

# СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

*В. И. Докучаев\*, Ю. Н. Ерошенко\*\**

*Институт ядерных исследований Российской академии наук  
117312, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 февраля 2013 г.

Найдено стационарное решение уравнения Дирака в метрике черной дыры Рейснера–Нордстрема. Показано, что существует только одно стационарное регулярное состояние вне горизонта событий черной дыры и только одно стационарное регулярное состояние под горизонтом Коши. Нормировочный интеграл волновых функций расходится на обоих горизонтах, если черная дыра не экстремальная. Это означает, что найденное решение может быть лишь асимптотическим пределом нестационарного решения. Напротив, в случае экстремальной черной дыры нормировочный интеграл конечен и стационарное регулярное решение является физически самосогласованным. Наличие квантовых уровней под горизонтом Коши может оказать влияние на финальную стадию испарения черной дыры в процессе Хоукинга, а также открывает принципиальную возможность исследования внутренней структуры черных дыр с использованием квантового туннелирования между внешними и внутренними состояниями.

DOI: 10.7868/S0044451013070080

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Дирака в гравитационном поле общего вида было выведено в работах Фока и Иваненко в 1929 г. [1] с использованием формализма параллельного переноса спинора, что позволило определить его ковариантную производную. Другой метод вывода уравнения Дирака в гравитационном поле основан на описании группы Лоренца в тетрадном формализме [2]. Записанное в (псевдо)римановом пространстве уравнение Дирака имеет вид

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \quad (1)$$

где матрицы Дирака в метрике общего вида  $\gamma^\mu = e_{(a)}^\mu \gamma^{(a)}$  выражаются через стандартные матрицы  $\gamma^{(a)}$  в пространстве Минковского посредством тетрады  $e_{(a)}^\mu$ . Удлиненная производная

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu + \Gamma_\mu, \quad (2)$$

где

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} \gamma^{(a)} \gamma^{(b)} e_{(a)}^\nu e_{(b)\nu ; \mu}, \quad (3)$$

а  $A_\mu$  — 4-потенциал электромагнитного поля.

\*E-mail: dokuchaev@inr.ac.ru

\*\*E-mail: eroshenko@inr.ac.ru

Уравнение Дирака в гравитационных полях различного вида исследовалось во множестве работ (см., например, [3–5]). Наиболее подробно изучено рассеяние фермионов на черных дырах и излучение фермионов в процессе квантового испарения черной дыры (эффект Хоукинга). На задачах этого типа было сосредоточено больше всего усилий по исследованию уравнения Дирака в гравитационном поле. Резонансные квазистационарные квантовые состояния скалярных частиц в гравитационном поле черной дыры исследовались в работах [7–9]. Аналогичные квантовые состояния для спинорных частиц анализировались в работах [10–12]. Стационарные состояния заряженных частиц изучались в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда [13, 14] и электрически заряженной черной дыры Рейснера–Нордстрема [15] в области вне горизонта.

Пространство-время вечной черной дыры Рейснера–Нордстрема представляет собой бесконечную последовательность внутренних вселенных [16]. Частица, падающая внутрь вечной черной дыры Рейснера–Нордстрема, может либо вылететь в другую внутреннюю вселенную, либо остаться под горизонтом Коши. Существование под горизонтом Коши устойчивых финитных орбит для классических частиц было продемонстрировано в работах [17–21].

В данной работе рассмотрим стационарные квантовые состояния частиц-фермионов внутри и снаружи черной дыры и покажем, что при определенных условиях такие состояния и соответствующие им энергетические уровни действительно существуют. Черная дыра Рейснера–Нордстрема с заряженной частицей на квантовом уровне в некотором отношении напоминает простейший атом водорода. Однако в случае заряженной черной дыры уровни электронов могут находиться не только вне черной дыры, но и внутри нее — под горизонтом Коши. Кроме того, на горизонте черной дыры граничные условия для волновых функций существенно иные, что качественно меняет характеристики уровней энергии стационарных состояний. Существование уровней энергии внутри черной дыры открывает принципиально новую возможность «заглянуть» внутрь черной дыры с использованием квантовых методов, что невозможно в рамках классической общей теории относительности. А именно, если существуют уровни энергии внутри черной дыры, то внутреннюю структуру черных дыр можно изучать по спектру переходов между внешними и внутренними уровнями.

Конечная судьба черных дыр, испаряющихся в процессе Хоукинга, пока не выяснена, в частности, потому что при приближении массы черной дыры к массе Планка  $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G} \approx 10^{-5}$  г вероятны сильные отклонения от предсказаний классической теории гравитации. Обсуждались различные эффекты, которые могли бы стабилизировать испаряющуюся первичную черную дыру вблизи массы  $M_{Pl}$ , см. обзор моделей в работе [22]. Эти остатки испаряющихся черных дыр, называемые «планкионами», предлагались в качестве частиц-кандидатов темной материи (скрытой массы) Вселенной [23, 24]. Черные дыры таких масс должны иметь выраженные квантовые свойства, и поэтому обсуждаемые нами квантовые состояния частиц могут играть заметную роль в свойствах этих черных дыр, в частности, изменять вероятность их квантового распада или окончательного испарения. Ранее в работах Маркова обсуждались так называемые «фридмоны» — полужамкнутые миры, представляющие собой частицеподобные заряженные решения в общей теории относительности [25]. В данной работе показано, что может существовать новый тип систем, отдаленно схожих с «фридмонами» — заряженные черные дыры с зарядами на внутренних квантовых орбитах. Эти системы также могут представлять собой темную материю, если они стабильны и рождались в достаточном количестве в ранние космологические эпохи.

Хотя вечные черные дыры с внутренними пространствами, вероятно, не образуются в результате классического гравитационного коллапса, они могут возникать в квантовых процессах при столкновении частиц на ускорителях (в экспериментах на Большом адронном коллайдере уже выполняется проверка некоторых из подобных моделей) или при взаимодействии космических лучей сверхвысоких энергий с атмосферой (эти взаимодействия наблюдаются экспериментально на нескольких детекторах), если реализуются теории с дополнительными пространственными измерениями [24]. Поскольку образование таких мини-черных дыр происходит в процессах с участием заряженных частиц, естественно ожидать рождения не нейтральных, а заряженных черных дыр Рейснера–Нордстрема с различными конфигурациями зарядов на орбитах внутри и снаружи этих черных дыр. При этом будет происходить не постепенный коллапс вещества и захват частиц в черную дыру, а мгновенное квантовое рождение систем, имеющих внутреннюю структуру.

## 2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В МЕТРИКЕ РЕЙСНЕРА – НОРДСТРЕМА

Опишем кратко метод разделения переменных в уравнении Дирака [3] применительно к черной дыре Рейснера–Нордстрема с метрикой

$$ds^2 = f dt^2 - f^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4)$$

где  $f = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$ ,  $M$  — масса черной дыры,  $Q$  — ее заряд. Мы используем единицы измерения, в которых  $c = G = \hbar = 1$ . В случае  $|Q| < M$  уравнение  $f(r) = 0$  имеет два корня

$$r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

— горизонт событий и горизонт Коши (внутренний горизонт). В случае  $|Q| > M$  метрика (4) описывает голую сингулярность без горизонта событий, а случай  $|Q| = M$  соответствует экстремальной черной дыре. Электромагнитный потенциал для статической черной дыры с зарядом  $Q$  равен  $A_{\mu} = (Q/r, 0, 0, 0)$ . С использованием тетрады

$$e^{(a)}_{\mu} = \text{diag}(f^{1/2}, f^{-1/2}, r, r \sin \theta) \quad (5)$$

уравнение Дирака (1) принимает следующий вид:

$$\left[ i\gamma^{(0)} \frac{1}{f^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^{(1)} f^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} + i\gamma^{(2)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + i\gamma^{(3)} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + i\gamma^{(1)} \frac{Q^2 - 3Mr + 2r^2}{2r^3 f^{1/2}} + i\gamma^{(2)} \frac{\cos \theta}{2r \sin \theta} - \gamma^{(0)} \frac{qQ}{r f^{1/2}} - m \right] \psi = 0. \quad (6)$$

Следуя [3], для дальнейшего упрощения этого уравнения переопределим волновую функцию

$$\psi = \frac{e^{-iEt} \Psi}{f^{1/4} r \sin^{1/2} \theta} \quad (7)$$

и выделим оператор

$$K = \gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \left( \gamma^{(2)} \frac{\partial}{\partial \theta} + \gamma^{(3)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (8)$$

имеющий целочисленные собственные значения  $K\Psi = k\Psi$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Угловая часть  $Z(\theta, \phi)$ , выражаемая через сферические функции, нас в дальнейшем интересовать не будет, но мы предполагаем, что интеграл по телесному углу от  $|Z(\theta, \phi)|^2$  равен единице. После данных подстановок система распадается на две пары эквивалентных уравнений. Записывая  $\Psi$  в виде

$$\Psi = Z(\theta, \phi) \begin{bmatrix} g(r) I_2 \\ ih(r) I_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где  $I_2$  — столбец  $(1, 1)^T$ , получаем систему уравнений для радиальных волновых функций:

$$\frac{dg}{dr} - \frac{gk}{r f^{1/2}} + \frac{h}{f^{1/2}} \left[ \frac{1}{f^{1/2}} \left( E - \frac{qQ}{r} \right) + m \right] = 0, \quad (10)$$

$$\frac{dh}{dr} + \frac{hk}{r f^{1/2}} - \frac{g}{f^{1/2}} \left[ \frac{1}{f^{1/2}} \left( E - \frac{qQ}{r} \right) - m \right] = 0. \quad (11)$$

Эти уравнения можно легко получить из уравнений (39) работы [3], если положить  $e^\nu = e^{-\lambda} = f$  и преобразовать выражение для электромагнитного потенциала. Из-за расходимости  $f(r) \rightarrow \infty$  на горизонте черной дыры уравнения (10), (11) относятся к классу дифференциальных уравнений с особыми точками.

Нулевая компонента потока вероятности фермионного поля  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ , представляющая собой плотность вероятности, может быть нормирована на единицу:

$$2 \int_0^{r_-} \frac{|g|^2 + |h|^2}{f(r)} dr = 1, \quad (12)$$

где использовались выражения (7) и (9) и интегрирование  $\int j^0 \sqrt{\gamma} d^3 r$  выполнялось с пространственным метрическим тензором  $\gamma_{\alpha\beta}$ . Поток вероятности по радиусу  $j^1 = 2i(g^* h - gh^*)$  обращается в нуль, в частности, для действительных  $g$  и  $h$ , когда в решении нет бегущих волн.

### 3. НЕЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЧЕРНАЯ ДЫРА С $|Q| < M$

При  $Q \neq 0$  вблизи сингулярности  $r \rightarrow 0$  имеем  $f \rightarrow Q^2/r^2$ , и в случае  $k = 0$  система уравнений (10), (11) имеет асимптотическое решение

$$g = C_1 + C_2 \frac{q}{Q} \frac{r^2}{2}, \quad h = -C_1 \frac{q}{Q} \frac{r^2}{2} + C_2, \quad (13)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные. Если  $k \neq 0$ , то (10) и (11) принимают вид  $dg/dr = kg/Q$ ,  $dh/dr = -kh/Q$  и их асимптотические решения —

$$g \propto \exp(kr/Q), \quad h \propto \exp(-kr/Q). \quad (14)$$

Таким образом, при  $k = 0$  решения входят в сингулярность с нулевой производной, а при  $k \neq 0$  — с конечной производной. Решения (13) и (14) справедливы как для неэкстремальных, так и для экстремальных черных дыр и голых сингулярностей.

Рассмотрим сначала область под внутренним горизонтом Коши  $r < r_-$ . Эта область является  $R$ -областью по классификации И. Д. Новикова. В ней локальная структура пространства-времени имеет тот же вид, что и вне черной дыры, и в частности,  $t$  и  $r$  имеют обычный смысл временной и радиальной координаты. Как показано в работах [17–21], при  $r < r_-$  возможно существование классических орбит заряженных частиц. В этом разделе мы изучаем вопрос о квантовых орбиталях частиц под горизонтом Коши.

Для исследования волновых функций при  $r \rightarrow r_-$  удобно ввести новую переменную  $y = (1 - r/r_-)^{1/2}$ , тогда уравнения (10) и (11) с точностью до  $O(y^2)$  примут вид

$$y \frac{dg}{dy} + 2kpyg - 2r_- ph \left[ \left( E - \frac{qQ}{r_-} \right) p + my \right] = 0, \quad (15)$$

$$y \frac{dh}{dy} - 2kpyh + 2r_- pg \left[ \left( E - \frac{qQ}{r_-} \right) p - my \right] = 0, \quad (16)$$

где  $p = (r_+/r_- - 1)^{-1/2}$ . Докажем, что при  $r \rightarrow r_-$  регулярное решение системы (15), (16) существует только в случае

$$E = \frac{qQ}{r_-}. \quad (17)$$

Записываем  $g$  и  $h$  в виде рядов

$$g = y^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n, \quad h = y^w \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n, \quad (18)$$

где  $a_0 \neq 0$  и  $b_0 \neq 0$ . Рассуждаем от противного. Допустим, что  $E \neq qQ/r_-$ . Если  $s \neq 0$  и  $w \neq 0$ , то, подставляя (18) в (15) и (16) и выписывая коэффициенты при наименьших степенях  $y$ , получаем  $s = w$  и затем

$$\begin{aligned} a_0 s &= 2r_- p^2 b_0 \left( E - \frac{qQ}{r_-} \right), \\ b_0 s &= -2r_- p^2 a_0 \left( E - \frac{qQ}{r_-} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Перемножая эти соотношения, имеем

$$s^2 = -4r_-^2 p^4 \left( E - \frac{qQ}{r_-} \right)^2. \quad (20)$$

Условие (20) может выполняться только при справедливости (17) и  $s = 0$ , что противоречит сделанным предположениям. Пусть теперь одна из величин  $s$  или  $w$  равна нулю, для примера положим  $s = 0$ . Тогда из (15) получаем, что  $w \geq 1$ . Но это значение будет противоречить уравнению (16), так как при коэффициенте  $(E - qQ/r_-)$  степень  $y$  равна  $s = 0$ , а в первом члене показатель степени  $w \geq 1$ . Аналогично рассматривается случай  $w = 0$ . Мы опять пришли к противоречию. Следовательно, единственное условие, при котором удовлетворяются уравнения (15) и (16), задается соотношением (17). Таким образом, заряд под внутренним горизонтом черной дыры Рейснера–Нордстрема в стационарном состоянии  $\propto e^{-iEt}$  может иметь только одно фиксированное значение энергии. Несмотря на то что при  $r \rightarrow r_-$  решение системы (15), (16) при условии (17) формально существует, оно не может соответствовать реальной физической ситуации из-за расходимости нормировочного интеграла (12) на горизонте  $r_-$ . Действительно, при условии (17) легко получить точные решения уравнений (15), (16):

$$g = C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y}, \quad (21)$$

где  $\lambda = 2p\sqrt{k^2 + r_-^2 m^2}$ , а  $h(r)$  выражается через  $g(r)$  из (15). Для сходимости (12) необходимо выбрать  $C_1 = -C_2$ , но тогда  $h \rightarrow \text{const}$  при  $r \rightarrow r_-$ . Аналогично, при  $h \rightarrow 0$  получаем  $g \rightarrow \text{const}$ . В обоих случаях (12) расходится.

Аналогично случаю черной дыры Шварцшильда [13] система (15), (16) при  $E \neq qQ/r_-$  и  $y \rightarrow 0$  имеет нерегулярное решение

$$g = C \sin(\alpha \ln y + \delta), \quad h = C \cos(\alpha \ln y + \delta), \quad (22)$$

где  $C$  и  $\delta$  — константы,  $\alpha = 2r_- p^2 (E - qQ/r_-)$ . Но для этого решения  $|g|^2 + |h|^2 = |C|^2$ , и (12) расходится на горизонте.

Решение на бесконечности  $r \rightarrow \infty$  те же, что и в случае обычного атома водорода:

$$g = C_1 e^{-ir\sqrt{E^2 - m^2}} + C_2 e^{ir\sqrt{E^2 - m^2}}, \quad (23)$$

а  $h = -(E + m)^{-1} dg/dr$ . Локализованное экспоненциально убывающее решение существует только при  $|E| < m$ , т.е. взаимодействие частицы с центральным зарядом должно иметь характер притяжения с отрицательным вкладом в  $E$ .

Для исследования решения у горизонта  $r \rightarrow r_+$  обозначим  $y = (r/r_+ - 1)^{1/2}$  и  $p = (1 - r_-/r_+)^{-1/2}$ . Соответствующие уравнения исследуем аналогично (15) и (16) и получаем, что у заряда имеется единственный уровень энергии

$$E = \frac{qQ}{r_+}, \quad (24)$$

который был указан в работе [15], однако (12) опять расходится. Вывод о расходимости нормировочного интеграла внешнего решения на горизонте был также сделан в работе [15].

Расходимость на горизонтах указывает на возможность нестационарных решений, которые с течением времени локализуются на горизонтах, а их энергии стремятся к (24) и (17). Резонансные квазистационарные уровни вне черной дыры исследованы в ряде работ, где трудность с поведением на горизонте обходилась с помощью перехода к новой переменной  $dr^*/dr = f(r)$ , отодвигающего горизонт на  $r^* = -\infty$ , см. [10]. Однако строго стационарных уровней, которые мы обсуждаем в данной статье, не существует из-за указанной расходимости на горизонте.

Отличие атомов, имеющих набор уровней, от водородоподобных атомов обусловлено изменением граничных условий для уравнения Дирака. Квантование в атоме водорода следует из конечности волновой функции или нормировочного интеграла вероятности. Наличие горизонта событий изменяет вид граничных условий и уравнений, что имеет следствием существование всего одного уровня энергии для строго стационарного решения.

#### 4. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

В случае экстремальной черной дыры  $M = |Q|$  оба горизонта совпадают:  $r_- = r_+ = r_h = M$ . Это

изменяет граничное условие и, как мы сейчас покажем, создает условия для существования физически приемлемого решения. Решение в центре при  $r \rightarrow 0$  имеет те же асимптотики (13) и (14). При  $r \rightarrow r_-$  с внутренней стороны вводим новую переменную  $y = f^{1/2} = (r_h/r - 1)$ , тогда уравнения (10) и (11) примут вид

$$y^2(1+y)^2 \frac{dh}{dy} - hky(1+y) + gr_h \left[ E - \frac{qQ(1+y)}{r_h} - my \right] = 0, \quad (25)$$

$$y^2(1+y)^2 \frac{dg}{dy} + gky(1+y) - hr_h \left[ E - \frac{qQ(1+y)}{r_h} + my \right] = 0. \quad (26)$$

Входящие в (25) и (26) комбинации величин в обычных физических единицах можно переписать через безразмерные параметры следующим образом:

$$mr_h \rightarrow \mu \equiv \frac{mM}{M_{Pl}^2}, \quad qQ \rightarrow \nu \equiv \frac{qQ}{\hbar c}. \quad (27)$$

Также можно записать  $\mu = R_g/2l_C$ , где  $R_g$  — шварцшильдовский радиус, а  $l_C$  — комптоновская длина волны частицы [13]. Аналогично предыдущему доказывается, что для регулярного решения

$$E = \frac{qQ}{r_h}. \quad (28)$$

Тогда при  $y \rightarrow 0$  уравнения (25) и (26) имеют асимптотическое решение

$$g = C_1 y^\varkappa + C_2 y^{-\varkappa}, \quad \varkappa = \sqrt{k^2 + \mu^2 - \nu^2}. \quad (29)$$

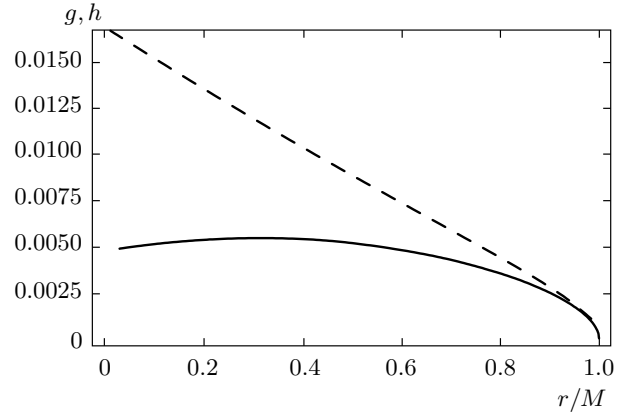
Физическими являются решения с  $C_2 = 0$ , так как часть решения при  $C_2 \neq 0$  дает расходящийся вклад в (12), подобно рассмотренному выше случаю с неэкстремальными черными дырами. Тогда

$$h = C_1 y^\varkappa \frac{k + \varkappa}{\mu - \nu}. \quad (30)$$

Вклад (30) в (12) конечен при условии  $2\varkappa - 2 > -1$ , которое можно переписать в виде

$$k^2 + \mu^2 - \nu^2 > \frac{1}{4}. \quad (31)$$

Отсюда следует, что состояние с  $k = 0$  запрещено, если  $1/4 + \nu^2 - \mu^2 \geq 0$ . Ввиду принципа исключения Паули, каждый из найденных квантовых уровней



Волновые функции  $g(r)$  (сплошная кривая) и  $h(r)$  (штриховая) под горизонтом экстремальной черной дыры при  $k = 1$ . Для примера выбраны параметры  $\mu = 1$ ,  $\nu = -0.5$  и решения нормированы с помощью (12)

может быть заполнен двумя идентичными частицами-фермионами. Численное решение уравнений (10) и (11) для внутренней области  $r < r_h$  показано на рисунке.

Нерегулярное решение при  $E \neq qQ/r_h$  и  $y \rightarrow 0$  в данном случае имеет вид

$$g = -C \sin(\alpha/y + \delta), \quad h = C \cos(\alpha/y + \delta), \quad (32)$$

где  $\alpha = r_h(E - qQ/r_h)$ . Для этого решения  $|g|^2 + |h|^2 = |C|^2$ , и (12) расходится.

Для исследования случая  $r \rightarrow r_h$  с внешней стороны положим  $y = f^{1/2} = 1 - r_h/r$ . Соответствующие уравнения являются самосогласованными при том же значении (28) и при условии (31), имеют физически приемлемое (с конечным интегралом (12)) решение

$$g = C_1 y^\varkappa, \quad h = C_1 y^\varkappa \frac{k - \varkappa}{\mu + \nu}. \quad (33)$$

Решения (30) и (33) теряют смысл соответственно при  $\mu = \pm \nu$ . Поскольку черная дыра является экстремальной с  $M = |Q|$ , условия  $\mu = \pm \nu$  означают экстремальность самой частицы  $m = |q|$ . Для обычных частиц, таких как протон или электрон, это равенство, конечно, не выполняется. Для них  $m \ll |q|$ , но само понятие экстремальности теряет смысл из-за вклада квантовых эффектов. Решение уравнения Дирака в метрике классической голый сингулярности Рейснера–Нордстрема с  $|Q| > M$  было найдено численным методом в работе [15].

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе показано, что стационарное регулярное решение для фермиона имеет под внутренним горизонтом Коши уровень энергии  $E = qQ/r_-$ , где  $q$  и  $Q$  — заряды соответственно частицы и черной дыры, а  $r_-$  — радиус горизонта Коши. Наличие единственного уровня обусловлено свойствами волнового уравнения при стремлении к горизонту Коши с внутренней стороны. Вне горизонта событий также имеется единственный регулярный уровень с энергией  $E = qQ/r_+$ , а решение на бесконечности соответствует решению для атома водорода. Но оказалось, что интеграл вероятности расходится на горизонтах  $r_{\pm}$ , и поэтому волновые функции не могут быть нормированы на единицу. Этот факт может означать, что реальное решение лишь асимптотически стремится к найденным стационарным решениям, а частица при этом стремится локализоваться на горизонтах. Если не учитывать квантовое туннелирование, то, как известно, процесс падения частицы под горизонт по часам удаленного наблюдателя займет бесконечно большое время. Соответственно, и локализация частицы на горизонте будет происходить лишь асимптотически на больших временах. В экстремальном случае  $|Q| = M$  энергии внутреннего и внешнего уровней принимают одинаковые значения  $E = qQ/r_h$ , где  $r_h$  — радиус горизонта экстремальной черной дыры. В отличие от случая неэкстремальной черной дыры, при  $|Q| = M$  существует физически приемлемое решение с нормированными волновыми функциями как внутри (под горизонтом Коши), так и снаружи от черной дыры.

Рассмотренные стационарные решения уравнения Дирака демонстрируют возможность существования черных дыр с зарядами на внутренних квантовых орбитах. Другим вариантом является голая сингулярность, вокруг которой в стационарном состоянии распределен заряд [15]. Если  $q = -Q$ , где  $q$  — суммарный заряд частиц на квантовых уровнях, то внешняя метрика такой системы является метрикой Шварцшильда. Для внешнего наблюдателя система нейтральна и слабо взаимодействует с окружающим веществом. Если такие системы к тому же и стабильны (что требует дополнительного исследования) и рождались эффективно в ранней Вселенной, то они могли бы быть кандидатами на роль частиц темной материи. В работе [14] рассматривалась дираковская частица вне горизонта нейтральной черной дыры Шварцшильда, и была также высказана идея о таких системах как частицах темной материи. Однако если черная дыра нейтральна, а частица заря-

жена, то система несет ненулевой суммарный электрический заряд и будет взаимодействовать посредством этого заряда с окружающим веществом. В случае черной дыры Рейснера–Нордстрема с  $q = -Q$  соответствующие частицы-кандидаты темной материи электрически нейтральны и взаимодействуют очень слабо.

Если у черной дыры имеются внутренний и внешний уровни энергии, то возможны квантовые переходы между этими уровнями. Это позволяет заряду, падающему в черную дыру Рейснера–Нордстрема, задерживаться на квантовом уровне под горизонтом Коши и, возможно, туннелировать наружу или во внутреннюю вселенную. Квантовый переход частицы с внешнего стационарного энергетического уровня (24) на соответствующий внутренний уровень (17) можно рассматривать в качестве аналога классического падения частицы внутрь черной дыры. У экстремальной черной дыры энергии на внешнем и внутреннем уровнях равны, поэтому при квантовом переходе энергия не выделяется. В случае неэкстремальной черной дыры при переходах между квазистационарными уровнями возможно выделение энергии

$$\begin{aligned} \Delta E = E_- - E_+ &= qQ \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) = \\ &= \frac{2Mc^2q}{Q} \sqrt{1 - \frac{Q^2}{GM^2}}, \quad (34) \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы восстановили физические размерности величин. Видно, что при  $q^2 \sim \sim Q^2 \ll GM^2$  при таких переходах может высвечиваться большая энергия. Если рассматриваемые системы являются частицами темной материи, то спонтанные переходы могли бы производить высокоэнергетичные частицы, возможно, дающие вклад в космические лучи сверхвысоких энергий. Для экстремальной черной дыры подобного выделения энергии не будет, так как  $\Delta E = 0$ . Эти переходы могут оказаться принципиально важными на финальной стадии хоукинговского испарения черной дыры, поскольку они влияют на фазовые объемы конечных и промежуточных состояний частиц, рождающихся в процессе испарения. Наличие обнаруженных нами квантовых уровней является необходимым условием для указанных квантовых переходов, но сама возможность таких переходов, конечно, требует дополнительного исследования и обоснования. Переходы между уровнями, в том числе и через горизонт, могут происходить путем квантового туннелирования с вероятностью, пропорциональной  $\exp(-2\text{Im}S)$ , где

действие  $S = \int dr p_r(r)$  вычисляется по квазиклассической траектории [26, 27]. Отметим также принципиальную возможность исследования внутренней структуры черных дыр с использованием квантового туннелирования между внешними и внутренними состояниями.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 8525), гранта НШ-871.2012.2 и РФФИ (грант № 13-02-00257-а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. Fock, Z. Physik **57**, 261 (1929); V. Fock and D. Iwanenko, Z. Physik **54**, 798 (1929).
2. С. Вейнберг, *Гравитация и космология*, Платон, Волгоград (2000).
3. D. R. Brill and J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. **29**, 465 (1957).
4. B. Mukhopadhyay, Class. Quant. Grav. **17**, 2017 (2000).
5. V. A. Berezin, *Neutrino Forces and the Schwarzschild Metric*, Препринт ИЯИ АН СССР (1975).
6. A. Burinskii, Grav. Cosmol. **14**, 109 (2008).
7. N. Deruelle and R. Ruffini, Phys. Lett. B **52**, 437 (1974).
8. И. М. Тернов и др., Изв. вузов. Физика **9**, 109 (1978).
9. L. A. Kofman, Phys. Lett. A **87**, 281 (1982).
10. M. Soffel, B. Muller, and W. Greiner, J. Phys. A: Math. Gen. **10**, 551 (1977).
11. И. М. Тернов, А. Б. Гайна, Г. А. Чижев, Изв. вузов. Физика **8**, 56 (1980).
12. Д. В. Гальцов, Г. В. Померанцева, Г. А. Чижев, Изв. вузов. Физика **8**, 75 (1983).
13. M. V. Gorbatenko and V. P. Neznamov, arXiv:1205.4348 [gr-qc].
14. M. A. Vronsky et al., arXiv:1301.7595 [gr-qc].
15. V. Dzhusunshaliyev, arXiv:1202.5100 [gr-qc].
16. С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*, Мир, Москва (1980), ч. 1, гл. 5.
17. V. I. Dokuchaev, Class. Quant. Grav. **28**, 235015 (2011).
18. J. Bičák, Z. Stuchlík, and V. Balek, Bull. Astron. Inst. Czechosl. **40**, 65 (1989); *ibid* **40**, 133 (1989).
19. E. Hackmann et al., Phys. Rev. D **81**, 044020 (2010).
20. S. Grunau and V. Kagramanova, Phys. Rev. D **83**, 044009 (2011).
21. M. Olivares et al., arXiv:1101.0748 [gr-qc].
22. B. J. Carr, J. H. Gilbert, and J. E. Lidsey, Phys. Rev. D **50**, 4853 (1994).
23. A. D. Dolgov, P. D. Naselsky, and I. D. Novikov, arXiv:astro-ph/0009407.
24. B. J. Carr, Lect. Notes Phys. **631**, 301 (2003); arXiv:astro-ph/0310838.
25. М. А. Марков, ЖЭТФ **51**, 878 (1966).
26. Г. Е. Воловик, Письма в ЖЭТФ **69**, 662 (1999).
27. Y. Miao, Z. Xue, and S. Zhang, Europhys. Lett. **96**, 10008 (2011).