

# АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ. ЗАКОН ДЕФЕКТА СКОРОСТИ

*И. И. Вигдорович\**

*Институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова  
119192, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 февраля 2013 г.

Исследованы автомодельные течения несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое, когда скорость набегающего потока задана как степенная с показателем  $m$  функция продольной координаты. Автомодельная постановка не только упрощает решение, сводя уравнения движения к обыкновенному дифференциальному уравнению, но и позволяет сформулировать условия замыкания задачи. Показано, что для рассматриваемого класса течений, зависящих от трех определяющих параметров, безразмерный путь смещения во внешней области есть функция относительного расстояния до стенки и показателя  $m$ . В расчетах эта функция полагалась не зависящей от градиента давления, что дает результаты, очень близкие к экспериментальным данным. В результате точного асимптотического решения задачи установлен характерный масштаб дефекта скорости (дефектом скорости называют величину, на которую сокращается скорость потока при его торможении у стенки, т. е. разность значений продольной составляющей скорости в пограничном слое и на его внешней границе, взятую с обратным знаком) во внешней области (закон дефекта скорости), справедливый во всем диапазоне изменения параметра Клаузера.

DOI: 10.7868/S004445101308018X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Первое исследование автомодельного турбулентного пограничного слоя с градиентом давления выполнено Клаузером [1, 2]. Он ввел параметр подобия

$$\beta = -\frac{2\delta^* u'_e}{c_f u_e}, \quad (1.1)$$

где  $u_e$  и  $u'_e$  — скорость на внешней границе пограничного слоя и ее производная по продольной координате,  $c_f$  — коэффициент трения на стенке,  $\delta^*$  — толщина вытеснения, и экспериментально показал, что профили скорости, представленные в форме закона дефекта скорости, установленного Карманом для случая нулевого градиента давления, при соблюдении условия  $\beta = \text{const}$  во внешней области пограничного слоя в различных сечениях совпадают. Иными словами, выполняется закон подобия

$$\frac{u_e - u}{u_e \sqrt{c_f/2}} = \phi\left(\frac{y}{\delta}, \beta\right), \quad (1.2)$$

где  $y$  и  $\delta$  — соответственно расстояние до стенки и толщина пограничного слоя. Таунсенд (см., например, [3]) показал, что автомодельные течения в турбулентном пограничном слое, так же как в ламинарном, возникают при степенной зависимости скорости набегающего потока от продольной координаты,  $u_e = \text{const } x^m$ . Позднее из интегрального уравнения количества движения была получена связь между показателем степени  $m$  и параметром Клаузера  $\beta$  [4]:

$$m = -\frac{\beta}{1 + 3\beta}. \quad (1.3)$$

Соотношение (1.2), однако, не дает правильного масштаба для величины дефекта скорости. С ростом продольного градиента давления профиль скорости становится менее наполненным (дефект скорости растет), а коэффициент трения уменьшается. Это означает, что при  $\beta \rightarrow \infty$  универсальная функция  $\phi$  неограниченно возрастает. Поэтому целый ряд последующих работ (см., например, [5–8]) был посвящен поиску подходящего характерного масштаба дефекта скорости для пограничного слоя с градиентом давления, т. е. такой формулировки закона дефекта скорости, которая была бы справедлива не только при нулевом или малом положительном градиенте

\*E-mail: vigdorovich@imec.msu.ru

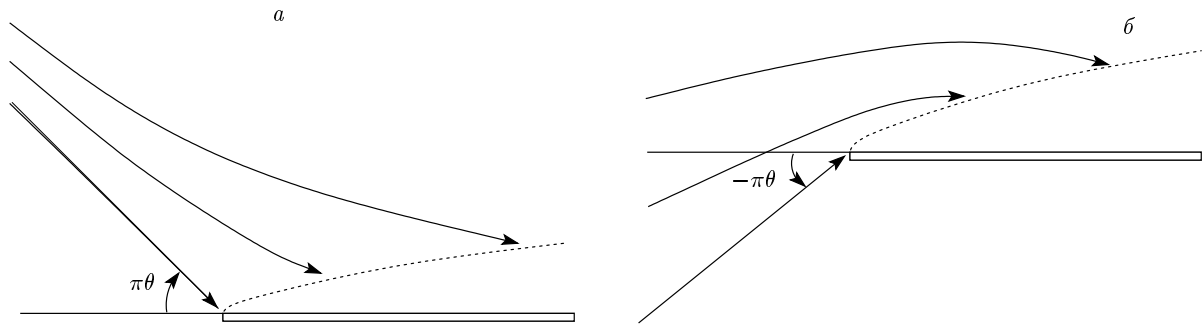


Рис. 1. Пограничный слой на пластине при степенной зависимости скорости от продольной координаты: течение с благоприятным (а) и неблагоприятным (б) градиентом давления. Показаны линии тока потенциального течения и внешняя граница пограничного слоя

давления, но и в предотрывных условиях. Из имеющихся соотношений согласно [9] наилучшее совпадение с экспериментом дает эмпирическая формула Загаролы и Смита [7], в которой в качестве характерного масштаба дефекта скорости используется величина  $u_e \delta^* / \delta$ .

В настоящей работе закон дефекта скорости получен в результате точного асимптотического решения уравнений пограничного слоя. Даны также правила подобия для компонент тензора Рейнольдса и выражение для характерного поперечного масштаба пограничного слоя, из которого в частном случае нулевого градиента давления следует известная формула Клаузера [2]. Объяснено, в частности, почему эмпирическое соотношение Загаролы и Смита [7] хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Решение получено для случая благоприятного (отрицательного) и умеренного неблагоприятного (положительного) градиента давления, но установленные законы подобия остаются справедливыми вплоть до отрыва пограничного слоя [10, 11].

Основной принципиальной трудностью рассматриваемой задачи, как и любой задачи турбулентности, является незамкнутость уравнений движения. В данном случае, однако, существенную помощь оказывает то обстоятельство, что турбулентное течение автомодельно и, следовательно, зависит от конечного числа определяющих параметров. Чтобы ясно это показать, задача о пограничном слое со степенной зависимостью скорости на внешней границе от продольной координаты сформулирована как задача обтекания неограниченным потоком угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями. Наличие конечного числа определяющих параметров означает существование конечных алгебраических

связей между различными параметрами течения, в частности, безразмерный путь смещения оказывается функцией трех переменных: локального числа Рейнольдса, относительного расстояния до стенки и угла между плоскостями. Тот факт, что эта функция в общем случае неизвестна, не мешает провести полное асимптотическое исследование задачи, установить характерные режимы течения и законы подобия для основных гидродинамических величин.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим турбулентный пограничный слой несжимаемой жидкости, который развивается на плоской пластине под действием продольного градиента давления, так что скорость на внешней границе слоя задана по степенному закону

$$u_e(x) = Bx^m, \quad x \geq 0, \quad (2.1)$$

где  $B$  — некоторая размерная постоянная. Степенное распределение скорости в потенциальном потоке идеальной жидкости возникает при обтекании угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями. Предположим, что на одной из плоскостей, как показано на рис. 1, образуется турбулентный пограничный слой, тогда распределение скорости на его внешней границе, если пренебречь эффектом вытеснения, имеет вид степенной функции, и показатель степени следующим образом связан с углом между плоскостями  $\pi\theta$ :

$$m = \frac{\theta}{1 - \theta}, \quad -1 < \theta < 1. \quad (2.2)$$

Известны и другие классы автомодельных течений, например, течение со стоком в суживающемся

канале между плоскими стенками или при экспоненциальном распределении скорости набегающего потока [3], которые мы в данной работе рассматривать не будем.

## 2.1. Условия замыкания

### 2.1.1. Пристеночная область

Будем исходить из классической двухслойной модели описания турбулентных пристеночных течений [12], согласно которой пограничный слой можно разделить на две характерные области — внешнюю и пристеночную, в каждой из которых только часть из общего числа определяющих параметров оказывает существенное влияние на течение. Пристеночная область представляет собой относительно тонкий подслой, в котором поперечный градиент скорости много больше продольного. В первом приближении течение в пристеночной области имеет одномерный характер, т. е. локально представляет собой течение в полупространстве вдоль бесконечной плоскости. Влиянием внешнего масштаба согласно двухслойной модели можно пренебречь, а вне области отрыва, когда трение на стенке не очень мало, можно пренебречь также продольным градиентом давления<sup>1)</sup>. Таким образом, в этой области есть только два определяющих параметра — кинематическая вязкость жидкости  $\nu$  и динамическая скорость  $u_\tau$ , которая вычисляется через трение на поверхности. Поэтому градиент усредненной продольной компоненты скорости и турбулентное касательное напряжение есть функции только трех переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F_1(y, \nu, u_\tau), \quad (2.3)$$

$$\langle u'v' \rangle = F_2(y, \nu, u_\tau). \quad (2.4)$$

Выражая динамическую скорость  $u_\tau$  из (2.3) и подставляя в (2.4), получим

$$\langle u'v' \rangle = F_3\left(y, \nu, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Применяя к этому соотношению П-теорему, будем иметь

$$\langle u'v' \rangle = -\left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 S_i(\text{Re}), \quad \text{Re} = \frac{y^2}{\nu} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.5)$$

<sup>1)</sup> Случай, когда продольный градиент давления играет существенную роль, требует отдельного рассмотрения.

где  $S_i$  — некоторая универсальная функция. Локальное число Рейнольдса  $\text{Re}$  равно отношению характерных значений турбулентной и молекулярной вязкости.

Соотношение (2.5) можно вывести из известного закона стенки Прандтля для пограничного слоя с градиентом давления [12], поскольку оно получено при тех же физических предположениях. Согласно этому закону в пристеночной области любая безразмерная величина зависит только от безразмерного расстояния до стенки:

$$S_i = f(y_+), \quad \text{Re} = g(y_+), \quad y_+ = \frac{yu_\tau}{\nu}.$$

Исключая из этих двух соотношений переменную  $y_+$ , получим соотношение (2.5).

### 2.1.2. Внешняя область

Получим теперь условие замыкания, справедливое во всем пограничном слое. Любая усредненная характеристика рассматриваемого течения  $a$  есть функция декартовых координат  $x, y$  и определяющих параметров задачи  $\nu, B$  и  $m$ . Величины  $B$  и  $m$  (или однозначно связанный с  $m$  угол  $\pi\theta$ ) задают потенциальное течение внутри (или вокруг) угла, а три параметра  $\nu, B, m$  полностью определяют все турбулентное течение в целом. Таким образом, можно написать

$$a = G_1(x, y, \nu, B, m). \quad (2.6)$$

Введем в рассмотрение толщину пограничного слоя

$$\Delta = G_2(x, \nu, B, m) \quad (2.7)$$

как некоторую величину, характеризующую поперечный масштаб турбулентного течения. Например, как это обычно делается на практике, толщиной пограничного слоя можно считать расстояние  $\delta_{99}$  до стенки, на котором усредненная скорость на 1% отличается от  $u_e$ . Можно толщину пограничного слоя считать монотонной функцией  $x$  и перейти в соотношении (2.6) от переменной  $x$  к переменной  $\Delta$ :

$$a = G_3(\Delta, y, \nu, B, m). \quad (2.8)$$

Рассмотрим теперь внешнюю область пограничного слоя. Согласно двухслойной модели, при развитом турбулентном течении молекулярная вязкость не может входить явно в соотношение (2.8) во внешней области. С учетом этого обстоятельства, считая  $a$  безразмерной величиной, после применения П-теоремы будем иметь

$$a = A(\eta, m), \quad \eta = \frac{y}{\Delta}.$$

Таким образом, во внешней области пограничного слоя любой безразмерный параметр есть функция двух переменных  $\eta$  и  $m$ .

Применительно к касательному напряжению полученный результат во внешней области пограничного слоя дает

$$\langle u'v' \rangle = - \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 S_e(\eta, m), \quad (2.9)$$

где  $S_e$  — некоторая универсальная функция. Из условия срачивания с соотношением (2.5) имеем  $S_i(\infty) = S_e(0, m)$ . Представления (2.5) и (2.9) можно объединить в одно, справедливое во всем пограничном слое,

$$\langle u'v' \rangle = - \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 S(\text{Re}, \eta, m). \quad (2.10)$$

Здесь  $S$  — непрерывная функция трех переменных, удовлетворяющая условию

$$S(\infty, 0, m) = \varkappa^2, \quad (2.11)$$

где  $\varkappa$  — постоянная Кармана. Кроме того, мы сделаем следующее предположение относительно асимптотического поведения функции  $S$  в зоне перекрытия внешней и пристеночной областей:

$$S(\text{Re}, \eta, m) = \varkappa^2 + O(\text{Re}^{-\alpha_1}) + O(\eta^{\alpha_2}), \quad (2.12)$$

$$\text{Re} \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

На основании (2.10) выражение для длины пути смещения имеет вид

$$l = y \sqrt{S(\text{Re}, \eta, m)}.$$

Можно показать, что соотношение (2.10) непосредственно следует из того факта, что рассматриваемое автомоделное турбулентное течение зависит только от трех определяющих параметров. Действительно, на основании постановки задачи

$$\langle u'v' \rangle = G_4(x, y, \nu, B, m), \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = G_5(x, y, \nu, B, m). \quad (2.14)$$

Разрешая уравнения (2.7), (2.14) относительно величин  $\Delta$  и  $B$  и подставляя их в (2.13), получим соотношение

$$\langle u'v' \rangle = G_6 \left( \Delta, y, \nu, \frac{\partial u}{\partial y}, m \right),$$

которое после применения II-теоремы дает равенство (2.10). Отсюда, в частности, следует, что для

других компонент тензора Рейнольдса имеют место представления, аналогичные (2.10):

$$\langle u'^2 \rangle = \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 S_1(\text{Re}, \eta, m), \quad (2.15)$$

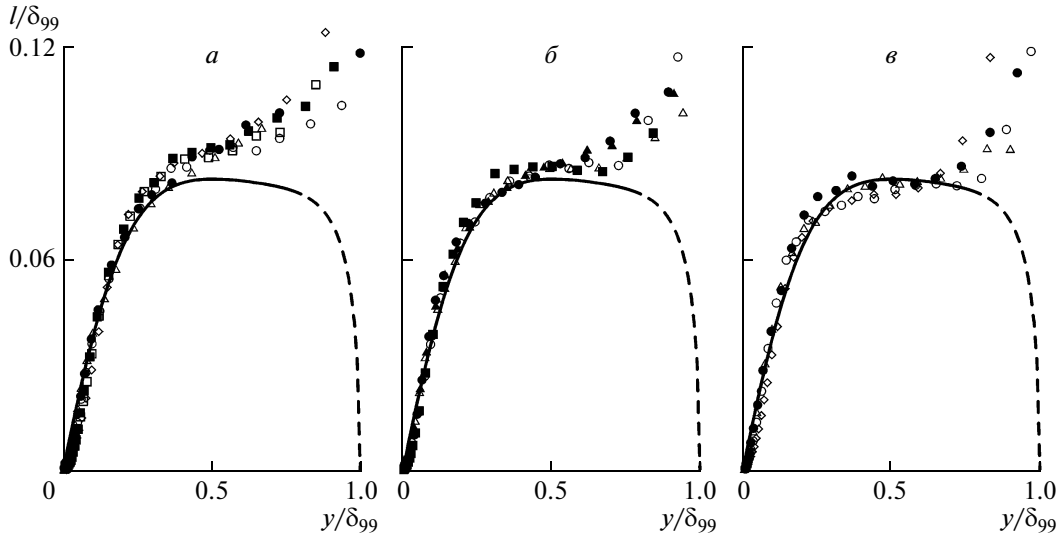
выражения для  $\langle v'^2 \rangle$  и  $\langle w'^2 \rangle$  получаются путем замены индекса функции  $S_1$  соответственно на 2 и 3.

Равенство (2.11) есть следствие принятой двухслойной модели течения. Следует заметить, что эта модель имеет ограниченную область применимости. Она дает правильное описание полей касательного напряжения и компоненты тензора Рейнольдса  $\langle v'^2 \rangle$ , определяемой поперечными пульсациями, но оказывается недостаточной для описания компонент  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle w'^2 \rangle$ , связанных с пульсациями скорости в направлениях, параллельных стенке [3, 13]. Поведение этих величин в непосредственной близости от обтекаемой поверхности имеет сложный характер. Так, по имеющимся данным [14, 15] распределение среднеквадратичной продольной пульсации скорости при достаточно больших числах Рейнольдса демонстрирует у стенки два локальных максимума. Теории, описывающей эти эффекты, в настоящее время не существует.

### 2.1.3. Сопоставление с экспериментальными данными

На рис. 2 длина пути смещения построена по данным измерений [16] для пограничного слоя на пластине при нулевом (рис. 2а) и умеренном неблагоприятном (рис. 2б, в) градиентах давления. В двух последних случаях обеспечивалось степенное распределение скорости (2.1) с показателем степени  $m$ , равным соответственно  $-0.15$  и  $-0.20$ . На рис. 2 приведены также расчетные кривые, которые обсуждаются в разд. 5.3. В начале координат они имеют тангенс угла наклона  $\varkappa = 0.41$ .

Заметим, что погрешность экспериментального определения длины пути смещения может быть велика, поскольку связана с ошибками измерения турбулентного касательного напряжения и поперечного градиента усредненной скорости. Кроме того, в большей части внешней области эти величины малы, и путь смещения определяется как отношение двух малых величин. Несмотря на это, данные на рис. 2 хорошо подтверждают выводы теории. Профили безразмерного пути смещения в разных сечениях пограничного слоя не зависят от числа Рейнольдса (от расстояния до передней кромки), а вблизи стенки все экспериментальные кривые имеют тангенс угла наклона  $\varkappa = 0.41$ .



**Рис. 2.** Длина пути смещения по данным измерений [16] в автомодельном пограничном слое при  $m = 0$  (а),  $-0.15$  (б),  $-0.20$  (в) и расчетные кривые (5.15). Измерения проведены в сечениях пограничного слоя на расстояниях от передней кромки 10 ( $\diamond$ ), 22 ( $\square$ ), 34 ( $\blacksquare$ ), 46 ( $\circ$ ), 58 ( $\bullet$ ), 70 ( $\triangle$ ), 82 ( $\blacktriangle$ ) и 90 ( $\nabla$ ) дюймов

### 2.2. Замена переменных

Функция тока  $\psi(x, y)$  усредненного течения удовлетворяет уравнению (см., например, [3])

$$\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = u_\epsilon u'_\epsilon + (\nu \psi_{yy} - \langle u'v' \rangle)_y + (\langle v'^2 \rangle - \langle u'^2 \rangle)_x, \quad (2.16)$$

которое является более точным, чем обычное уравнение пограничного слоя, поскольку в первом приближении учитывает изменение давления поперек слоя.

Перейдем к новым переменным по формулам [17]

$$\begin{aligned} \psi &= u_\epsilon \Delta \Psi(\xi, \eta), \quad \xi = \ln \text{Re}_\Delta, \\ \eta &= \frac{y}{\Delta}, \quad \text{Re}_\Delta = \frac{u_\epsilon \Delta}{\nu}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

используя в качестве независимых переменных логарифм числа Рейнольдса  $\text{Re}_\Delta$ , определенного по толщине пограничного слоя, и относительное расстояние до стенки. На основании (2.17) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\Lambda}{\Delta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} + (\gamma - 1) \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right], \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (2.18)$$

$$\Lambda(\xi) = \frac{d(u_\epsilon \Delta)}{u_\epsilon dx}, \quad \gamma(\xi) = \frac{d \ln u_\epsilon}{d\xi}. \quad (2.19)$$

С учетом условий замыкания (2.10), (2.15) уравнение (2.16) в новых переменных принимает вид

$$\begin{aligned} \Lambda[\Psi_\eta \Psi_{\xi\eta} - (\Psi + \Psi_\xi) \Psi_{\eta\eta} + \gamma(\Psi_\eta^2 - 1)] &= \\ &= \left[ (\eta \Psi_{\eta\eta})^2 S(\text{Re}, \eta, m) + e^{-\xi} \Psi_{\eta\eta} \right]_\eta + \\ &+ \Lambda \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} + (\gamma - 1) \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] (\eta \Psi_{\eta\eta})^2 [S_2(\text{Re}, \eta, m) - \\ &- S_1(\text{Re}, \eta, m)], \quad \text{Re} = e^\xi \eta^2 \Psi_{\eta\eta}; \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\xi > -\infty, \quad \eta = 0: \quad \Psi_\eta = 0, \quad \Psi = 0;$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \Psi_\eta \rightarrow 1.$$

Кроме безразмерной функции тока  $\Psi$  в уравнение (2.20) входит вторая неизвестная функция  $\Lambda(\xi)$ , градиент давления задает функция  $\gamma(\xi)$ .

Уравнение (2.20) удобно для асимптотического исследования. Переменная  $\xi$ , равная логарифму числа Рейнольдса, является большой величиной, что позволяет искать асимптотическое решение задачи при  $\xi \rightarrow \infty$ . Кроме того, согласно равенству

$$\frac{d\Delta}{dx} = \Lambda(1 - \gamma), \quad (2.21)$$

которое следует из (2.18) и (2.19), скорость продольного изменения толщины пограничного слоя и функция  $\Lambda(\xi)$  — величины одного порядка, поэтому, по крайней мере вне области отрыва, последнюю можно считать малой по сравнению с единицей,  $\Lambda \ll 1$ .

### 3. ПРИСТЕНОЧНАЯ ОБЛАСТЬ

В пристеночной области пограничного слоя решение будем искать в переменных (переменных стенки)

$$y_+ = \frac{yu_\tau}{\nu} = \eta e^\xi \sqrt{\frac{c_f}{2}}, \quad u_+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{\Psi_\eta}{\sqrt{c_f/2}}. \quad (3.1)$$

Проинтегрируем уравнение (2.16) поперек слоя и перейдем к независимым переменным  $\xi$  и  $y_+$ . Для функции  $u_+(\xi, y_+)$  получим уравнение

$$\begin{aligned} \left(y_+ \frac{\partial u_+}{\partial y_+}\right)^2 S(\text{Re}, \eta, m) + \frac{\partial u_+}{\partial y_+} - 1 = \\ = -\gamma \Lambda e^{-\xi} \left(\frac{2}{c_f}\right)^{3/2} y_+ + \dots, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{Re} = y_+^2 \frac{\partial u_+}{\partial y_+}, \quad \eta = \frac{y_+ e^{-\xi}}{\sqrt{c_f/2}}.$$

В правой части здесь стоит член, связанный с градиентом давления, многоточием обозначены слагаемые, меньшие по порядку величины. Как видно из (3.2), продольный градиент существен в пристеночной области только при очень малом, порядка

$$\Lambda^{2/3} e^{-2\xi/3} = \Lambda^{2/3} \text{Re}_\Delta^{-2/3},$$

коэффициенте трения на стенке. Пока будем рассматривать случай, когда  $c_f = O(\xi^{-2})$ .

Переходя в (3.2) к пределу при

$$\xi \rightarrow \infty, \quad y_+ = O(1)$$

и принимая во внимание соотношение (2.12), получим, что первый член разложения скорости

$$u_+(\xi, y_+) = U_+(y_+) + O(e^{-\alpha\xi}), \quad \alpha > 0, \quad (3.3)$$

удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\begin{aligned} \left(y_+ \frac{dU_+}{dy_+}\right)^2 S_i(\text{Re}) + \frac{dU_+}{dy_+} = 1, \\ \text{Re} = y_+^2 \frac{dU_+}{dy_+}, \quad U_+(0) = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

которое имеет решение в замкнутом виде:

$$\begin{aligned} U_+ = \int_0^{\text{Re}} \frac{d\text{Re}}{\sqrt{\text{Re}^2 S_i(\text{Re}) + \text{Re}}} - \frac{\sqrt{\text{Re}}}{\sqrt{\text{Re} S_i(\text{Re}) + 1}}, \\ y_+ = \sqrt{\text{Re}^2 S_i(\text{Re}) + \text{Re}}, \quad 0 \leq \text{Re} < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.12) следует, что скорость имеет логарифмическую асимптотику во внешней части пристеночной области:

$$\begin{aligned} U_+ = \frac{1}{\kappa} (\ln y_+ + C) + O(y_+^{-\alpha}), \\ y_+ \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В соответствии с экспериментальными данными примем  $C = 2.05$ .

Таким образом, если пограничный слой не находится в состоянии близком к отрыву, когда трение на обтекаемой поверхности очень мало, закон стенки для профиля скорости имеет тот же вид, что при нулевом градиенте давления. Этот факт экспериментально подтвержден еще в работе [18], наиболее убедительные данные приведены в работе [19].

### 4. ВНЕШНЯЯ ОБЛАСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Наша цель — найти решение уравнения (2.20), которое соответствует степенному распределению скорости набегающего потока (2.1). Асимптотические разложения искомых функций будут иметь более простой вид, если ввести новую независимую переменную  $\zeta \rightarrow \infty$  по формуле

$$\xi = \zeta + k \ln \zeta, \quad (4.1)$$

где коэффициент  $k$  будет выбран ниже. Во внешней области пограничного слоя, где  $1/\eta = O(1)$ , решение уравнения (2.20) будем искать в виде

$$\gamma(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1 \zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}), \quad (4.2)$$

$$\Lambda(\xi) = \lambda \zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}), \quad (4.3)$$

$$\Psi(\xi, \eta) = \eta + \lambda(1 + \gamma_0) f(\eta) \zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}). \quad (4.4)$$

Здесь  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  и  $\lambda$  — постоянные коэффициенты. Сделаем замену переменной (4.1), подставляя в уравнение (2.20) разложения (4.2)–(4.4) и переходя к пределу при

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad 1/\eta = O(1),$$

для функции  $f$  получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma_0 f' - \eta f''}{1 + \gamma_0} = [(\eta f'')^2 S(\infty, \eta, m)]', \\ f(0) = f'(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из постановки задачи следует, что параметр  $\gamma_0$  может быть функцией только  $m$  (формула (4.24), связывающая эти величины, получена ниже), поэтому будем писать  $f(\eta, \gamma_0)$ . Первый интеграл уравнения (4.5) есть

$$\frac{(1 + 2\gamma_0)[f - f(\infty, \gamma_0)] - \eta f'}{1 + \gamma_0} = (\eta f'')^2 S(\infty, \eta, m). \quad (4.6)$$

Из (4.6), принимая во внимание (2.12), получим асимптотику решения на стенке:

$$f'(\eta, \gamma_0) = \frac{F_1(\gamma_0)}{\varkappa} \sqrt{\frac{1 + 2\gamma_0}{1 + \gamma_0}} \times [\ln \eta + A(\gamma_0) - \ln F_1(\gamma_0)] + O(\eta^\alpha), \quad (4.7)$$

$$F_1(\gamma_0) = \sqrt{-f(\infty, \gamma_0)}, \quad \eta \rightarrow 0, \quad \alpha > 0,$$

где  $A$  — некоторая функция. Отсюда следует, что параметр  $\gamma_0$  может изменяться в пределах

$$-1/2 < \gamma_0 \leq \infty. \quad (4.8)$$

#### 4.1. Асимптотика решения при $\gamma_0 \rightarrow -1/2$

Полагая в (4.6)  $\gamma_0 = -1/2$ , для функции  $g(\eta) = f(\eta, -1/2)$  при условии  $1/\eta = O(1)$  получим уравнение

$$(\eta g'')^2 S(\infty, \eta, -1/3) + 2\eta g' = 0; \quad g(0) = g'(\infty) = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\sqrt{-g'} = \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{2\eta S(\infty, \eta, -1/3)}}. \quad (4.9)$$

Отсюда при учете (2.12) следует, что вблизи стенки

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g'(0)} - \frac{\sqrt{2\eta}}{\varkappa} + o(\sqrt{\eta}), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (4.10)$$

Далее удобно ввести постоянную  $D_0$ , равную

$$D_0 = \frac{-g'(0)}{\sqrt{-g(\infty)}}.$$

Поскольку функция  $g'$  не имеет требуемой логарифмической асимптотики, рассмотрим вблизи стенки область, в которой

$$\eta = \frac{(1 + 2\gamma_0)\sqrt{-g(\infty)}}{D_0} \eta_0, \quad (4.11)$$

$$\frac{f'(\eta, \gamma_0)}{\sqrt{-g(\infty)}} = -D_0 + \sqrt{2(1 + 2\gamma_0)} h(\eta_0) + \dots$$

Подставляя (4.11) в (4.6) и переходя к пределу при

$$\gamma_0 \rightarrow -1/2, \quad \eta_0 = O(1),$$

для функции  $h(\eta_0)$  получим уравнение

$$(\varkappa \eta_0 h')^2 = 1 + \eta_0. \quad (4.12)$$

Сращивание с асимптотикой (4.10) дает дополнительное условие

$$h = \frac{2}{\varkappa} \sqrt{\eta_0} + o(1), \quad \eta_0 \rightarrow \infty, \quad (4.13)$$

с учетом которого интеграл уравнения (4.12) есть

$$h = \frac{1}{\varkappa} \left[ \ln \eta_0 + 2\sqrt{1 + \eta_0} - 2 \ln \left( 1 + \sqrt{1 + \eta_0} \right) \right]. \quad (4.14)$$

Из сопоставления асимптотического представления (4.7) с (4.11) и (4.14) следует асимптотическое представление функции  $A$  при  $\gamma_0 \rightarrow -1/2$ :

$$A(\gamma_0) = -\frac{\varkappa D_0}{\sqrt{2(1 + 2\gamma_0)}} - \ln(1 + 2\gamma_0) + \ln \frac{D_0}{4} + 2 + \Phi \left( \frac{1 + 2\gamma_0}{1 + \gamma_0} \right),$$

$$\Phi(0) = 0.$$

По результатам вычислений (см. разд. 5.3)  $D_0 = 12.85$ .

Таким образом, при  $\gamma_0 \rightarrow -1/2$  внешняя область пограничного слоя приобретает двухслойную структуру. Над логарифмическим подслоем, т. е. слоем постоянного напряжения, образуется промежуточная область — градиентный подслой [20], касательное напряжение поперек которого изменяется линейно за счет неблагоприятного продольного градиента давления (см. уравнение (4.12)). Во внешней части градиентного подслоя профиль скорости подчиняется «закону квадратного корня» (4.10), (4.13), что характерно для течений с сильным неблагоприятным градиентом давления [20], но наблюдается также в других турбулентных течениях. Например, закону квадратного корня подчиняется профиль скорости вблизи оси симметрии турбулентного следа, который образуется при продольном обтекании плоской пластины [21].

#### 4.2. Сращивание решений для внешней и пристеночной областей

Выполним асимптотическое сращивание решений для двух областей — внешней и пристеночной.

Связь между внутренними и внешними переменными на основании (3.1), (4.1) и (4.4) задается равенствами

$$\begin{aligned} \ln y_+ &= \ln \eta + \zeta + k \ln \zeta + \ln \sqrt{\frac{c_f}{2}}, \\ u_+ &= \frac{1 + (1 + \gamma_0)\lambda f'(\eta, \gamma_0)\zeta^{-1} + O(\zeta^{-2})}{\sqrt{c_f/2}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Поскольку согласно (3.3) разность  $u_+$  и  $U_+$  меньше любой отрицательной степени  $\zeta$ , для сращивания можно использовать асимптотическое представление (3.5). Подставив соотношения (4.15) в (3.5) и заменив функцию  $f'(\eta, \gamma_0)$  ее асимптотическим разложением (4.7), получим условие сращивания [22]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \left( \ln \eta + \zeta + k \ln \zeta + \ln \sqrt{\frac{c_f}{2}} + C \right) &= 1 + \frac{\lambda F_1}{\varkappa} \times \\ &\times \sqrt{(1 + \gamma_0)(1 + 2\gamma_0)} (\ln \eta + A - \ln F_1)\zeta^{-1} + \\ &+ O(\zeta^{-2}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из условия равенства коэффициентов при  $\ln \eta$  следует первое соотношение

$$\sqrt{\frac{c_f}{2}} = \lambda F_1 \sqrt{(1 + \gamma_0)(1 + 2\gamma_0)} \zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}). \quad (4.17)$$

Отсюда видно, что коэффициент трения нужно искать в виде разложения

$$\sqrt{\frac{c_f}{2}} = t_1 \zeta^{-1} + t_2 \zeta^{-2} + O(\zeta^{-3}), \quad (4.18)$$

подставляя которое в (4.16) и (4.17), найдем  $k = 1$  и

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\varkappa}{F_1 \sqrt{(1 + \gamma_0)(1 + 2\gamma_0)}}, \\ t_1 &= \varkappa, \quad t_2 = -\varkappa [\ln(\varkappa F_1) - A + C]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Осталось показать, что полученное решение соответствует степенному распределению скорости набегающего потока, и определить параметр  $\gamma_0$ . Из (2.18), (2.19) следует равенство

$$\gamma = \frac{\Delta u'_e}{\Lambda u_e}, \quad (4.20)$$

с помощью которого число Рейнольдса  $Re_p$ , образованное по продольному градиенту давления, можно представить в виде

$$Re_p \equiv \frac{u_e^2}{|u'_e| \nu} = \frac{Re_\Delta}{|\gamma| \Lambda}. \quad (4.21)$$

Подставляя в (4.21) соотношения (4.1), (4.3), будем иметь

$$Re_p = \frac{\zeta^2 e^\zeta}{|\gamma_0| \lambda} [1 + O(\zeta^{-1})]. \quad (4.22)$$

С другой стороны, интегрирование второго равенства (2.19) при учете (4.1) и (4.2) дает

$$u_e = u_1 \zeta^{\gamma_0 + \gamma_1} e^{\gamma_0 \zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \quad (4.23)$$

где  $u_1$  — постоянная интегрирования. Принимая во внимание определение  $Re_p$  (4.21), из сопоставления (4.22) и (4.23) получим

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \frac{m}{1 + m}. \quad (4.24)$$

Из (4.8), (4.24) следует, что режим со степенным распределением скорости (2.1) существует при  $m > -1/3$  ( $-1/2 < \gamma_0 < 1$ ).

## 5. ЗАКОНЫ ПОДОВИЯ

### 5.1. Закон дефекта скорости

Как следует из (4.3) и (4.19),

$$\Lambda = \frac{\sqrt{c_f/2} [1 + O(\xi^{-1})]}{F_1 \sqrt{(1 + \gamma_0)(1 + 2\gamma_0)}}. \quad (5.1)$$

На основании (4.4) закон дефекта скорости во внешней области пограничного слоя можно записать в виде

$$\frac{u_e - u}{u_e \Lambda} = -(1 + \gamma_0) f'(\eta, \gamma_0) + O(\xi^{-1}). \quad (5.2)$$

Проинтегрировав обе части (5.2) по  $\eta$  от 0 до  $\infty$ , будем иметь

$$\frac{\delta^*}{\Delta \Lambda} = (1 + \gamma_0) F_1^2 + O(\xi^{-1}). \quad (5.3)$$

Из соотношений (5.1), (5.3) и (4.20) получим выражение  $\gamma_0$  через параметр Клаузера (1.1):

$$\gamma_0 = -\frac{\beta}{1 + 2\beta} + O(\xi^{-1}). \quad (5.4)$$

Вместе с (4.24) это соотношение дает равенство (1.3). Из (5.4) получим, что  $\gamma_0 \rightarrow -1/2$  соответствует  $\beta \rightarrow \infty$ , а предельному значению  $\gamma_0 = 1$  отвечает  $\beta = -1/3$ .

Как следует из (2.2), (4.24), величины  $\theta$  и  $\gamma_0$  равны, если не учитывать вытесняющее действие пограничного слоя. Влияние последнего соответствует малому уменьшению модуля угла  $\pi\theta$  на величину  $\delta^*/x$ , которая на основании соотношений (5.3), (4.3), (2.21) есть  $O(\xi^{-2})$ . Поэтому  $\theta = \gamma_0 + O(\xi^{-2})$ .



На основании (5.1), (5.4) закон дефекта скорости (5.2) можно записать в виде

$$\frac{u_e - u}{u_e \sqrt{c_f/2 - \delta^* u'_e/u_e}} = -\frac{f'(\eta, \gamma_0)}{F_1(\gamma_0)} + O(\sqrt{c_f}). \quad (5.5)$$

В частном случае нулевого градиента давления это соотношение дает закон дефекта скорости Кармана (1.2). Интегрирование равенства (5.5) поперек пограничного слоя приводит к выражению

$$\frac{\delta^*}{\Delta \sqrt{c_f/2 - \delta^* u'_e/u_e}} = F_1 + O(\sqrt{c_f}). \quad (5.6)$$

Для представления результатов удобно использовать поперечный масштаб, определенный равенством

$$\Delta^* = \frac{\delta^*}{\sqrt{c_f/2 - \delta^* u'_e/u_e}}. \quad (5.7)$$

Выражение (5.7) является обобщением на случай течения с градиентом давления толщины пограничного слоя, введенной Клаузером [2].

Закон дефекта скорости (5.5) позволяет сформулировать правила подобия для распределения компонент тензора рейнольдсовых напряжений. Из условия (2.10) и уравнения (4.6) для касательного напряжения получим

$$\frac{\nu \partial u / \partial y - \langle u'v' \rangle}{u_e^2 (c_f/2 - \delta^* u'_e/u_e)} = \frac{1 + 2\gamma_0}{1 + \gamma_0} + \frac{(1 + 2\gamma_0)f(\eta, \gamma_0) - \eta f'(\eta, \gamma_0)}{(1 + \gamma_0)F_1^2(\gamma_0)} + O(\sqrt{c_f}). \quad (5.8)$$

Для нормальных турбулентных напряжений из соотношений (2.15) во внешней области будем иметь

$$\frac{\langle u'^2 \rangle}{u_e^2 (c_f/2 - \delta^* u'_e/u_e)} = \left[ \frac{\eta f''(\eta, \gamma_0)}{F_1(\gamma_0)} \right]^2 S_1(\infty, \eta, m) + O(\sqrt{c_f}). \quad (5.9)$$

Выражения для компонент  $\langle v'^2 \rangle$  и  $\langle w'^2 \rangle$  аналогичны формуле (5.9).

Разделив равенство (5.2) на (5.3), получим формулировку закона дефекта скорости, данную Загаарой и Смитсом [7]:

$$\frac{F_1(\gamma_0)\Delta(u_e - u)}{u_e \delta^*} = -\frac{f'(\eta, \gamma_0)}{F_1(\gamma_0)} + O(\sqrt{c_f}), \quad (5.10)$$

при этом нужно положить толщину пограничного слоя  $\delta = F_1(\gamma_0)\Delta$ . Закон (5.5) есть точное асимптотическое решение уравнений пограничного слоя. Формула (5.10) предложена как чисто эмпирическая [7].

Оказывается, что в разных терминах они выражают одно и то же физическое соотношение с одинаковыми функциями в правой части. При этом формула (5.10) менее удобна, поскольку требует дополнительного экспериментального определения толщины пограничного слоя и не содержит формулу Кармана как частный случай.

### 5.2. Формпараметры пограничного слоя

Закон дефекта скорости (5.5) можно записать в виде

$$\frac{u_e - u}{u_e \sqrt{c_f/2 - \delta^* u'_e/u_e}} = -\frac{f'(\eta, \gamma_0)}{F_1(\gamma_0)} + f_1(\xi, \eta)\xi^{-1},$$

$$f_1(\xi, \eta) = O(1), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Отсюда для интегральных параметров пограничного слоя получим

$$\frac{\delta^*}{\Delta F_1 \sqrt{c_f/2 - \delta^* u'_e/u_e}} = 1 + I(\xi)\xi^{-1},$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\Delta F_1 \sqrt{c_f/2 - \delta^* u'_e/u_e}} &= \\ &= 1 - G \sqrt{\frac{c_f}{2} - \frac{\delta^* u'_e}{u_e}} + I(\xi)\xi^{-1} + O(\xi^{-2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^{**}}{2\Delta F_1(\gamma_0)\sqrt{c_f/2 - \delta^* u'_e/u_e}} &= \\ &= 1 - \frac{3}{2}G \sqrt{\frac{c_f}{2} - \frac{\delta^* u'_e}{u_e}} + \\ &\quad + I(\xi)\xi^{-1} + O(\xi^{-2}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$I(\xi) = \int_0^\infty \frac{f_1(\xi, \eta) d\eta}{F_1}, \quad (5.12)$$

$$G(\gamma_0) = \int_0^\infty \frac{f'^2(\eta, \gamma_0) d\eta}{F_1^3(\gamma_0)}.$$

Здесь  $\theta$  и  $\delta^{**}$  — толщины соответственно потери импульса и энергии. Второй интеграл  $G(\gamma_0)$  в формуле (5.12) в частном случае  $\gamma_0 = 0$  известен как формпараметр Клаузера [2], его численное значение по данным измерений в пограничном слое на пластине при нулевом градиенте давления лежит в диапазоне от 6.4 до 7.1; вычисления, основанные на формуле Коулса (см. формулу (5.14)), дают  $G(0) = 6.61$ .

Из (5.11) следуют правила подобия для формпараметров пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \theta/\delta^*}{\sqrt{c_f/2 - \delta^*u'_e/u_e}} &= G(\gamma_0) + O(\sqrt{c_f}), \\ \frac{2 - \delta^{**}/\delta^*}{3\sqrt{c_f/2 - \delta^*u'_e/u_e}} &= G(\gamma_0) + O(\sqrt{c_f}), \end{aligned} \quad (5.13)$$

которые обобщают на случай течения с градиентом давления выражения, известные для безградиентного течения на пластине [2]. Из (5.13), в частности, следует, что для интегральных параметров турбулентного пограничного слоя имеет место соотношение

$$\delta^{**} + \delta^* = 3\theta.$$

### 5.3. Расчет параметров пограничного слоя

Как сказано выше, условие замыкания (2.10) получено без привлечения каких-либо специальных гипотез о характере турбулентного обмена и просто следует из постановки задачи (2.6), согласно которой рассматриваемое турбулентное течение зависит только от трех определяющих параметров. В соответствии с (2.10) вне вязкого подслоя путь смешения есть функция двух переменных, причем в силу условия (2.11) зависимость от параметра  $m$  (градиента давления) проявляется не во всей внешней области, а лишь в ее части, вне логарифмического подслоя. Как можно видеть на рис. 2, градиент давления слабо влияет на профили пути смешения; фактически, различие между экспериментальными профилями находится в пределах погрешности измерений. На слабую зависимость профиля пути смешения от градиента давления в автомодельном пограничном слое указано также в работе [23].

Чтобы выполнить расчет параметров пограничного слоя, предположим, что функция  $S(\infty, \eta, m)$  не зависит от  $m$ . Тогда она может быть определена из уравнения (4.6) на основании одного известного профиля скорости, в качестве которого естественно взять профиль в пограничном слое на пластине при нулевом градиенте давления. Функцию  $f'(\eta, 0)$ , исходя из (5.5), зададим по эмпирической формуле Коулса [24]:

$$\frac{f'(\eta, 0)}{F_1(0)} = \frac{1}{\varkappa} [\ln \eta - 0.55(1 + \cos(\pi\eta))], \quad (5.14)$$

$$0 < \eta \leq 1.$$

В этом случае

$$F_1(0) = 1.55/\varkappa, \quad A(0) = 0.23.$$

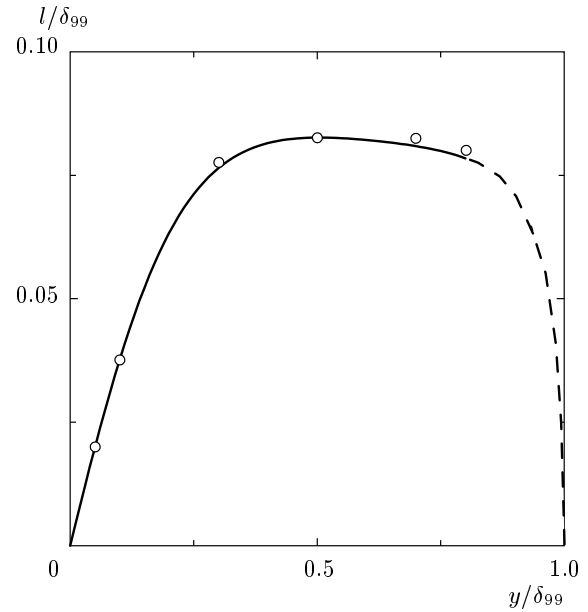


Рис. 3. Длина пути смешения по данным измерений [25] для пограничного слоя на пластине при нулевом градиенте давления и расчетная кривая (5.15)

В силу уравнения (4.6) функция  $S$  выражается через  $f'(\eta, 0)$  в квадратурах, а путь смешения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{l}{\delta_{99}} &= \eta \sqrt{S(\infty, \eta)} = \\ &= \frac{\sqrt{f(\eta, 0) - f(\infty, 0) - \eta f'(\eta, 0)}}{f''(\eta, 0)}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Таким образом, сделанное допущение приводит к приближенному алгебраическому условию замыкания (5.15), которое, по-видимому, для рассматриваемой задачи является наиболее адекватным.

Кривая, построенная по формуле (5.15), хорошо описывает экспериментальные данные [25] на рис. 3, но заметно расходится с данными [16] вблизи внешней границы слоя (рис. 2). Это связано как с отмеченными выше неизбежными ошибками измерения пути смешения<sup>2)</sup>, так и с недостатками формулы Коулса (5.14), на основе которой эта величина вычислена. Она слишком грубо аппроксимирует профиль скорости вблизи внешней границы слоя. Однако детали поведения пути смешения в этой области не оказывают сколько-нибудь существенного влияния

<sup>2)</sup> Внешняя граница слоя, как известно, находится в области перемежаемости, что вносит дополнительные ошибки в измерения.

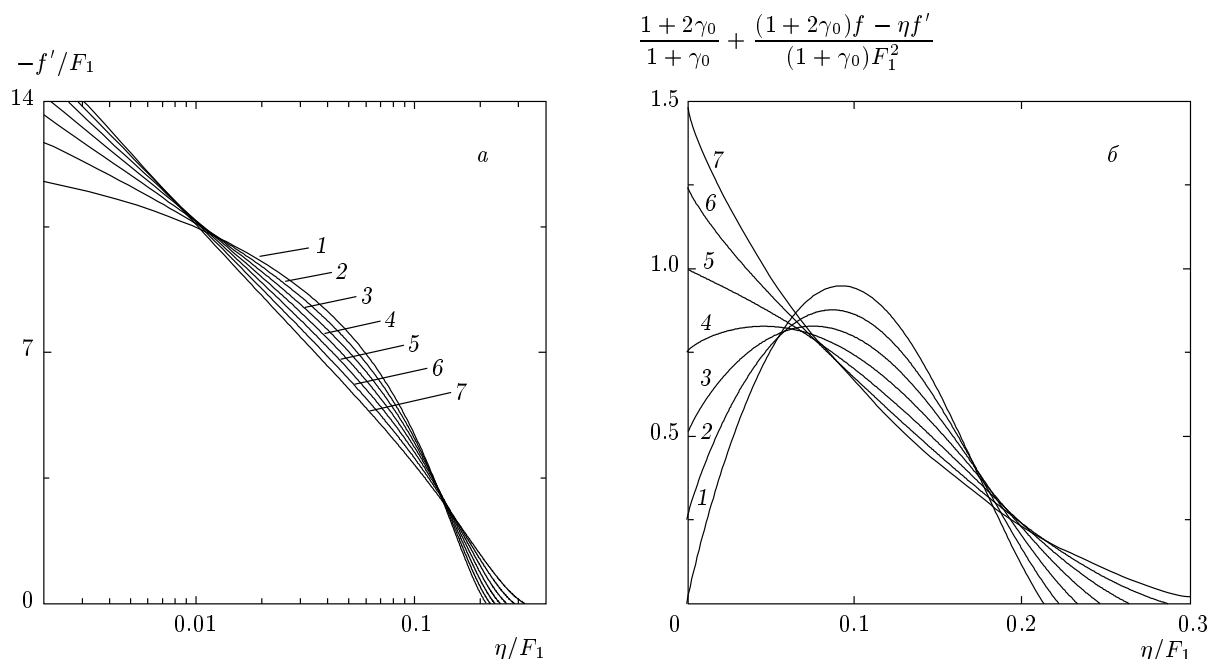


Рис. 4. Расчетные профили скорости (а) и касательного напряжения (б):  $\gamma_0 = -1/2$  (1),  $-3/7$  (2),  $-1/3$  (3),  $-1/5$  (4), 0 (5),  $1/3$  (6), 1 (7)

на результаты вычислений. Если изменить профиль пути смещения на интервале, где кривые на рис. 2, 3 показаны штриховыми линиями (например, принять, что путь смещения имеет конечный не равный нулю предел на внешней границе слоя), то расчетные профили скорости и касательного напряжения незначительно изменятся только на этом интервале.

Уравнение второго порядка (4.6) решалось численно как задача Коши для функции  $f(\eta, \gamma_0) - f(\infty, \gamma_0)$  с нулевым начальным условием на внешней границе слоя, которая является особой точкой типа седла. В предельном случае  $\gamma_0 = -1/2$  профиль скорости вычислен из интеграла (4.9). Результаты расчета во всем рассматриваемом диапазоне изменения параметра  $\gamma_0$  представлены на рис. 4а. На рис. 4б дано распределение касательного напряжения, которое определено из левой части уравнения (4.6). Касательное напряжение ведет себя качественно различно при благоприятном и неблагоприятном градиентах давления. При  $\gamma_0 \geq 0$  оно изменяется монотонно поперек слоя, при  $\gamma_0 < 0$  — имеет точку максимума.

Расчетные значения формпараметра  $G$  даны на рис. 5. Поскольку функция, задающая дефект скорости (5.5), относительно слабо зависит от параметра  $\gamma_0$  (рис. 4а), разность между максимальным и минимальным значениями формпараметра  $G$  составляет всего 12 %.

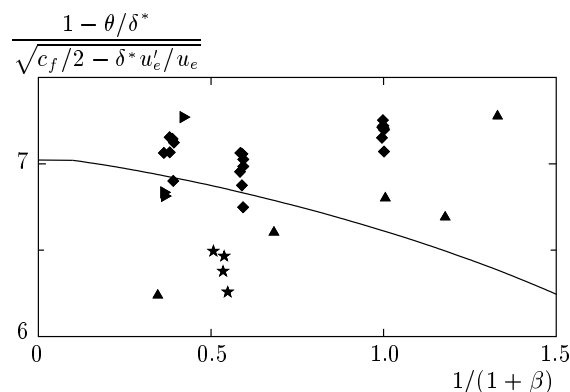


Рис. 5. Формпараметр пограничного слоя, расчетная кривая и данные измерений:  $\blacktriangleright$  — [1],  $\star$  — [23] ( $m = -0.15$ ),  $\blacklozenge$  — [16],  $\blacktriangle$  — [28]

#### 5.4. Сопоставление с экспериментальными данными

Для сопоставления отобраны экспериментальные данные, полученные в условиях, близких к автомодельным. На рис. 6–8 представлены результаты измерений [18, 26–28] в пограничном слое при благоприятном градиенте давления (профили [18, 26, 27] взяты из базы данных [29]). Скорость и касательное напряжение представлены в переменных подобия (5.5), (5.8), а в качестве поперечного масшта-

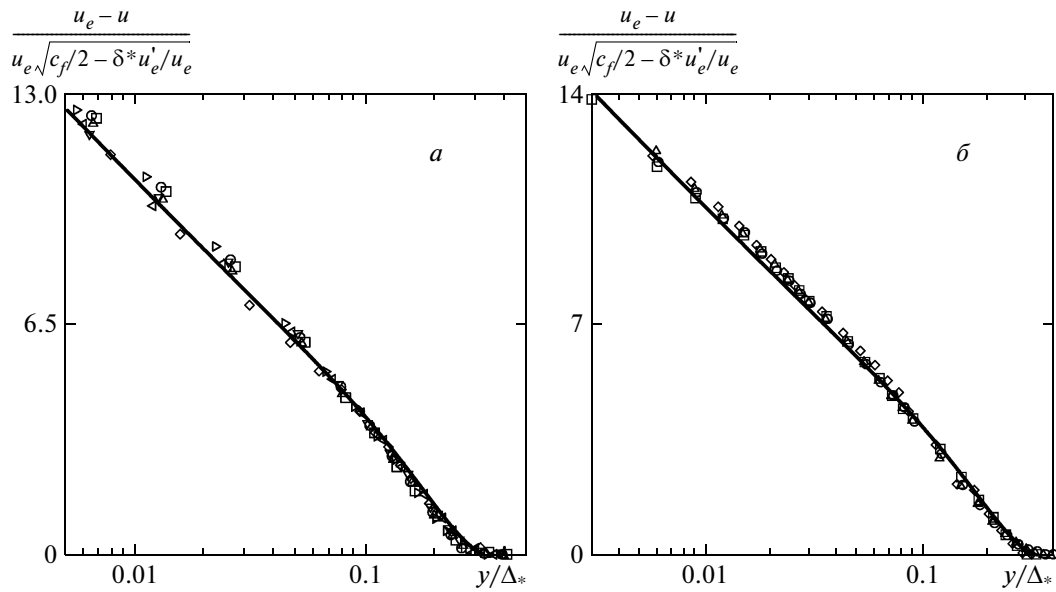


Рис. 6. Профили скорости, измеренные в работе [18] (а) при  $\beta = -0.310$  ( $\diamond$ ),  $-0.334$  ( $\square$ ),  $-0.334$  ( $\circ$ ),  $-0.320$  ( $\triangle$ ),  $-0.321$  ( $\nabla$ ),  $-0.285$  ( $\triangleright$ ),  $-0.230$  ( $\triangleleft$ ) и в работе [27] (б) при  $\beta = -0.390$  ( $\diamond$ ),  $-0.360$  ( $\square$ ),  $-0.341$  ( $\circ$ ),  $-0.333$  ( $\triangle$ ), в переменных подобия (5.5) и расчетные кривые для  $\gamma_0 = 1$

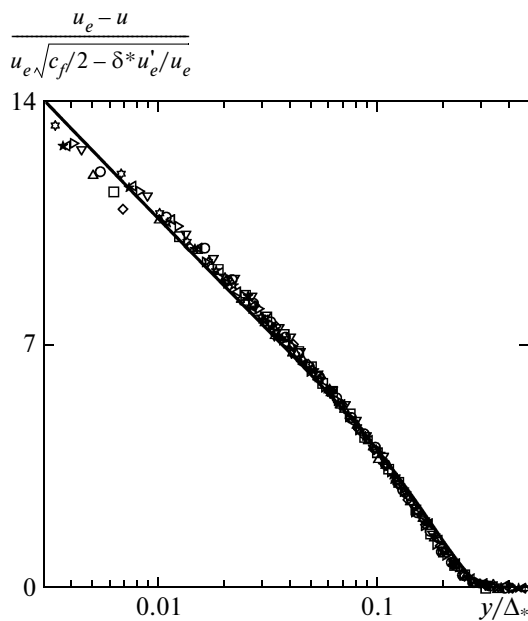


Рис. 7. Профили скорости, измеренные в работе [26] при  $\beta = -0.292$  ( $\diamond$ ),  $-0.280$  ( $\square$ ),  $-0.280$  ( $\circ$ ),  $-0.268$  ( $\triangle$ ),  $-0.274$  ( $\nabla$ ),  $-0.270$  ( $\triangleright$ ),  $-0.273$  ( $\triangleleft$ ),  $-0.264$  (звездочка),  $-0.268$  (шестиугольник) в переменных подобия (5.5) и расчетная кривая для  $\gamma_0 = 2/3$

ба используется обобщенная толщина пограничного слоя Клаузера (5.7). Как видно на рис. 6–8, все данные подчиняются закону дефекта скорости (5.5), в соответствии с которым экспериментальные точки, полученные при близких значениях параметра  $\beta$ , лежат на одной кривой. Имеется также хорошее совпадение с результатами расчетов. Профили скорости на рис. 6 отвечают предельному значению параметра  $\gamma_0 = 1$  ( $\beta = -1/3$ ), при котором толщина пограничного слоя и интегральные параметры, как это следует из (2.21), приблизительно постоянны по длине, что подтверждается результатами измерений [18, 27].

Профили скорости и касательного напряжения, полученные в работе [16] при неблагоприятном градиенте давления для  $\beta \approx 0.7, 1.6$ , даны на рис. 9. Видно, что имеется очень хорошее совпадение экспериментальных и расчетных данных: экспериментальные точки и теоретические кривые на рис. 9а,б расходятся только вблизи стенки на участке, соответствующем вязкому подслою, где закон дефекта скорости (5.5) выполняться не должен. На этих рисунках построена зависимость корня из дефекта скорости от корня из относительного расстояния до стенки. Это сделано для того, чтобы показать наличие вблизи стенки градиентного подслоя и справедливость закона квадратного корня, который при та-

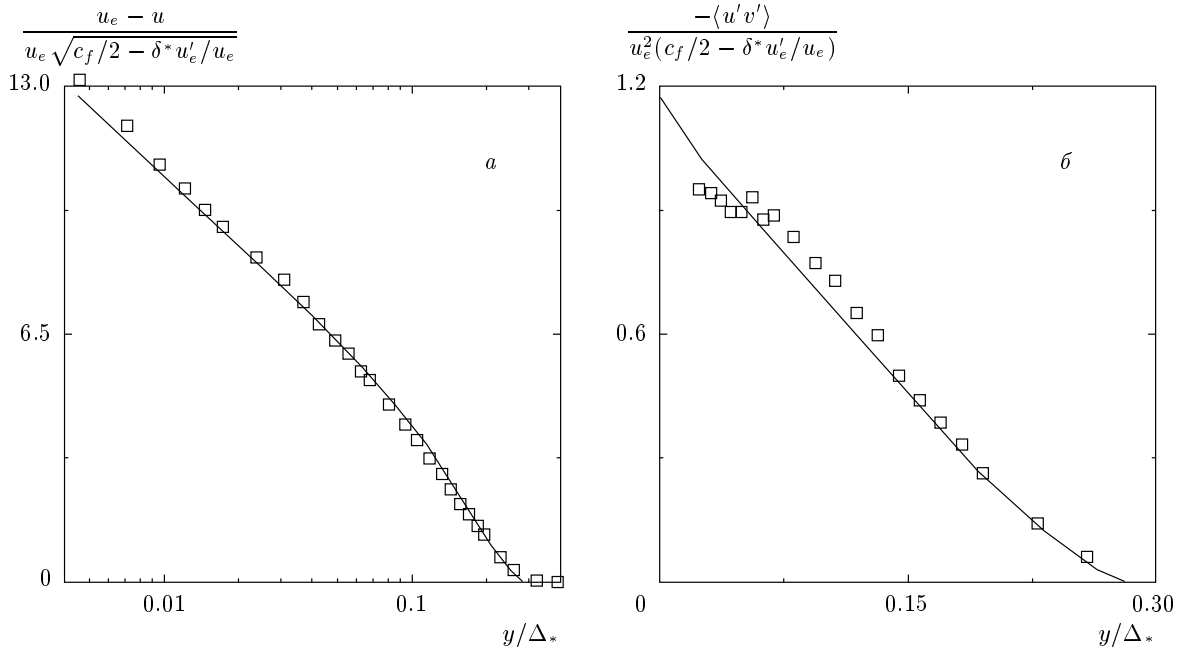


Рис. 8. Данные измерений [28] скорости (а) и касательного напряжения (б) при  $\beta = -0.151$  в переменных подобия (5.5), (5.8) и расчетные кривые для  $\gamma_0 = 0.216$

ком представлении соответствует прямолинейному участку на профиле скорости.

На рис. 5 в переменных подобия (5.13) представлены данные для формпараметра пограничного слоя. В переменных (5.13) экспериментальные точки лежат в относительно небольшом интервале и в целом достаточно близки к расчетной кривой: максимальное расхождение составляет около 10%. При этом нужно иметь в виду, что в случае нулевого градиента давления разброс экспериментальных значений этой величины, как сказано выше, также не менее 10%.

Рисунки 6–9 демонстрируют очень хорошее соответствие результатов теории и эксперимента. Однако такая ситуация имеет место не всегда. При неблагоприятном градиенте давления и достаточно больших значениях параметра  $\beta$  профили скорости и касательного напряжения, рассчитанные с помощью уравнения (4.5), заметно расходятся с экспериментальными данными. Причины такого несоответствия установлены в работах [10, 11].

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Закон дефекта скорости для внешней области автомодельного турбулентного пограничного слоя имеет следующую простую формулировку:

$$\frac{u_e - u}{u_e \sqrt{c_f/2 - \delta^* u'_e / u_e}} = \varphi(\eta, \beta) + O(\sqrt{c_f}), \tag{6.1}$$

$$\eta = \frac{y \sqrt{c_f/2 - \delta^* u'_e / u_e}}{\delta^*}.$$

Законы подобия для касательного напряжения и других компонент тензора Рейнольдса записываются в виде

$$\frac{\nu \partial u / \partial y - \langle u'v' \rangle}{u_e^2 (c_f/2 - \delta^* u'_e / u_e)} = \Phi(\eta, \beta) + O(\sqrt{c_f}), \tag{6.2}$$

$$\frac{\langle u'^2 \rangle}{u_e^2 (c_f/2 - \delta^* u'_e / u_e)} = \Phi_1(\eta, \beta) + O(\sqrt{c_f}). \tag{6.3}$$

Выражения для компонент  $\langle v'^2 \rangle$  и  $\langle w'^2 \rangle$  аналогичны формуле (6.3). Функцию  $\Phi(\eta, \beta)$  в (6.2) можно выразить через универсальную функцию  $\varphi(\eta, \beta)$  с помощью уравнения импульсов. В частном случае нулевого градиента давления соотношения (6.1)–(6.3) дают закон дефекта скорости Кармана и известные выражения для компонент тензора Рейнольдса и толщины пограничного слоя Клаузера [2].

Закон дефекта скорости (6.1) представляет собой точное асимптотическое при больших числах Рейнольдса решение уравнений пограничного слоя, полученное как результат асимптотического сращивания решений для внешней и пристеночной областей.

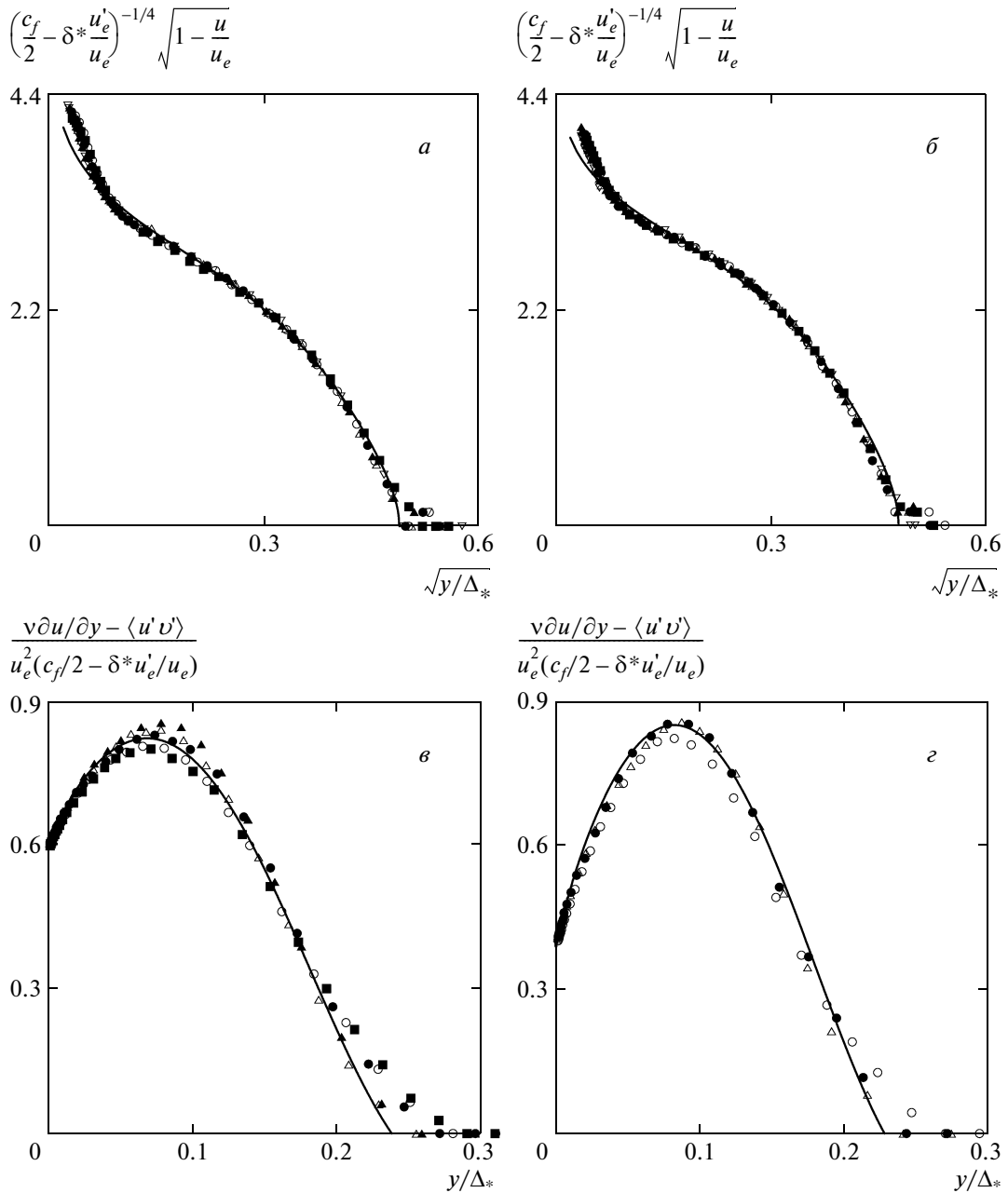


Рис. 9. Данные измерений [16] скорости (*a, б*) и касательного напряжения (*в, г*) в переменных подобия (5.5), (5.8) и расчетные кривые;  $\gamma_0 = -0.29$  (*a, в*),  $-0.38$  (*б, г*). Обозначения экспериментальных точек такие же, как на рис. 2

Соотношение, использованное для замыкания этих уравнений, не основано на каких-либо частных гипотезах, а является следствием автомодельности рассматриваемой задачи. Законы подобия (6.1)–(6.3) выведены для случая благоприятного и умеренно неблагоприятного градиента давления, т. е. при условии  $\beta = O(1)$ , но, как показано в работах [10, 11],

они остаются справедливыми вплоть до отрыва пограничного слоя. На это обстоятельство указывает тот факт, что при  $c_f = 0$  левые части (6.1)–(6.3) не имеют особенностей. Закон дефекта скорости, предложенный Загаролой и Смитсом [7] как эмпирическое соотношение, представляет собой закон (6.1), выраженный в других терминах.

При благоприятном и умеренном неблагоприятном градиенте давления пограничный слой имеет обычную двухслойную структуру, такую же как при безградиентном течении. По мере роста параметра  $\beta$  над логарифмическим подслоем, т. е. слоем постоянного напряжения, образуется промежуточная область — градиентный подслой, в котором касательное напряжение из-за продольного градиента давления изменяется линейно. Во внешней части градиентного подслоя профиль скорости подчиняется закону квадратного корня.

Автор признателен В. Кейсу (W. M. Kays), Р. Моффату (R. J. Moffat), которые любезно предоставили данные своих экспериментальных исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-08-00260).

### ЛИТЕРАТУРА

1. F. H. Clauser, *J. Aero. Sci.* **21**, 91 (1954).
2. F. H. Clauser, *Advan. Appl. Mech.* **4**, 1 (1956).
3. A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge Univ. Press, New York (1976).
4. H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, The MIT Press (1972).
5. G. L. Mellor and D. M. Gibson, *J. Fluid Mech.* **24**, 225 (1966).
6. W. H. Schofield, *J. Fluid Mech.* **113**, 91 (1981).
7. E. Zagarola and L. J. Smits, *ASME Paper FEDSM98-4950* (1998), p. 1.
8. L. Castillo and W. K. George, *AIAA J.* **39**, 41 (2001).
9. T. Indinger, M. H. Buschmann, and M. Gad-el-Hak, *AIAA J.* **44**, 2465 (2006).
10. И. И. Вигдорович, *ДАН* **444**, 42 (2012).
11. И. И. Вигдорович, *ДАН* **445**, 516 (2012).
12. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, Гидрометеоздат, Санкт-Петербург (1992).
13. A. E. Perry and C. J. Abell, *J. Fluid Mech.* **79**, 785 (1977).
14. D. B. DeGraaff and J. K. Eaton, *J. Fluid Mech.* **422**, 319 (2000).
15. J. F. Morrison, B. J. McKeon, W. Jiang et al., *J. Fluid Mech.* **508**, 99 (2004).
16. P. S. Andersen, W. M. Kays, and R. J. Moffat, *Rep. HMT-15*, Stanford Univ. (1972).
17. И. И. Вигдорович, *Изв. АН, МЖГ* № 4, 106 (1993).
18. H. Ludwig and W. Tillmann, *Ing.-Arch.* **17**, 288 (1949).
19. P. E. Skåre and P.-Å. Krogstad, *J. Fluid Mech.* **272**, 319 (1994).
20. Б. А. Кадер, А. М. Яглом, в сб. *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа*, ВИНТИ, Москва (1984), т. 18, с. 3.
21. A. Neish and F. T. Smith, *J. Eng. Math.* **22**, 15 (1988).
22. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости*, Мир, Москва (1967).
23. P. Bradshaw, *J. Fluid Mech.* **29**, 625 (1967).
24. D. Coles, *J. Fluid Mech.* **1**, 191 (1956).
25. P. S. Klebanoff, *NACA Rep. 1247* (1954).
26. W. J. Bauer, Ph D Thesis, State Univ. of Iowa (1951).
27. H. J. Herring and J. F. Norbury, *J. Fluid Mech.* **27**, 541 (1967).
28. L. F. East, W. G. Sawyer, and C. R. Nash, *RAE Tech. Rep. 79040* (1979).
29. D. Coles and E. A. Hirst, in *Proc. Computation of Turbulent Boundary Layers, 1968 AFORS-IFP-Stanford Conf.*, Vol. 2, Stanford Univ. Press, Stanford (1969).