

РОЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ ПРИ ГЕНЕРАЦИИ ИМПУЛЬСОВ ТЕРАГЕРЦЕВОГО ПОЛЯ СВЕТОВЫМИ ПОЛЯМИ

*А. А. Заболотский**

*Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
690090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 17 мая 2012 г.,
после переработки 26 февраля 2013 г.

Рассматривается генерация микроволновых (терагерцевых) импульсов без огибающей в четырехуровневой квазирезонансной среде. Два мощных лазерных квазимонохроматических поля приводят к частичной населенности верхних уровней. Импульсы микроволнового поля вызывают переход между этими уровнями. Показано, что при соответствующем выборе масштабов эволюция полей описывается уравнениями эволюции псевдоспина в микроволновом поле с учетом нелинейной рефракции, вызванной адиабатической заселенностью верхних уровней. Эволюция импульсов терагерцевого поля описывается вне рамок приближения медленных огибающих. Показано, что при учете ряда стандартных приближений эта система уравнений эквивалентна интегрируемому варианту обобщенных редуцированных уравнений Максвелла–Блоха или обобщенным уравнениям трехволнового смещения. На примере солитонного решения, найденного методом обратной задачи рассеяния, показано, что нелинейная рефракция приводит к сильному сжатию солитона микроволнового (терагерцевого) поля.

DOI: 10.7868/S0044451013070018

1. ВВЕДЕНИЕ

Самоиндуцированная прозрачность в двухуровневых и трехуровневых атомных системах является одним из самых известных явлений, ассоциируемых с распространением когерентных импульсов, оптических солитонов [1–6]. Такие импульсы, в особенности сверхкороткие, для описания которых не применяется приближение медленных огибающих, представляют интерес для многих приложений [6]. Резонансное взаимодействие с оптическими системами с тремя и более уровнями дает дополнительные возможности управления параметрами импульсов, по сравнению с простейшей двухуровневой средой. Одно из применений резонансного поглотителя, который может быть моделирован трехуровневой или четырехуровневой средой, состоит в контроле микроволнового или терагерцевого излучения мощными лазерными полями.

Внутрирезонаторный поглотитель, состоящий из квантовых ям GaAs, длительное время успешно используется для генерации сверхкоротких импуль-

сов [7], а также как внутрирезонаторный когерентный терагерцевый эмиттер [8]. Оптическая схема, моделирующая такой процесс, может состоять из внутрирезонаторной трехуровневой или четырехуровневой среды с близкими дипольными моментами оптических переходов в зону проводимости и переходами в валентной зоне [9]. Этот процесс может контролироваться благодаря тому, что взаимодействие в валентной зоне может управляться постоянным током [9, 10]. Солитоноподобные решения, описывающие смещение световых и терагерцевых полей в таких средах, указывают на возможность применения последних для генерации ультракоротких импульсов в оптическом диапазоне и импульсов терагерцевого поля [11]. Как правило, для практических целей требуются импульсы терагерцевого поля с небольшим числом осцилляций, т. е. описываемые вне рамок приближения медленных огибающих и вращающейся волны. Динамика резонансных трехуровневых систем вне рамок приближения вращающейся волны численно изучалась для мощных бихроматических полей в работе [12]. В работе [11] рассматривалось взаимодействие нестационарных, сильных электромагнитных полей в трехуровневой среде, действие которых приводило к самоиндуци-

*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

рованной прозрачности вследствие того, что населенности верхних уровней адиабатически следовали внешним полям. Аналогичные эффекты изучались ранее в рамках приближения вращающейся волны и медленных огибающих в работе [13]. В результате численного моделирования обнаружено [13, 14] и экспериментально проверено [15], что адиабатическая инверсия трехуровневой системы посредством двухфотонного резонансного возбуждения является эффективным механизмом возбуждения верхних уровней.

Важнейшей характеристикой явления самоиндуцированной прозрачности является полная интегрируемость описывающих ее моделей — как простейших уравнений Максвелла–Блоха [2], так и их обобщений [4–6]. Применение метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [16, 17] к этим моделям позволяет получить наиболее детальную информацию об эволюции и параметрах импульсов электромагнитного поля, в том числе в сильно нелинейной стадии взаимодействия.

В настоящей работе рассматривается четырехуровневая схема резонансной среды, поскольку такая схема представляется более удобной для реализации в эксперименте, чем трехуровневая. В то же время приведенный здесь вывод уравнений модели может быть использован и для трехуровневой среды. Целью настоящей работы является построение полностью интегрируемой модели генерации импульсов микроволнового, терагерцевого поля без огибающей двумя световыми квазимонохроматическими мощными полями. Работа построена следующим образом. В разд. 2 приводится вывод основных уравнений модели. В разд. 3 дано представление нулевой кривизны модели и приведен аппарат МОЗР, ассоциированный с этим представлением и начальными краевыми условиями. В разд. 4, 5 приводятся солитонные решения. В последнем разделе обсуждаются полученные результаты.

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваем четырехуровневую схему среды, взаимодействующей с тремя электромагнитными полями с амплитудами E_{20} , E_{13} и E_{23} в соответствии с правилами отбора, см. рис. 1. В работе предполагается, что длительность импульсов много меньше времен релаксации, поэтому достаточно рассмотреть уравнения для комплекснозначных функций $\psi_j(x, t)$, описывающих чистое состояние уровня j квантовой системы. Эти уравнения имеют вид [18]

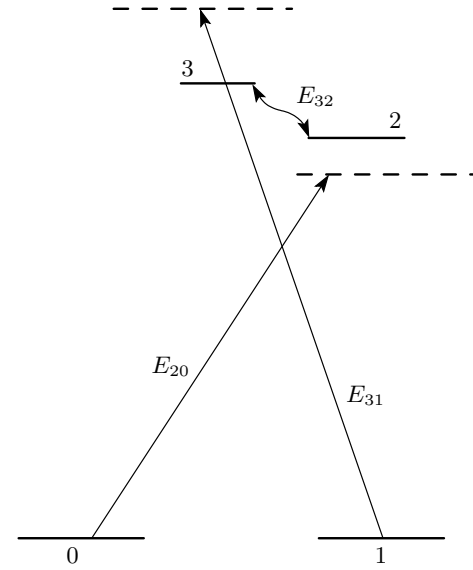


Рис. 1. Схема взаимодействия. Горизонтальные сплошные линии показывают положение уровней энергии, штриховые — положение энергий $\hbar\omega_{20}$, $\hbar\omega_{31}$ соответствующих световых полей. Прямые стрелки — переходы, вызванные световыми полями, волнистая стрелка — переход, вызванный терагерцевым полем

$$\partial_t \psi_1 = -i\omega_1 \psi_1 + i \frac{d_{13} E_{13}}{\hbar} \psi_3 + i \frac{d_{12} E_{12}}{\hbar} \psi_2, \quad (1)$$

$$\partial_t \psi_2 = -i\omega_2 \psi_2 + i \frac{d_{23} E_{23}}{\hbar} \psi_3 + i \frac{d_{20} E_{20}}{\hbar} \psi_0, \quad (2)$$

$$\partial_t \psi_3 = -i\omega_3 \psi_3 + i \frac{d_{32} E_{32}}{\hbar} \psi_2 + i \frac{d_{31} E_{31}}{\hbar} \psi_1. \quad (3)$$

Здесь $E_{ij} = E_{ij}^*$, $d_{ij} = d_{ji}^*$ — дипольный момент перехода $i \leftrightarrow j$, $\hbar\omega_j$ — энергия j -го уровня. Матрица плотности среды ρ_{ij} — усредненное произведение амплитуд состояний $\psi_i \psi_j^*$ [3].

Считаем поля E_{20} , E_{13} квазимонохроматическими с соответствующими несущими частотами ω_{20} и ω_{31} , такими что $\omega_{20}, \omega_{31} \gg |\omega_{23}|$, где $\omega_{23} = \omega_2 - \omega_3$. Сделаем замены в системе (1)–(3):

$$\begin{aligned} E_{20} &= \mathcal{E}_{20} e^{-i\omega t}, & E_{31} &= \mathcal{E}_{31} e^{-i\omega t}, \\ \psi_3 &= \phi_3 e^{-i\omega t}, & \psi_2 &= \phi_2 e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ω — частота, близкая к несущим частотам квазимонохроматических полей E_{31} и E_{20} , такая что

$$\omega_{20} \gg |\omega_{20} - \omega| \gg |\omega_{23}|, \quad \omega_{31} \gg |\omega_{31} - \omega| \gg |\omega_{23}|.$$

Энергии нижних уровней 1 и 0 для простоты положим равными нулю: $\omega_1 = \omega_0 = 0$. Учет небольшого, порядка $\hbar\omega_{23}$, различия этих энергий приводит лишь к сдвигу расстройки в конечных уравнениях.

При выводе модели используем стандартное адиабатическое исключение уровней [18, 19] для оптических переходов. Поскольку по предположению расстройки $\omega_3 - \omega$, $\omega_2 - \omega$ достаточно велики, уровни 2 и 3 можно адиабатически исключить, т. е. положить $\partial_t \psi_2 = \partial_t \psi_3 = 0$ [18]. Введем обозначения:

$$\mu_{20} = \frac{d_{20}}{\hbar(\omega_2 - \omega)}, \quad (5)$$

$$\mu_{31} = \frac{d_{31}}{\hbar(\omega_3 - \omega)}, \quad (6)$$

$$\mu_{32} = \frac{d_{32}}{\hbar(\omega_3 - \omega)}, \quad (7)$$

$$\mu_{23} = \frac{d_{23}}{\hbar(\omega_2 - \omega)}. \quad (8)$$

Считаем амплитуду поля E_{23} малой по сравнению с амплитудами полей накачки:

$$\mu_{23} E_{23} \ll \mu_{20} \mathcal{E}_{20} \sim \mu_{31} \mathcal{E}_{31}. \quad (9)$$

С учетом (9) находим в нулевом приближении из (2), (3):

$$\phi_2^{(0)} \approx \mu_{20} \mathcal{E}_{20} \phi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (10)$$

$$\phi_3^{(0)} \approx \mu_{31} \mathcal{E}_{31} \phi_1 + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (11)$$

где ε — малый параметр. В следующем приближении находим, проводя итерации,

$$\phi_2^{(1)} \approx \mu_{20} \mathcal{E}_{20} \phi_0 + \mu_{23} E_{23} \mu_{31} \mathcal{E}_{31} \phi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (12)$$

$$\phi_3^{(1)} \approx \mu_{31} \mathcal{E}_{31} \phi_1 + \mu_{32} E_{32} \mu_{20} \mathcal{E}_{20} \phi_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (13)$$

В конечные уравнения входит разность первых членов в правых частях уравнений (12) и (13), которая имеет порядок ε , поэтому сохраняем первый и второй члены в правых частях этих уравнений.

Положим без потери общности $\psi_0 = \psi_1 = 1$. Используя выражения (12) и (13), находим

$$i\omega_{23} \rho_{23} = \left[-\frac{id_{23}E_{23}}{\hbar} (|\mu_{20}\mathcal{E}_{20}|^2 - |\mu_{31}\mathcal{E}_{31}|^2) + \frac{i\mathcal{E}_{20}\mathcal{E}_{13}}{\hbar} (d_{20}\mu_{13} - d_{13}\mu_{20}) \right] (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)), \quad (14)$$

где $\rho_{23} = \psi_2 \psi_3^* = \phi_2 \phi_3^* = \rho_{32}^*$ и $\gamma_{23} = \gamma_2 + \gamma_3$.

Далее, предполагая, что длительности импульсов полей много меньше времен релаксации, последней пренебрегаем ($\gamma_2 = \gamma_3 = 0$). Тогда из (14), пренебрегая поправкой порядка ε , находим

$$d_{23} \rho_{32} + d_{32} \rho_{23} = [-\kappa_0 (d_{23} + d_{32}) \Omega_{23} (|\Omega_{20}|^2 - |\Omega_{31}|^2) + d_{23} \Omega_{02} \Omega_{31} + d_{32} \Omega_{20} \Omega_{13}], \quad (15)$$

где $\kappa_0 = \pm 1$ и введены безразмерные амплитуды полей:

$$\Omega_{23} = \frac{d_{23} E_{23}}{\hbar|\omega_2 - \omega_3|}, \quad \Omega_{20} = \frac{d_{20} E_{20}}{\hbar(\omega_2 - \omega)}, \quad (16)$$

$$\Omega_{31} = \frac{d_{31} E_{31}}{\hbar(\omega_3 - \omega)}.$$

В приближении медленных огибающих находим из уравнений Максвелла для медленных амплитуд полей E_{20} и E_{31} :

$$2ik_0 \left(\partial_x + \frac{\omega}{c^2 k_0} \partial_t \right) \mathcal{E}_{20} = \frac{4\pi N \omega^2 d_{20}}{c^2} \tilde{\rho}_{20}, \quad (17)$$

$$2ik_0 \left(\partial_x + \frac{\omega}{c^2 k_0} \partial_t \right) \mathcal{E}_{31} = \frac{4\pi N \omega^2 d_{31}}{c^2} \tilde{\rho}_{31}, \quad (18)$$

где N — плотность резонансной среды и

$$\tilde{\rho}_{20} = \phi_2 \psi_0^* \approx \phi_2, \quad (19)$$

$$\tilde{\rho}_{31} = \phi_3 \psi_1^* \approx \phi_3 \quad (20)$$

— медленные огибающие поляризуемостей соответствующих переходов для одной молекулы.

Подставив $\omega = ck_0 n(\omega)$ и значения (19), (20) в уравнения (17), (18), с учетом выражений (12) и (13) получаем:

$$\left(\partial_x + \frac{n(\omega)}{c} \partial_t \right) \mathcal{E}_{20} = -\frac{2i\pi N d_{20}}{c^2 k_0} [\mu_{20} \mathcal{E}_{20} + \mu_{23} \mu_{31} \mathcal{E}_{23} \mathcal{E}_{31}], \quad (21)$$

$$\left(\partial_x + \frac{n(\omega)}{c} \partial_t \right) \mathcal{E}_{31} = -\frac{2i\pi N d_{31}}{c^2 k_0} [\mu_{31} \mathcal{E}_{31} + \mu_{32} \mu_{20} \mathcal{E}_{32} \mathcal{E}_{20}]. \quad (22)$$

Перейдем в этих уравнениях к безразмерным амплитудам полей и безразмерным переменным:

$$\partial_{\zeta_0} \Omega_{20} = -i\alpha_{20} \Omega_{20} - i\beta_{20} \Omega_{23} \Omega_{31}, \quad (23)$$

$$\partial_{\zeta_0} \Omega_{31} = -i\alpha_{31} \Omega_{31} - i\beta_{31} \Omega_{32} \Omega_{20}, \quad (24)$$

где

$$\alpha_{20} = \frac{2\pi N d_{20}^2}{c^2 k_0 \hbar (\omega_2 - \omega)}, \quad \beta_{20} = \alpha_{20} \frac{|\omega_2 - \omega_3|}{\omega_2 - \omega}, \quad (25)$$

$$\alpha_{31} = \frac{2\pi N d_{31}^2}{c^2 k_0 \hbar (\omega_3 - \omega)}, \quad \beta_{31} = \alpha_{31} \frac{|\omega_2 - \omega_3|}{\omega_3 - \omega}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_0} = \frac{c_0}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \quad (27)$$

и $c_0 = c/n(\omega)$.

Введем псевдоспин $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$, $S = S_1 + iS_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= \Omega_{13}\Omega_{20}\eta, & S_3 &= |\eta|^2|\Omega_{13}|^2 - |\Omega_{20}|^2, \\ S_0 &= |\eta|^2|\Omega_{13}|^2 + |\Omega_{20}|^2, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\eta^2 = \beta_{20}/\beta_{31}$. Тогда из системы уравнений (23), (24) получаем уравнения вращения псевдоспина \mathbf{S} во внешнем поле:

$$\frac{\partial S_1}{\partial \zeta_0} = -\nu_0 S_2, \quad (29)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial \zeta_0} = \nu_0 S_1 - \mathcal{E} S_3, \quad (30)$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial \zeta_0} = \mathcal{E} R_2, \quad (31)$$

где $\mathcal{E} = 2\beta\Omega_{23}$, $\nu_0 = \alpha_{31} - \alpha_{20}$ и S_0 — инвариант, такой что

$$\frac{\partial S_0}{\partial \zeta_0} = 0. \quad (32)$$

Из уравнений (2), (3) видно, что в случае комплексного дипольного момента $d_{23} = |d_{23}|e^{ip}$, фазовый множитель e^{ip} может быть удален с помощью сдвига фаз полей E_{13}, E_{20} . Поэтому далее считаем дипольный момент d_{23} действительной константой. Используя обозначения (28), перепишем выражение (15) в виде

$$\begin{aligned} d_{23}\rho_{23} + d_{32}\rho_{23} &= 2d_{23} \times \\ &\times \left\{ -\kappa_0 \frac{\mathcal{E}}{4\beta} [(\eta^2+1)S_3 + (\eta^2-1)S_0] + \frac{S_1}{\eta} \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Уравнения Максвелла для микроволнового поля вне рамок приближения медленных огибающих в одномерной протяженной среде приводятся к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{23}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_{23}^2} \frac{\partial^2 E_{23}}{\partial t^2} &= \\ &= \frac{4\pi N}{c_{23}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (d_{23}\rho_{23} + d_{32}\rho_{23}), \end{aligned} \quad (34)$$

где $c_{23} = c/n(\omega_{23})$. Для перехода к безразмерным переменным перепишем уравнение (34) с учетом (33) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_0 \partial}{\omega \partial x} + \frac{c_0}{c_{23}} \frac{\partial}{\partial \omega t} \right) \left(\frac{c_0 \partial}{\omega \partial x} - \frac{c_0}{c_{23}} \frac{\partial}{\partial \omega t} \right) \mathcal{E} &= \\ &= \frac{16c_0^2 \beta \pi d_{23}^2 N}{c_{23}^2 \eta \hbar |\omega_2 - \omega_3|} \frac{\partial^2}{\partial (\omega t)^2} \left[-\kappa_0 \frac{\eta(\eta^2+1)}{4\beta} \mathcal{E} S_3 + S_1 \right] - \\ &- \kappa_0 \frac{4c_0^2 \pi d_{23}^2 N (\eta^2-1)}{c_{23}^2 \hbar |\omega_2 - \omega_3|} \frac{\partial^2}{\partial (\omega t)^2} (\mathcal{E} S_0). \end{aligned} \quad (35)$$

Последнее слагаемое в правой части уравнения (35) приводит лишь к изменению фазовой скорости поля. Формально его нетрудно учесть в конечных уравнениях простой перенормировкой параметров. Однако в рамках примененных здесь приближений учет этого члена был бы превышением точности. В рамках примененных приближений, как будет видно из дальнейшего, это слагаемое имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$, в то время как остальные части уравнения (35) — порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$.

Выберем в качестве малого параметра отношение

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2}, \quad \varepsilon_n = \frac{|\omega_3 - \omega_2|}{\omega_n - \omega} \ll 1, \quad n = 2, 3. \quad (36)$$

Из (36) имеем $\varepsilon_n = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Пусть

$$\begin{aligned} \max |\Omega_{23}| &= \frac{d_{23} \max |E_{23}|}{\hbar |\omega_2 - \omega_3|} \sim 1, \\ \max |\Omega_{20}| &= \frac{d_{20} \max |E_{20}|}{\hbar (\omega_2 - \omega)} \sim \varepsilon^{1/2}, \\ \max |\Omega_{31}| &= \frac{d_{31} \max |E_{31}|}{\hbar (\omega_3 - \omega_1)} \sim \varepsilon^{1/2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку $\varepsilon_n = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, имеем $\varepsilon^{1/2}\Omega_{20} \sim \varepsilon^{1/2}\Omega_{31} \sim \Omega_{23}$. Это условие отвечает сильным, по сравнению с микроволновым, полям:

$$\max |\mathcal{E}_{20}|, \max |\mathcal{E}_{31}| \gg \max |E_{23}|,$$

при условии $d_{20} \sim d_{13} \sim d_{23}$.

Введем новые переменные $\mathcal{E}(\zeta_+, \zeta_-)$, $\mathbf{S}(\zeta_+, \zeta_-)$, отвечающие приближению квазиоднонаправленного распространения импульсов полей:

$$\zeta_+ = \varepsilon^2 \frac{\omega}{c_0} (x + c_{23}t), \quad \zeta_- = -\varepsilon \frac{\omega}{c_0} (x - c_{23}t), \quad (38)$$

где $c_{23} = c/n(\omega_{23})$. Для переменных (38) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{S} &= \\ &= \left[\varepsilon \left(\frac{c_{23}}{c_0} - 1 \right) \partial_{\zeta_-} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S} = \left[\varepsilon \frac{c_{23}}{c_0} \partial_{\zeta_-} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \mathbf{S}, \quad (40)$$

$$\frac{c_0}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_{23}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E} = 2\varepsilon^2 \partial_{\zeta_+} \mathcal{E}, \quad (41)$$

$$\frac{c_0}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_{23}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E} = -2\varepsilon \partial_{\zeta_-} \mathcal{E}. \quad (42)$$

Считаем, что фазовые скорости полей E_{20} и E_{13} совпадают и отличаются от фазовой скорости микроволнового (терагерцевого) поля E_{23} на величину порядка единицы: $|c_0 - c_{23}|/c_0 \sim 1$. Из (25), (26) видно, что коэффициенты $\beta_{20} \approx \alpha_{20}\varepsilon$ и $\beta_{31} \approx \alpha_{31}\varepsilon$. Поэтому для $\alpha_{20} \sim \alpha_{31} \sim 1$ имеем $\beta_{20} \sim \beta_{31} \sim \varepsilon$ и $\mathbf{S} \sim \varepsilon$. Подставив эти значения коэффициентов и выражение (40) в систему уравнений (29)–(31), получаем систему, в которой правая и левая части порядка ε^2 . После сокращения ε^2 получаем из (29)–(31):

$$\frac{\partial R_1}{\partial \zeta} = -\nu R_2, \quad (43)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \zeta} = \nu R_1 - \mathcal{F}R_3, \quad (44)$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial \zeta} = \mathcal{F}R_2, \quad (45)$$

где

$$\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3) = \varepsilon \mathbf{S}, \quad \zeta = \zeta_- / (c_{23}/c_0 - 1),$$

$$\nu = \nu_0/\varepsilon, \quad \mathcal{F} = 2\alpha\Omega_{23}, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_{20}\alpha_{31}}.$$

Отметим, что ν и $\max|\mathcal{F}|$ порядка единицы.

С учетом замены \mathbf{S} на \mathbf{R} получаем из (34)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c_0 \partial}{\omega \partial x} + \frac{c_0}{c_{23}} \frac{\partial}{\partial \omega t} \right) \left(\frac{c_0 \partial}{\omega \partial x} - \frac{c_0}{c_{23}} \frac{\partial}{\partial \omega t} \right) \mathcal{E} = \\ & = \frac{16c_0^2 \beta \pi d_{23}^2 N}{c_{23}^2 \eta \hbar |\omega_2 - \omega_3|} \frac{\varepsilon \partial^2}{\partial(\omega t)^2} \times \\ & \quad \times \left[-\kappa_0 \frac{\eta(\eta^2 + 1)}{4\beta} \mathcal{E} R_3 + R_1 \right]. \quad (46) \end{aligned}$$

В новых переменных уравнение (46) с учетом (39)–(42) принимает вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \zeta_-} \frac{\partial}{\partial \zeta_+} \mathcal{F} &= \frac{4\alpha \pi d_{23}^2 N}{\eta \hbar |\omega_2 - \omega_3|} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_-^2} \times \\ & \times \left[-\kappa_0 \frac{\eta(\eta^2 + 1)}{4\alpha} \mathcal{F} R_3 + R_1 \right] [1 + \mathcal{O}(\varepsilon)]. \quad (47) \end{aligned}$$

Стандартное приближение однонаправленного распространения импульсов полей ассоциируется с малым параметром перед скобкой в правой части уравнения (47) (см., например, [5]). В данном наборе масштабов при применении этого приближения не используется предположение о малой плотности резонансной среды в отличие от аналогичного вывода редуцированных уравнений Максвелла–Блоха. Здесь оно является следствием малости \mathbf{S} . Интегрируя уравнение (47) с учетом асимптотик

$$\partial_{\zeta_{\pm}} \mathcal{F} \rightarrow 0, \quad \partial_{\zeta_-} \mathbf{R} \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (48)$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_+} \mathcal{F} = -\frac{\partial}{\partial \zeta_-} \left[-\kappa_0 \frac{\eta(\eta^2 + 1)}{4\alpha} \mathcal{F} S_3 + S_1 \right]. \quad (49)$$

В рассматриваемой модели $\nu \neq 0$. Используя (44), приводим уравнения (43)–(45) и (49) к конечной системе вида

$$\frac{\partial R_1}{\partial \tau} = -R_2, \quad (50)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \tau} = R_1 - UR_3, \quad (51)$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial \tau} = UR_2, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi} U &= -\frac{\partial}{\partial \tau} \left[-\kappa_0 \frac{\eta(\eta^2 + 1)}{4\alpha} UR_3 + R_1 \right] = \\ &= (1 + \nu^2 q) R_2 + \nu q \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R_2, \quad (53) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\nu c_0 \zeta_+}{c_{23} - c_0}, \quad \tau = \frac{\nu c_0 \zeta_-}{c_{23} - c_0}, \\ U &= \frac{\mathcal{F}}{\nu}, \quad q = -\frac{\kappa_0 \eta(\eta^2 + 1)}{4\alpha}. \quad (54) \end{aligned}$$

Отметим, что для выбранных масштабов $\nu q \sim 1$.

3. ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Интегрируемая система уравнений (50)–(53) эквивалентна частному случаю интегрируемой системы, найденной в работе [20], и представляет собой условие совместности линейных систем уравнений:

$$\partial_{\tau} \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda & i(1 + \gamma\lambda)W \\ i(1 - \gamma\lambda)W & i\lambda \end{pmatrix} \Phi, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{\chi}} \Phi &= \frac{1}{1 - 4\lambda^2} \times \\ & \times \begin{pmatrix} i\lambda(1 - \gamma^2\lambda^2)R_3 & a_- \\ a_+ & -i\lambda(1 - \gamma^2\lambda^2)R_3 \end{pmatrix} \Phi, \quad (56) \end{aligned}$$

$$a = i\lambda(1 - \gamma^2\lambda^2)R_3,$$

$$a_{\mp} = (1 \pm \gamma\lambda) \left[-\frac{i(1 - \lambda^2\gamma^2)}{\sqrt{4 - \gamma^2}} R_1 \mp \frac{1}{2} \sqrt{4 - \gamma^2} R_2 \right],$$

где $\Phi(\tau, \chi, \lambda)$ — 2×2 -матричнозначная функция, λ — спектральный параметр, $\tilde{\chi} = (1 + \nu^2 q)\chi$,

$$W = \frac{U}{\sqrt{4 - \gamma^2}}, \quad \gamma^2 = \frac{4\nu q}{1 + \nu^2 q}. \quad (57)$$

Спектральная проблема (СП) (55) является обобщением СП Вадати–Конно–Ичикавы (ВКИ) [21, 22]. Аппарат МОЗР непосредственно для уравнений ВКИ был развит Конно с соавторами [22]. В работе [23] применялось калибровочное преобразование, позволившее свести аналогичную задачу к решению СП Захарова–Шабата. В настоящей работе используется подход к решению задачи с помощью МОЗР, отличающийся от использованных в работах [22, 23]. Здесь применяется другая форма СП. Однако, как и в работах [22, 23], решения, ассоциированные с СП (55), имеют неявный, параметрический вид.

Симметрия функций Йоста — решений СП (55) — определяется значениями физических параметров, определяющих коэффициент γ (57). Для разных свойств симметрии версии аппарата МОЗР различны. В данной работе рассмотрим один из таких вариантов. Поскольку величины ν, q определяются набором физических параметров: $d_{20}, d_{31}, \omega_2 - \omega, \omega_3 - \omega$, выберем значения, отвечающие неравенству

$$\gamma^2 < 0. \tag{58}$$

Введем новую переменную Θ и новые функции $F(\chi, \tau)$ и $G(\chi, \tau) = \sqrt{1 + |F(\chi, \tau)|^2}$:

$$\Theta = \int_0^\tau \sqrt{1 + |W(\chi, \tau')\gamma|^2} d\tau', \tag{59}$$

$$F = \frac{W|\gamma|}{\sqrt{1 + |W\gamma|^2}}, \quad G = \frac{1}{\sqrt{1 + |W\gamma|^2}}. \tag{60}$$

Тогда получим из (55)

$$\partial_\Theta \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda G & (\lambda + i\beta)F \\ -(\lambda - i\beta)F & i\lambda G \end{pmatrix} \Phi, \tag{61}$$

где $\beta = |\gamma|^{-1}$ — константа ($\gamma = -i|\gamma|$) и $F(\lambda, \Theta, \chi)$ — действительная функция.

СП (61) решаем на всей оси Θ для достаточно быстро затухающего на бесконечностях потенциала F

$$F(\Theta) \rightarrow 0, \quad \Theta \rightarrow \pm\infty. \tag{62}$$

Полагаем, что псевдоспин находится в основном устойчивом состоянии на бесконечностях:

$$R_{1,2}(\Theta, \tilde{\chi}) = 0, \quad R_3(\Theta, \tilde{\chi}) = -1, \quad \Theta \rightarrow \pm\infty. \tag{63}$$

Решения СП (61) обладают инволюцией:

$$\Phi = \mathbf{M}\Phi(\lambda^*)^*\mathbf{M}^{-1}, \tag{64}$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Функции Йоста Φ — решения СП (61) — отвечают исчезающему при $\tau \rightarrow \pm\infty$ потенциалу F и его производным, основному состоянию (63) и асимптотикам:

$$\Phi^\pm = \exp(-i\lambda\sigma_3\Theta), \quad \tau \rightarrow \pm\infty. \tag{66}$$

Из свойства (64) получаем матричную форму функций Йоста:

$$\Phi^\pm = \begin{pmatrix} \phi_1^\pm & -\phi_2^{\pm*} \\ \phi_2^\pm & \phi_1^{\pm*} \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Соответствующие функции связаны матрицей рассеяния \mathbf{T} как

$$\Phi^- = \Phi^+\mathbf{T}, \tag{68}$$

где

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}. \tag{69}$$

Константы $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ — часть данных рассеяния, которые определяются потенциалом $F(\tilde{\chi} = 0, \tau)$ [16]. Функции Йоста обладают стандартными аналитическими свойствами (см., например, [16]). Функция $a(\lambda)$ голоморфна в верхней полуплоскости и нули $a(\lambda)$ отвечают солитонным решениям. Функции Йоста обладают также следующим свойством симметрии:

$$\Phi(\lambda) = \Phi^*(-\lambda^*). \tag{70}$$

Как следствие, нули $a(\lambda_n)$ входят в решения парама: $(\lambda_n, -\lambda_n^*)$.

Интегральное представление функции Йоста имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^+(\Theta) = & e^{-i\lambda\sigma_3\Theta} + \\ & + \int_\Theta^\infty \begin{pmatrix} \lambda K(\tau, s) & (\lambda + i\beta)Q(\tau, s) \\ -(\lambda - i\beta)Q^* & \lambda K^*(\tau, s) \end{pmatrix} \times \\ & \times e^{-i\lambda\sigma_3s} ds. \end{aligned} \tag{71}$$

Это представление дает из (61) выражения

$$\begin{aligned} F(\tau) = & \\ = & \frac{2[1 - iK(\tau, \tau)]Q^*(\tau, \tau)}{(1 - iK(\tau, \tau))(1 + iK^*(\tau, \tau)) + |Q(\tau, \tau)|^2}, \end{aligned} \tag{72}$$

$$D(\tau) = \frac{(1 - iK(\tau, \tau))(1 + iK^*(\tau, \tau)) - |Q(\tau, \tau)|^2}{(1 - iK(\tau, \tau))(1 + iK^*(\tau, \tau)) + |Q(\tau, \tau)|^2}. \quad (73)$$

Стандартным способом из (68) и (71), интегрируя по λ с весами

$$\frac{e^{i\lambda y}}{2\pi i(\lambda - i\beta)}, \quad \frac{e^{i\lambda y}}{2\pi i\lambda},$$

находим уравнения Марченко:

$$Q(\tau, y) = \mathcal{F}_1(\tau+y) - \int_{\tau}^{\infty} K^*(\tau, s) i\partial_y \mathcal{F}_1(s+y) ds, \quad (74)$$

$$K_1(\tau, y) = \int_{\tau}^{\infty} Q^*(\tau, s) (i\beta - i\partial_y) \mathcal{F}(s+y) ds, \quad (75)$$

где

$$\mathcal{F}(y) = \int_C \frac{b}{a} \frac{e^{i\lambda y}}{2\pi i\lambda} d\lambda, \quad (76)$$

$$\mathcal{F}_1(y) = \int_C \frac{b}{a} \frac{e^{i\lambda y}}{2\pi i(\lambda - i\beta)} d\lambda,$$

C — контур интегрирования, проходящий вокруг полюсов в верхней полуплоскости.

Зависимость данных рассеяния от $\tilde{\chi}$ определяется формулой

$$\partial_{\tilde{\chi}} \mathbf{S} = -\mathbf{S} e^{-i\sigma_3 \lambda \Theta} \mathbf{A}(\lambda; \tau = -\infty, \tilde{\chi}) e^{i\sigma_3 \lambda \Theta} + e^{-i\sigma_3 \lambda \Theta} \mathbf{A}(\lambda; \tau = \infty, \tilde{\chi}) e^{i\sigma_3 \lambda \Theta} \mathbf{S}. \quad (77)$$

Для асимптотик (63) находим из (56)

$$\mathbf{A}(\lambda) = \sigma_3 \frac{-i\lambda(1 + |\gamma|^2 \lambda^2)}{(1 - 4\lambda^2)}, \quad (78)$$

где σ_3 — матрица Паули.

4. ВЫРОЖДЕННОЕ ОДНОСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ

Найдем солитонное решение, ассоциированное с совпадающими нулями $\lambda_1 = i\eta = -\lambda_1^*$, $a_1(\chi; i\eta) = 0$, $\eta > 0$. Обозначим

$$C_1(\chi) = \left. \frac{b_1(\chi; i\eta)}{\partial_{\lambda} a_1(\chi; \lambda)} \right|_{\lambda=i\eta}.$$

Для начальных краевых условий (78) находим

$$C_1(\chi) = \exp \left[\frac{-2\eta(1 - |\gamma|^2 \eta^2) \chi}{1 + 4\eta^2} + c_0 \right], \quad (79)$$

где $c_0 \in \mathbb{R}$ — константа.

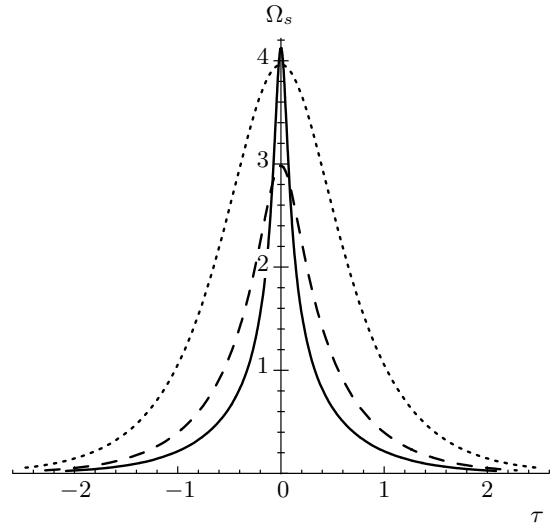


Рис. 2. График зависимости Ω_s от τ для $\eta = 1$. Сплошная линия соответствует $\gamma = 3$, штриховой линией показана форма солитона для $\gamma = 1$, пунктирной — для $\gamma = 0.01$

Решая систему уравнений (74), (75), получаем солитонное решение

$$F(\tau, \chi) = \frac{2\zeta_0 \operatorname{ch} \psi}{\operatorname{ch}^2 \psi + \zeta_0^2}, \quad (80)$$

$$G(\tau, \chi) = \frac{\operatorname{ch}^2 \psi - \zeta_0^2}{\operatorname{ch}^2 \psi + \zeta_0^2}, \quad (81)$$

где

$$\psi = 2\eta \left(\Theta - \frac{1 - |\gamma|^2 \eta^2}{1 + 4\eta^2} \chi \right) + c_0, \quad (82)$$

$$\zeta_0 = \frac{|\gamma|\eta}{|\gamma|\eta + 1}. \quad (83)$$

Решение (80), (81) — параметрическое солитонное решение, поскольку ψ является функцией G . Интегрируя уравнение $\partial_{\tau} \Theta = G^{-1}(\tau)$, находим

$$\psi = \frac{2|\gamma|\eta \operatorname{arctg} \left(\frac{|\gamma|\eta}{\sqrt{1 + 2|\gamma|\eta + 2|\gamma|^2 \eta^2}} \operatorname{th} \psi \right)}{\sqrt{1 + 2|\gamma|\eta + 2|\gamma|^2 \eta^2}} = 2\eta(\tau - \tau_0(\chi)), \quad (84)$$

где $\tau_0(\chi) = \psi(\tau = 0)/(2\eta)$.

Солитонное решение, описывающее импульс тегагерцева поля E_{23} , имеет вид

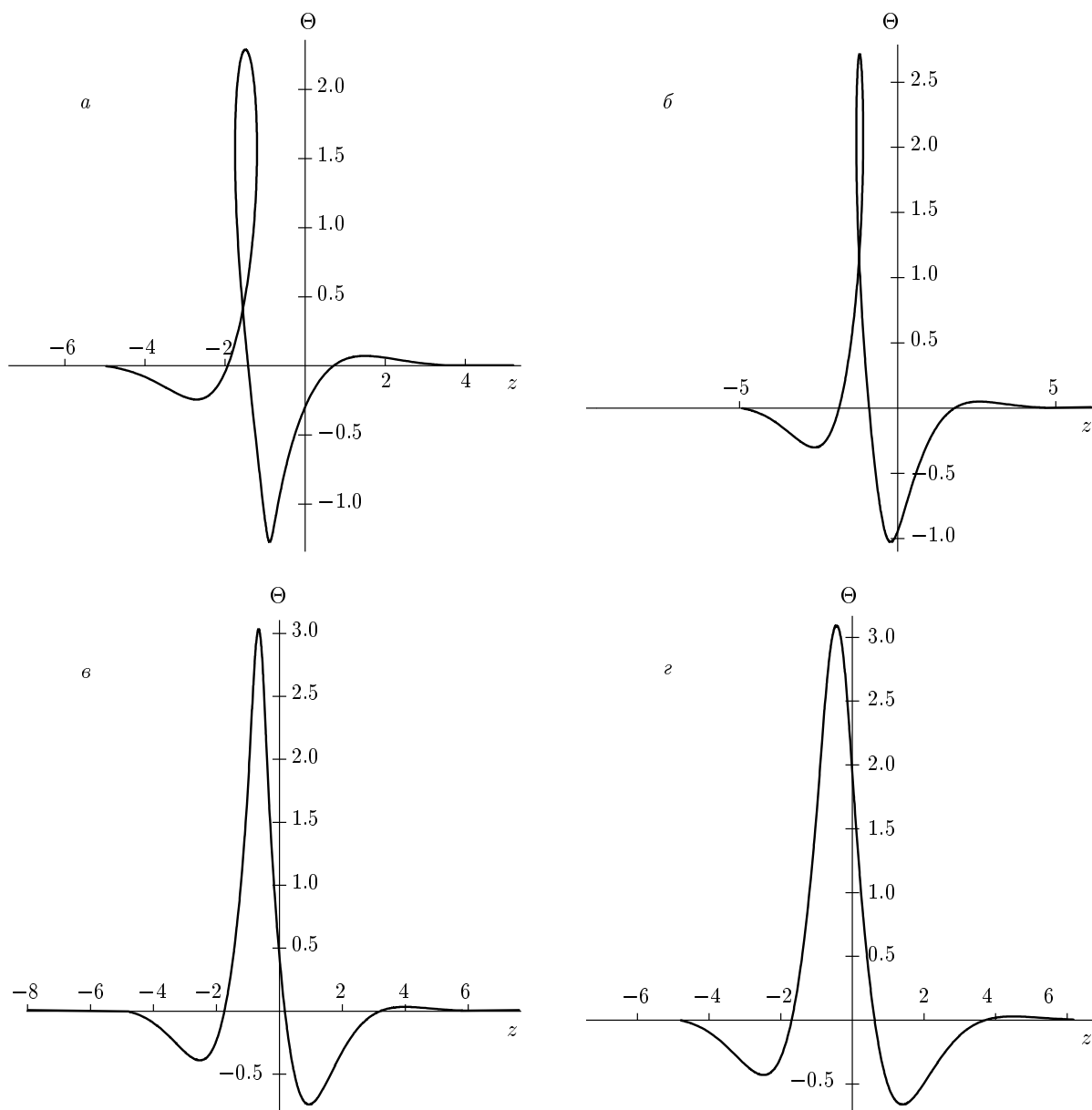


Рис. 3. Бризер. Графики зависимости Θ от z для $\eta_b = \zeta_b = 1$ и $\gamma = 1$ (а), $1/3$ (б), $1/6$ (в), $1/9$ (г)

$$\Omega_s = \frac{\alpha d_{23} E_{23}(\tau, \chi)}{\nu \hbar |\omega_{23}|} = \frac{\sqrt{4 + |\gamma|^2} \eta (1 + |\gamma| \eta) \operatorname{ch} \psi}{(1 + |\gamma| \eta)^2 \operatorname{ch}^2 \psi - \eta^2 |\gamma|^2}, \quad (85)$$

где зависимость ψ от τ определяется уравнением (84). График зависимости $\Omega_s(\tau)$ показан на рис. 2 для $\eta = 1.0$, $c_0 = \tau_0 = 0$ и разных значений γ .

5. БРИЗЕР

Парам полюсов $\lambda_n, -\lambda_n^*$ в верхней полуплоскости отвечают решения в виде бризеров. В этом разделе представим решение для одной такой пары: $\lambda_1 = \zeta_b + i\eta_b, -\lambda_1^* = -\zeta_b + i\eta_b$. Введем функции:

$$F = 1 + 2i \cos \theta_2 e^{\theta_1} + \frac{\zeta_b^2}{\eta_b^2} e^{2\theta_1}, \quad (86)$$

$$F_1 = 2i (\eta_b \cos \theta_2 - \zeta_b \sin \theta_2) e^{\theta_1} + \frac{2\zeta_b^2}{\eta_b} e^{2\theta_1}, \quad (87)$$

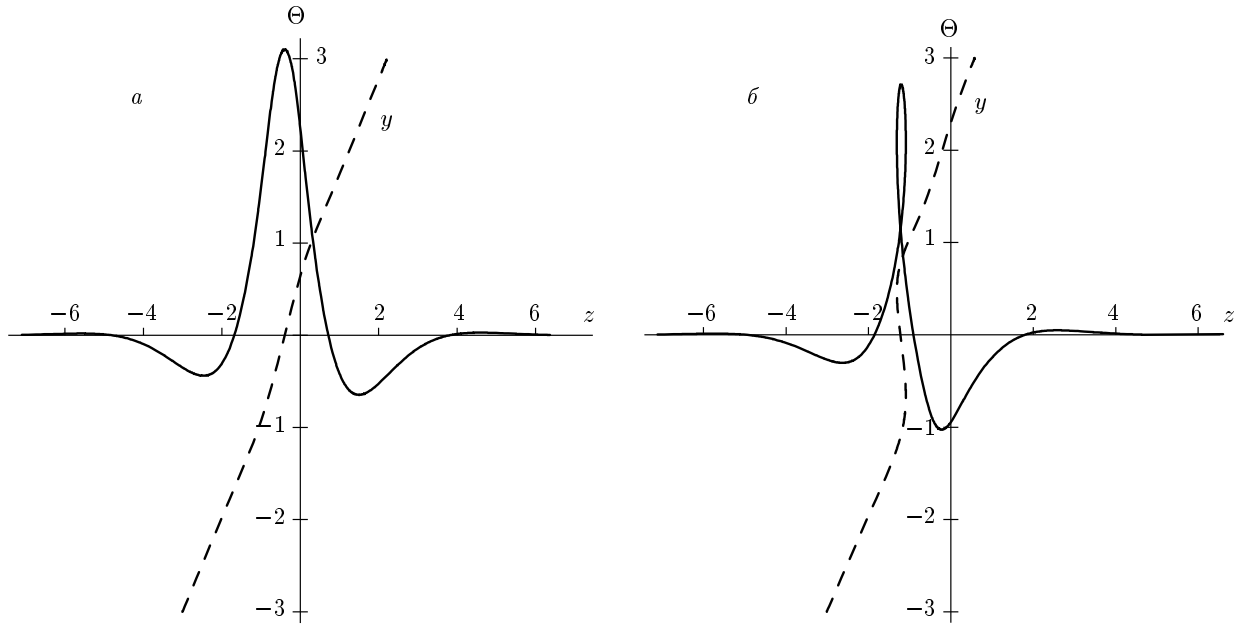


Рис. 4. Форма бризера и условие сингулярности для $\eta_b = \zeta_b = 1$ и $\gamma = 1/3$ (а), 0,1 (б). Зависимости $\Theta(z)$ показаны сплошными линиями, $y(z)$ — штриховыми

$$G = 1 + 2ih \cos(\theta_2 - h_0)e^{\theta_1} + \frac{h^2 \zeta_b^2}{\eta_b^2} e^{2\theta_1}, \quad (88)$$

$$G_1 = 2ih [\eta_b \cos(\theta_2 - h_0) - \zeta_b \sin(\theta_2 - h_0)] \times e^{\theta_1} + \frac{2h^2 \zeta_b^2}{\eta_b} e^{2\theta_1}, \quad (89)$$

где

$$\theta_1 = \eta_b (y + V_1 \chi), \quad (90)$$

$$\theta_2 = \zeta_b (y + V_2 \chi), \quad (91)$$

$$V_1 = \frac{-1 + 4\eta_b^2 + 4\zeta_b^2 + [4\eta_b^4 + 3\zeta_b^2 + 4\zeta_b^4 + \eta_b^2 (8\zeta_b^2 - 1)] |\gamma|^2}{16\eta_b^4 + 8\eta_b^2 (4\zeta_b^2 - 1) + (4\zeta_b^2 + 1)^2}, \quad (92)$$

$$V_2 = \frac{1 + 4\eta_b^2 + 4\zeta_b^2 - [4\eta_b^4 + \zeta_b^2 + 4\zeta_b^4 + \eta_b^2 (8\zeta_b^2 - 3)] |\gamma|^2}{16\eta_b^4 + 8\eta_b^2 (4\zeta_b^2 - 1) + (4\zeta_b^2 + 1)^2}, \quad (93)$$

$$h = \frac{\sqrt{(\zeta_b^2 + \eta_b^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2 \eta_b^2}}{(\eta_b + \beta)^2 + \eta_b^2}, \quad (94)$$

$$h_0 = -\arcsin \frac{2\beta \eta_b}{\sqrt{(\zeta_b^2 + \eta_b^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2 \eta_b^2}}. \quad (95)$$

Бризерное решение для безразмерной амплитуды терагерцевого поля U_{br} может быть представлено в виде

$$\frac{U_{br}(y, \chi)}{\sqrt{4 + |\gamma|^2}} = \frac{i(F^* F_1 - F_1^* F) |G|^2 + i(GG_1^* - G_1^* G) |F|^2}{|FG|^2 + |F|^2 (G^* G_1 + G^* G_1^*) - |G|^2 (F^* F_1 + F^* F_1^*)}. \quad (96)$$

Зависимость переменной z от параметра y имеет вид

$$z = y + z_0(\chi) + 2 \ln \frac{|F|}{|G|}. \quad (97)$$

К сожалению, ввиду громоздкости выражения (96) график параметрической зависимости $U_{br}(z)$ построить не удалось. На рис. 3, 4 представлены зависимости блоховской фазы от z

$$\Theta(z) = \int_{-\infty}^z U_{br}(z') (4 + |\gamma|^2)^{-1/2} dz',$$

имеющей более компактный вид, для разных значений параметров η_b, ζ_b, β . Параметрические решения для Φ и U_{br} для некоторых значений η_b, ζ_b, β сингулярны. На рис. 3 показано изменение формы бризера при уменьшении $|\gamma|$. При $|\gamma| \ll 1$ решение переходит в обычный бризер редуцированной системы уравнений Максвелла – Блоха.

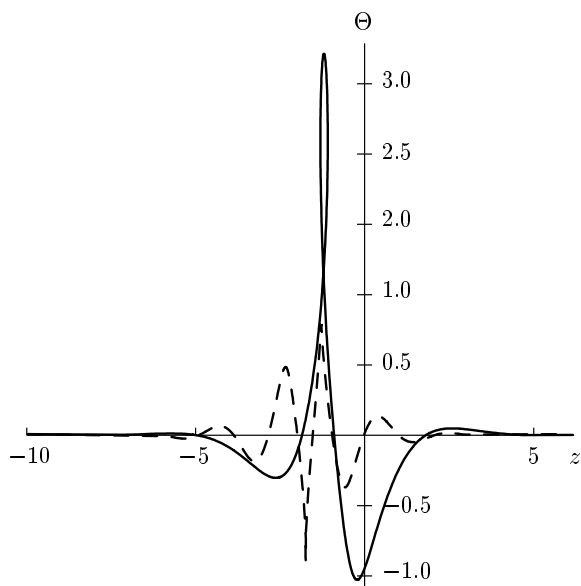


Рис. 5. Бризер. Графики зависимости $\Theta(z)$ для $\gamma = \eta_b = 1$. Сплошная линия соответствует $\zeta_b = 1$, штриховой линией показана форма бризера для $\zeta_b = 4$

Условие появления сингулярности имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{98}$$

Несингулярное решение отвечает неравенству $\partial z / \partial y > 0$, следующему из (97). На рис. 5 приведены графики $\Psi(z)$ и $z(y)$ для значений параметра β , отвечающих сингулярным и несингулярным решениям. Численный анализ решения показал, что с ростом ζ_b при фиксированных η_b и β число осцилляций растет, амплитуда уменьшается и сингулярность исчезает, см. рис. 4.

В настоящей работе не рассматривается случай $\gamma^2 < 0$, для него требуется отдельное исследование. Отметим только, что для $\gamma^2 > 0$ все решения несингулярны. Рост $|\beta_0|$, где $\beta = i|\beta_0|$, приводит к уширению импульсов поля и уменьшению их амплитуды, одновременно вершина импульса становится более плоской.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенная в работе модель демонстрирует возможность генерации импульсов микроволнового, терагерцевого поля без огибающей в квазирезонансной четырехуровневой среде двумя лазерными полями. В рамках выведенных уравнений показано,

что нелинейная рефракция может оказывать критическое влияние на эволюцию импульсов микроволнового, терагерцевого поля. Вторая производная в правой части уравнения (53), ассоциированная с рефракцией, достигает максимума в окрестностях «крыльев» импульса, поэтому в рассмотренной модели дисперсионная нелинейность приводит к сжатии импульса с обеих сторон, что в результате приводит к формированию узкого пика в области вершины. В общем случае решение распадается на связанные пары солитонов или аналогов бризеров уравнения синус-Гордон. В работе не рассматривался процесс спонтанной генерации импульсов терагерцевого поля из начально неустойчивого состояния системы. Это можно сделать также в рамках предложенной модели. В пределе малых $|W\gamma| \ll 1$ СП (61) сводится к спектральной проблеме, ассоциированной с редуцированным уравнением Максвелла–Блоха [5]. Таким образом, для малых амплитуд и достаточно плавно изменяющихся импульсов нелинейная рефракция незначительна. В этом пределе солитоны терагерцевого поля представляют собой бризеры редуцированной системы уравнений Максвелла–Блоха.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. L. McCall and E. L. Hahn, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 908 (1967).
2. G. L. Lamb, *Rev. Mod. Phys.* **43**, 99 (1971).
3. L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-level Atoms*, Verlag, Dover (1987).
4. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
5. A. A. Zabolotskii, *Eur. Phys. J. Special Topics* **173**, 193 (2009).
6. А. И. Маймистов, *КЭ* **40**, 745 (2010).
7. I. D. Jung, F. X. Kärtner, N. Matuschek et al., *Opt. Lett.* **22**, 1009 (1997).
8. N. Sarukura, Z. Liu, H. Ohtake et al., *Jpn. J. Appl. Phys., Part 2* **36**, L560 (1997).
9. M. C. Nuss, P. C. M. Planken, I. Brener et al., *Appl. Phys. B* **58**, 249 (1994).
10. M. S. C. Luo, S. L. Chuang, P. C. M. Planken et al., *IEEE J. Quant. Electron.* **30**, 1478 (1994).
11. M. Müller, V. P. Kalosha, and J. Herrmann, *Phys. Rev. A* **58**, 1372 (1998).

12. T. S. Ho and S. I. Chu, *Phys. Rev. A* **31**, 659 (1985).
13. J. Oreg, F. T. Hioe, and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **29**, 690 (1984).
14. C. E. Carroll and F. T. Hioe, *Phys. Rev. A* **42**, 1522 (1990).
15. U. Gaubatz, P. Rudecki, M. Becker et al., *Chem. Phys. Lett.* **149**, 463 (1988).
16. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
17. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
18. J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, and P. S. Pershan, *Phys. Rev.* **127**, 1918 (1962).
19. N. Bloembergen and P. S. Pershan, *Phys. Rev.* **128**, 606 (1962).
20. А. А. Заболотский, *Письма в ЖЭТФ* **94**, 918 (2011).
21. M. Wadati, K. Konno, and Y. H. Ichikawa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **47**, 1698 (1979).
22. K. Konno, Y. W. Ichikawa, and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50**, 1025 (1981).
23. J. Lenells and A. S. Fokas, *J. Math. Phys.* **51**, 023519 (2010).