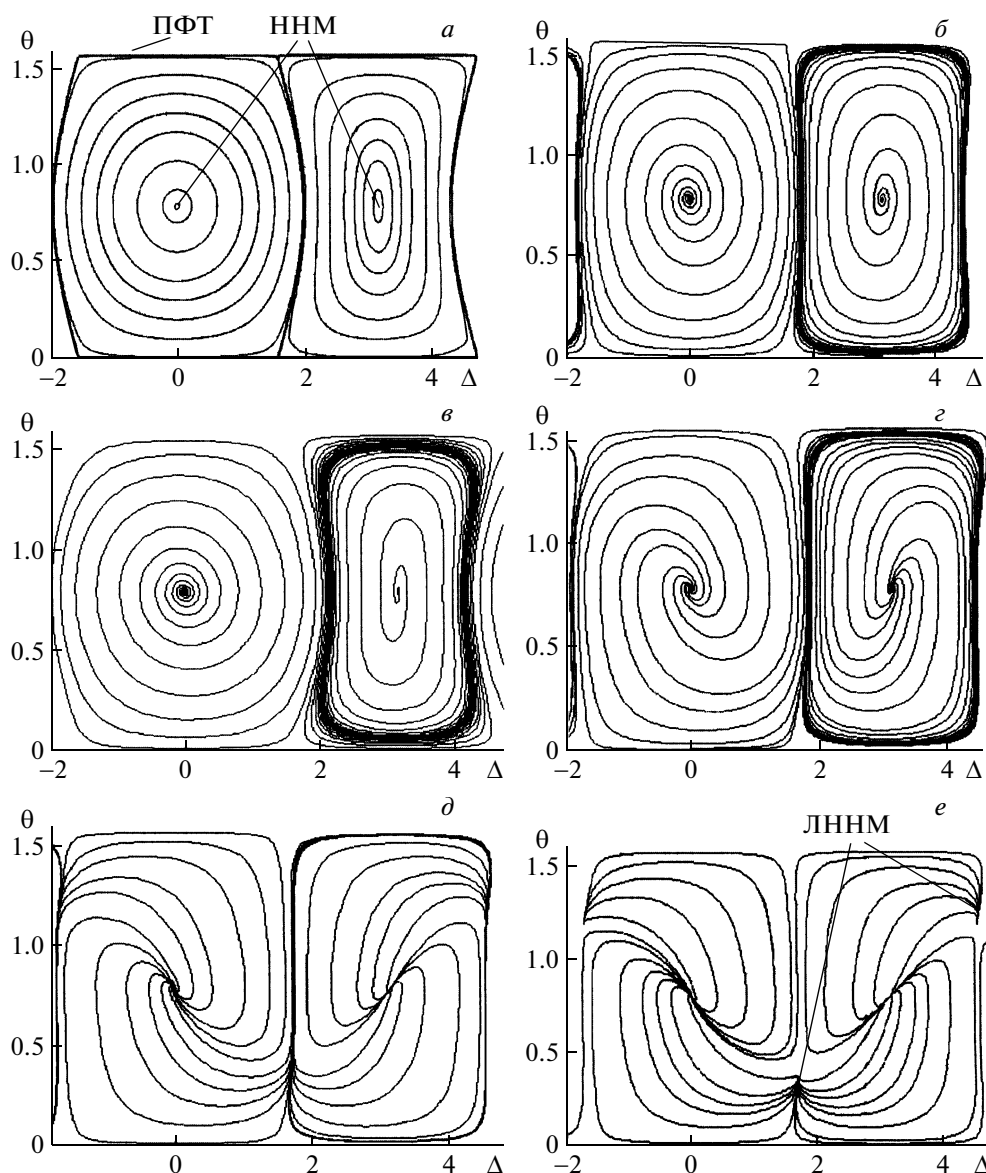


Рис. 1. Фазовые плоскости для системы (6), описывающие поведение двух слабо связанных активных осцилляторов во времени: переменные θ и Δ характеризуют соотношение между амплитудами R_1 и R_2 осцилляторов и их фазами δ_1 и δ_2 ($R_1 = \sqrt{N} \sin \theta$, $R_2 = \sqrt{N} \cos \theta$, $\Delta = \delta_1 - \delta_2$). Параметры $k = 0.2$, $\lambda = 0$: консервативная система (а); $k = 0.2$, $\lambda = 0.1$ (б); $k = 0.44$, $\lambda = 0.1$ (в); $k = 0.2$, $\lambda = 0.5$ (г); $k = 0.1$, $\lambda = 0.9$ (д); $k = 0.1$, $\lambda = 0.99$ (е)

или $\theta = \pi/2$, энергия сосредоточена на одном из осцилляторов). Затем диссипативный параметр последовательно увеличивается. При относительно малых значениях λ (при различных k) в системе существуют два неустойчивых фокуса, соответствующих неустойчивым ННМ исходной системы (1), см. рис. 1б,в,г (в физической терминологии для исходной системы — это неустойчивые предельные циклы). Фокусы превращаются в неустойчивые узлы при $\lambda^2 > 1 - 2k$ (рис. 1д,е); левая ветвь ПФТ стано-

вится незамкнутой, правая превращается в аттрактор. Однако ПФТ качественных изменений при этом не претерпевает. Если диссипативный параметр λ не превышает значения

$$\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4k^2}),$$

ПФТ является единственным аттрактором системы, причем с максимально возможным обменом энергией между осцилляторами.

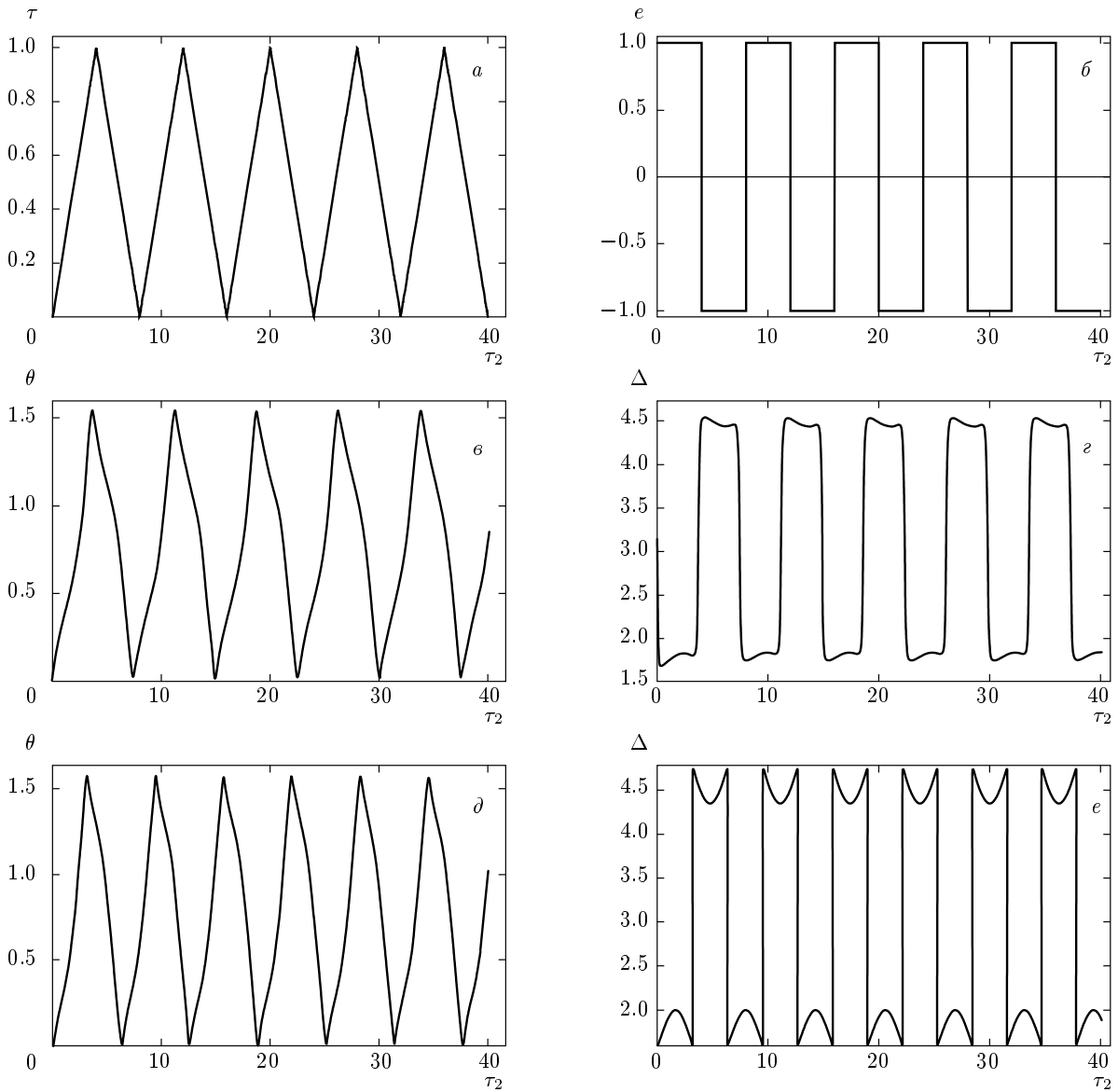


Рис. 2. Базисные функции $\tau(\tau_2)$ (а) и $e(\tau_2)$ (б) и зависимости от времени θ и Δ : в, г — пересчитанные из системы (3) для набора параметров, соответствующих рис. 1г, и д, е в соответствии с (7)

Фазовый сдвиг между генераторами на ПФТ практически все время соответствует значениям фазового сдвига $\pm\pi/2$ с весьма быстрым переходом между ними (рис. 1г), и поэтому действительно можно говорить о новом типе синхронизации осцилляторов («ПФТ-синхронизации» в отличие от известной ННМ-синхронизации).

Далее, если

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4k^2} \right)$$

(рис. 1е, $k = 0.1$, $\lambda = 0.99$), ПФТ теряет устойчи-

вость и аттрактором становится стационарная точка, соответствующая локализованной нелинейной нормальной моде (ЛННМ) с энергией, в основном захваченной одним из осцилляторов (рис. 1е, $k = 0.1$, $\lambda = 0.99$). Переход к такой локализованной моде был ранее описан в работе [18] для несколько искусственной модели. Все результаты находятся в соответствии с результатами численного интегрирования исходной системы (1) и системы (3) (см. ниже рис. 3).

Важно заметить, что эволюция ПФТ, приводящая к переходу от полного энергообмена к локализа-

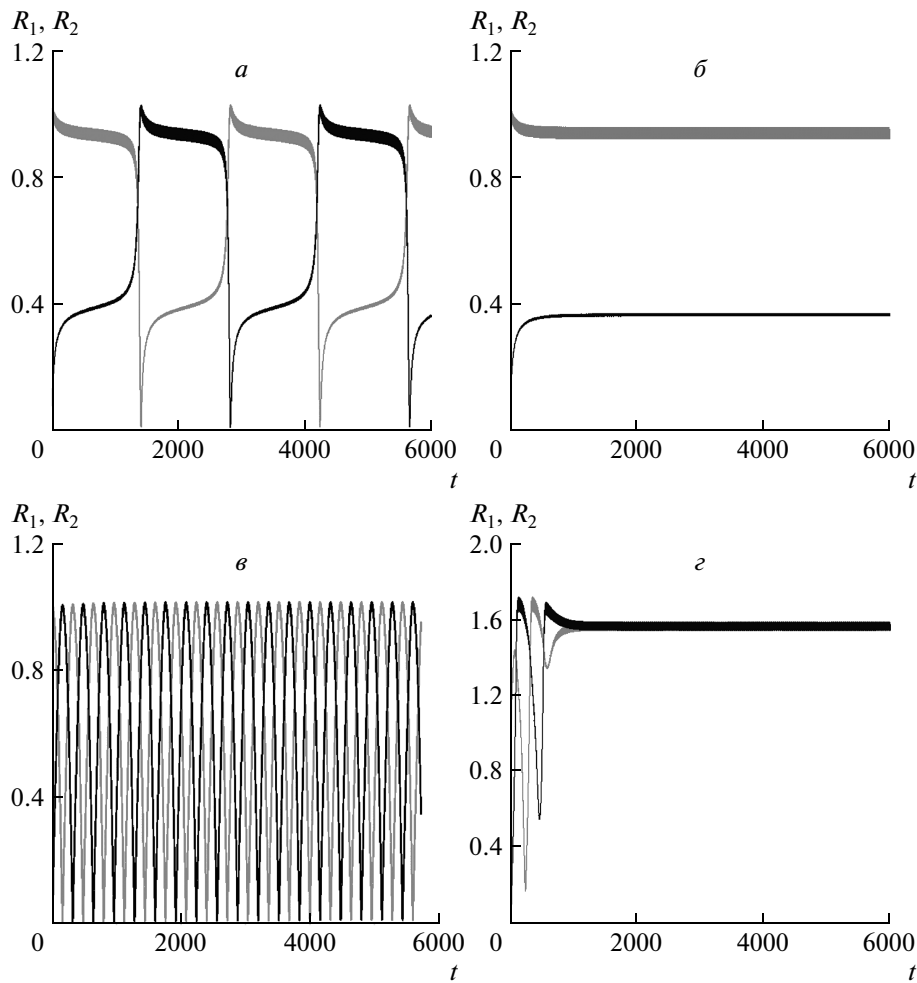


Рис. 3. Временные зависимости R_1 (серые линии) и R_2 (черные) при переходе от энергообмена к локализации в системе (1) связанных осцилляторов. $a - k = 0.1, \lambda = 0.98$; $b - k = 0.1, \lambda = 0.99$; $v - k = 0.2, \lambda = 0.1$; $z -$ параметры осцилляторов не соответствуют условиям симметрии (5)

ции энергии, происходит при значении диссипативного параметра, большем значения, соответствующего изменению типа стационарных точек (рис. 1е).

В области интенсивного энергообмена между осцилляторами можно получить аналитическое решение системы (6), соответствующее ПФТ, применяя аналитический метод негладких подстановок [15]:

$$\begin{aligned} \theta &= A\tau + \frac{\lambda}{4} [\cos(4A\tau) - 1] e + \dots, \\ \Delta &= \pi - \left[\frac{\pi}{2} - 2k \sin(2A\tau) \right] e + \dots, \end{aligned} \tag{7}$$

где базисные функции равны $\tau = \tau(\tau_2/2A)$, $e = e(\tau_2/2A)$. Временные зависимости решений представлены на рис. 2. Поведение системы вблизи порога до и непосредственно после перехода от ПФТ-синхронизации к синхронизации ЛННМ показано на

рис. 3а,б; демонстрируется временное поведение амплитуд $R_i = |\psi_i| = u_i^2 + v_i^2, i = 1, 2$ исходной системы (1) (результат численного интегрирования). ПФТ-синхронизация вдали от порога локализации проиллюстрирована на рис. 3в (соответствующая набору параметров рис. 1б). Также для сравнения представлена хорошо изученная ННМ-синхронизация (рис. 3г), которая наблюдается на антифазной ННМ. В последнем случае набор параметров существенно отличается от набора, соответствующего выявленным условиям симметрии.

На рис. 4, 5 представлены результаты численного интегрирования системы (3) при начальных условиях (рис. 4в,г,д) или параметрах системы (рис. 5), не отвечающих условиям симметрии (5). Таким образом, в данном случае мы исследуем области устой-

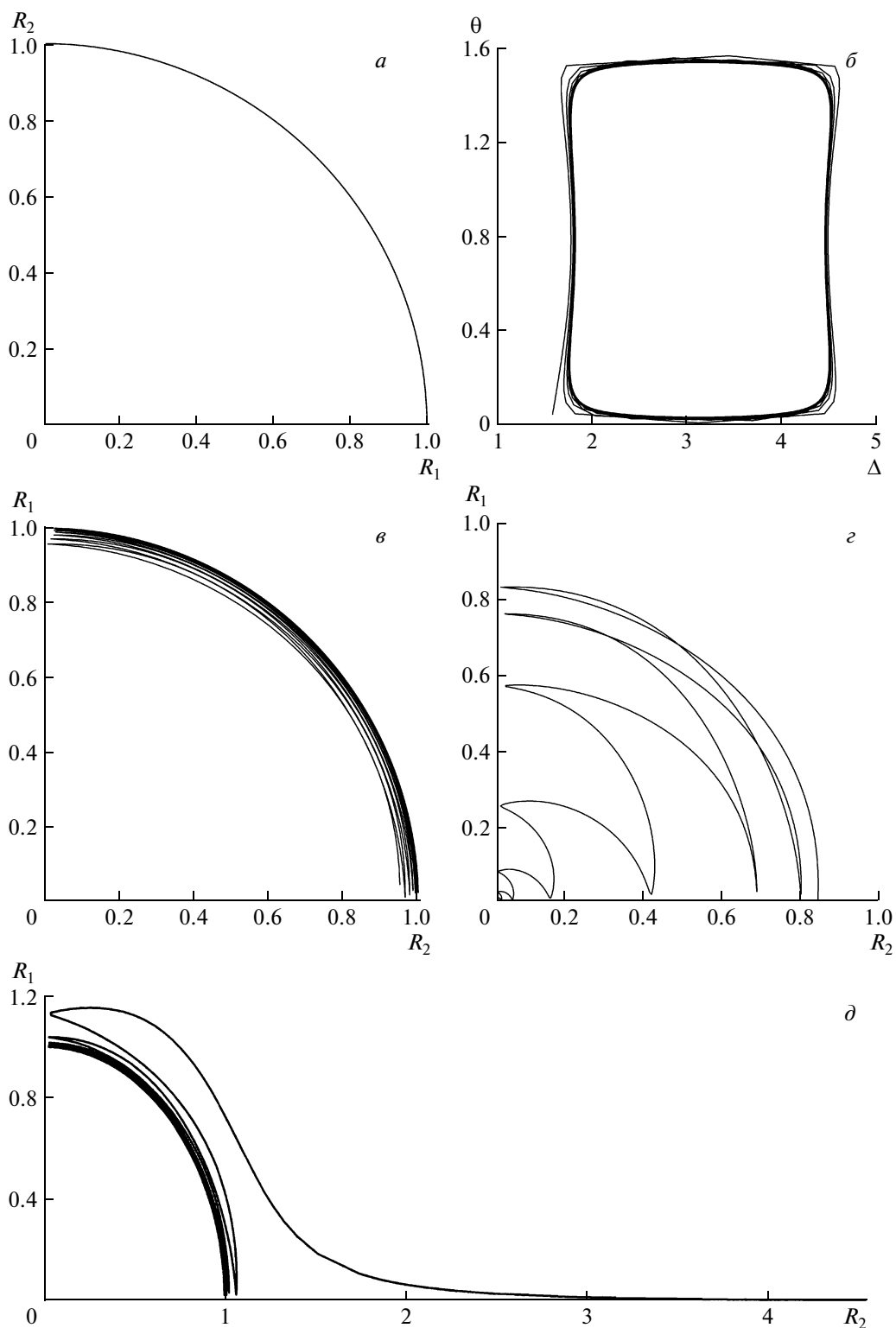


Рис. 4. Результаты численного исследования областей начальных условий для системы (3), в которых можно наблюдать ПФТ-синхронизацию. Представление на плоскостях R_1, R_2 (а) и θ, Δ (б) ПФТ-синхронизации при выполнении условий симметрии. При нарушении условий симметрии: начальная энергия возбуждения осцилляторов отличается от 1, $R_1 = 0.95, R_2 = 0$ (в); $R_1 = 10, R_2 = 0$ (д) — ПФТ-синхронизация; $R_1 = 0.85, R_2 = 0$ (е) — система приходит в положение равновесия

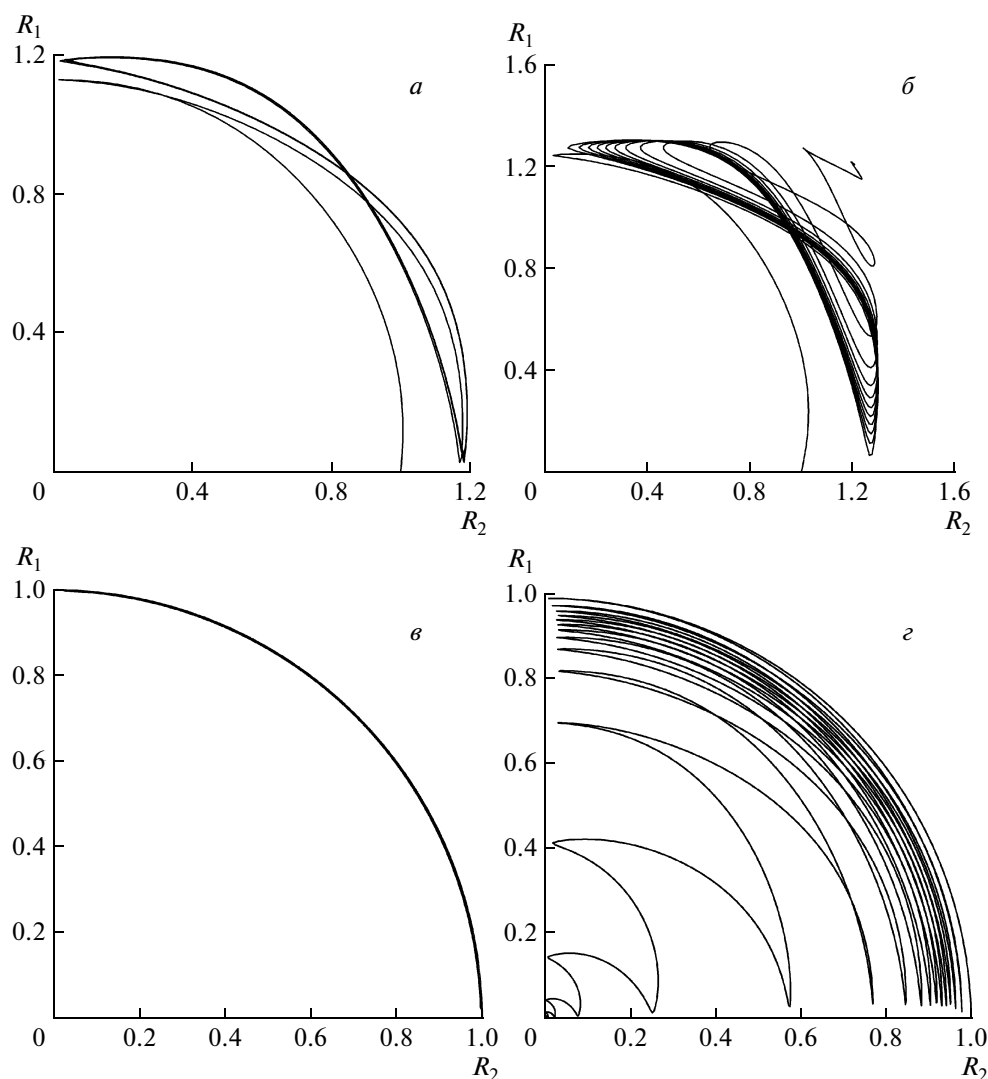


Рис. 5. Результаты численного исследования областей параметров для системы (3), в которых можно наблюдать ПФТ-синхронизацию, параметры системы отличаются от параметров при условиях симметрии: $b = \sqrt{9\gamma d/2} (1 + \delta)$, $\delta = 0.1$ (а) — ПФТ-синхронизация; $\delta = 0.2$ (б) — синфазная мода (ННМ-синхронизация); $\delta = -0.001$ (в) — ПФТ-синхронизация; $\delta = -0.005$ (г) — система эволюционирует к положению равновесия

чивости режимов, найденных при наличии в системе симметрии. При нарушении симметрии более информативным по сравнению с графиком на плоскости θ, Δ оказывается представление на плоскости R_1, R_2 ; это проиллюстрировано на рис. 4а,б. Набор параметров соответствует рис. 1б, начальная энергия возбуждения осцилляторов $I \equiv N = R_1^2 + R_2^2 = 1$ (необходимо для выполнения условий симметрии). Если начальные условия соответствуют небольшому изменению начальной энергии генераторов, определяемой условием симметрии (5b), например, амплитуда одного из них уменьшается (рис. 4в), то

ПФТ-аттрактор по-прежнему притягивает все фазовые траектории. При дальнейшем уменьшении начальной энергии система стремится к устойчивому положению равновесия (рис. 4г). Если начальная энергия осцилляторов, напротив, превышает ее значение, необходимое для выполнения условий симметрии, то в широком диапазоне начальных условий также реализуется режим стационарного энергообмена (ПФТ-синхронизация) (рис. 4д). При нарушении симметрии, вызванном изменением одного из параметров (например, параметра b) в обоих направлениях, достигается предел реализации

ПФТ-синхронизации (рис. 5). Таким образом, показано, что найденный режим ПФТ-синхронизации, когда ПФТ является аттрактором, может быть реализован в некоторой области начальных условий и при значениях параметров, не соответствующих симметрии.

Необходимо также отметить, что режим, представленный на рис. 4г, представляет собой так называемый случай «гибели колебаний», который ранее рассматривался в случае диссипативно связанных осцилляторов [8].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение необходимо подчеркнуть, что представленный сценарий ПФТ-синхронизации представляется общим в том диапазоне параметров системы, в котором ННМ-синхронизация невозможна (это подтверждается приведенными выше результатами). Однако важность рассмотренного «симметричного» случая состоит в том, что становится возможным детальное аналитическое исследование, при помощи которого и был выявлен новый тип синхронизации. Кроме того, такое исследование позволяет установить и условия перехода к локализации энергии. После предсказания существования области диссипативных параметров, в которой существует ПФТ-синхронизация, она может быть обнаружена экспериментально в физических, химических и биологических системах, моделируемых двумя связанными генераторами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Симметричный анализ

Условие инвариантности системы приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных для составляющих оператора X (4):

$$\begin{aligned} &\eta_\tau + p_1\eta_{R_1} + p_2\eta_{R_2} + p_3\eta_\Delta - \\ &- p_1\xi_\tau - p_1^2\xi_{R_1} - p_1p_2\xi_{R_2} - p_1p_3\xi_\Delta = \\ &= \xi(-\gamma p_1 + 3bR_1^2p_1 - 10dR_1^4p_1 - \\ &- \beta p_2 \sin \Delta + p_3\beta R_2 \cos \Delta) + \\ &+ \eta(-\gamma + 3bR_1^2 - 10dR_1^4) + \zeta(-\beta \sin \Delta) + \\ &+ \zeta(\beta R_2 \cos \Delta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\zeta_\tau + p_1\zeta_{R_1} + p_2\zeta_{R_2} + p_3\zeta_\Delta - \\ &- p_2\zeta_\tau - p_1p_2\xi_{R_1} - p_2^2\xi_{R_2} - p_2p_3\xi_\Delta = \\ &= \xi(-\gamma p_2 + 3bR_2^2p_2 - 10dR_2^4p_2 + \\ &+ \beta p_1 \sin \Delta - p_3\beta R_1 \cos \Delta) + \\ &+ \eta(\beta \sin \Delta) + \zeta(-\gamma + 3bR_2^2 - 10dR_2^4) + \\ &+ \zeta(-\beta R_1 \cos \Delta), \\ &\zeta_\tau + p_1\zeta_{R_1} + p_2\zeta_{R_2} + p_3\zeta_\Delta - \\ &- p_3\zeta_\tau - p_1p_3\xi_{R_1} - p_1p_2\xi_{R_2} - p_3^2\xi_\Delta = \\ &= \xi \left[-3\alpha(2R_2p_2 - 2R_1p_1) - \right. \\ &- \beta \left(\cos \Delta (R_1p_2 - R_2p_1) \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2R_2^2} - \right. \\ &- \left. \left. \beta \sin \Delta \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1R_2} p_3 \right) \right] + \\ &+ \eta \left(6\alpha R_1^2 + \beta \cos \Delta \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2R_2} \right) - \\ &- \zeta \left(6\alpha R_2^2 + \beta \cos \Delta \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1R_2^2} \right) + \\ &+ \zeta \left(-\beta \sin \Delta \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1R_2} \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Решая уравнения (8), получаем оператор группы Ли:

$$\begin{aligned} X = &\frac{\partial}{\partial \tau_1} + (-\gamma R_1 + bR_1^3 - 2dR_1^5 - \beta R_2 \sin \Delta) \frac{\partial}{\partial R_1} + \\ &+ (-\gamma R_2 + bR_2^3 - 2dR_2^5 + \beta R_1 \sin \Delta) \frac{\partial}{\partial R_2} + \\ &+ \left(-3\alpha(R_2^2 - R_1^2) - \beta \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1R_2} \cos \Delta \right) \frac{\partial}{\partial \Delta} + X_1. \end{aligned}$$

Соответствующий инвариант I должен удовлетворять условию

$$\begin{aligned} XI \equiv &\frac{\partial I}{\partial \tau_1} + (-\gamma R_1 + bR_1^3 - 2dR_1^5 - \beta R_2 \sin \Delta) \frac{\partial I}{\partial R_1} + \\ &+ (-\gamma R_2 + bR_2^3 - 2dR_2^5 + \beta R_1 \sin \Delta) \frac{\partial I}{\partial R_2} + \\ &+ \left(-3\alpha(R_2^2 - R_1^2) - \beta \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1R_2} \cos \Delta \right) \frac{\partial I}{\partial \Delta} + X_1I = 0. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что $I = I(R_1, R_2)$. В таком случае, переменные R_1, R_2 удовлетворяют следующему обыкновенному дифференциальному уравнению, которое также может быть получено непосредственно из первых двух уравнений системы (3):

$$\begin{aligned} &\frac{dR_1}{-\gamma R_1 + bR_1^3 - 2dR_1^5 - \beta R_2 \sin \Delta} = \\ &= \frac{dR_2}{-\gamma R_2 + bR_2^3 - 2dR_2^5 + \beta R_1 \sin \Delta}. \end{aligned} \tag{9}$$

Групповой оператор становится оператором вращения

$$X = R_2 \frac{\partial}{\partial R_1} - R_1 \frac{\partial}{\partial R_2}$$

с инвариантом $I \equiv N = R_1^2 + R_2^2$, если параметры системы (2) удовлетворяют соотношению $b^2 = 9\gamma d/2$, а начальные условия обеспечивают уровень возбуждения $N = 2b/3d$. Эти соотношения могут быть получены и непосредственно с использованием комбинации: первое уравнение системы (3), умноженное на R_1 , минус второе уравнение системы (3), умноженное на R_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление*, Техносфера, Москва (2003).
2. F. Verhulst, *Acta Applic. Math.* **87**, 229 (2005).
3. R. H. Rand and P. J. Holmes, *Int. J. Nonlin. Mech.* **15**, 387 (1980); T. Chakraborty and R. H. Rand, *Int. J. Nonlin. Mech.* **23**, 369 (1988); K. Rompala, R. Rand, and H. Howland, *Comm. Nonlin. Sci. Numer. Simulation* **12**, 794 (2007).
4. П. С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны*, Наука, Москва (1997).
5. D. Mihalache, D. Mazilu, F. Lederer, and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. A* **77**, 043828-6 (2008).
6. В. А. Маломед, *Phys. Rev. E* **50**, 4249 (1994).
7. Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки*, Физматлит, Москва (2003).
8. А. П. Кузнецов, Н. В. Станкевич, Л. В. Тюрюкина, *Изв. вузов, Прикладная нелинейная динамика* **16**(4), 101 (2008); A. P. Kuznetsov, N. V. Stankevich, and L. V. Turukina, *Physica D* **238**, 1203 (2009); A. P. Kuznetsov, V. I. Paksyutov, and Yu. P. Roman, *Techn. Phys. Lett.* **8**, 636 (2007); A. P. Kuznetsov and Yu. P. Roman, *Nonlin. Phenom. Complex Syst.* **12**, 54 (2009).
9. И. И. Блехман, *Вибрационная механика*, Физматлит, Москва (1994).
10. L. I. Manevitch and V. V. Smirnov, in *Advanced Nonlinear Strategies for Vibration Mitigation and System Identification*, ed. by A. F. Vakakis, CISM Courses and Lectures, Vol. 518, Springer, New York (2010).
11. Л. И. Маневич, Ю. В. Михлин, В. Н. Пилипчук, *Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем*, Наука, Москва (1989).
12. L. I. Manevitch, *Arch. Appl. Mech.* **77**, 301 (2007).
13. L. I. Manevitch and V. V. Smirnov, *Phys. Rev. E* **82**, 036602 (2010).
14. L. I. Manevitch and O. V. Gendelman, *Tractable Models of Solid Mechanics: Formulation*, Springer, New York (2011).
15. V. N. Pilipchuk, *Nonlinear Dynamics: Between Linear and Impact Limits*, Springer (2010).
16. А. Х. Найфэ, *Методы возмущений*, Мир, Москва (1976).
17. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1978).
18. В. Н. Пилипчук, в сб. *Проблемы нелинейной механики и физики материалов*, РИК НГА Украины, Днепрпетровск (1999), с. 229.