

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИЗОТРОПНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ С ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

С. В. Белим*

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского
644 077, Омск, Россия

Поступила в редакцию 24 сентября 2012 г.

В рамках теоретико-полевого подхода исследовано критическое поведение гейзенберговских магнетиков с диполь-дипольным взаимодействием вблизи линии фазовых переходов второго рода непосредственно в трехмерном пространстве. Получены зависимости критических индексов от параметра диполь-дипольного взаимодействия. Проведено сравнение с экспериментальными фактами.

DOI: 10.7868/S0044451013060116

1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитное диполь-дипольное взаимодействие существует во всех магнитных материалах, но в большинстве ферромагнетиков упорядочивание обусловлено обменным взаимодействием, лишь в материалах с температурой перехода $T_c > 300$ К значительное влияние оказывают диполь-дипольные силы. Экспериментально существенное влияние диполь-дипольного взаимодействия на критические явления было обнаружено в ферромагнетике EuO [1–3] по отличию критических индексов от предсказываемых теорией с близкодействием. Так, согласно модели Гейзенберга критический индекс теплоемкости должен принимать значение $\alpha = -0.13$, тогда как экспериментальное значение для EuO составляет $\alpha = -0.04 \pm 0.02$.

Впервые проблема описания критического поведения систем с диполь-дипольным взаимодействием была рассмотрена в работе [4] в рамках ε -разложения ($\varepsilon = 4 - D$, D — размерность пространства) в однопетлевом приближении для систем, размерность параметра порядка которых совпадает с размерностью пространства ($n = D$). Были получены приближенные значения критических индексов, отличные от индексов систем с близкодействием. Авторы работы [4] исследуют поведение системы вблизи не реальной критической точки, а некоторой смещенной точки, причем смещение находится в процессе

расчетов и, так же как критические индексы, записывается в виде асимптотического ряда по параметру ε . Данный подход был развит в работе [5], причем не только для изотропных, но и для анизотропных систем. В этой работе, посвященной изотропным системам, были вычислены значения критических индексов в рамках ε -разложения:

$$1/\gamma = 1 - \frac{9}{34}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \eta = 0.023\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

В двухпетлевом приближении в рамках ε -разложения критические индексы систем с диполь-дипольным взаимодействием были получены в работе [6]:

$$\nu = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{9}{34}\varepsilon + \frac{7013}{58956}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \right),$$

$$\gamma = 1 + \frac{9}{3}\varepsilon + \frac{2111}{19652}\varepsilon^2, \quad \eta = \frac{20}{867}\varepsilon^2.$$

Теоретико-полевого подхода в описании систем с диполь-дипольным взаимодействием был развит в работе [7]. Авторы этой статьи исследуют поведение системы вблизи реальной критической температуры в рамках ε -разложения в двухпетлевом приближении. В результате такого уточнения были найдены значения критических индексов, отличающиеся от полученных в предыдущих работах лишь в слагаемых второго порядка по ε :

$$\nu = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{9}{34}\varepsilon + \frac{7013}{58956}\varepsilon^2 \right),$$

$$\gamma = 1 + \frac{9}{34}\varepsilon + \frac{5687}{58956}\varepsilon^2, \quad \eta = \frac{13}{289}\varepsilon^2.$$

*E-mail: sbelim@mail.ru

Компьютерное моделирование методом Монте-Карло [8] продемонстрировало критическое поведение системы, описываемое критическим индексом $\alpha = -0.02$, что находится не в очень хорошем согласии с предсказаниями теории, построенной в рамках ε -разложения.

Таким образом, целью данной работы ставится развитие теоретико-полевого подхода к описанию изотропных систем с диполь-дипольным взаимодействием непосредственно в трехмерном пространстве.

2. ГАМИЛЬТониАН СИСТЕМЫ

Гамильтониан трехмерной системы с диполь-дипольным взаимодействием может быть записан в виде [5]

$$H = \frac{1}{2} \int d^3r \left[(\tau_0 + \nabla^2) \delta^{\alpha\beta} + v_0 \frac{r^2 \delta^{\alpha\beta} + x^\alpha x^\beta}{r^5} \right] \times \\ \times S_0^\alpha S_0^\beta + u_0 \int d^3r F^{\alpha\beta\gamma\delta} S_0^\alpha S_0^\beta S_0^\gamma S_0^\delta. \quad (1)$$

Здесь S_0^α — α -компонента флуктуаций параметра порядка ($1 \leq \alpha \leq n$), роль которого для ферромагнитных систем играет намагниченность, $\tau_0 \sim |T - T_c|$, T_c — критическая температура, u_0 — положительная константа, v_0 — относительная интенсивность диполь-дипольного взаимодействия по сравнению с обменным взаимодействием, $F = (1/3)(\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta})$. Из анализа первого слагаемого гамильтониана можно сделать вывод, что количество n компонент спина должно совпадать с размерностью D пространства ($n = D$). Это требование вытекает из того, что необходимо проводить свертку в слагаемом $x^\alpha x^\beta S_0^\alpha S_0^\beta$, описывающем диполь-дипольное взаимодействие, т. е. мы имеем дело с моделью Гейзенберга.

Преобразование Фурье данного гамильтониана сталкивается с трудностью, вытекающей из расходимости интеграла

$$K = \int_0^\infty \frac{1}{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r, \quad (2)$$

возникающего при вычислении фурье-образа слагаемого, описывающего диполь-дипольное взаимодействие. Однако эта трудность, как будет показано ниже, легко устраняется при вычислении критических индексов, которые, собственно, являются величинами, измеряемыми в эксперименте. Для того чтобы

устранить расходимость, будем выписывать все величины в D -мерном пространстве, а предельный переход $D = 3$ осуществим лишь в конечных выражениях. Запишем формально гамильтониан системы после преобразования Фурье:

$$H = \frac{1}{2} \int d^Dq \left[(r_0 + q^2) \delta^{\alpha\beta} + g_0 \frac{q^\alpha q^\beta}{q^2} \right] \times \\ \times S_0^\alpha(\mathbf{q}) S_0^\beta(-\mathbf{q}) + \\ + u_0 \iiint d^Dq_1 d^Dq_2 d^Dq_3 F^{\alpha\beta\gamma\delta} S_0^\alpha(\mathbf{q}_1) S_0^\beta(\mathbf{q}_2) \times \\ \times S_0^\gamma(\mathbf{q}_3) S_0^\delta(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3). \quad (3)$$

Здесь введены обозначения

$$g_0 = K v_0, \quad r_0 = \tau_0 + K v_0. \quad (4)$$

В дальнейшем в рамках теоретико-полевого подхода проводится ренормгрупповое преобразование затронутой величины r_0 , которое позволяет устранять из нее расходимости. Константа диполь-дипольного взаимодействия, как будет показано ниже, встречается лишь в выражениях вида $g = g_0/r_0$, что также приводит к конечным значениям.

Дипольные силы вносят анизотропию в спиновые флуктуации, выделяя направления параллельно волновому вектору \mathbf{q} и перпендикулярно ему. В связи с этим введем проективные операторы продольной $P_L^{\alpha\beta}$ и поперечной $P_T^{\alpha\beta}$ составляющих:

$$P_L^{\alpha\beta} = \frac{q^\alpha q^\beta}{q^2}, \quad P_T^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - \frac{q^\alpha q^\beta}{q^2}. \quad (5)$$

После введения проективных операторов гамильтониан системы примет вид

$$H = \frac{1}{2} \int d^Dq \left[(r_0 + q^2) P_T^{\alpha\beta} + (r_0 + g_0 + q^2) P_L^{\alpha\beta} \right] \times \\ \times S_0^\alpha(\mathbf{q}) S_0^\beta(-\mathbf{q}) + \\ + u_0 \iiint d^Dq_1 d^Dq_2 d^Dq_3 F^{\alpha\beta\gamma\delta} S_0^\alpha(\mathbf{q}_1) S_0^\beta(\mathbf{q}_2) \times \\ \times S_0^\gamma(\mathbf{q}_3) S_0^\delta(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3). \quad (6)$$

Продольные и поперечные составляющие критических флуктуаций демонстрируют различные режимы критического поведения, обусловленного сдвигом критической температуры для продольной составляющей вследствие диполь-дипольного взаимодействия.

Свободный пропагатор системы может быть записан в следующем виде:

$$G_0^{\alpha\beta}(r_0, g_0, \mathbf{q}) = \\ = G_0^L(r_0, g_0, \mathbf{q}) P_L^{\alpha\beta} + G_0^T(r_0, \mathbf{q}) P_T^{\alpha\beta}, \quad (7)$$

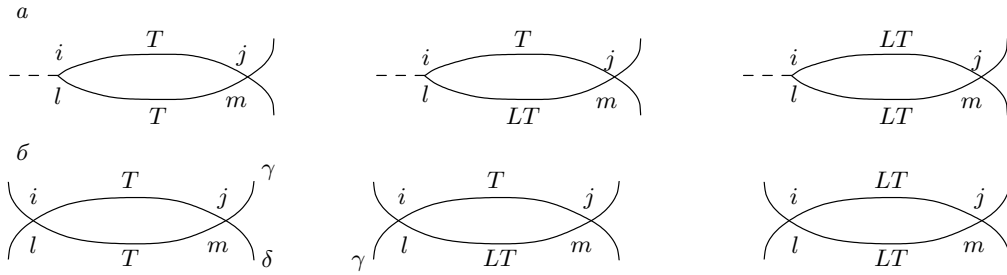


Рис. 1. Фейнмановские диаграммы в однопетлевом приближении для двухточечной (а) и четырехточечной (б) вершинных функций

где

$$G_0^L(r_0, g_0, \mathbf{q}) = \frac{1}{r_0 + g_0 + \mathbf{q}^2}, \quad (8)$$

$$G_0^T(r_0, \mathbf{q}) = \frac{1}{r_0 + \mathbf{q}^2}.$$

3. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЕ ОПИСАНИЕ В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Поведение системы в критической области определяется значениями эффективных зарядов в неподвижной точке ренормгруппового преобразования, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$u_0 = b^{4-D} u Z_u, \quad r_0 = b^2 r Z_r, \quad g_0 = b^2 g Z_g, \quad (9)$$

$$S_0^\alpha(\mathbf{q}) = Z_L^{1/2} P_L^{\alpha\beta} S^\beta(\mathbf{q}) + Z_T^{1/2} P_T^{\alpha\beta} S^\beta(\mathbf{q}),$$

где Z_i — перенормировочные константы ренормгруппового преобразования. Масштабный параметр b вводится для обезразмеривания величин. Введение отдельных нормировочных факторов для продольной и поперечной составляющих флуктуаций намагниченности связано с анизотропией, описанной выше.

В силу наличия анизотропии вершинные функции, так же как и свободный пропагатор, будут зависеть от координат. Фейнмановские диаграммы для двухточечной вершинной функции со вставкой $\Gamma^{(2,1)\alpha\beta}$ и для четырехточечной вершинной функции $\Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta}$ представлены на рис. 1. При построении диаграмм пропагатор разбит на два слагаемых:

$$G_0^{\alpha\beta}(r_0, g_0, \mathbf{q}) = G_{LT}(r_0, g_0, \mathbf{q})^{\alpha\beta} + G_T(r_0, \mathbf{q})^{\alpha\beta}, \quad (10)$$

$$G_T(r_0, \mathbf{q})^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{r_0 + \mathbf{q}^2},$$

$$G_{LT}(r_0, g_0, \mathbf{q})^{\alpha\beta} = \frac{q^\alpha q^\beta}{q^2} \left[\frac{1}{r_0 + g_0 + \mathbf{q}^2} - \frac{1}{r_0 + \mathbf{q}^2} \right].$$

Аналитическое выражение для вершинной функции $\Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет вид

$$\Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta} = u_0 F^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{44}{3} u_0^2 \times$$

$$\times \sum_{i,j,l,m=1}^3 (F^{\alpha\beta il} F^{jm\gamma\delta} + F^{\alpha\gamma il} F^{jm\beta\delta} + F^{\alpha\delta il} F^{jm\beta\gamma}) \times$$

$$\times \int d^D q G_0^{ij}(\mathbf{q}) G_0^{lm}(-\mathbf{q}). \quad (11)$$

Введем обозначение для интеграла, определяющего значение второго слагаемого в выражении для вершинной функции:

$$J^{ijlm} = \int d^D q G_0^{ij}(\mathbf{q}) G_0^{lm}(-\mathbf{q}). \quad (12)$$

После подстановки свободного пропагатора в выражение для интеграла J^{ijlm} и замены $g = g_0/r_0$ получим

$$J^{ijlm} = J_1^{ijlm} - 2J_2^{ijlm} + J_3^{ijlm},$$

$$J_1^{ijlm} = \delta^{ij} \delta^{lm} \int d^D q G_0^T(\mathbf{q}) G_0^T(-\mathbf{q}) = \delta^{ij} \delta^{lm} I_1^{(0)},$$

$$I_1^{(0)} = \int \frac{d^D q}{(1 + \mathbf{q}^2)^2} = \pi^2,$$

$$J_2^{ijlm} = \delta^{ij} \int d^D q G_0^T(\mathbf{q}) \times$$

$$\times P_L^{lm} [G_0^L(-\mathbf{q}) - G_0^T(-\mathbf{q})] =$$

$$= \delta^{ij} \int \frac{q^l q^m d^D q}{\mathbf{q}^2 (1 + \mathbf{q}^2)} \left(\frac{1}{1 + g + \mathbf{q}^2} - \frac{1}{1 + \mathbf{q}^2} \right) =$$

$$= -\delta^{ij} g \int \frac{q^l q^m d^D q}{\mathbf{q}^2 (1 + \mathbf{q}^2)^2 (1 + g + \mathbf{q}^2)},$$

$$\begin{aligned}
 J_3^{ijlm} &= \int d^D q P_L^{ij} [G_0^L(\mathbf{q}) - G_0^T(\mathbf{q})] \times \\
 &\quad \times P_L^{lm} [G_0^L(-\mathbf{q}) - G_0^T(-\mathbf{q})] = \\
 &= \int \frac{q^i q^j q^l q^m d^D q}{\mathbf{q}^4} \left(\frac{1}{1+g+\mathbf{q}^2} - \frac{1}{1+\mathbf{q}^2} \right)^2 = \\
 &= g^2 \int \frac{q^i q^j q^l q^m d^D q}{\mathbf{q}^4 (1+\mathbf{q}^2)^2 (1+g+\mathbf{q}^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Для интеграла J_2^{ijlm} прямая подстановка различных значений пары индексов $l, m = 1, 2, 3$ и интегрирование по угловым переменным в сферических координатах показала, что ненулевыми являются только интегралы, в которых $l = m$. Таким образом, можно записать, что

$$\begin{aligned}
 J_2^{ijlm} &= \delta^{ij} \delta^{lm} I_2^{(0)}, \\
 I_2^{(0)} &= -\frac{4\pi g}{3} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(1+q^2)^2 (1+g+q^2)} = \\
 &= -\frac{\pi^2}{3} \frac{\sqrt{1+g}-1}{\sqrt{1+g}(1+\sqrt{1+g})}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Для вычисления интеграла J_3^{ijlm} необходимо учесть, что он симметричен относительно любой перестановки своих индексов, что существенно уменьшает число случаев, требующих рассмотрения. Аналогичная предыдущему случаю подстановка всех возможных значений $i, j, l, m = 1, 2, 3$ и вычисление соответствующих интегралов по угловым переменным в сферических координатах показали, что не обращаются в нуль только интегралы, в которых две пары повторяющихся индексов ($i = j, l = m$ или $i = l, j = m$ или $i = m, j = l$). Вычисления приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned}
 J_3^{ijlm} &= F^{ijlm} I_3^{(0)}, \\
 I_3^{(0)} &= \frac{4\pi g^2}{5} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(1+q^2)^2 (1+g+q^2)^2} = \\
 &= \frac{\pi^2}{5} \frac{(\sqrt{1+g}-1)^2}{\sqrt{1+g}(\sqrt{1+g}+1)}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Для вершинной функции $\Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta}$ можем записать

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta} &= u_0 F^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{44}{3} u_0^2 \times \\
 &\times \sum_{i,j,l,m=1}^3 (F^{\alpha\beta il} F^{jm\gamma\delta} + F^{\alpha\gamma il} F^{jm\beta\delta} + F^{\alpha\delta il} F^{jm\beta\gamma}) \times \\
 &\times \int d^D q G_0^{ij}(\mathbf{q}) G_0^{lm}(-\mathbf{q}) = u_0 F^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{44}{3} u_0^2 \times \\
 &\times \sum_{i,j,l,m=1}^3 (F^{\alpha\beta il} F^{jm\gamma\delta} + F^{\alpha\gamma il} F^{jm\beta\delta} + F^{\alpha\delta il} F^{jm\beta\gamma}) \times \\
 &\times [\delta^{ij} \delta^{lm} (I_1^{(0)} + 2I_2^{(0)}) + F^{ijlm} I_3^{(0)}] = \\
 &= u_0 F^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[1 - 44u_0 \left(I_1^{(0)} + 2I_2^{(0)} + \frac{47}{9} I_3^{(0)} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{16}$$

Для вершинной функции $\Gamma^{(2,1)\alpha\beta}$ имеем

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(2,1)\alpha\beta} &= r_0 \delta^{\alpha\beta} - \frac{4}{5} r_0 u_0 \sum_{i,j,l,m=1}^3 F^{\alpha\beta ij} \delta^{lm} \times \\
 &\times \int d^D q G_0^{ij}(\mathbf{q}) G_0^{lm}(-\mathbf{q}) = r_0 \delta^{\alpha\beta} - \frac{4}{3} r_0 u_0 \times \\
 &\times \sum_{i,j,l,m=1}^3 F^{\alpha\beta ij} \delta^{lm} [\delta^{ij} \delta^{lm} (I_1^{(0)} + 2I_2^{(0)}) + F^{ijlm} I_3] = \\
 &= r_0 \delta^{\alpha\beta} \left[1 - 20u_0 \left(I_1^{(0)} + 2I_2^{(0)} + \frac{25}{9} I_3^{(0)} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{17}$$

Перейдем для удобства к вершинной функции $v_0 = 44I_1^{(0)}u_0$. Тогда вершинные функции примут вид

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta} &= v_0 F^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[1 - v_0 \left(1 + 2I_2 + \frac{47}{9} I_3 \right) \right], \\
 \Gamma^{(2,1)\alpha\beta} &= r_0 \delta^{\alpha\beta} \left[1 - \frac{5}{11} v_0 \left(1 + 2I_2 + \frac{25}{9} I_3 \right) \right], \\
 I_2 &= I_2^{(0)} / I_1^{(0)}, \quad I_3 = I_3^{(0)} / I_1^{(0)}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Запишем уравнение Каллана–Симанзика для вершинных функций:

$$\left[b \frac{\partial}{\partial b} + \beta \frac{\partial}{\partial v} - \gamma_\varphi \frac{m}{2} b \frac{\partial \ln Z_\varphi}{\partial b} - \gamma_r r \frac{\partial}{\partial r} \right] \times \Gamma^{(m)\alpha\beta}(q; r, v, b) = 0. \tag{19}$$

В этом уравнении введены функции

$$\beta = b \frac{\partial v}{\partial b}, \quad \gamma_r = b \frac{\partial r}{\partial b}, \quad \gamma_\varphi = b \frac{\partial S_q}{\partial b}, \tag{20}$$

определяющие поведение системы в критической области.

Выражения для β - и γ -функций в однопетлевом приближении имеют вид

$$\beta = -v \left[1 - v \left(1 + 2I_2 + \frac{47}{9} I_3 \right) \right],$$

$$\gamma_t = -20v \left(1 + 2I_2 + \frac{25}{9}I_3 \right).$$

Режим критического поведения полностью определяется устойчивой неподвижной точкой v^* ренормгруппового преобразования, которая может быть найдена из условия равенства нулю β -функции:

$$\beta_i(v^*) = 0. \quad (21)$$

Требование устойчивости фиксированной точки сводится к условию

$$\frac{\partial \beta(v^*)}{\partial v} > 0. \quad (22)$$

Аналитическое выражение для устойчивой фиксированной точки имеет вид

$$v^* = \frac{1}{1 + 2I_2 + (47/9)I_3}. \quad (23)$$

Из выражения для v^* видно, что при $g = 0$ фиксированная точка совпадает со значением $v^* = 0.10128$, получаемым для систем без диполь-дипольного взаимодействия.

Как хорошо известно, в однопетлевом приближении индекс Фишера η , определяющий поведение корреляционной функции в пространстве волновых векторов ($G \sim k^{2+\eta}$), равен нулю. Остановимся на индексе ν , характеризующем рост радиуса корреляции в окрестности критической точки ($R_c \sim |T - T_c|^{-\nu}$), который может быть найден на основе соотношения

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma_t}{2} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + 10v \left(1 + 2I_2 + \frac{25}{9}I_3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Подстановка значения эффективного заряда для устойчивой фиксированной точки приводит к выражению

$$\nu = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{5 [1 + 2I_2 + (25/9)I_3]}{22 [1 + 2I_2 + (47/9)I_3]} \right]. \quad (25)$$

В предельном случае отсутствия диполь-дипольного взаимодействия ($g = 0$) получаем результат для обычных короткодействующих систем: $\nu = 27/44 \approx 0.61364$, в предельном случае полного доминирования диполь-дипольного взаимодействия ($g \rightarrow \infty$) имеем $\nu \approx 0.56793$. Таким образом, диполь-дипольное взаимодействие приводит к уменьшению критического индекса роста радиуса корреляции.

Индекс теплоемкости α вычисляется из скейлингового соотношения $\alpha = 2 - \nu D$ ($D = 3$ — размерность пространства). Подстановка выражения для ν приводит к результату

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{15 [I_1 + 2I_2 + (25/9)I_3]}{22 [I_1 + 2I_2 + (47/9)I_3]}. \quad (26)$$

Для двух предельных случаев получаем: $\alpha \approx 0.115908$ при $g = 0$ и $\alpha \approx 0.29621$ при $g \rightarrow \infty$. Как хорошо видно, диполь-дипольное взаимодействие приводит к росту индекса теплоемкости. Этот факт качественно согласуется с экспериментальными данными и данными компьютерного моделирования методом Монте-Карло. Количественного согласия не наблюдается, но это является хорошо известным следствием однопетлевого приближения. Для получения адекватных результатов необходимо провести расчеты в более высоком порядке теории возмущений.

4. ДВУХПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Фейнмановские диаграммы для двухпетлевого приближения приведены на рис. 2. Введем обозначения для интегралов:

$$\begin{aligned} E^{ijklmrt sn} &= \int d^D q d^D p G_0^{ir}(\mathbf{q}) G_0^{ls}(-\mathbf{q}) \times \\ &\quad \times G_0^{tj}(\mathbf{p}) G_0^{nm}(-\mathbf{p}), \\ D^{ijklmrt sn} &= \int d^D q d^D p G_0^{ij}(\mathbf{q}) G_0^{lm}(-\mathbf{q}) \times \\ &\quad \times G_0^{rs}(\mathbf{p}) G_0^{tn}(-(\mathbf{p} + \mathbf{q})), \\ C^{ijklmrs} &= \frac{\partial}{\partial k^2} \int d^D q G_0^{ij}(\mathbf{q}) G_0^{lm}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \times \\ &\quad \times G_0^{lm}(-(\mathbf{p} + \mathbf{q})) \Big|_{k^2=0}. \end{aligned} \quad (27)$$

Двухпетлевые поправки к вершинным функциям могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta}(2\text{-loop}) &= u_0^3 \sum_{i,j,l,m,n,r,s,t=1}^3 \times \\ &\times \sum_{(i,j,l,m,n,r,s,t)} (48 F^{\alpha\beta il} F^{r t sn} F^{j m \gamma \delta} E^{ijklmrt sn} + \\ &\quad + 192 F^{\alpha\delta il} F^{j r t \gamma} F^{s n m \delta} D^{ijklmrt sn}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2,1)\alpha\beta}(2\text{-loop}) &= r_0 u_0^3 \times \\ &\times \sum_{i,j,l,m=1}^3 (144 \delta^{il} F^{\alpha\beta jm} F^{r t sn} E^{ijklmrt sn} + \\ &\quad + 288 \delta^{il} F^{j r t \alpha} F^{s n m \beta} D^{ijklmrt sn}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)\alpha\beta}(\mathbf{k}) \Big|_{k^2=0} = 1 + 96 u_0^2 F^{\alpha il r} F^{\beta j m s} C^{ijklmrs}.$$

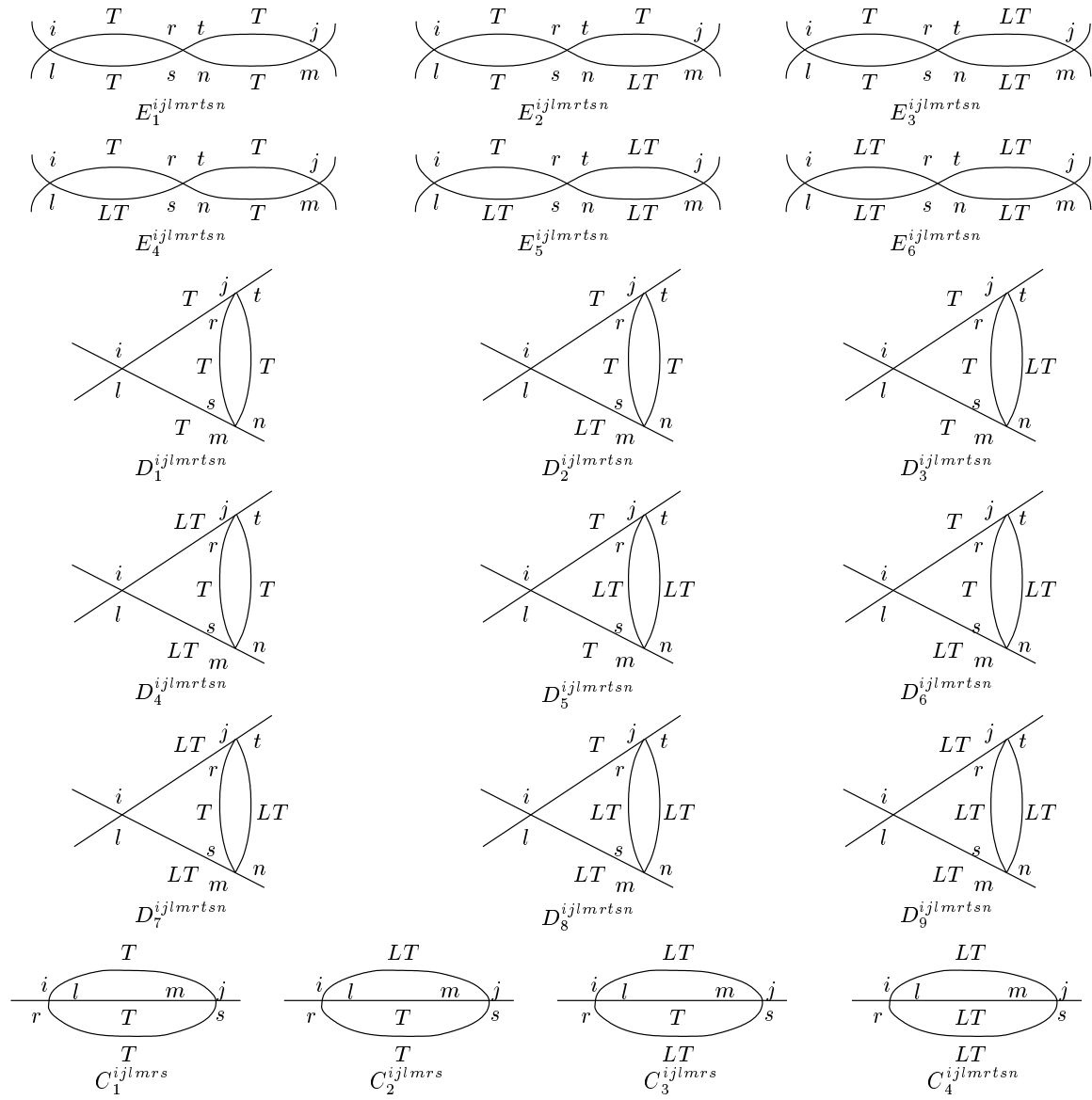


Рис. 2. Фейнмановские диаграммы в двухпетлевом приближении

Вторая сумма берется по всем возможным перестановкам индексов. После подстановки свободного пропагатора в выражения (27) для интегралов и замены $g = g_0/r_0$ получим

$$E^{ijlmrtsn} = \int d^D q d^D p G_0^{ir}(\mathbf{q}) G_0^{ls}(-\mathbf{q}) G_0^{tj}(\mathbf{p}) \times \\ \times G_0^{nm}(-\mathbf{p}) = E_1^{ijlmrtsn} + 4E_2^{ijlmrtsn} + 2E_3^{ijlmrtsn} + \\ + 4E_4^{ijlmrtsn} + 4E_5^{ijlmrtsn} + E_6^{ijlmrtsn}, \quad (28)$$

$$D^{ijlmrtsn} = \int d^D q d^D p G_0^{ir}(\mathbf{q}) G_0^{ls}(-\mathbf{q}) G_0^{tj}(\mathbf{p}) \times \\ \times G_0^{nm}(-\mathbf{p}) = D_1^{ijlmrtsn} + 2D_2^{ijlmrtsn} + \\ + 2D_3^{ijlmrtsn} + D_4^{ijlmrtsn} + D_5^{ijlmrtsn} + 4D_6^{ijlmrtsn} + \\ + 2D_7^{ijlmrtsn} + 2D_8^{ijlmrtsn} + D_9^{ijlmrtsn}, \quad (29)$$

$$C^{ijlmrs} = \int d^D q d^D p G_0^{ir}(\mathbf{q}) G_0^{ls}(-\mathbf{q}) \times \\ \times G_0^{tj}(\mathbf{p}) G_0^{nm}(-\mathbf{p}) = C_1^{ijlmrs} + 3C_2^{ijlmrs} + \\ + 3C_3^{ijlmrs} + C_4^{ijlmrs}. \quad (30)$$

Выражения для слагаемых, входящих в формулы (28)–(30), приведены в Приложении. Интегралы I_5 – I_{12} не могут быть выписаны в явном виде через элементарные функции. Приведем значения всех возникающих интегралов в виде асимптотических рядов по параметру g с точностью до слагаемых, пропорциональных g^2 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \pi^2, & I_7 &= 2.156350g^2, \\ I_2 &= (-g/12 + g^2/16)\pi^2, & I_8 &= 0.400854g^2, \\ I_3 &= \pi^2 g^2/40, & I_9 &= 0.501076g^2, \\ I_4 &= 2\pi^4/3 = 64.939394, & I_{10} &= 2\pi^4/27 = \\ & & &= 3.607744, \\ I_5 &= -7.215491g + 3.808191g^2, & I_{11} &= -0.058773g + \\ & & &+ 0.033644g^2, \\ I_6 &= -7.215491g + 3.808191g^2, & I_{12} &= 0.021266g^2. \end{aligned}$$

В результате для интегралов (27) получаем

$$\begin{aligned} E^{ijlmrtsn} &= \delta^{ir}\delta^{ls}\delta^{tj}\delta^{nm}(I_1^2 + 4I_1I_2 + 4I_2^2) + \\ &+ \delta^{ir}\delta^{ls}F^{tjnm}(2I_1I_3 + 4I_2I_3) + F^{irls}F^{tjnm}I_3^2 = \\ &= \delta^{ir}\delta^{ls}\delta^{tj}\delta^{nm}(97.409091 - 32.469697g + 24.352273g^2) + \\ &+ \delta^{ir}\delta^{ls}F^{tjnm}4.870455g^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{ijlmrtsn} &= \delta^{ij}\delta^{lm}\delta^{rs}\delta^{tn}(I_4 + 2I_5 + 2I_6 + I_8 + 4I_9) + \\ &+ \delta^{rs}\delta^{tn}F^{ijlm}I_7 = \delta^{ij}\delta^{lm}\delta^{rs}\delta^{tn} \times \\ &\times (64.939394 - 28.861964g + 17.637922g^2) + \\ &+ \delta^{rs}\delta^{tn}F^{ijlm}2.156350g^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{ijlmrs} &= \delta^{ij}\delta^{lm}\delta^{rs}(I_{10} + 3I_{11} + 3I_{12}) = \\ &= \delta^{ij}\delta^{lm}\delta^{rs}(3.607744 - 0.176319g + 0.164730g^2). \end{aligned}$$

Значения интегралов $D_7^{ijlmrtsn}$, $D_8^{ijlmrtsn}$, $D_9^{ijlmrtsn}$ и C_4^{ijlmrs} имеют порядок $O(g^3)$ и не дают вклада в выражения, вычисляемые с точностью до g^2 . Подстановка интегралов и суммирование по «немым» индексам приводит к следующему выражению для вершинных функций с точностью до g^2 через переопределенную переменную v_0 :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta} &= v_0 [1 - (1 - 0.166667g + 0.461111g^2)v_0 + \\ &+ (5.316665 - 1.432098g + 1.432881g^2)v_0^2] F^{\alpha\beta\gamma\delta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2,1)\alpha\beta} &= \tau \left[1 - \frac{5}{11}v \left(1 - \frac{g}{6} + \frac{g^2}{6} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{60}{121}(0.160493 - 0.009429g + 0.088222g^2)v^2 \right] \delta^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)\alpha\beta}(\mathbf{k}) \Big|_{k^2=0} &= \\ &= [1 + (0.003061 - 0.000150g + 0.000140g^2)v_0^2] \delta^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Записывая уравнения Калана–Симанзика, получаем следующие скейлинговые функции:

$$\begin{aligned} \beta &= -v \left[1 - (1 - 0.166667g + 0.461111g^2)v + \right. \\ &+ \left. (0.790940 - 0.873237g + 0.347330g^2)v^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_t &= 1 - \frac{5}{22} \left(1 - \frac{g}{6} + \frac{g^2}{6} \right) v + \\ &+ \frac{60}{121}(0.160493 - 0.009429g + 0.088222g^2)v^2, \end{aligned}$$

$$\gamma_\varphi = (0.003061 - 0.000150g + 0.000140g^2)v^2.$$

Как хорошо известно, ряды, получаемые в теоретико-полевоом подходе, являются асимптотическими и для получения физически значимой информации необходимо использовать методы суммирования. В данной работе суммирование было применено для двух видов рядов. Во-первых, для коэффициентов разложения скейлинговых функций, которые представляют собой функции от параметра диполь-дипольного взаимодействия g и получены в виде степенного ряда. Во-вторых, к самим скейлинговым функциям, представляющим собой асимптотический ряд от эффективного параметра взаимодействия флуктуаций параметра порядка v . В обоих случаях был применен метод Паде–Бореля. При этом прямое и обратное преобразования Бореля имеют вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_i c_i x^i = \int_0^\infty e^{-t} F(xt) dt, \\ F(x) &= \sum_i \frac{c_i}{i!} x^i. \end{aligned} \tag{31}$$

Суммирование по двум параметрам проводилось по отдельности в силу того, что различна природа происхождения данных рядов и каждый из них может удлиняться независимо друг от друга. Более того, параметр v определяется в рамках развиваемой теории, тогда как параметр g является внешним и его значение должно задаваться исходя из некоторых физических соображений.

Необходимость проведения суммирования обусловлена тем, что ряды, получаемые в двухпетлевом приближении, являются достаточно короткими,

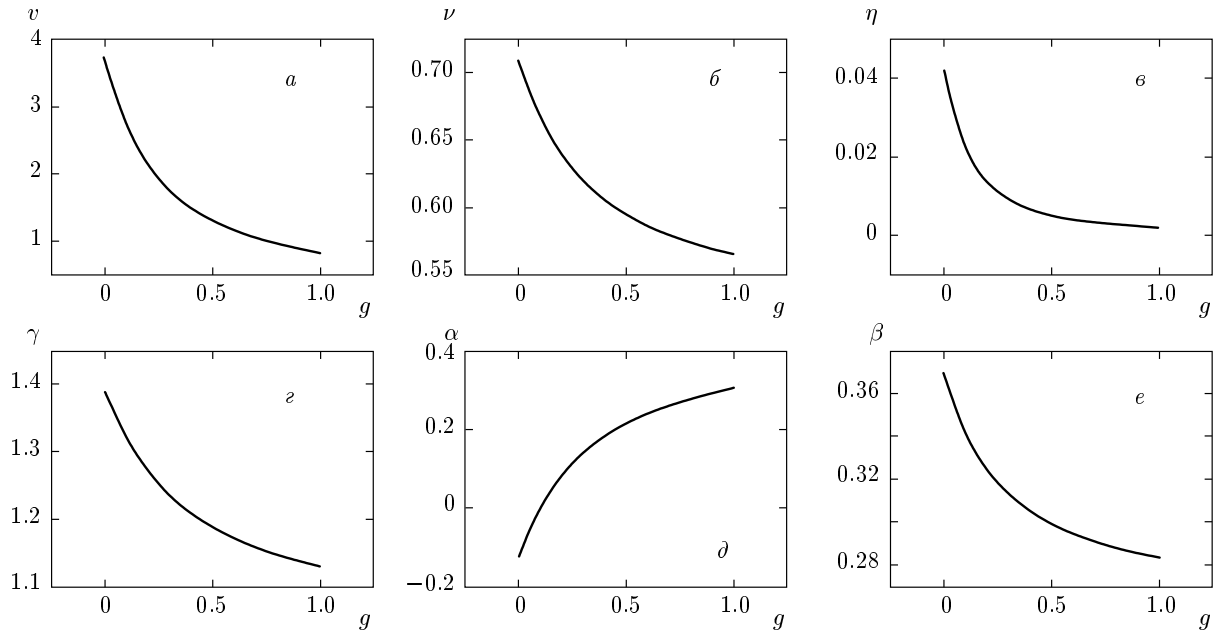


Рис. 3. Зависимости значений фиксированной точки (а), а также индексов ν (б), η (в), γ (г), α (д), β (е) от параметра диполь-дипольного взаимодействия

и их поведение может существенно отличаться от поведения самих функций. Как было показано в рамках стандартной $O(N)$ -модели для однородных систем [9–11], процедура суммирования позволяет получать приемлемые результаты на достаточно коротких рядах двухпетлевого приближения. Однако следует учитывать, что использование методов суммирования асимптотических рядов не избавляет от всех погрешностей, возникающих вследствие их малой длины. Метод суммирования Паде–Бореля существенно улучшает свойства рядов, но не дает абсолютно точных значений для искомым величин.

Исследования, проведенные в различных работах для модели Изинга и модели Гейзенберга [9–15], показали, что значения критических индексов на коротких рядах, получаемых в двухпетлевом приближении, с точностью до второго знака после запятой совпадают со значениями, получаемыми для более длинных рядов вплоть до шестипетлевого приближения. Исследования, проведенные в работе [16] для различных методов суммирования и с учетом асимптотического поведения членов рядов разложения скейлинговых функций, позволили получить оценки погрешности результатов, которая в рамках двухпетлевого приближения не ниже второго знака после запятой. Такая же точность является общепринятой в современных экспериментальных исследованиях критических явлений.

Также оценку точности предлагаемого метода

можно сделать исходя из работ [17, 18], в которых исследуется обобщение аппроксимант Паде–аппроксимант Паде–Леруа. В этом случае вводится дополнительный свободно выбираемый параметр. Как было показано ранее [18] варьирование этого параметра позволяет оценить точность результатов суммирования, которая для рядов, возникающих в рамках двухпетлевого приближения, также оказывается в рамках второго знака после запятой.

Для суммирования рядов по параметру g и скейлинговой функции γ_t была использована аппроксиманта [1/1], для вычисления β -функций — аппроксиманта [2/1]. Как и в однопетлевом приближении, устойчивая фиксированная точка определялась из соотношений

$$\beta_i(v^*) = 0, \quad \frac{\partial \beta(v^*)}{\partial v} > 0 \quad (32)$$

для просуммированных рядов. Данное уравнение решалось численно для различных значений параметра g в интервале от 0 до 1 с шагом 0.05. График значений устойчивой фиксированной точки в зависимости от значения g представлен на рис. 3а. Как хорошо видно из графика, значение эффективного заряда ν в фиксированной точке ренормгруппового преобразования убывает с ростом константы диполь-дипольного взаимодействия g , приближаясь к среднеполювому значению $\nu = 0$. Однако, по-видимому, существует некоторое асимптотическое зна-

чение $v_{as} > 0$, ниже которого фиксированная точка не опускается. Полностью исследовать поведение фиксированной точки при больших значениях g в рамках выбранного приближения невозможно. Расчеты показывают, что, начиная с некоторого значения g , отсутствует устойчивая фиксированная точка. Но этот факт может быть следствием как физических свойств выбранной системы, так и недостатками выбранного приближения. Вопрос требует дополнительного исследования с применением более длинных рядов разложения как по параметру g , так и по параметру v .

Значение критических индексов ν и η определялось из соотношений

$$\nu = 0.5 [1 + \gamma_t(v^*)]^{-1}, \quad \eta = \gamma_\varphi(v^*). \quad (33)$$

Остальные критические индексы определялись из скейлинговых соотношений:

$$\gamma = \nu(2 - \eta), \quad \alpha = 2 - 3\nu, \quad \beta = 0.5\nu(1 + \eta). \quad (34)$$

Графики зависимости критических индексов от параметра диполь-дипольного взаимодействия представлены на рис. 3б–е.

Как видно из графиков, критические индексы, совпадающие при $g = 0$ со значениями для обычных гейзенберговских систем, с ростом g приближаются к среднеполювым значениям, но не достигают их. Особое внимание следует обратить на поведение индекса теплоемкости α (рис. 3д). При малых значениях g он имеет отрицательные значения, однако с ростом g сначала обращается в нуль, а затем принимает положительные значения. Пересечение оси абсцисс ($\alpha = 0$) происходит при $g_\alpha = 0.101376$. Как хорошо известно, присутствие замороженных точечных примесей сказывается на критическом поведении только тех систем, для которых индекс теплоемкости $\alpha > 0$. Таким образом, наличие диполь-дипольного взаимодействия приводит к тому, что замороженный беспорядок, не влияющий на классическую модель Гейзенберга, должен приводить к новому режиму критического поведения для систем с параметром $g > g_\alpha$.

5. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

На сегодняшний день экспериментально исследован ряд веществ, описываемых моделью Гейзенберга с диполь-дипольным взаимодействием. В последнее время активно исследовался антиферромагнитный фазовый переход в соединениях EuX ($X = \text{O}$,

S , Te , Se), характеризующихся очень низкой температурой фазового перехода ($T_c(\text{EuO}) = 69.33 \text{ K}$, $T_c(\text{EuS}) = 16.57 \text{ K}$). Модельный гамильтониан для таких систем может быть записан в виде

$$H_1 = J_1 \sum S_i S_j + J_2 \sum S_i S_j + \sum Q_{\alpha\beta}(r_j - r_i) S_i S_j. \quad (35)$$

Здесь в первом слагаемом суммирование проводится только по ближайшим соседям, во втором — по соседям, следующим за ближайшими, в третьем — по всем парам спинов:

$$Q_{\alpha\beta}(r_j - r_i) = \frac{(g_1 \mu_B)^2}{2} \left(\frac{\delta^{\alpha\beta}}{r_{ij}^3} - 3 \frac{r_{ij}^\alpha r_{ij}^\beta}{r_{ij}^5} \right), \quad (36)$$

где g_1 — константа взаимодействия, μ_B — магнетон Бора.

Экспериментальные значения для констант гамильтониана были получены в работе [19] на основе дифракции нейтронов для соединения EuTe : $J_1/k_B = 0.04 \pm 0.01 \text{ K}$, $J_2/k_B = -0.15 \pm 0.01 \text{ K}$ при постоянной решетки $a = 4.6 \text{ \AA}$. В этой же работе приведена константа относительного влияния диполь-дипольного взаимодействия: $(g_1 \mu_B)^2 / J_1 a^3 = 0.64$. Подстановка данного значения $g/u_0 \equiv g$ в приведенные выше формулы приводит к значениям критических индексов

$$\nu = 0.584, \quad \alpha = 0.249, \quad \beta = 0.293, \quad \gamma = 1.165.$$

При этом следует отметить, что для значения обменного интеграла J_1 в различных работах даны заметно различающиеся экспериментальные значения, что приводит к различным значениям относительной константы диполь-дипольного взаимодействия. Так, в работе [20]

$$J_1/k_B = 0.100 \text{ K}, \quad J_2/k_B = -0.215 \text{ K},$$

$$g = 0.256, \quad \nu = 0.628, \quad \alpha = 0.117,$$

$$\beta = 0.317, \quad \gamma = 1.248,$$

в работе [21]

$$J_1/k_B = 0.060 \text{ K}, \quad J_2/k_B = -0.160 \text{ K},$$

$$g = 0.427, \quad \nu = 0.603, \quad \alpha = 0.192,$$

$$\beta = 0.303, \quad \gamma = 1.201,$$

в работе [22]

$$J_1/k_B = 0.110 \text{ K}, \quad J_2/k_B = -0.320 \text{ K},$$

$$g = 0.233, \quad \nu = 0.632, \quad \alpha = 0.103, \\ \beta = 0.320, \quad \gamma = 1.257.$$

Прямые измерения критического индекса теплоемкости α для соединения EuTe, проведенные в работе [23], показали, что он зависит от близости к точке фазового перехода. Если ввести параметр $t = (T - T_c)/T_c$, то $\alpha = 0.0085 \pm 0.0030$ при $|t| > 0.01$ и $\alpha = 0.38 \pm 0.01$ в интервале $0.0015 < |t| < 0.01$.

Таким образом, при приближении к критической температуре растет влияние диполь-дипольного взаимодействия. Этот эффект может быть обусловлен тем, что при нагревании происходит расширение кристалла, при этом значение обменного интеграла убывает с расстоянием достаточно быстро. Так, в работе [24] показано, что убывание обменного интеграла может быть аппроксимировано степенной функцией $J_1 = J_0(r/r_0)^{-n_1}$. Экспериментальное значение, приведенное в этой же работе, составляет $n_1 = 20.6 \pm 0.4$. Степенное убывание значения обменного интеграла приводит к степенному росту относительной константы диполь-дипольного взаимодействия g . Расчет g на основе экспериментальных значений критического индекса теплоемкости дал следующие результаты: $g = 0.11$ для $\alpha = 0.0085$ и $g = 2.31$ для $\alpha = 0.38$. Как видим, наблюдается существенный рост относительной константы диполь-дипольного взаимодействия при приближении к точке фазового перехода.

Явление изменения характера критического поведения при приближении к точке фазового перехода (явление кроссовера) достаточно хорошо изучено для Gd. Как показано в работах [25–27], в интервале $4 \cdot 10^{-4} < t < 1.3 \cdot 10^{-2}$ наблюдаются критические индексы, отличные от стандартных гейзенберговских ($\gamma = 1.23 \pm 0.02$, $\alpha = -0.01 \pm 0.03$). При дальнейшем приближении к критической температуре система характеризуется индексами, близкими к изинговским, что также хорошо объясняется наличием диполь-дипольного взаимодействия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем выражения для слагаемых $E_i^{ijlmrtsn}$, входящих в формулу (27):

$$E_1^{ijlmrtsn} = \delta^{ir} \delta^{ls} \delta^{tj} \delta^{nm} \int d^D q G_0^T(\mathbf{q}) G_0^T(-\mathbf{q}) \times \\ \times \int d^D p G_0^T(\mathbf{p}) G_0^T(-\mathbf{p}) = \\ = \delta^{ir} \delta^{ls} \delta^{tj} \delta^{nm} I_1^{(0)2},$$

$$E_2^{ijlmrtsn} = \delta^{ir} \delta^{ls} \delta^{tj} \int d^D q G_0^T(\mathbf{q}) G_0^T(-\mathbf{q}) \times \\ \times \int d^D p G_0^T(\mathbf{p}) P_L^{nm} (G_0^L(-\mathbf{p}) - G_0^T(-\mathbf{p})) = \\ = \delta^{ir} \delta^{ls} \delta^{tj} \delta^{nm} I_1^{(0)} I_2^{(0)},$$

$$E_3^{ijlmrtsn} = \delta^{ir} \delta^{ls} \int d^D q G_0^T(\mathbf{q}) G_0^T(-\mathbf{q}) \times \\ \times \int d^D p P_L^{tj} (G_0^L(\mathbf{p}) - G_0^T(\mathbf{p})) \times \\ \times P_L^{nm} (G_0^L(-\mathbf{p}) - G_0^T(-\mathbf{p})) = \delta^{ir} \delta^{ls} F^{tjnm} I_1^{(0)} I_3^{(0)},$$

$$E_4^{ijlmrtsn} = \delta^{ir} \delta^{tj} \int d^D q G_0^T(\mathbf{q}) \times \\ \times P_L^{ls} (G_0^L(-\mathbf{q}) - G_0^T(-\mathbf{q})) \int d^D p G_0^T(\mathbf{p}) \times \\ \times P_L^{nm} (G_0^L(-\mathbf{p}) - G_0^T(-\mathbf{p})) = \delta^{ir} \delta^{ls} \delta^{tj} \delta^{nm} I_2^{(0)2},$$

$$E_5^{ijlmrtsn} = \delta^{ir} \int d^D q G_0^T(\mathbf{q}) \times \\ \times P_L^{ls} (G_0^L(-\mathbf{q}) - G_0^T(-\mathbf{q})) \times \\ \times \int d^D p P_L^{tj} (G_0^L(\mathbf{p}) - G_0^T(\mathbf{p})) \times \\ \times P_L^{nm} (G_0^L(-\mathbf{p}) - G_0^T(-\mathbf{p})) = \delta^{ir} \delta^{ls} F^{tjnm} I_2^{(0)} I_3^{(0)},$$

$$E_6^{ijlmrtsn} = \int d^D q P_L^{ir} (G_0^L(\mathbf{q}) - G_0^T(\mathbf{q})) \times \\ \times P_L^{ls} (G_0^L(-\mathbf{q}) - G_0^T(-\mathbf{q})) \times \\ \times \int d^D p P_L^{tj} (G_0^L(\mathbf{p}) - G_0^T(\mathbf{p})) \times \\ \times P_L^{nm} (G_0^L(-\mathbf{p}) - G_0^T(-\mathbf{p})) = \delta^{ir} \delta^{ls} F^{tjnm} I_3^{(0)2}.$$

Для $D_i^{ijlmrtsn}$ в формуле (28) получаем

$$D_1^{ijlmrtsn} = \delta^{ij} \delta^m \delta^{rs} \delta^{tn} \times \\ \times \int d^D q d^D p (G_0^T(\mathbf{q}))^2 G_0^T(\mathbf{p}) G_0^T(\mathbf{q} + \mathbf{p}) = \\ = \delta^{ij} \delta^m \delta^{rs} \delta^{tn} \int \frac{d^D q d^D p}{(1 + \mathbf{q}^2)^2 (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2) (1 + \mathbf{p}^2)} = \\ = \delta^{ij} \delta^m \delta^{rs} \delta^{tn} I_4,$$

$$I_4 = \int \frac{d^D q d^D p}{(1 + \mathbf{q}^2)^2 (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2) (1 + \mathbf{p}^2)},$$

$$D_2^{ijlmrtsn} = \delta^{ij} \delta^{rs} \delta^{tn} \int d^D q d^D p G_0^T(\mathbf{q}) G_0^T(\mathbf{p}) G_0^T(\mathbf{q} + \mathbf{p}) P_L^{lm}(q) (G_0^L(-\mathbf{q}) - G_0^T(-\mathbf{q})) =$$

$$= \delta^{ij} \delta^{rs} \delta^{tn} g_0 \int \frac{d^D q d^D p q^l q^m}{q^2 (1 + \mathbf{q}^2)^2 (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2) (1 + g_0 + \mathbf{q}^2)} = \delta^{ij} \delta^{rs} \delta^{tn} \delta^{lm} I_5,$$

$$I_5 = -\frac{g_0}{3} \int \frac{d^D q d^D p}{(1 + \mathbf{q}^2)^2 (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2) (1 + g_0 + \mathbf{q}^2)},$$

$$D_3^{ijlmrtsn} = \delta^{ij} \delta^{lm} \delta^{tn} \int d^D q d^D p (G_0^T(\mathbf{q}))^2 G_0^T(\mathbf{q} + \mathbf{p}) P_L^{rs}(p) (G_0^L(-\mathbf{p}) - G_0^T(-\mathbf{p})) =$$

$$= -\delta^{ij} \delta^{lm} \delta^{tn} g_0 \int \frac{d^D q d^D p p^r p^s}{p^2 (1 + \mathbf{q}^2)^2 (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2) (1 + g_0 + \mathbf{p}^2)} = \delta^{ij} \delta^{rs} \delta^{tn} \delta^{lm} I_6,$$

$$I_6 = -\frac{4\pi g_0}{3} \int \frac{d^D q d^D p q^2}{(1 + \mathbf{q}^2)^2 (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2) (1 + g_0 + \mathbf{p}^2)},$$

$$D_4^{ijlmrtsn} = \delta^{rs} \delta^{tn} \int d^D q d^D p G_0^T(\mathbf{q}) G_0^T(\mathbf{q} + \mathbf{p}) P_L^{ij}(q) P_L^{lm}(p) (G_0^L(-\mathbf{q}) - G_0^T(-\mathbf{q}))^2 =$$

$$= \delta^{rs} \delta^{tn} g_0^2 \int \frac{d^D q d^D p q^i q^j q^l q^m}{q^4 (1 + \mathbf{p}^2) (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2) (1 + g_0 + \mathbf{q}^2)^2} = \delta^{rs} \delta^{tn} F^{ijlm} I_7,$$

$$I_7 = \frac{16\pi^2 g_0^2}{5} \int \frac{d^D q d^D p q^2}{(1 + \mathbf{p}^2) (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2) (1 + g_0 + \mathbf{q}^2)^2},$$

$$D_5^{ijlmrtsn} = \delta^{ij} \delta^{lm} \int d^D q d^D p (G_0^T(\mathbf{q} + \mathbf{p}))^2 P_L^{tn}(q) P_L^{rs}(p) (G_0^L(-\mathbf{q}) - G_0^T(-\mathbf{q})) (G_0^L(-\mathbf{p}) - G_0^T(-\mathbf{p})) =$$

$$= \delta^{ij} \delta^{lm} g_0^2 \int \frac{d^D q d^D p q^t q^n p^r p^s}{p^2 q^2 (1 + g_0 + \mathbf{p}^2) (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2)^2 (1 + g_0 + \mathbf{q}^2)} = \delta^{ij} \delta^{rs} \delta^{tn} \delta^{lm} I_8,$$

$$I_8 = \frac{16\pi^2 g_0^2}{9} \int \frac{dq dp q^2 p^2}{(1 + g_0 + \mathbf{p}^2) (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2)^2 (1 + g_0 + \mathbf{q}^2)},$$

$$D_6^{ijlmrtsn} = \delta^{ij} \delta^{tn} \int d^D q d^D p G_0^T(\mathbf{q}) G_0^T(\mathbf{q} + \mathbf{p}) P_L^{lm}(q) P_L^{rs}(p) (G_0^L(-\mathbf{p}) - G_0^T(-\mathbf{p})) (G_0^L(-\mathbf{q}) - G_0^T(-\mathbf{q})) =$$

$$= \delta^{ij} \delta^{tn} g_0^2 \int \frac{d^D q d^D p q^l q^m p^r p^s}{p^2 q^2 (1 + \mathbf{q}^2) (1 + g_0 + \mathbf{p}^2) (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2) (1 + g_0 + \mathbf{q}^2)} = \delta^{ij} \delta^{rs} \delta^{tn} \delta^{lm} I_9,$$

$$I_9 = \frac{16\pi^2 g_0^2}{9} \int \frac{dq dp q^2 p^2}{(1 + \mathbf{q}^2) (1 + g_0 + \mathbf{p}^2) (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2) (1 + g_0 + \mathbf{q}^2)},$$

$$D_7^{ijlmrtsn} = \delta^{tn} \int d^D q d^D p G_0^T(\mathbf{q} + \mathbf{p}) P_L^{ij}(q) P_L^{lm}(q) P_L^{rs}(p) (G_0^L(-\mathbf{p}) - G_0^T(-\mathbf{p})) (G_0^L(-\mathbf{q}) - G_0^T(-\mathbf{q}))^2 =$$

$$= -\delta^{tn} g_0^3 \int \frac{d^D q d^D p q^i q^j q^l q^m p^r p^s}{p^2 q^4 (1 + g_0 + \mathbf{p}^2) (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2) (1 + g_0 + \mathbf{q}^2)^2},$$

$$D_8^{ijlmrtsn} = \delta^{ij} \int d^D q d^D p G_0^T(\mathbf{q}) P_L^{lm}(q) P_L^{rs}(p) P_L^{tn}(q + p) (G_0^L(\mathbf{q}) - G_0^T(\mathbf{q})) \times$$

$$\times (G_0^L(\mathbf{p}) - G_0^T(\mathbf{p})) (G_0^L(\mathbf{q} + \mathbf{p}) - G_0^T(\mathbf{q} + \mathbf{p})) =$$

$$= -\delta^{ij} g_0^3 \int \frac{d^D q d^D p q^l q^m (q + p)^t (q + p)^n p^r p^s (1 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2)^{-1} (1 + g_0 + \mathbf{q} + \mathbf{p}^2)^{-1}}{p^2 q^2 (p + q)^2 (1 + \mathbf{q}^2)^2 (1 + g_0 + \mathbf{q}^2) (1 + \mathbf{p}^2) (1 + g_0 + \mathbf{p}^2)},$$

$$D_9^{ijklmrsn} = \int d^D q d^D p P_L^{ij}(q) P_L^{lm}(q) P_L^{rs}(p) P_L^{ln}(q+p) \times \\ \times (G_0^L(\mathbf{q}) - G_0^T(\mathbf{q}))^2 (G_0^L(\mathbf{p}) - G_0^T(\mathbf{p})) (G_0^L(\mathbf{q}+\mathbf{p}) - G_0^T(\mathbf{q}+\mathbf{p})) = \\ = g_0^4 \int \frac{d^D q d^D p q^i q^j q^l q^m (q+p)^t (q+p)^n p^r p^s (1+(\mathbf{q}+\mathbf{p})^2)^{-1} (1+g_0+(\mathbf{q}+\mathbf{p})^2)^{-1}}{p^2 q^4 (p+q)^2 (1+\mathbf{q}^2)^2 (1+g_0+\mathbf{q}^2)^2 (1+\mathbf{p}^2) (1+g_0+\mathbf{p}^2)}.$$

Наконец, слагаемые $C_i^{ijklmrs}$ в формуле (30) имеют вид

$$C_1^{ijklmrs} = -\delta^{ij} \delta^{lm} \delta^{rs} \frac{\partial}{\partial k^2} \int d^D q d^D p G_0^T(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{k}) G_0^T(\mathbf{p}) G_0^T(\mathbf{q}) \Big|_{k^2=0} = \\ = -\delta^{ij} \delta^{lm} \delta^{rs} \frac{\partial}{\partial k^2} \int \frac{d^D q d^D p}{(1+\mathbf{q}^2)(1+\mathbf{p}^2)(1+(\mathbf{p}+\mathbf{k}+\mathbf{q})^2)} \Big|_{k^2=0} = \delta^{ij} \delta^{lm} \delta^{rs} I_{10}, \\ I_{10} = -\frac{\partial}{\partial k^2} \int \frac{d^D q d^D p}{(1+\mathbf{q}^2)(1+\mathbf{p}^2)(1+(\mathbf{p}+\mathbf{k}+\mathbf{q})^2)} \Big|_{k^2=0},$$

$$C_2^{ijklmrs} = -\delta^{ij} \delta^{lm} \frac{\partial}{\partial k^2} \int d^D q d^D p G_0^T(\mathbf{p}+\mathbf{q}) G_0^T(\mathbf{p}+\mathbf{k}) P_L^{rs}(q) (G_0^L(\mathbf{q}) - G_0^T(\mathbf{q})) \Big|_{k^2=0} = \\ = g_0 \delta^{ij} \delta^{lm} \frac{\partial}{\partial k^2} \int \frac{d^D q d^D p q^r q^s}{q^2 (1+\mathbf{q}^2)(1+g_0+\mathbf{q}^2)(1+(\mathbf{p}+\mathbf{q})^2)(1+(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2)} \Big|_{k^2=0} = \delta^{ij} \delta^{lm} \delta^{rs} I_{11}, \\ I_{11} = -\frac{g_0}{3} \frac{\partial}{\partial k^2} \int \frac{d^D q d^D p}{(1+\mathbf{q}^2)(1+g_0+\mathbf{q}^2)(1+(\mathbf{p}+\mathbf{q})^2)(1+(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2)} \Big|_{k^2=0},$$

$$C_3^{ijklmrs} = -\frac{\partial}{\partial k^2} \delta^{ij} \int d^D q d^D p G_0^T(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{k}) P_L^{lm}(p) P_L^{rs}(q) (G_0^L(\mathbf{q}) - G_0^T(\mathbf{q})) (G_0^L(\mathbf{p}) - G_0^T(\mathbf{p})) \Big|_{k^2=0} = \\ = -g_0^2 \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial k^2} \int \frac{d^D q d^D p q^r q^s p^l p^m}{p^2 q^2 (1+\mathbf{q}^2)(1+g_0+\mathbf{q}^2)(1+\mathbf{p}^2)(1+g_0+\mathbf{p}^2)(1+(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{k})^2)} \Big|_{k^2=0} = \\ = \delta^{ij} \delta^{lm} \delta^{rs} I_{12}, \\ I_{12} = -\frac{g_0^2}{9} \frac{\partial}{\partial k^2} \int \frac{d^D q d^D p}{(1+\mathbf{q}^2)(1+g_0+\mathbf{q}^2)(1+\mathbf{p}^2)(1+g_0+\mathbf{p}^2)(1+(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{k})^2)} \Big|_{k^2=0},$$

$$C_4^{ijklmrs} = -\frac{\partial}{\partial k^2} \int d^D q d^D p P_L^{ij}(q) P_L^{lm}(p+k) P_L^{rs}(p+q) \times \\ \times (G_0^L(\mathbf{q}) - G_0^T(\mathbf{q})) (G_0^L(\mathbf{p}+\mathbf{k}) - G_0^T(\mathbf{p}+\mathbf{k})) (G_0^L(\mathbf{q}+\mathbf{p}) - G_0^T(\mathbf{q}+\mathbf{p})) \Big|_{k^2=0} = \\ = -\frac{\partial}{\partial k^2} g_0^3 \int d^D q d^D p q^i q^j (p+k)^l (p+k)^m (q+p)^r (q+p)^s \times \\ \times \left[q^2 (p+k)^2 (p+q)^2 (1+\mathbf{q}^2)(1+g_0+\mathbf{q}^2)(1+\mathbf{p}+\mathbf{k}^2)(1+g_0+\mathbf{p}+\mathbf{k}^2)(1+g_0+\mathbf{q}+\mathbf{p}^2)(1+(\mathbf{q}+\mathbf{p})^2) \Big|_{k^2=0} \right]^{-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Kornblit, G. Ahlers, and E. Buehler, Phys. Lett. A **43**, 531 (1973).
2. M. B. Salamon, Sol. St. Comm. **13**, 1741 (1973).
3. F. L. Lederman, M. B. Salamon, and L. W. Shacklette, Phys. Rev. B **9**, 2981 (1974).
4. M. E. Fisher and A. Aharony, Phys. Rev. Lett. **30**, 559 (1973).
5. A. Aharony and M. E. Fisher, Phys. Rev. B **8**, 3323 (1973).

6. A. D. Bruce and A. Aharony, *Phys. Rev. B* **10**, 2078 (1974).
7. E. Frey and F. Schwabl, *Phys. Rev. B* **43**, 833 (1991).
8. J. P. Bouchaud and P. G. Zerah, *Phys. Rev. B* **47**, 9095 (1993).
9. G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, and D. I. Meiron, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1351 (1976).
10. G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, and D. I. Meiron, *Phys. Rev. B* **17**, 1365 (1978).
11. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 95 (1977).
12. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. B* **21**, 3976 (1980).
13. R. Guida and J. Zinn-Justin, *J. Phys. A* **31**, 8103 (1998).
14. H. Kleinert, *Phys. Rev. D* **60**, 085001 (1999).
15. F. Jasch and H. Kleinert, *J. Math. Phys.* **42**, 52 (2001).
16. А. А. Погорелов, И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **133**, 1277 (2008).
17. Е. В. Орлов, А. И. Соколов, *ФТТ* **42**, 2087 (2000).
18. С. В. Белим, *ЖЭТФ* **130**, 702 (2006).
19. L. Bergomi and J. J. Chen, *arXiv:cond-mat/9701175v3*.
20. N. F. Oliveira, Jr. S. Foner, Y. Shapira, and T. B. Reed, *Phys. Rev. B* **5**, 2634 (1972).
21. U. Kobler, I. Apfelstedt, K. Fischer, W. Zinn, E. Scheer, J. Wosnitza, H. Lohneysen, and T. Brockel, *Z. Phys. B* **92**, 475 (1993).
22. J. Kune, W. Ku, and P. E. Warren, *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 1408 (2005).
23. E. Scheer, J. Wosnitza, H. Lohneysen, R. Kiirsch, M. Lang, and F. Steglich, *J. Magn. Magn. Mater.* **104–107**, 175 (1992).
24. W. Sollinger, W. Heiss, R. T. Lechner, K. Rumpf, P. Granitzer, H. Krenn, and G. Springholz, *arXiv:0907.3836v1 [cond-mat.mtrl-sci]*.
25. D. J. W. Geldart, P. Hargraves, N. M. Fujiki, and R. A. Dunlap, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2728 (1989).
26. А. К. Муртазаев, И. К. Камилов, К. Ш. Хизриев, *ФТТ* **43**, 659 (2001).
27. А. К. Муртазаев, И. К. Камилов, Х. К. Алиев, В. А. Мутайламов, *ЖЭТФ* **117**, 559 (2000).