

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА КОСМИЧЕСКИХ СТРУН

*О. С. Сажина**

*Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 июня 2012 г.

Получены зависимости среднего ожидаемого количества космических струн от их красного смещения, вплоть до поверхности последнего рассеяния. Вычисления проведены на основе геометрической вероятности пересечения прямым сегментом струны заданной площадки, а также на основе информации об отсутствии струн при их поиске по эффектам гравитационного линзирования в оптических каталогах. Показано, что для красных смещений $0 < z < 1.954$ струн нет, но для $0 < z < 5$ ожидаемое количество струн может быть не больше $2.1 \cdot 10^3$ на уровне точности 95%. Для красных смещений вплоть до $z = 1100$ ожидаемое количество струн может быть не больше $2.4 \cdot 10^4$ на уровне точности 95%. Последняя оценка чувствительна к априорной информации об отсутствии космических струн в интервале красных смещений $0 < z < 1.954$ в площадке 4.48 квадратных градусов в оптических каталогах, она на 6% меньше, чем оценка без учета этой информации.

DOI: 10.7868/S0044451013010081

1. ВВЕДЕНИЕ

Космические струны — линейные топологические дефекты, которые могли бы образоваться в ранней Вселенной в результате фазовых переходов [1–3].

Существуют два основных метода поиска космических струн — по радиообзорам и по оптическим обзорам. В первом случае данные представляют собой радиокарту микроволнового реликтового излучения всей небесной сферы. Во втором случае исследователи имеют дело с набором небольших площадок, глубокие оптические обзоры которых были сделаны с помощью оптических инструментов, в первую очередь с помощью телескопа Хаббла (HST).

За последние годы активный интерес к изучению космических струн был вызван серией работ (см. [4–7] и ссылки в них) по разработке детальной стратегии поиска таких объектов по эффектам гравитационного линзирования, а также по анизотропии реликтового излучения [8–11].

При линзировании объектов (галактик) на струне, находящейся между наблюдателем и этими объектами, должна возникать характерная цепочка пар гравитационно-линзовых изображений, разде-

ленных расстоянием порядка 0.1–5 угловых секунд. Это расстояние зависит от единственного параметра космической струны — ее линейной плотности μ [12]. Нижний предел определяется максимальной разрешающей способностью современных оптических телескопов (HST), с помощью которых ведется поиск событий гравитационного линзирования. Верхний предел следует из анализа радиокарт анизотропии микроволнового реликтового излучения [8, 13].

С использованием архивных оптических каталогов HST разными группами исследовались небольшие площадки в оптическом диапазоне (в том числе в работе [6] — площадки суммарной площади порядка 4.48 квадратных градусов) на предмет поиска гравитационно-линзовых событий, вызванных космическими струнами. Космических струн обнаружено не было.

Несмотря на то что общая площадь доступных в оптических наблюдениях полей не слишком велика, можно извлечь важную информацию из того факта, что в этих полях не обнаружено космических струн. Прежде всего, можно оценить максимальное количество струн во Вселенной (в предположении, что они существуют).

Подобные попытки предпринимались на основе простых моделей (см. [14, 15] и ссылки в этих работах). Количество струн оценивалось геометриче-

*E-mail: cosmologia@yandex.ru

ски, по отношению объемов. Так, для каждого значения красного смещения z число струн в шаре, в центре которого расположен наблюдатель, радиусом $d(z)$, определяемым рассматриваемой космологической моделью, равно

$$N(z) = \left(\frac{2d(z)}{L} \right)^3,$$

где L — функция, полученная в результате численного моделирования динамики сети космических струн.

В этом подходе учитывается зависимость числа струн от вида космологической модели, однако не учитываются данные оптических каталогов: тот факт, что в площадках известной площади не было обнаружено космических струн.

Как было показано в работах [1, 16], в эпоху доминирования вещества и позже сеть космических струн космологических длин достигает масштабного-инвариантного режима. Общая плотность энергии всех струн определяется как

$$\rho_s = \Psi \frac{G\mu}{c^2} \rho_m = \Psi \Omega_m \frac{3H_0^2}{8\pi c^2}, \quad (1)$$

где $\Psi = 60 \pm 15$ [16].

Заметим, что параметр плотности не дает указаний на количество струн, а только на находящуюся в согласии с наблюдениями и моделированием общую длину всей совокупности сегментов космических струн. Вычисление количества струн совместно с величиной параметра плотности может дать оценку средней длины сегмента такого объекта как функцию красного смещения.

Значение параметра Ψ определяется численно, на основе начальной конфигурации струн, которая в свою очередь характеризуется особенностями соответствующих фазовых переходов согласно механизму Киббла [1, 17]. Так, когда температура Вселенной становится ниже некоторой критической, происходят фазовые переходы и формируются области пространства-времени, в каждой из которых поле вакуума принимает независимое значение. В каждой такой области может образоваться космическая струна. Таким образом, начальное распределение струн в ранней Вселенной полностью задается средним расстоянием между такими областями — корреляционной длиной ξ . Начальная плотность энергии струн определяется как H_0/ξ , т. е. отношение размера горизонта событий к корреляционной длине начального распределения струн [16, 18]. Для простоты оценок величину ξ рассматривают для модели

глобальных $U(1)$ -струн [1], обладающих некими начальными скоростями, а также структурой в виде петель.

Сформулируем задачу оценки максимального числа космических струн следующим образом. Пусть во Вселенной есть хотя бы одна космическая струна. Далее, пусть в некотором поле площадью $s = \theta_1\theta_2$ космических струн не обнаружено. Примем площадь рассматриваемого поля s как суммарную площадь всех полей, исследованных в оптическом диапазоне на предмет поиска гравитационно-линзовых пар изображений, сформированных струнами. Без ограничения общности и для простоты расчетов можно считать поле квадратным, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$. Действительно, ниже будет рассматриваться геометрическая вероятность пересечения такого поля прямой струной, в этой геометрической модели важна только площадь поля (его доля относительно общей площади поверхности небесной сферы), но не его конфигурация. Мы не рассматриваем несколько более простую с точки зрения расчетов круговую площадку, так как это не принято в астрономии.

Ожидаемое количество космических струн в поле s определим из нелинейного уравнения вида

$$N = \int_0^{\theta_c(\phi, \theta)} d\theta_c \int_{z_{min}}^{z_{max}} dz \times \times 2 \int_0^{\pi/2} d\beta P(\theta_0, \Psi, \sin \beta, z, \theta_c, N). \quad (2)$$

Здесь $P \in [0, 1]$ — вероятность, представляющая собой функцию от вероятностей, которые будут указаны ниже. Функция P зависит от следующих параметров: параметра плотности Ψ из (1); угла наклона β , т. е. угла между лучом зрения и касательной к струне [17]; красного смещения z ; длины θ_c сегмента струны внутри площадки $s = \theta_0^2$, зависящей от ориентации струны относительно площадки. Ориентация определяется углом ϕ и линейным расстоянием θ от центра площадки до струны.

Интегрирование ведется по всем возможным углам наклона струны относительно луча зрения, по всем возможным длинам сегмента θ_c , а также по рассматриваемому диапазону красных смещений, внутри которого проводится оценка числа струн. Коэффициент 2 учитывает симметрию поворотов струны относительно луча зрения. Среднее ожидаемое количество струн вычисляем в телесном угле $\Delta\Omega$, для которого

$$d = D(z)\Delta\Omega,$$

где $d = \sqrt{2}\theta_0$ — линейный размер площадки s , $D(z)$ — расстояние углового диаметра (см. Приложение), определяемое как

$$D(z) = \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}.$$

Очевидно, что для подсчета среднего ожидаемого числа струн во всей Вселенной полученное из уравнения (2) число N следует умножить на коэффициент K , равный отношению площади поверхности всей небесной сферы к площади исследуемой площадки, $K = 4\pi/s$.

Рассмотрим функцию P , стоящую под интегралом в уравнении (2).

Пусть во Вселенной (т. е. геометрически — в полном телесном угле 4π) имеется в среднем KN (считаем, что $N \geq 0$) струн. Тогда вероятность того, что в площадку $s = \theta_0^2$ не попало ни одной струны, может быть представлена с помощью геометрического распределения Фарри [19]. Пусть x — число «испытаний» до появления «события». В терминах нашей задачи «испытание» — это случайное «бросание» прямой струны произвольной длины в полный телесный угол, а «событие» — попадание сегмента струны длиной θ_c в площадку s . Тогда применительно к площадке s плотность распределения равна

$$P = p_{cross}(1 - p_{cross})^N. \quad (3)$$

Здесь p_{cross} — геометрическая вероятность пересечения сегментом струны длиной θ_c площадки s . Величина $(1 - p_{cross})^N$ — вероятность того, что ни одна из N струн не оказалась в площадке s .

Очевидно, что с ростом площади s при будущих исследованиях и в случае отрицательного результата по обнаружению струн в этих полях ожидаемое максимально возможное число струн будет уменьшаться.

Для численного решения нелинейного уравнения (2) необходимо проинтегрировать его правую часть по всем возможным длинам сегмента θ_c струны, попавшего в площадку s . При расчетах рассматриваются два разных случая взаимной ориентации сегмента струны и площадки (рис. 1). В первом случае концы сегмента расположены на смежных сторонах площадки, во втором — концы сегмента расположены на противоположных сторонах площадки. Расчеты для обоих случаев приведены в Приложении. Далее, необходимо проинтегрировать выражение (2)

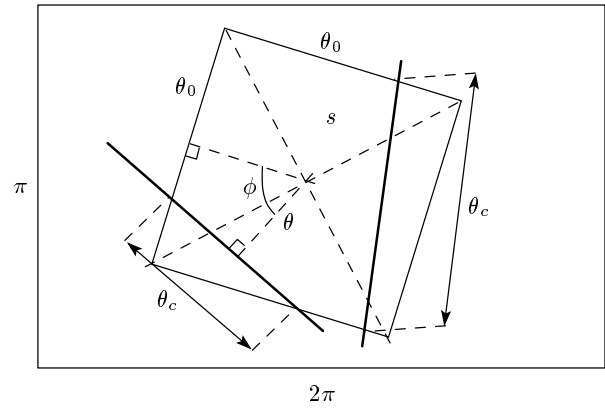


Рис. 1. Расположение исследуемой квадратной площадки s площадью θ_0 на прямоугольной проекции небесной сферы. Показаны два случая расположения струны относительно площадки s : концы прямого сегмента струны расположены на смежных и на противоположных сторонах площадки. Положение и ориентацию струны задают угол ϕ и расстояние θ

по всему диапазону красных смещений. Если нас интересует только геометрическая вероятность пересечения струной рассматриваемой площадки, то диапазон красных смещений $[z_{min}, z_{max}] = [0, 1100]$, где нижний предел соответствует положению наблюдателя, а верхний — положению поверхности последнего рассеяния. И, наконец, необходимо проинтегрировать (2) по всем возможным углам наклона струны относительно луча зрения (от 0 до $\pi/2$).

В случае привлечения к вычислению N дополнительной информации из оптических каталогов, предельные величины красных смещений будут определяться соответствующими каталогами. Так, оптические данные по внегалактическим источникам проекта COSMOS [20] охватывают диапазон красных смещений $0 \leq z \leq 1.954$. Кроме того, в этом случае изменится функция P , которая будет иметь вид

$$\tilde{P} = p_{cross} p_{lens}(1 - p_{cross} p_{lens})^N, \quad (4)$$

где p_{lens} — вероятность обнаружения гравитационно-линзовых событий в площадке s . Другими словами, $p_{cross} p_{lens}$ — вероятность того, что поле s пересекает струна и что одновременно с этим в поле s есть гравитационно-линзовые события.

Необходимое количество гравитационно-линзовых событий может быть одно, два или три (большее количество гравитационно-линзовых событий не имеет смысла рассматривать в силу их малой вероятности). Так, в работе [6] в качестве критерия наличия в поле прямого сегмента струны предлагается

принять три события, т. е. цепочку трех гравитационно-линзовых пар.

2. ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА СТРУН С УЧЕТОМ ДАННЫХ ОПТИЧЕСКИХ КАТАЛОГОВ

В случае привлечения данных оптических каталогов оценки максимального количества струн N определяются из нелинейного уравнения (2) путем подстановки $z_{min} = 0$, $z_{max} = 1.954$, а также (4):

$$N = \int_0^{\theta_c(\phi, \theta)} d\theta_c \int_0^{1.954} dz \times \times 2 \int_0^{\pi/2} d\beta [p_{lens} p_{cross} (1 - p_{lens} p_{cross})^N], \quad (5)$$

где (см. Приложение)

$$p_{cross} = p_0 \sin \beta \Psi \cdot \frac{3}{2} \frac{\Omega_m H_0}{c} \frac{D(z)(1+z)^2}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} = p_0 \sin \beta \Psi \cdot \frac{3}{2} \frac{\Omega_m H_0}{c} F(z), \quad (6)$$

$$F(z) = \frac{1+z}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}, \quad (7)$$

$$p_0 = \frac{1}{2\pi^2} \times \begin{cases} 1, & 0 < \theta_c < \theta_0, \\ \frac{(\theta_0/\theta_c)^3}{\sqrt{1-(\theta_0/\theta_c)^2}} + \left(\frac{\theta_0}{\theta_c}\right)^2 - 1, & \theta_0 < \theta_c < \sqrt{2}\theta_0. \end{cases} \quad (8)$$

Геометрическая вероятность p_0 пересечения сегмента струны длиной θ_c поля s зависит от одного из двух возможных взаимных положений струны и поля s . Так, первое выражение в (8) соответствует тому, что концы сегмента струны лежат на смежных сторонах поля s . Второе выражение в (8) отвечает сумме двух вариантов: концы сегмента струны лежат на противоположных сторонах поля s и концы сегмента струны лежат на смежных сторонах поля s в случае, когда длина сегмента больше стороны поля s и меньше его диагонали.

Сравним вероятности появления хотя бы одного события гравитационного линзирования, не менее двух и не менее трех таких событий.

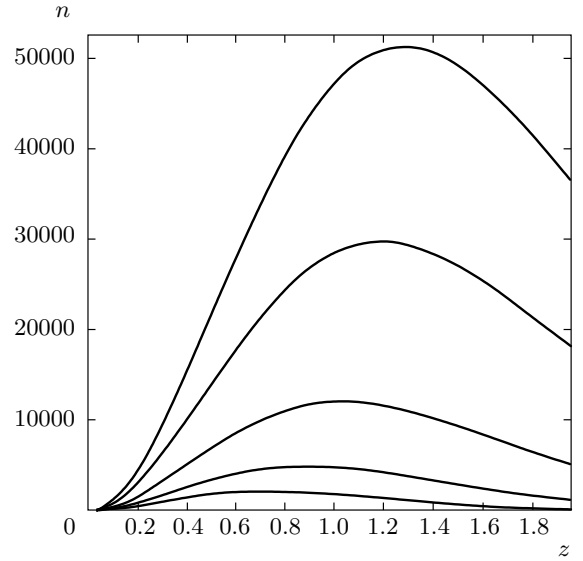


Рис. 2. Распределение галактик $n(z)$ для различных звездных величин: 26.6, 26, 25, 24, 23 (кривые сверху вниз)

Поскольку число гравитационно-линзовых событий редко, будем считать, что вероятность обнаружения такого события подчиняется распределению Пуассона. Следовательно, вероятность обнаружить хотя бы одно событие гравитационного линзирования имеет вид

$$p_{lens}(\theta_c) = 1 - \exp(-N_{events}). \quad (9)$$

Вероятность обнаружить не менее двух таких событий записывается как

$$p_{lens}(\theta_c) = 1 - \exp(-N_{events}) (1 + N_{events}), \quad (10)$$

не менее трех событий —

$$p_{lens}(\theta_c) = 1 - \exp(-N_{events}) \times \times \left(1 + N_{events} + \frac{N_{events}^2}{2}\right). \quad (11)$$

Здесь N_{events} — ожидаемое число событий, определяемое плотностью фоновых по отношению к струне источников $n(z, m)$, а также сечением струны σ . Число таких событий вычисляется в предположении, что в поле s есть струна.

Поверхностная плотность источников (имеющая размерность (угловая секунда)⁻²) является функцией их красных смещений и звездных величин [21]:

$$n(z, m) = A(m)z^2 \exp \left\{ - \left(\frac{z}{z_c(m)} \right)^{1.5} \right\}, \quad (12)$$

где

$$z_c(m) = z_m/1.412, \tag{13}$$

$$A(m) = \frac{3}{2} \frac{1}{z_c(m)^3} B \cdot 10^{0.45m}. \tag{14}$$

Коэффициент нормировки B имеет порядок 10^{-7} . Он выбран таким образом, чтобы удовлетворять наблюдательным данным по исследованию распределения галактик по красным смещениям [22, 23] (рис. 2). Интервал красных смещений, используемый каталогом объектов [20],

$$z_m = (0.18 \pm 0.01)m - (3.3 \pm 0.2). \tag{15}$$

В фильтре $F814W$ минимальная звездная величина $m_{min}(F814W) = 19$, а максимальная звездная величина $m_{max}(F814W) = 26.6$. Таким образом, максимально возможный интервал исследуемых красных смещений с точностью до ошибок равен $[z_{min}, z_{max}] = [0, 1.954]$, что и определяет пределы интегрирования по красным смещениям в выражении (5).

Сечение струны σ — это площадь, покрываемая полосой Эйнштейна, т. е. произведение дефицита угла струны $\Delta\theta$ и длины сегмента струны θ_c , попавшего в площадку s :

$$\sigma = \theta_c \Delta\theta \leq \theta_c \cdot 5''. \tag{16}$$

Дефицит угла считаем максимально возможным, полученным по независимому анализу радиокарт, [8].

Таким образом, ожидаемое число гравитационно-линзовых событий равно

$$N_{events} = \int_{z_{min}}^{z_{max}} dz \int_{m_{min}}^{m_{max}} \sigma n(z, m) dm. \tag{17}$$

Подставляя в (17) выражения (12)–(15) и (16) и интегрируя по красным смещениям и звездным величинам, получаем ожидаемое количество гравитационно-линзовых событий, попадающих в полосу Эйнштейна струны с максимально возможным дефицитом угла $\Delta\theta = 5''$. Эта величина определяется длиной сегмента струны θ_c :

$$N_{events} = \frac{1.747}{1''} \theta_c.$$

Подставляя последнюю величину в выражения (9), (10), (11), получаем оценки вероятности обнаружения космической струны в площадке s оптическими методами для случаев соответственно одного, двух и трех гравитационно-линзовых событий:

$$p_{lens}^{(1)} = 0.087, \tag{18}$$

$$p_{lens}^{(2)} = 0.004, \tag{19}$$

$$p_{lens}^{(3)} = 10^{-4}. \tag{20}$$

Оценим теперь количество струн по формулам (5)–(8) для полученных трех различных значений p_{lens} . Размер поля $s = \theta_0^2 = 4.48$ квадратных градусов, параметр плотности струн $\Psi = 60$. Космологические параметры Λ CDM-модели $\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m = 0.73$.

Для возможности численных расчетов, в силу сложности выражений (5)–(8), функция $F(z)$ может быть с большой точностью ($\leq 0.1\%$) аппроксимирована квадратичными полиномами следующим образом:

$$F(z) = \begin{cases} 1.0z + 0.19z^2, & 0 < z < 0.25, \\ 0.10 + 0.71z - 0.52(z - 0.5)^2, & 0.25 < z < 0.75, \\ 0.43 + 0.26z - 0.34(z - 1)^2, & 0.75 < z < 1.25, \\ 0.71 + 0.03z - 0.14(z - 1.5)^2, & 1.25 < z < 1.75, \\ 0.86 - 0.06z - 0.05(z - 2)^2, & 1.75 < z < 1.954. \end{cases} \tag{21}$$

В силу малости величины $p_{lens} p_{cross}$, функцию (4) можно представить в виде линейного по N ряда:

$$\tilde{P} \approx p_{lens} p_{cross} - N(p_{lens} p_{cross})^2. \tag{22}$$

В приближении (22) уравнение (5) становится линейным по N :

$$N = 2 \int_0^{\theta_c(\phi, \theta)} d\theta_c \int_0^{1.954} dz \int_0^{\pi/2} d\beta \times \\ \times [p_{lens} p_{cross} - N(p_{lens} p_{cross})^2] = \\ = 2 \int_0^{\theta_c(\phi, \theta)} d\theta_c \int_0^{1.954} dz \int_0^{\pi/2} d\beta p_{lens} p_{cross} - \\ - 2N \int_0^{\theta_c(\phi, \theta)} d\theta_c \int_0^{1.954} dz \int_0^{\pi/2} d\beta (p_{lens} p_{cross})^2. \tag{23}$$

Из уравнения (23) получаем, что максимальное ожидаемое число струн равно

$$N = \frac{2 \int_0^{\theta_c(\phi, \theta)} d\theta_c \int_0^{1.954} dz \int_0^{\pi/2} d\beta p_{lens} p_{cross}}{1 + 2 \int_0^{\theta_c(\phi, \theta)} d\theta_c \int_0^{1.954} dz \int_0^{\pi/2} d\beta (p_{lens} p_{cross})^2}. \quad (24)$$

Подставим (21) в (6)–(8) и в (24) для трех различных значений p_{lens} (18)–(20).

Результаты расчетов приведены на рис. 3. Видно, что в том случае, если мы ограничиваемся одним гравитационно-линзовым событием в поле s , число струн в этом поле может достигать $1.24 \cdot 10^2$ на уровне точности 95 %, что почти на два порядка превышает оценки, сделанные для случая простейшей модели [14]. В случае требования наличия двух гравитационно-линзовых событий в поле s число космических струн не может превышать 5. При требовании наличия трех таких событий в указанном поле космических струн не ожидается вообще.

3. ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА СТРУН ВПЛОТЬ ДО ПОВЕРХНОСТИ ПОСЛЕДНЕГО РАССЕЯНИЯ

Оценим количество струн для больших красных смещений вплоть до поверхности последнего рассеяния, $z \in [10, 1100]$. Для таких z нет возможности привлекать данные оптических каталогов, поэтому в наших расчетах ограничимся только геометрической вероятностью.

Для больших красных смещений ожидаемое максимальное число струн в площадке s представляет собой решение нелинейного уравнения:

$$N = \int_0^{\theta_c(\phi, \theta)} d\theta_c \int_{10}^{1100} dz \times \times 2 \int_0^{\pi/2} d\beta p_{cross} (1 - p_{cross})^N, \quad (25)$$

где вероятность p_{cross} определяется из (6)–(8) и уже не является малой величиной, поэтому разложение в ряд, подобно тому, как это было сделано выше, использовать нельзя. Для возможности численных расчетов, в силу сложности выражений (5)–(8),

функцию $F(z)$ для больших значений z с точностью лучше 3 % можно представить как

$$F(z) = \frac{3.70}{z} - \frac{7.41}{z^2}.$$

Результат интегрирования (25) по углу β для случая $p_0 = 1/2\pi^2$ (см. (8)) представляет собой комбинацию гипергеометрических функций, Г-функций и степенных функций:

$$\frac{9.13M_1}{z} + \frac{32.76M_2\Gamma(1-N)}{z^2\Gamma(-N)} - \frac{131.09M_2\Gamma(1-N)}{z^3\Gamma(-N)} - \frac{18.19M_1}{z^2} + \frac{130.55M_2\Gamma(1-N)}{z^4\Gamma(-N)}, \quad (26)$$

где

$$M_1 = F_2^2 \left(1 - 0.5N, 0.5 - 0.5N; 0.5, 1.5; \frac{(-4.56z + 9.12)^2}{z^4} \right),$$

$$M_2 = F_1^2 \left(1 - 0.5N, 0.5 - 0.5N; 2; \frac{(-4.56z + 9.12)^2}{z^4} \right).$$

Интегрирование выражения (26) по z осуществляется численно. Для значения

$$p_0 = \frac{(\theta_0/\theta_c)^3}{\sqrt{1 - (\theta_0/\theta_c)^2}} + \left(\frac{\theta_0}{\theta_c} \right)^2 - 1$$

результат интегрирования (25) по углу β является еще более громоздким выражением, которое мы здесь не приводим. Его интегрирование по θ_c и по z также осуществляется численно. Полное ожидаемое количество струн во Вселенной вплоть до поверхности последнего рассеяния получается путем умножения найденного числа N на коэффициент K , который есть отношение площади поверхности всей небесной сферы к площади исследуемой площадки, $K = 4\pi/s$.

Для красных смещений, соответствующих наибольшему оптическому диапазону, $0 < z < 5$, максимальные оценки количества струн следующие. В области $0 < z < 1.954$ путем совместного учета геометрической вероятности и вероятности наличия гравитационно-линзовых событий получаем, что ожидаемое количество струн есть 0, 5 и $1.24 \cdot 10^2$ на уровне точности 95 % (требование соответственно трех, двух и одного гравитационно-линзового события). В более удаленных областях, соответствующих красным смещениям $1.954 < z < 5$, мы можем

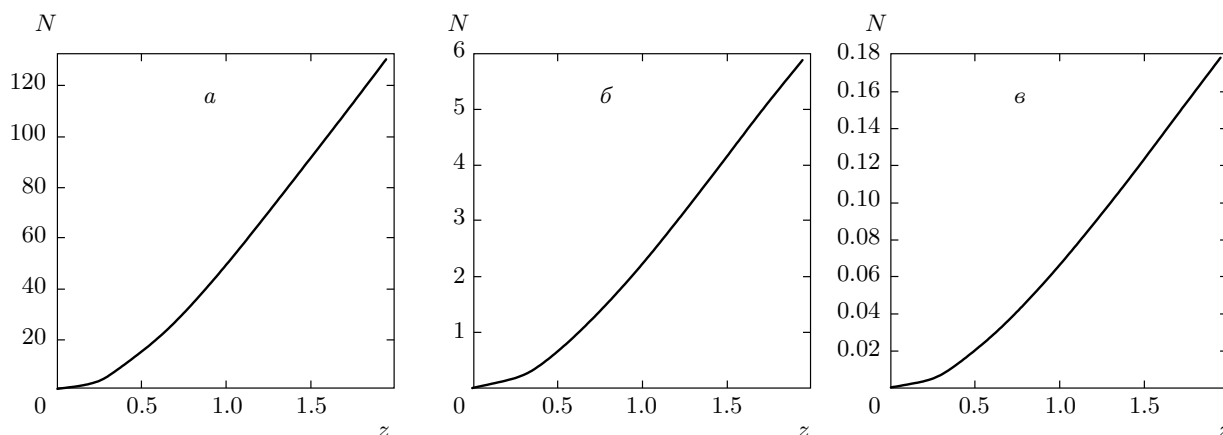


Рис. 3. Зависимости от красного смещения ожидаемого максимального количества космических струн, полученного в результате совместного использования геометрической вероятности и данных оптических каталогов. Требование наличия одного (а), двух (б), трех (в) гравитационно-линзовых событий

учитывать только геометрическую вероятность, поскольку надежных данных по оптическим каталогам пока нет. В этом диапазоне красных смещений ожидается не более $2.1 \cdot 10^3$ струн на уровне точности 95 %.

Таким образом, окончательно получаем, что для $0 < z < 5$ при учете данных оптических обзоров и при требовании наличия не менее трех гравитационно-линзовых событий полное количество струн ожидается равным $2.1 \cdot 10^3$ на уровне точности 95 %. Эта величина получена с учетом того факта, что в площадке s площадью 4.48 квадратных градусов космических струн не было обнаружено [6]. Если этот факт не учитывать, то струн должно было быть больше, в среднем $2.4 \cdot 10^3$ на уровне точности 95 %. Важно отметить, что для $0 < z < 5$ с учетом априорной информации об отсутствии космических струн в интервале красных смещений $0 < z < 1.954$ в площадке 4.48 квадратных градусов получаем величину, примерно на 12 % меньшую, чем без учета этой информации. Подчеркнем, что из того факта, что космических струн не ожидается в интервале $0 < z < 1.954$, не следует, что космических струн нет во всем оптическом диапазоне.

Для красных смещений вплоть до поверхности последнего рассеяния ($z = 1100$) общее максимальное количество космических струн ожидается равным $2.4 \cdot 10^4$ на уровне точности 95 %. Эта величина зависит от того, пересекают ли поле s струны или нет. Так, для $0 < z < 1100$ с учетом априорной информации об отсутствии космических струн в интервале красных смещений $0 < z < 1.954$ в пло-

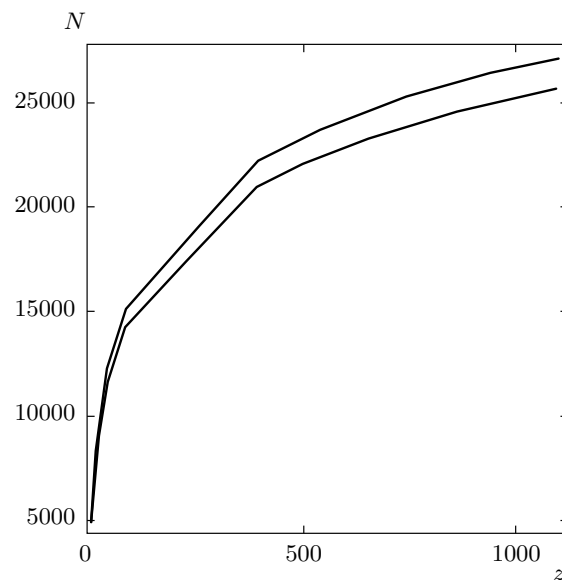


Рис. 4. Верхняя кривая — зависимость от красного смещения ожидаемого максимального количества космических струн вплоть до поверхности последнего рассеяния, полученного в результате использования только геометрической вероятности. Нижняя кривая — зависимость от z количества струн при учете априорной информации об отсутствии струн в площадке s площадью 4.48 квадратных градусов в оптическом диапазоне $0 < z < 1.954$

щадке 4.48 квадратных градусов получаем величину, на 6 % меньшую, чем без учета этой информации (рис. 4, 5).

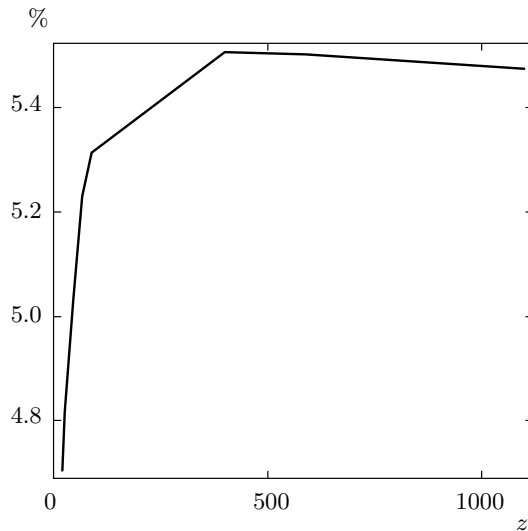


Рис. 5. Относительное различие двух кривых, изображенных на рис. 4 (в процентах)

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведены оценки максимального количества космических струн в различных диапазонах красных смещений струн. Оценки основывались на вычислении геометрической вероятности пересечения поля заданного размера прямым сегментом космической струны.

Для диапазона красных смещений $0 < z < 1.954$ помимо геометрической вероятности учитывались и дополнительные критерии. Так, в качестве дополнительного критерия наличия в поле s площадью 4.48 квадратных градусов [6] прямого сегмента космической струны принимались данные оптических каталогов, а именно, оценки количества событий гравитационного линзирования в поле s . Космическая струна с необходимостью продуцирует гравитационно-линзовые изображения фоновых по отношению к ней источников, поэтому в качестве дополнительных оптических критериев рассматривались следующие: наличие в поле s одного, двух и трех гравитационно-линзовых событий. Последний вариант представляется более надежным, так как позволяет судить о наличии в поле сегмента прямой струны, а не событий гравитационного линзирования, обусловленных другими факторами (обычным линзированием). Так, получено, что в случае требования наличия в поле s не менее трех гравитационно-линзовых событий и с учетом пересечения струной рассматриваемого поля космических струн в данном диапазоне красных смещений нет. Эта оценка позволя-

ет объяснить безрезультатность поиска космических струн по эффектам гравитационного линзирования, а также уточняет результаты, полученные на основе моделирования сетей космических струн, так как учитывает то, что космические струны могут и не представлять собой сеть, а присутствовать в единичных экземплярах. В случае оценки количества струн как эволюционирующей сети ожидаемое количество струн для рассматриваемого диапазона красных смещений составляет около 6 [14].

Согласно проделанной работе, с учетом как имеющихся оптических данных, так и геометрической вероятности, всего внутри сферы последнего рассеяния (т.е. в интервале красных смещений $0 < z < 1100$) ожидается не больше $2.4 \cdot 10^4$ космических струн на уровне точности 95 %, причем почти 90 % таких струн не доступны в оптических обзорах, а потому должны обладать угловыми размерами менее 100° [8].

На оценки количества космических струн влияет также тот факт, что в рассматриваемом поле s площадью 4.48 квадратных градусов космических струн обнаружено не было [6]. Для $0 < z < 1100$ с учетом априорной информации об отсутствии космических струн в интервале красных смещений $0 < z < 1.954$ в площадке 4.48 квадратных градусов получаем величину, на 6 % меньшую, чем без учета этой информации. Заметим, что для оценок параметров космических струн такая точность является избыточной, и потому изменения параметров космических струн в работе не учитываются.

Основные выводы данной работы следующие. Во-первых, оценки количества струн, полученные традиционными методами анализа эволюции струн, необходимо дополнять имеющимися наблюдательными данными в оптическом диапазоне. Во-вторых, необходимо учитывать факт отсутствия струн в полях заданных размеров. Данная работа дает ответ на вопрос, почему в оптическом диапазоне не наблюдается космических струн, а также пересматривает традиционное представление о струнах как сети объектов, поскольку количество струн в ближайших к нам областях ($z < 2$) может быть единичным. В то же время большое количество струн может обладать небольшой протяженностью и в силу удаленности ($z > 7$) быть недоступными для оптических обзоров. Таким образом, важнейшим методом поиска космических струн становится анализ данных анизотропии реликтового излучения [24].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем геометрическую вероятность нахождения в площадке $s = \theta_0^2$ сегмента прямой струны длины θ_c :

$$p_{cross}(\theta_0, \Psi, \sin \beta, z, \theta_c) = p_0(\theta_0, \theta_c) \frac{d\Theta}{dz} \sin \beta,$$

где $p_0(\theta_0, \theta_c)$ — вероятность, рассчитанная для струны единичной длины, перпендикулярной лучу зрения, β — угол между лучом зрения и реальным расположением струны. Телесный угол Θ определяется красным смещением струны z и параметром плотности струн Ψ :

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{d\Theta}{dV} \frac{dV}{dz},$$

где объем пространства, ограниченный красным смещением z ,

$$V = \frac{4}{3}\pi [r(z)]^3,$$

а расстояние от наблюдателя до объекта с красным смещением z

$$r(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{d\hat{z}}{\sqrt{\Omega_m(1+\hat{z})^3 + \Omega_\Lambda}}.$$

Рассматривается Стандартная космологическая модель, где $\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, $H_0 = 71$ км/с/Мпк — современное значение параметра Хаббла. Интегрируя объем по красному смещению, получаем

$$\frac{dV}{dz} = 4\pi [r(z)]^2 \frac{dr(z)}{dz} = \frac{4\pi c}{H_0} \frac{(1+z)^2 [D(z)]^2}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}},$$

где

$$D(z) = \frac{1}{1+z} r(z)$$

— расстояние углового диаметра (ADD — angular diameter distance [25]).

Величина $d\Theta/dV$ представляет собой концентрацию струн в телесном угле $d\Theta$:

$$\frac{D(z) d\Theta}{dV} = \frac{d_{phys}}{dV} = \frac{\rho_s}{\mu},$$

где d_{phys} — физический линейный размер струны, а μ — ее линейная плотность. Другими словами,

$$dm_{strings} = d_{phys} \mu = \rho_s dV.$$

Согласно работе [16],

$$\frac{d\Theta}{dV} = \Psi \frac{G\mu}{c^2} \rho_m \frac{1}{D(z)\mu} = \Psi \cdot \frac{3}{8} \frac{H_0^2}{\pi c^2} \Omega_m \frac{1}{D(z)}.$$

Таким образом,

$$\frac{d\Theta}{dz} = \Psi \cdot \frac{3}{2} \frac{\Omega_m H_0}{c} \frac{D(z)(1+z)^2}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}$$

и

$$p_{cross} = p_0 \sin \beta \Psi \cdot \frac{3}{2} \frac{\Omega_m H_0}{c} \frac{D(z)(1+z)^2}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} = p_0 \sin \beta \Psi \cdot \frac{3}{2} \frac{\Omega_m H_0}{c} F(z), \quad (27)$$

где

$$F(z) = \frac{1+z}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}.$$

Геометрическая вероятность p_0 в выражении (27) есть отношение меры сегмента струны длиной θ_c в площадке θ_0^2 к площади поверхности небесной сферы. Эта мера определяется через δ -функцию из-за одномерности струны. Учитывая также симметрию пересечения струной площадки, получаем

$$p_0 = 4 \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^{\theta^*(\phi)} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi \delta[\hat{\theta}(\theta, \phi) - \theta_c]}{4\pi}. \quad (28)$$

При вычислении вероятности (28) рассматриваются два случая разной конфигурации струны относительно площадки. В первом случае струна пересекает две смежные стороны площадки, во втором — две противоположные стороны площадки, см. рис. 1:

$$p_0 = p_0(1) + p_0(2).$$

Пересечение струной двух смежных сторон площадки, $p_0(1)$

Для удобства расчетов введем следующие переменные: угол φ между перпендикуляром к одной из сторон площадки и перпендикуляром, опущенным на струну, и расстояние θ от центра площадки до струны (см. рис. 1). Тогда

$$p_0(1) = \frac{1}{\pi^2} \left(\int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} d\phi \int_{\theta_0}^{\sqrt{2}\theta_0} d\theta \delta[\hat{\theta}(\theta, \phi) - \theta_c] + \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\theta_0} d\theta \delta[\hat{\theta}(\theta, \phi) - \theta_c] \right),$$

где $\cos \phi_{min} = \theta_0/\theta_c$, $\sin \phi_{max} = \theta_0/\theta_c$.

Вычислим величину $\hat{\theta}(\theta, \phi)$ — длину отрезка струны, находящегося внутри площадки θ_0^2 . Из тригонометрических соотношений внутри квадрата находим:

$$\hat{\theta}(\theta, \phi) = \frac{\theta_0/2 - \theta \cos \phi}{\sin \phi} + \frac{\theta_0/2 - \theta \sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\sqrt{2}\theta_0 \sin(\phi + \pi/4) - 2\theta}{\sin(2\phi)},$$

$$p_0(1) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\arccos(\theta_0/\theta_c)}^{\arcsin(\theta_0/\theta_c)} d\phi \int_{\theta_0}^{\sqrt{2}\theta_0} d\theta \times \delta \left[\frac{\sqrt{2}\theta_0 \sin(\phi + \pi/4) - 2\theta}{\sin(2\phi)} - \theta_c \right] + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\theta_0} d\theta \delta \left[\frac{\sqrt{2}\theta_0 \sin(\phi + \pi/4) - 2\theta}{\sin(2\phi)} - \theta_c \right] = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\phi \cdot \frac{1}{2} \sin(2\phi), & 0 < \theta_c < \theta_0, \\ \frac{1}{\pi^2} \int_{\arccos(\theta_0/\theta_c)}^{\arcsin(\theta_0/\theta_c)} d\phi \cdot \frac{1}{2} \sin(2\phi), & \theta_0 < \theta_c < \sqrt{2}\theta_0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2}, & 0 < \theta_c < \theta_0, \\ \frac{1}{2\pi^2} \left(2 \left(\frac{\theta_0}{\theta_c} \right)^2 - 1 \right), & \theta_0 < \theta_c < \sqrt{2}\theta_0. \end{cases} \quad (29)$$

Пересечение струной двух противоположных сторон площадки, $p_0(2)$

Аналогично предыдущему случаю вводим переменные ϕ и θ (см. рис. 1). Тогда

$$p_0(2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{\theta^*} d\theta \delta \left[\hat{\theta}(\theta, \phi) - \theta_c \right], \quad (30)$$

где максимально возможное расстояние от центра площадки до струны зависит от угла наклона струны и равно

$$\theta^* = \frac{\theta_0(\cos \phi - \sin \phi)}{2}.$$

Вычислим величину $\hat{\theta}(\theta, \phi)$ — длину отрезка струны, находящегося внутри площадки θ_0^2 . Из тригонометрических соотношений внутри квадрата находим, что

$$\hat{\theta}(\theta, \phi) = \theta_0 / \cos \phi.$$

Выражение под интегралом в (30) не зависит от θ , следовательно

$$p_0(2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/4} d\phi \delta \left(\frac{\theta_0}{\cos \phi} - \theta_c \right) \cdot \frac{1}{2} \theta_0 (\cos \phi - \sin \phi).$$

Проводя замену переменной $y = \theta_0 / \cos \phi$ и учитывая, что $\theta_0 < \theta_c < \sqrt{2}\theta_0$, получаем:

$$p_0(2) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\theta_0}^{\sqrt{2}\theta_0} \frac{dy}{y \sqrt{\left(\frac{y}{\theta_0}\right)^2 - 1}} \delta(y - \theta_c) \times \frac{1}{2} \theta_0 \left(\frac{\theta_0}{y} - \sqrt{1 - \left(\frac{\theta_0}{y}\right)^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\frac{\theta_0}{\theta_c} \left(\frac{\theta_0}{\theta_c} - \sqrt{1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta_c}\right)^2} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\theta_c}{\theta_0}\right)^2 - 1}}. \quad (31)$$

Вычисление общей вероятности, p_0

Суммируя вычисленные вероятности $p_0(1)$ и $p_0(2)$, находим общую геометрическую вероятность попадания прямого сегмента струны длиной θ_c , ориентированного произвольным образом, в площадку θ_0^2 :

$$p_0(\theta_c) = \frac{1}{2\pi^2} \begin{cases} 1, & 0 < \theta_c < \theta_0 \\ \frac{(\theta_0/\theta_c)^3}{\sqrt{1 - (\theta_0/\theta_c)^2}} + \left(\frac{\theta_0}{\theta_c}\right)^2 - 1, & \theta_0 < \theta_c < \sqrt{2}\theta_0. \end{cases} \quad (32)$$

Полученное соотношение полностью соответствует частному случаю соотношения, выведенного в работе [6]. Отметим неточность автора: для выполнения условия $p_0(\theta_c) \leq 1$ в соотношении (31) необходимо исключить из рассмотрения малую область изменения параметра θ_c : $\theta_0 \leq \theta_c \leq \theta_0 + 0.3\%(\sqrt{2}\theta_0 - \theta_0)$. Это ограничение соответствует тому, что для вычисления вероятности в случае пересечения струной двух противоположных сторон рассматриваемого поля исключается из рассмотрения малая область изменения угла ϕ : $0 \leq \phi \leq 2.75$ градусов. Данное ограничение можно устранить путем введения угла ϕ^* с другим началом отсчета, однако мы не будем приводить соответствующие громоздкие вычисления, так как указанное ограничение в силу своей малости не влияет на сходимость интегралов и на окончательный результат об ожидаемом количестве струн.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and other Topological Defects*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994), p. 258.
2. T. W. B. Kibble, *J. Phys. A* **9**, 1387 (1976).
3. S. F. Shandarin and Ia. B. Zeldovich, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1488 (1984).
4. M. V. Sazhin et al., *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **343**, 353 (2003).
5. M. V. Sazhin et al., *Astrophys. J.* **636**, L5 (2006).
6. E. Morganson et al., *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **406**, 2452 (2009).
7. M. V. Sazhin et al., *Open Astr. J.* **3**, 200 (2010).
8. О. С. Сажина, М. В. Сажин, В. Н. Семенцов, *ЖЭТФ* **133**, 1005 (2008).
9. S. Amsel, J. Berger, and R. H. Brandenberger, arXiv:0709.0982v3 [astro-ph].
10. R. J. Danos and R. H. Brandenberger, *Int. J. Mod. Phys. D* **19**, 183 (2010).
11. E. Jeong, C. Vaccigalupi, and G. F. Smoot, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **09**, 018 (2010).
12. О. С. Сажина и др., *УФН* **181**, 1109 (2011).
13. О. С. Сажина, М. В. Сажин, *ЖЭТФ* **140**, 918 (2011).
14. R. Consiglio et al., arXiv:1112.5186v1.
15. M. V. Sazhin, O. S. Khovanskaya, M. Capaccioli et al., *Astron. Lett.* **31**(2), 73 (2005).
16. B. Allen and E. P. S. Shellard, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 119 (1990).
17. T. W. B. Kibble, arXiv:astro-ph/0410073v2.
18. T. Vachaspati and A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **30**, 2036 (1984).
19. А. И. Кобзарь, *Прикладная математическая статистика*, Физматлит, Москва (2006), с. 92.
20. A. Leauthaud, R. Massey, J.-P. Kneib et al., *Astrophys. J. Suppl.* **172**, 219 (2007).
21. C. M. Baugh and G. Efstathiou, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **265**, 145 (1993).
22. T. J. Broadhurst, R. S. Ellis, and T. Shanks, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **235**, 827 (1988).
23. M. J. Colles et al., *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **261**, 19 (1993).
24. О. С. Сажина, *Вестник МГУ* **6**, 93 (2010).
25. В. А. Рубаков, Д. С. Горбунов, *Введение в теорию ранней Вселенной*, УРСС, Москва (2008), т. 1, с. 96.