

# ДИССИПАТИВНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В ПЛОТНЫХ СРЕДАХ С ОПТИЧЕСКОЙ НАКАЧКОЙ

*А. В. Прохоров<sup>a\*</sup>, М. Ю. Губин<sup>a</sup>, А. Ю. Лексин<sup>a</sup>,  
М. Г. Гладуш<sup>b</sup>, А. П. Алджани<sup>a</sup>, С. М. Аракелян<sup>a</sup>*

<sup>a</sup> *Владимирский государственный университет  
600000, Владимир, Россия*

<sup>b</sup> *Институт спектроскопии Российской академии наук  
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 5 октября 2011 г.

Рассмотрена проблема нелинейного рассеяния импульсов света в плотной трехуровневой атомной среде с непрерывной накачкой при учете эффектов локального поля. На основе вариационных методов, а также прямого численного моделирования сформулированы физические требования к параметрам среды и поля, а также определены области их значений, при которых в модели допированного атомами  $^{87}\text{Rb}$  кварцевого волновода происходит эффективное формирование стационарных солитонов. Выявлено, что пренебрежение учетом локального поля в рассмотренной модели приводит к исчезновению стабильности солитонов в предсказанной области.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение процессов распространения оптических импульсов в резонансных атомных средах является одной из важных задач современной прикладной атомной оптики, начиная со времени первых экспериментальных работ с использованием лазерных усилителей [1]. Значительным шагом на этом пути явились теоретические и экспериментальные работы по наблюдению режима самоиндуцированной прозрачности для резонансных солитонов в двухуровневых средах [2, 3]. Они также послужили основой более сложной задачи, связанной с необходимостью управления (в том числе и чисто оптического) пространственно-временными и амплитудно-фазовыми характеристиками подобных оптических образований. В качестве основы для такого управления может служить дополнительное поле оптической накачки, но его воздействие на систему существенно зависит от внешних настроек. Так, в случае  $\Lambda$ -схемы взаимодействия хорошо известный линейный эффект электромагнитной индуцированной прозрачности (ЭМИП) [4, 5] реализуется в околорезонансных условиях, когда

частота отстройки электромагнитных полей от атомно-оптического резонанса  $\Delta$  значительно меньше коэффициента атомно-оптической связи (с учетом оптической толщины среды, см. [6]) на пробном переходе. Немаловажную роль для его наблюдения играет способ выхода системы на стационарный режим, что связано с соотношением между временем  $\tau_0$  установления максимального уровня интенсивности пробного поля и обратной частотой Раби  $\Omega$  накачивающего поля (либо скоростью релаксации атомной системы  $\Gamma_{mn}$ ). Так, под адиабатическим включением здесь обозначают ситуацию  $\tau_0 \gg \Omega^{-1}$  [7], при которой происходит плавное и эффективное установление режима во времени. Возможность многофотонных переходов для пробного поля в данном случае обусловлена существенным повышением мощности поля оптической накачки, приводящим к значительному увеличению нелинейного коэффициента преломления атомной среды [8].

В рамановском пределе для  $\Lambda$ -схемы взаимодействия, когда оба поля сильно отстроены от резонанса [9], возникают совместные поляризации на обоих оптических переходах и появляется возможность наблюдать результат более сложной нели-

\*E-mail: avprokhorov@vlsu.ru

нейной картины непосредственного взаимодействия пробного и накачивающего полей, в частности, в форме вынужденного комбинационного рассеяния света. При этом в импульсном режиме работы схемы различают стационарный случай, когда длительность импульсов  $T_0$  значительно превосходит время релаксации среды и обратный ему предел ВКР со сверхкороткими импульсами накачки [10]. Нелинейные режимы работы  $\Lambda$ -схемы определяют дополнительные перспективы создания устройств полностью оптического управления световыми импульсами для целей обработки оптической информации [11, 12] при использовании твердотельных носителей [13–15] в условиях миниатюризации (чипирования) лабораторных схем. Одним из важных моментов для твердотельных сред со значительной плотностью оптически активных частиц является необходимость учета эффективного или локального значения действующего на них поля [16, 17]. Согласно принятой в литературе терминологии, вносимые при этом поправки во взаимодействие активного атома с внешней накачкой обуславливаются близкими диполь-дипольными взаимодействиями (БДД). Данное обстоятельство может существенным образом изменить картину изучаемых явлений, когда частота Раби для выделенного перехода сравнима с величиной соответствующей поправки БДД. При этом, наиболее общие оценки для ансамблей резонансных частиц показывают, что необходимость учета БДД начинается с концентраций  $10^{15} \text{ см}^{-3}$ . В связи с данным усложнением задачи особое внимание привлекает возможность получения устойчивых солитонных образований [18] в таких системах [19–21] и управления ими с учетом зависимости дисперсионных, нелинейных и диссипативных эффектов для пробного поля [22] от величины БДД. Это оказывается возможным только при анализе уравнения распространения, полученного непосредственным выводом, например, из уравнений Максвелла–Блоха, как в работе [23] для солитонов самоиндуцированной прозрачности. Следует отметить, что прозрачная среда, содержащая активные частицы, способна также оказывать влияние на значение констант взаимодействия [17, 24]. Однако в случае условно «непоглощающей» среды-носителя (host) речь идет лишь о перенормировке частот Раби, констант БДД и скоростей релаксации, не влекущей за собой новых нелинейных эффектов.

В данной работе на примере оптически-плотной трехуровневой атомной среды рассмотрен расширенный случай далекого от резонанса рамановского режима  $\Lambda$ -схемы взаимодействия с учетом нелиней-

но-диссипативных эффектов вплоть до пятого порядка по пробному полю включительно. При этом оптическое управление конкурентными нелинейными процессами позволяет выявить область значений физических параметров, в которой возникают солитонные решения для распространяющихся в оптически-плотной среде допированных атомами  $^{87}\text{Rb}$  кварцевых волноводов пробных оптических импульсов. Комплексное использование вариационных и численных методов для конкретной модели атомо-оптических взаимодействий позволяет точно рассчитать параметры поля накачки и пробного импульса, необходимых для получения оптических солитонов в обнаруженных областях их устойчивости.

Статья имеет следующую структуру.

В разд. 2 на основе метода Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ) в пределе обобщенного борновского приближения второго порядка получена система уравнений для матрицы плотности трехуровневой атомной среды, содержащей естественные поправки, учитывающие локальный характер взаимодействия индивидуальных примесных частиц с электромагнитными полями для двухлучевой схемы взаимодействия. В разд. 3 проведен анализ самосогласованной задачи нелинейного рассеяния пробного поля в плотной атомной среде трехуровневых атомов с использованием адиабатического приближения, позволяющего ее сведение к форме нелинейного уравнения Гинзбурга–Ландау (УГЛ) пятого порядка. В разд. 4 с использованием вариационного метода моментов и прямого численного моделирования выполнен анализ существования областей стабильности оптических солитонов пробного поля в модели допированных атомами  $^{87}\text{Rb}$  оптических волноводов с использованием рамановского предела для  $\Lambda$ -схемы взаимодействия. В разд. 5 представлены результаты численного эксперимента по прямому моделированию самосогласованной задачи для нелинейного рассеяния света в оптически-плотной среде с использованием пробных импульсов различной длительности. В Заключение приведены основные выводы работы.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ $\Lambda$ -СХЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ОПТИЧЕСКИ-ПЛОТНОЙ ДОПИРОВАННОЙ СРЕДЕ

На рис. 1 представлена оптическая матрица, выполненная на основе кварцевого стекла, в которую внедрены трехуровневые атомы  $^{87}\text{Rb}$ . Методом фемтосекундной модификации гидроксильных

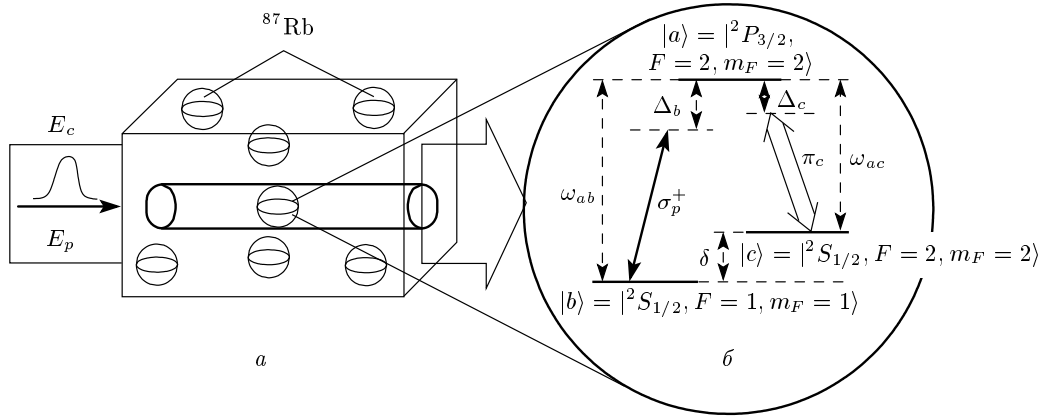


Рис. 1. а) Модель оптического волновода на основе допированного атомами  $^{87}\text{Rb}$  кварцевого стекла. б)  $\Lambda$ -схема атомно-оптического взаимодействия для атомов  $^{87}\text{Rb}$  в кварцевой матрице

групп [25] в такой структуре может быть записан оптический волновод. Геометрия эксперимента предполагает, что пробный импульс поля  $E_p$  заданной формы с центральной частотой  $\omega_p$  распространяется вдоль волноводного канала совместно (и в том же направлении) с непрерывной волной мощной оптической накачки  $E_c$ , как на рис. 1а. В рассматриваемом в работе рамановском пределе частота отстройки пробного поля  $\Delta_b$  существенно превосходит скорость релаксации  $\Gamma_{ab}$  ( $\Gamma_{ac}$ ) возбужденного состояния, см. рис. 1б. Уровни  $|c\rangle$  и  $|b\rangle$  сдвинуты по частоте на  $\delta = 6.834$  ГГц, дипольный матричный элемент перехода  $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$  составляет  $d_{ba} = 3.58 \cdot 10^{-29}$  К · м.

Поскольку атомы  $^{87}\text{Rb}$  обладают большими значениями дипольных моментов на рассматриваемых оптических переходах и с учетом их концентрации в оптической матрице, величина БДД

$$\chi_{ba} = \frac{\rho_3 |d_{ba}|^2}{3\hbar\epsilon_0},$$

входящая в выражение для эффективной частоты Раби  $\Omega_{eff} = \Omega_{ba} + \chi_{ba}\sigma_{ba}$  [24] может принимать значения, близкие к величине частоты Раби пробного поля (здесь  $\rho_3$  — концентрация атомов,  $\sigma_{ba}$  — соответствующий элемент матрицы плотности). Таким образом, возникающие в системе нелинейно-оптические и дисперсионные эффекты будут определяться, с одной стороны, настройками поля оптической накачки, а с другой — значениями концентрации допированных атомов в оптически-плотной системе на основе такого допированного волновода.

В предположении, что ансамбль одинаковых трехуровневых атомных систем с соответствующи-

ми значениями энергий уровней  $E_a > E_c > E_b$  (см. рис. 1б), начиная с момента времени  $t > 0$ , взаимодействует с электромагнитными полями, оператор Гамильтона такой системы может быть представлен в следующем виде:

$$H = \sum_j H_A^j + \sum_{\mathbf{k},s} H_F^{\mathbf{k},s} + \sum_j \sum_{\mathbf{k},s} V_{AF}, \quad (1)$$

где первые два слагаемых обозначают невозмущенные атомные и полевые подсистемы. Вводя частоту разрешенного перехода  $\omega_{ab} = (E_a - E_b)/\hbar$  и величину частотного расщепления нижних уровней  $\delta = (E_c - E_b)/\hbar$ , можно записать

$$H_A^j = \hbar(\omega_{ab}|a_j\rangle\langle a_j| + \delta|c_j\rangle\langle c_j|). \quad (2)$$

При этом все атомные частицы формально индивидуальны, и поэтому при необходимости можно различать их соответствующим индексом, т. е.  $H_A^j, |a_j\rangle$ . Полевая подсистема представляет собой бесконечный набор мод квантованного электромагнитного поля. Соответственно, для моды свободного электрического поля справедливо

$$H_F^{\mathbf{k},s} = \hbar\omega_k \left( \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right), \quad (3)$$

где  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger$  и  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}$  — операторы рождения и уничтожения фотонов частоты  $\omega_k$  с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и двумя независимыми поляризациями  $s = 1, 2$ ,  $k = \omega_k/c$ ,  $c$  — скорость света в вакууме. Взаимодействие рассматривается в рамках электрического дипольного приближения  $V_{AF} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$ , где оператор дипольного момента атома, локализованного в точке  $\mathbf{r}_j$ , имеет вид

$$\hat{\mathbf{d}}_j = (\mathbf{d}_{ab}|a_j\rangle\langle b_j| + \mathbf{d}_{ac}|a_j\rangle\langle c_j|) + \text{H.c.},$$

введены матричные элементы  $\mathbf{d}_{\alpha\beta} = \langle\alpha|\hat{\mathbf{d}}|\beta\rangle$  и учтено, что  $\mathbf{d}_{cb} = 0$  и  $\mathbf{d}_{\alpha\alpha} = 0$ . Оператор моды электрического поля в точке пространства  $\mathbf{r}$  записывается стандартным образом:

$$\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k},s}(\mathbf{r}) = i\lambda_k \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \text{H.c.}, \quad (4)$$

где  $\lambda_k = \sqrt{\hbar\omega_k/2\varepsilon_0 V}$ ,  $V$  — объем квантования,  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},s}$  — единичный вектор поляризации. Эволюция и все свойства рассматриваемой многочастичной системы могут быть найдены, если известна ее полная матрица плотности  $\rho(t)$ , которая подчиняется уравнению фон Неймана

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho - [H, \rho] = 0,$$

с соответствующим гамильтонианом (1). Нахождение решения при выбранной постановке задачи невозможно и, таким образом, формализм описания взаимодействия ансамбля излучателей и поля будет основан на нахождении редуцированных (неполных) матриц плотности  $\rho_{\{s\}} = \text{Tr}_{\{s' \neq s\}} \rho$ , где  $\{s\}$  — набор индексов частиц неполной матрицы  $\rho_{\{s\}}$ . Здесь  $\text{Tr}_{\{s' \neq s\}}$  — операция взятия следа, которая проводится по всем частицам системы  $s'$ , не входящим в множество  $\{s\}$ . Для удобства при решении данной задачи такие укороченные матрицы плотности нормируются таким образом, что свертка по их частицам  $\{s\}$  равна единице. Для решения поставленной задачи необходимо определить матрицу плотности одного произвольного атома  $\rho_A$  из ансамбля. Считая, что при  $t = 0$  подсистемы не взаимодействуют и начальная полная матрица плотности  $\rho(0)$  факторизуется, весь набор одночастичных матриц  $\rho_A(0)$  и  $\rho_F(0)$  всех атомов и полевых мод определяется в соответствии с условиями постановки задачи. В частности, могут быть выделены лазерные моды  $\rho_F^L(0)$ , выраженные через когерентные состояния поля.

С целью нахождения уравнений для одночастичных матриц плотности необходимо перейти от уравнения фон Неймана к идентичной ему цепочке ББГКИ для редуцированных матриц плотности и корреляционных операторов. Цепочка ББГКИ может быть получена путем последовательного взятия частичных свертков  $\text{Tr}_{\{s' \neq s\}}$  и использования следующего общего определения корреляций:

$$\rho_{AF} = \rho_A \rho_F + g_{AF}, \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \rho_{AFF'} &= \rho_A \rho_F \rho_{F'} + \rho_A g_{FF'} + \\ &+ \rho_F g_{AF'} + \rho_{F'} g_{AF} + g_{AFF'}, \end{aligned} \quad (5b)$$

и т. д. Здесь укороченные многочастичные матрицы плотности представлены в виде суммы всех возможных комбинаций, соответствующих некоррелированным, частично и полностью коррелированным за счет взаимодействий состояниям укороченной подсистемы. Введенные обозначения  $g_{AF'}$ ,  $g_{AF}$ ,  $g_{AFF'}$  и т. д. представляют корреляционные операторы соответствующих частиц. При этом индексы со штрихом приняты для формального различия частиц одного сорта. Как следует из определений (5), как полный, так и частичный след такого оператора по любой из коррелирующих частиц должен быть строго равен нулю. Используя определения (5), уравнение фон Неймана можно заменить бесконечной цепочкой кинетических уравнений. Первые два типа уравнений описывают эволюцию искомым одночастичных матриц:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_A - [\bar{H}_A, \rho_A] = \sum_F \text{Tr}_F [V_{AF}, g_{AF}], \quad (6a)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_F - [\bar{H}_F, \rho_F] = \sum_A \text{Tr}_A [V_{AF}, g_{AF}], \quad (6b)$$

где введены эффективные операторы Гамильтона:

$$\bar{H}_A = H_A + \sum_F \text{Tr}_F V_{AF} \rho_F, \quad (7a)$$

$$\bar{H}_F = H_F + \sum_A \text{Tr}_A V_{AF} \rho_A. \quad (7b)$$

Как видно, в уравнениях типа (6) уже за счет (7) определяется вклад наличия ансамбля частиц в эволюцию каждой его составляющей. Связь отдельной частицы с остальной системой также выражена в правых частях уравнений через оператор корреляции атом–поле, который в свою очередь подчиняется следующему уравнению в пределе обобщенного борновского приближения второго порядка:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} g_{AF} - [\bar{H}_A + \bar{H}_F, g_{AF}] &= \\ &= I_{AF} + L_{AF} + \Pi_{AF} + C_{AF}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $I_{AF} = [\bar{V}_{AF}, \rho_A \rho_F]$ ,  $\bar{V}_{AF} = V_{AF} - \text{Tr}_F V_{AF} \rho_F - \text{Tr}_A V_{AF} \rho_A$ .

Данное приближение, для которого  $L_{AF} = \Pi_{AF} = C_{AF} = 0$ , обеспечивает замкнутость системы уравнений (6a), (6b), (8) и позволяет получить независимое управляющее уравнение для матрицы плотности атома, учитывающее радиационное затухание и атомные переходы, индуцируемые некогерентным полем. Оно будет основой для получения уравнения для матрицы плотности

отдельного атома, учитывающего эффекты само-согласованного (локального) поля, создаваемого наличием ансамбля. В представлении взаимодействия подстановка формальных решений уравнений (6b) и (8) в (6a) с учетом коммутаторов поля

$$\left[ \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t') \right] = -i\hbar \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \quad (9a)$$

$$\left[ \hat{\mathbf{E}}^-(\mathbf{r}', t'), \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}, t) \right] = i\hbar \mathbf{G}^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \quad (9b)$$

$$\left[ \hat{\mathbf{E}}^-(\mathbf{r}, t), \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}', t') \right] = -i\hbar \mathbf{G}^-(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \quad (9c)$$

где в правых частях введены соответственно полный, опережающий и запаздывающий тензоры Грина, дает управляющее уравнение для матрицы плотности частицы среды:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_A &= \frac{i}{\hbar} \left( \left[ \hat{\mathbf{d}}_A(t) \mathbf{E}_{loc}(\mathbf{r}_A, t), \tilde{\rho}_A \right] + \right. \\ &+ \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left( \left[ \hat{\mathbf{d}}_A(t), \mathbf{G}^+(0, t - t') \hat{\mathbf{d}}_A(t') \tilde{\rho}_A \right] + \right. \\ &\left. \left. + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left( \left[ \hat{\mathbf{d}}_A(t), \mathbf{G}^-(0, t - t') \tilde{\rho}_A \hat{\mathbf{d}}_A(t') \right] \right) \right). \quad (10) \end{aligned}$$

При этом действующее на атом поле определяется как

$$\mathbf{E}_{loc}(\mathbf{r}_A, t) = \mathbf{E}_M(\mathbf{r}_A, t) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} \rho_3 \langle \hat{\mathbf{d}}_A(t) \rangle, \quad (11)$$

где  $\mathbf{E}_M(\mathbf{r}_A, t)$  обозначает среднее максвелловское поле в среде. Запишем (10) в явном виде с учетом (11) и в приближении вращающейся волны. Для этого представим соответствующие операторы и средние величины в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_A(t) &= \mathbf{d}_{ab} S_{ab} \exp(i\omega_{ab}t) + \\ &+ \mathbf{d}_{ac} S_{ac} \exp(i\omega_{ac}t) + \text{H.c.}, \quad (12a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{d}}_A(t) \rangle &= \mathbf{d}_{ab} \langle S_{ab} \rangle \exp(i\omega_{ab}t) + \\ &+ \mathbf{d}_{ac} \langle S_{ac} \rangle \exp(i\omega_{ac}t) + \text{c.c.}, \quad (12b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_M(\mathbf{r}_A, t) &\approx \mathbf{E}(\mathbf{r}_A, t) = \mathbf{i}\varepsilon_b \exp(i\omega_b t) + \\ &+ \mathbf{j}\varepsilon_c \exp(i\omega_c t + i\phi) + \text{c.c.} \quad (12c) \end{aligned}$$

Здесь введены операторы  $S_{\alpha\beta} = |\alpha\rangle\langle\beta|$  и их обозначения в виде операторов: «повышающих»  $S_{\beta}^+ = |\alpha\rangle\langle\beta|$  и «понижающих»  $S_{\beta}^- = |\beta\rangle\langle\alpha|$ . При этом полагаем  $\varepsilon_b \ll \varepsilon_c$ , а частоты  $\omega_b \approx \omega_{ab}$  и  $\omega_c \approx \omega_{ac}$ .

В рамках приближения вращающейся волны высокочастотными слагаемыми можно пренебречь и ввести следующие обозначения для частот Раби  $\Omega_{\alpha\beta}(t)$ , констант БДД  $\chi_{\alpha\beta}$  и скоростей распада между соответствующими уровнями  $\Gamma_{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta}(t) &= \frac{\mathbf{d}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\beta}{\hbar} \varepsilon_\beta \exp \{i(\omega_{\alpha\beta} - \omega_\beta)t + i\phi_\beta\} = \\ &= \frac{\mathbf{d}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\beta}{\hbar} \varepsilon_\beta \exp(i\Delta_\beta t + i\phi_\beta), \quad (13a) \end{aligned}$$

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi \rho_3 \frac{4|\mathbf{d}_{\alpha\beta}|^2}{3\hbar}, \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta} &= \frac{2}{\hbar} \mathbf{d}_{\alpha\beta} \text{Im} \mathbf{G}_F(0, \omega_{\alpha\beta}) \cdot \mathbf{d}_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4|\mathbf{d}_{\alpha\beta}|^2 \omega_{\alpha\beta}^3}{3\hbar c^3}. \quad (13c) \end{aligned}$$

Далее, возвращаясь к картине Шредингера и выделяя быстрые осцилляции на частотах внешнего поля

$$\begin{aligned} \sigma &= \exp \{i(\omega_b S_{aa} + (\omega_b - \omega_c) S_{cc})t\} \rho_A \times \\ &\times \exp \{-i(\omega_b S_{aa} + (\omega_b - \omega_c) S_{cc})t\} \end{aligned}$$

на основе (10) и с учетом (13), систему уравнений для медленно меняющихся компонент матрицы плотности можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ba} &= i(\Delta_b - \chi_{ba}(\sigma_{bb} - \sigma_{aa}))\sigma_{ba} - \\ &- ig\varepsilon(\sigma_{bb} - \sigma_{aa}) - i(\Omega + \chi_{ca}\sigma_{ca})\sigma_{bc} - \\ &- \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\sigma_{ba}, \\ \dot{\sigma}_{ca} &= i(\Delta_c - \chi_{ca}(\sigma_{cc} - \sigma_{aa}))\sigma_{ca} - \\ &- i\Omega(\sigma_{cc} - \sigma_{aa}) - i(g\varepsilon + \chi_{ba}\sigma_{ba})\sigma_{cb} - \\ &- \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\sigma_{ca}, \quad (14) \\ \dot{\sigma}_{bc} &= i(\Delta_b - \Delta_c)\sigma_{bc} + ig\varepsilon\sigma_{ac} - i\Omega^*\sigma_{ba} + \\ &+ i\chi_{ba}\sigma_{ba}\sigma_{ac} - i\chi_{ac}\sigma_{ac}\sigma_{ba}, \\ \dot{\sigma}_{aa} &= ig\varepsilon^*\sigma_{ba} + i\Omega^*\sigma_{ca} - \\ &- ig\varepsilon\sigma_{ab} - i\Omega^*\sigma_{ac} - (\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\sigma_{aa}, \\ \dot{\sigma}_{bb} &= ig\varepsilon\sigma_{ab} - ig\varepsilon^*\sigma_{ba} + \Gamma_{ab}\sigma_{aa}, \\ \dot{\sigma}_{cc} &= i\Omega\sigma_{ac} - i\Omega^*\sigma_{ca} + \Gamma_{ac}\sigma_{aa}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega \equiv \Omega_{ca}$  и  $g\varepsilon \equiv \Omega_{ba}$  — соответственно частоты Раби для поля накачки и пробного импульса,  $\Delta_b$  и  $\Delta_c$  — соответственно отстройки от резонанса для пробного импульса и импульса накачки,

$$g = d_{ba} \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0 V}}$$

— атомно-оптическая константа связи,

$$\varepsilon = A_p \left( \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{-1/2},$$

$A_p$  — медленно меняющаяся амплитуда пробного поля,  $V$  — объем квантования. Таким образом, система уравнений (14) получена *ab initio* и содержит естественные поправки, учитывающие наличие ансамбля атомов, обуславливающего локальный характер взаимодействия индивидуальных частиц среды с электромагнитным полем.

### 3. АНАЛИЗ САМОСОГЛАСОВАННОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА В ТРЕХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ. ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В данном разделе на основе анализа самосогласованной задачи нелинейного рассеяния света в оптически-плотной среде будет получен частный вид уравнения распространения для пробного поля, которое в общем случае имеет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon = -igN\sigma_{ba}, \quad (15)$$

где  $N$  — количество атомов в области взаимодействия.

Решение самосогласованной системы (14), (15) основывается на следующих приближениях. Во-первых, считается, что все атомы находятся на уровне  $b$  изначально, т. е.  $\sigma_{bb} = 1$ ,  $\sigma_{aa} = \sigma_{cc} = 0$ , и выполняется условие малой (и плавной) заселенности возбужденного состояния в процессе работы схемы, т. е.  $\sigma_{bb} \approx 1$ ,  $\sigma_{aa(cc)} \approx 0$  (и  $\dot{\sigma}_{ii} \approx 0$ , где  $i = a, b, c$ ). Во-вторых, считается, что при учете  $\chi_{ca} = \chi_{ba} = \chi$  и  $\sigma_{ca} \approx \sigma_{ba}$  величина вклада локального поля сравнима с частотой Раби пробного перехода, но может не учитываться на накачивающем переходе, т. е.  $g\varepsilon \geq \sigma_{ba}\chi_{ba}$  и  $\Omega \gg \sigma_{ca}\chi_{ca}$ . В результате, окончательная система примет следующий вид:

$$\dot{\sigma}_{ba} = -\Gamma_1\sigma_{ba} - ig\varepsilon - i\Omega\sigma_{bc} - i\chi_{ba}\sigma_{ba}, \quad (16a)$$

$$\dot{\sigma}_{ca} = -\Gamma_2\sigma_{ca} - ig\varepsilon\sigma_{cb} - i\chi_{ba}\sigma_{ba}\sigma_{cb}, \quad (16b)$$

$$\dot{\sigma}_{bc} = i\Delta_3\sigma_{bc} + ig\varepsilon\sigma_{ac} - i\Omega^*\sigma_{ba}, \quad (16c)$$

$$\dot{\sigma}_{bb} = ig\varepsilon\sigma_{ab} - ig\varepsilon^*\sigma_{ba}, \quad (16d)$$

где

$$\Gamma_1 = - \left( i\Delta_b - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac}) \right),$$

$$\Gamma_2 = - \left( i\Delta_c - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac}) \right), \quad \Delta_3 = \Delta_b - \Delta_c.$$

В системе (16) вклад локального поля представлен двойким образом: в уравнении (16a) его действие тривиально и приводит к частотному сдвигу, но в (16b) оно обеспечивает более существенный эффект — появление нелинейной связи между атомными возбуждениями (поляризациями) на пробном  $\sigma_{ba}$  и магнитном  $\sigma_{cb}$  переходах. Чтобы проявить влияние такой взаимосвязи на распространяющееся пробное поле, систему (16) можно решать в два этапа.

На первом этапе можно определить поляризацию системы на нижних уровнях  $\sigma_{cb}$ , воспользовавшись условием инертности (запаздывания) установления поляризации атомной среды при ее возбуждении оптическим импульсом сравнительно небольшой длительности и полагая, что на его переднем фронте справедливо  $\dot{\sigma}_{ba} = \dot{\sigma}_{ca} = 0$  и, как следствие,  $\dot{\sigma}_{bc} = 0$  (см. разд. 5). С учетом  $\dot{\sigma}_{bb} = 0$  из (16) может быть получено алгебраическое уравнение для поляризации  $\sigma_{bc}$ :

$$\Omega\chi g\varepsilon^*\sigma_{bc}^2 + i(\Gamma_1 g^2|\varepsilon|^2 + \Gamma_2^*A)\sigma_{bc} + ig\varepsilon\Omega^*\Gamma_2^* = 0, \quad (17)$$

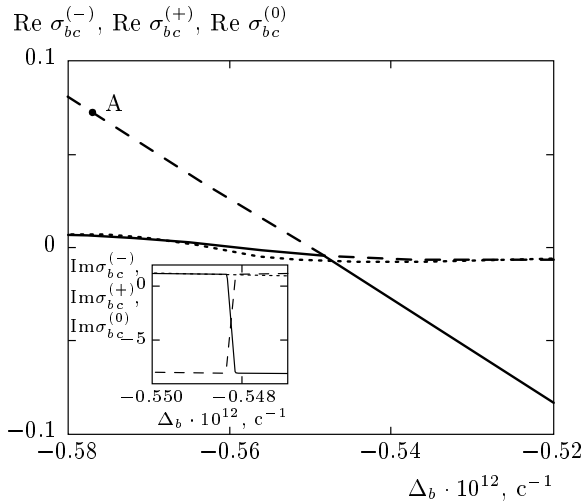
корни которого имеют следующий вид:

$$\sigma_{bc} = \frac{-i(\Gamma_1 g^2|\varepsilon|^2 + \Gamma_2^*A) \pm \sqrt{D}}{2\Omega\chi g\varepsilon^*}, \quad (18)$$

где

$$D = -(\Gamma_1 g^2|\varepsilon|^2 + \Gamma_2^*A)^2 - 4i\chi g^2|\Omega|^2\Gamma_2^*|\varepsilon|^2.$$

На рис. 2 представлены частотные зависимости двух ветвей возникающих на переходе между уровнями  $|b\rangle$  и  $|c\rangle$  (см. рис. 1) спиновых возбуждений:  $\text{Re}\sigma_{bc}^{(+)}$  для выражения (18) со знаком плюс и  $\text{Re}\sigma_{bc}^{(-)}$  для выражения (18) со знаком минус. При моделировании были выбраны следующие параметры волновода: показатель преломления матрицы  $n_0 = 1.45$ , длина  $L = 2.7$  мм, диаметр световодящей жилы 10 мкм; параметры взаимодействия:  $\rho_3 = 2.2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  — концентрация допированных атомов в кварцевой матрице,  $\Gamma_{ab} = \Gamma_{ac} = 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  — скорости релаксации соответствующих переходов,  $I_c = 2.25 \cdot 10^5 \text{ Вт/см}^2$  — интенсивность излучения накачки,  $I_p = 2.9 \cdot 10^3 \text{ Вт/см}^2$  — интенсивность пробного импульса,  $\Delta_c = -9.02 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  — частота отстройки поля накачки. Длительность пробного импульса  $T_0$  и частота отстройки поля накачки  $\Delta_c$  далее будут являться варьируемыми параметрами. В области сближения ветвей для таких спиновых возбуждений [26] наблюдается смена знака у величины  $\text{Im}\sigma_{bc}$ , что соответствует изменению режима поглощения на режим их усиления (см. вставку к рис. 2),



**Рис. 2.** Частотные зависимости  $\text{Re } \sigma_{bc}^{(-)}$  (сплошная линия) и  $\text{Re } \sigma_{bc}^{(+)}$  (штриховая линия) для возникающих между нижними уровнями  $\Lambda$ -схемы взаимодействия с атомами  $^{87}\text{Rb}$  элементарных возбуждений. На вставке: зависимости коэффициентов поглощения  $\text{Im } \sigma_{bc}^{(-)}$  и  $\text{Im } \sigma_{bc}^{(+)}$  в области сближения ветвей возбуждений. Кривые  $\text{Re } \sigma_{bc}^{(0)}$  и  $\text{Im } \sigma_{bc}^{(0)}$  (пунктирные линии) соответствуют ситуации  $\chi = 0$ . Отношение частот Раби  $g\varepsilon/\Omega = 0.113$  при  $g\varepsilon = 6.07 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$ , коэффициент БДД  $\chi = 1.01 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$

который и будет рассмотрен далее. В случае  $\chi = 0$  имеется только одно линейное решение для  $\sigma_{bc}$  с одним типом спиновых возбуждений в режиме их поглощения (на вставке к рис. 2).

Разложение содержащего знак плюс решения (18) в ряд по пробному полю  $\varepsilon$  приводит к следующему соотношению:

$$\sigma_{bc} \approx -\frac{g\Omega^*}{A} \varepsilon + \frac{g^3\Omega^*}{\Gamma_2^* A^2} \left( \Gamma_1 + i \frac{|\Omega|^2 \chi}{A} \right) |\varepsilon|^2 \varepsilon - \frac{g^5\Omega^*}{(\Gamma_2^*)^2 A^3} \left( \Gamma_1^2 + \frac{3i|\Omega|^2 \chi \Gamma_1}{A} - \frac{2\chi^2 |\Omega|^4}{A^2} \right) |\varepsilon|^4 \varepsilon, \quad (19)$$

где  $A = |\Omega|^2 - i\Delta_3(\Gamma_1 + i\chi)$ .

Следует отметить, что полученное выражение (19) в явном виде содержит различные порядки нелинейной связи (энергообмена) между пробным полем и полем накачки, характерной для рамановского (нелинейного) предела работы схемы на рис. 1б и возникающей благодаря наличию поляризации на накачивающем переходе  $\sigma_{ac} \neq 0$  при условии  $\Delta_b > \Gamma_{bc}$  [6]. При решении системы (16) в пределе ЭМИП, что с математической точки зрения соответствует условию  $\sigma_{ac} = 0$  для  $\Delta_b \ll \Gamma_{bc}$ , выражение (19) содержит только первое слагаемое (ср. с [27]).

Содержащее знак минус решение (18) приводит к появлению в задаче слагаемых, характерных для насыщающей нелинейности типа  $\sigma_{bc} \approx 1/\varepsilon$ , которая интересна для изучения, но не рассматривается в данной работе.

На втором этапе поляризация атомной системы на пробном переходе в режиме распространения в ней пробного импульса и при учете  $\dot{\sigma}_{bc} \neq 0$  может быть получена из уравнений (16b) и (16c):

$$\sigma_{ba} = \left\{ i \left( \dot{\sigma}_{bc} - i \frac{g\varepsilon\chi}{\Omega\Gamma_2^*} \sigma_{bc} \dot{\sigma}_{cb} \right) + \left( \Delta_3 + i \frac{g^2|\varepsilon|^2}{\Gamma_2^*} \right) \sigma_{bc} + i \frac{g\varepsilon\chi}{\Omega\Gamma_2^*} |\sigma_{bc}|^2 \left( \Delta_3 - i \frac{g^2|\varepsilon|^2}{\Gamma_2} \right) \right\} \times \left\{ \Omega^* - \frac{g^2|\varepsilon|^2 \chi^2}{\Omega|\Gamma_2|^2} |\sigma_{bc}|^2 \right\}^{-1}. \quad (20)$$

В линейном пределе ЭМИП выражение (20) принимает вид

$$\sigma_{ba} = \frac{i}{\Omega^*} (\dot{\sigma}_{bc} - i\Delta_3 \sigma_{bc}),$$

где первое слагаемое в скобках дает возможность управления групповой скоростью, второе — фазовым сдвигом и диссипацией (усилением) пробного импульса через настройки поля накачки в среде. Подставив найденное выражение (19) для  $\sigma_{bc}$  в (20), путем разложения в ряд по  $\varepsilon$  можно получить:

$$\sigma_{ba} \approx -i \frac{g}{A} \dot{\varepsilon} - \frac{g\Delta_3}{A} \varepsilon - i \frac{g^3}{\Gamma_2^* A} \times \left( 1 + i\Delta_3 \left( \frac{\Gamma_1}{A} + i \frac{\chi}{A^*} + i \frac{\chi|\Omega|^2}{A^2} \right) \right) |\varepsilon|^2 \varepsilon + g^5 \left\{ \frac{1}{(A\Gamma_2^*)^2} \left[ i \left( 1 - \frac{\chi\Delta_3}{A^*} \right) \left( \Gamma_1 + i \frac{\chi|\Omega|^2}{A} \right) - \frac{\Delta_3}{A} \left( \Gamma_1^2 - 2 \frac{\chi^2 |\Omega|^4}{A^2} + 3i \frac{\chi\Gamma_1 |\Omega|^2}{A} \right) \right] - \frac{i\chi}{|A|^2 |\Gamma_2|^2} \right\} \times \left( i + \frac{\Delta_3}{A^*} \left\{ \Gamma_1^* - i \frac{\chi|\Omega|^2}{A^*} \right\} - i \frac{\chi\Delta_3}{A} \right) |\varepsilon|^4 \varepsilon. \quad (21)$$

Для того чтобы определить вклад эффектов, которые требуется учесть в рассматриваемой системе, необходимо полученное выражение (21) подставить в (15) (окончательная форма соответствует УГЛ, ср. с [22]):

$$\left( \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - i\gamma_2 |\varepsilon|^2 \varepsilon + i\gamma_4 |\varepsilon|^4 \varepsilon = -(\alpha_I - i\alpha_R) \varepsilon - \alpha_2 |\varepsilon|^2 \varepsilon - \alpha_4 |\varepsilon|^4 \varepsilon + \nu_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}, \quad (22)$$

где

$$v_g = \frac{c}{1 + \text{Re}(g^2 N/A)}$$

— групповая скорость пробного импульса. В выражении (22) определены коэффициенты дисперсии групповых скоростей второго порядка

$$\beta_2 = \frac{d}{d\omega_p} \beta_1 = \frac{1}{v_g^2} \frac{d}{d\Delta_b} v_g,$$

кубической нелинейности на  $\chi^{(3)}$

$$\gamma_2 = \text{Im} \left\{ -\frac{g^4 N}{A\Gamma_2^* c} \left( 1 + i\Delta_3 \left\{ \frac{\Gamma_1}{A} + \frac{i\chi}{A^*} + i\frac{\chi|\Omega|^2}{A^2} \right\} \right) \right\},$$

нелинейности пятого порядка на  $\chi^{(5)}$

$$\begin{aligned} \gamma_4 = \text{Im} \left\{ \frac{ig^6 N}{c} \left( \frac{1}{(A\Gamma_2^*)^2} \left[ i \left( 1 - \frac{\chi\Delta_3}{A^*} \right) \times \right. \right. \right. \\ \times \left( \Gamma_1 + i\frac{\chi|\Omega|^2}{A} \right) - \frac{\Delta_3}{A} \left( \Gamma_1^2 - 2\frac{\chi^2|\Omega|^4}{A^2} + \right. \\ \left. \left. + 3i\frac{\chi\Gamma_1|\Omega|^2}{A} \right) \right] - \frac{i\chi}{|A|^2|\Gamma_2|^2} \times \\ \left. \left. \times \left( i + \frac{\Delta_3}{A^*} \left\{ \Gamma_1^* - i\frac{\chi|\Omega|^2}{A^*} \right\} - i\frac{\chi\Delta_3}{A} \right) \right) \right\}, \end{aligned}$$

линейных потерь

$$\alpha_I = \text{Im} \frac{g^2 N \Delta_3}{Ac},$$

фазового сдвига

$$\alpha_R = \text{Re} \frac{g^2 N \Delta_3}{Ac},$$

нелинейных потерь на  $\chi^{(3)}$

$$\alpha_2 = \text{Re} \left\{ \frac{g^4 N}{A\Gamma_2^* c} \left( 1 + i\Delta_3 \left\{ \frac{\Gamma_1}{A} + \frac{i\chi}{A^*} + i\frac{\chi|\Omega|^2}{A^2} \right\} \right) \right\},$$

нелинейных потерь на  $\chi^{(5)}$

$$\begin{aligned} \alpha_4 = \text{Re} \left\{ \frac{ig^6 N}{c} \left( \frac{1}{(A\Gamma_2^*)^2} \left[ i \left( 1 - \frac{\chi\Delta_3}{A^*} \right) \times \right. \right. \right. \\ \times \left( \Gamma_1 + i\frac{\chi|\Omega|^2}{A} \right) - \frac{\Delta_3}{A} \left( \Gamma_1^2 - 2\frac{\chi^2|\Omega|^4}{A^2} + \right. \\ \left. \left. + 3i\frac{\chi\Gamma_1|\Omega|^2}{A} \right) \right] - \frac{i\chi}{|A|^2|\Gamma_2|^2} \times \\ \left. \left. \times \left( i + \frac{\Delta_3}{A^*} \left\{ \Gamma_1^* - i\frac{\chi|\Omega|^2}{A^*} \right\} - i\frac{\chi\Delta_3}{A} \right) \right) \right\}, \end{aligned}$$

спектральной фильтрации

$$\nu_2 = \left( \frac{c^2}{\text{Im}\{1+g^2N/A\}^2} \right)^{-1} \frac{d}{d\Delta_b} \left( \frac{c}{\text{Im}\{1+g^2N/A\}} \right).$$

$$\Delta n_D \cdot 10^{-4}, \Delta n_D^{(0)} \cdot 10^{-4}$$

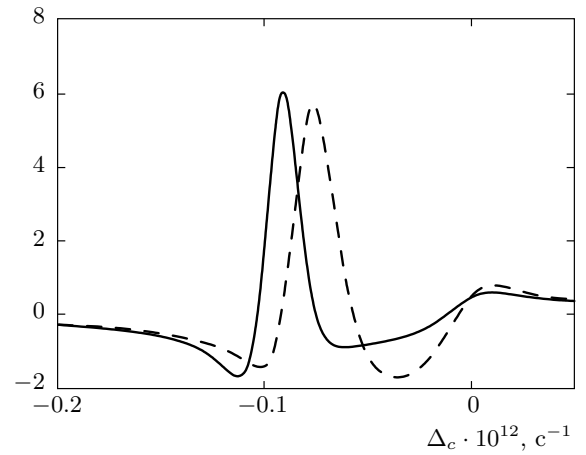


Рис. 3. Частотные зависимости показателя преломления  $\Delta n_D$  допированных атомов  $^{87}\text{Rb}$  с учетом локального поля (сплошная линия) и  $\Delta n_D^{(0)}$  без учета локального поля (штриховая линия) в допированном волноводе. Параметры взаимодействия соответствуют рис. 2

Таким образом, одновременный учет локального поля в представленной задаче хоть и не вносит в конечное уравнение (22) слагаемые нового типа, но уточняет картину нелинейных взаимодействий соответствующими поправками (слагаемые с  $\chi$ ) на случай оптически-плотной среды.

На рис. 3 представлены зависимости коэффициентов преломления для допированных атомов

$$\Delta n_D = \frac{c}{\omega_p} (\alpha_R + \gamma_2 |\varepsilon_{in}|^2 + \gamma_4 |\varepsilon_{in}|^4),$$

построенные как с учетом локального поля, так и без него как функции частоты отстройки поля накачки от резонанса  $\Delta_c$ ;  $\varepsilon_{in}$  — амплитуда пробного поля на входе в среду. В представленной области значений  $\Delta_c$  наблюдаются изменения хода дисперсионной кривой за счет нелинейных вкладов на  $\chi^{(3)}$  и  $\chi^{(5)}$ , возникающих при учете локального поля в допированном волноводе. Это качественно отличает рассматриваемый случай от задачи учета локального поля в режиме ЭМИП, сводящейся в конечном итоге к простому сдвигу дисперсионной кривой [28] по частотной оси.

Исследование (22) на существование солитонных решений в оптически-плотной среде при условии  $T_0 < 1/\Gamma_{ab}$  ( $T_0 \geq \Omega^{-1}$ ) состоит в определении параметров взаимодействия и формы пробного импульса для формирования устойчивого диссипативного солитона. Для этого необходимы переход в бегущую



систему координат:  $T = t - z/v_g$  и замена переменных

$$U = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\varepsilon_{in}|^2}}, \quad \xi = \frac{z}{L_D}, \quad \tau = \frac{T}{T_0},$$

где  $L_D = T_0^2/|\beta_2|$  — дисперсионная длина,  $\varepsilon_{in}$  — пробное поле на входе. Домножением почленно (22) на  $L_D$  можно получить:

$$i \frac{\partial}{\partial \xi} u - \frac{1}{2} \text{sign}(\beta_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = \nu |u|^4 u - (i\delta + \delta_1)u - i\varepsilon_1 |u|^2 u - i\mu |u|^4 u + i\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad (23)$$

где

$$u = NU, \quad N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}}, \quad \nu = \frac{L_{NL}^2}{L_{NL}^{(5)} L_D},$$

$$\gamma = \frac{L_{NL}}{L_{SW}}, \quad \gamma_1 = \frac{L_{NL}}{L_{SW}^I},$$

$$\delta = \frac{L_D}{L_{LS}}, \quad \delta_1 = \frac{L_D}{L_{LS}^R}, \quad \varepsilon_1 = \frac{L_{NL}}{L_{LS3}},$$

$$\mu = \frac{L_{NL}^2}{L_{LS5} L_D}, \quad \beta = \frac{L_D}{L_{DG}}$$

и введены характерные длины

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma_2 |\varepsilon_{in}|^2}, \quad L_{NL}^{(5)} = \frac{1}{\gamma_4 |\varepsilon_{in}|^4},$$

$$L_{SW} = \frac{T_0}{|\varepsilon_{in}|^2 u_R}, \quad L_{SW}^I = \frac{T_0}{|\varepsilon_{in}|^2 u_I},$$

$$L_{LS} = \frac{1}{\alpha_I}, \quad L_{LS}^R = \frac{1}{\alpha_R}, \quad L_{LS3} = \frac{1}{\alpha_2 |\varepsilon_{in}|^2},$$

$$L_{LS5} = \frac{1}{\alpha_4 |\varepsilon_{in}|^4}, \quad L_{DG} = \frac{T_0^2}{|\nu_2|}.$$

В соответствии с концепцией диссипативных солитонов, для поддержания их энергии на неизменном уровне по мере распространения в среде необходимо чередование эффектов поглощения/усиления в различных областях огибающей пробного импульса, в частности, при выполнении неравенств  $\alpha_I > 0$ ,  $\alpha_2 < 0$ ,  $\alpha_4 > 0$  [29]. Дополнительным условием для сохранения формы солитона является наличие в системе спектральной фильтрации  $\nu_2$ , благодаря которой происходит смещение частотных компонент спектра из зоны усиления в зону поглощения.

На рис. 4а представлена область значений частоты отстройки поля накачки от резонанса, в которой при выбранных параметрах задачи при  $\Delta_c^A = -577 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$  (соответствует точке А на рис. 2)

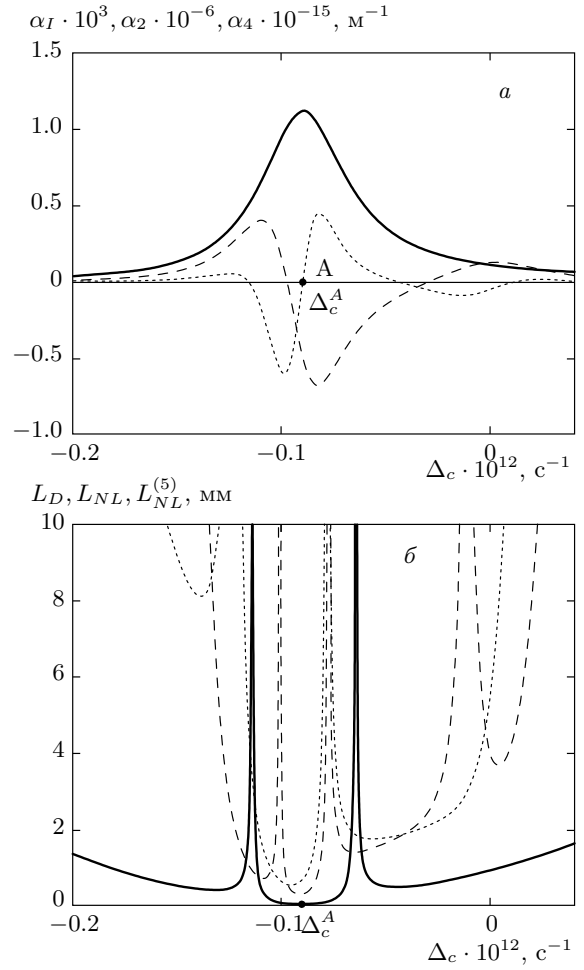


Рис. 4. Частотные зависимости (а) параметров линейного  $\alpha_I$  (сплошная линия) и нелинейных  $\alpha_2$  (штриховая линия) и  $\alpha_4$  (пунктирная линия) коэффициентов поглощения, а также (б) характерных длин дисперсии  $L_D$  (сплошная линия), нелинейностей  $L_{NL}$  (пунктирная линия) и  $L_{NL}^{(5)}$  (штриховая линия) допированного атомами  $^{87}\text{Rb}$  оптического волновода. Параметры взаимодействия соответствуют рис. 2

наблюдается требуемое чередование знаков диссипативных эффектов в системе. При этом параметры взаимодействия подобраны таким образом, чтобы в области вблизи  $\Delta_c^A$  характерные нелинейно-дисперсионные длины системы приблизительно соответствовали друг другу (аналогично случаю с консервативными солитонами [22]) и принимали по возможности минимальные значения, см. рис. 4б. В частности, для точки  $\Delta_c^A$  дисперсионная длина составит всего  $L_D = 5.7 \cdot 10^{-5} \text{ м}$  и в условиях положительной нелинейности  $\gamma_2 > 0$  и аномальной дисперсии  $\beta_2 < 0$  может происходить

формирование устойчивого диссипативного солитона, когда нелинейно-дисперсионные и диссипативные эффекты в системе действуют совместно. Расчетная пространственная длина пробного импульса входной длительности  $T_0 = 3.1$  пс составит всего  $l_{eff} = cT_0/n_D = 0.64$  мм, где суммарный показатель преломления допированного волновода  $n_D = n_0 + \Delta n_D$  учитывает показатели преломления  $\Delta n_D$  допированных атомов и  $n_0$  среды-носителя. Таким образом, импульс в процессе взаимодействия полностью заходит в среду волновода, где (в связи с малостью характерных длин взаимодействия) сразу же может реализоваться процесс формирования диссипативного солитона на сверхмалых пространственных масштабах. Модификация показателя преломления при записи волновода составляет всего порядка  $5 \cdot 10^{-3}$  [25] и существенно не влияет на приведенные оценки.

Используя подобранные параметры среды для точки А на рис. 4 и основываясь в первую очередь на вариационных методах, можно отыскивать такие области значений коэффициентов уравнения (23), при которых в допированных волноводах возникают устойчивые диссипативные солитоны нелинейного рассеяния света, а также определить форму и амплитудно-фазовые характеристики таких солитонов.

#### 4. СТАЦИОНАРНЫЕ СОЛИТОНЫ В ДОПИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДАХ

Для изучения УГЛ (23) можно воспользоваться методом моментов, суть которого заключается в приведении полной задачи распространения с бесконечным числом степеней свободы к задаче распространения импульса с конечным набором его параметров [30]. Для пробного импульса, имеющего единственный максимум и не имеющего топологической структуры в поперечном сечении, вид решения (23) можно задать следующим образом (точное решение для нелинейного уравнения Шредингера представлено в работе [31]):

$$u(\xi, \tau) = A(\xi) \operatorname{sh}(B(\xi)\tau) \times \exp(i(\phi(\xi) + C(\xi)\tau^2)), \quad (24)$$

где  $A(\xi)$  — нормированная амплитуда,  $B(\xi)$  — обратная длительность,  $\phi(\xi)$  — фаза,  $C(\xi)$  — нелинейный набег фазы волнового пакета. Использование метода моментов для (23) с решением (24) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений для варьируемых переменных (ср. с [29]):

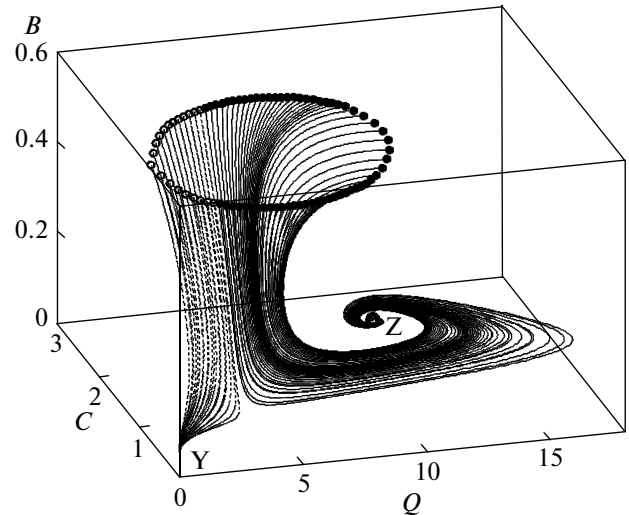


Рис. 5. Вид фазового портрета системы с двумя особыми точками, параметры системы соответствуют частоте отстройки  $\Delta_c^A$  с рис. 4

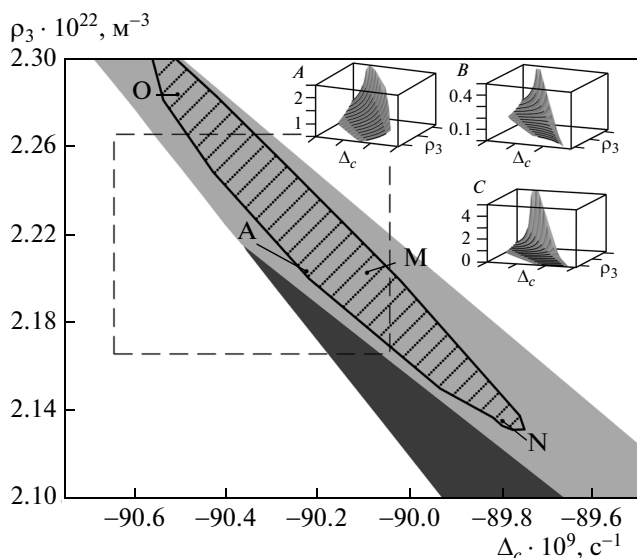
$$\frac{dQ}{d\xi} = F_1 = -2\delta Q - \frac{2}{3}\varepsilon_1 B Q^2 - \frac{4}{15}\mu B^2 Q^3 - \left(\frac{2}{3} Q B^2 \beta + \frac{2\pi^2 C^2 Q \beta}{3B^2}\right), \quad (25a)$$

$$\frac{dC}{d\xi} = F_2 = \frac{8\nu B^4 Q^2}{15\pi^2} - \frac{B^3 Q}{\pi^2} - \left(\frac{4}{\pi^2} \beta B^2 C + \frac{4}{3} \beta B^2 C\right) + \left(-\frac{2}{\pi^2} B^4 + 2C^2\right) \operatorname{sign}(\beta_2), \quad (25b)$$

$$\frac{dB}{d\xi} = F_3 = -\frac{\mu B^3 Q^2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^2} \varepsilon_1 B^2 Q + 2BC \operatorname{sign}(\beta_2) - \left(\frac{8\beta B^3}{\pi^2} - \frac{16}{15B} \beta \pi^2 C^2\right), \quad (25c)$$

где  $Q = 2A^2/B$ .

Стационарные решения системы уравнений (25), соответствующие условию  $F_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$  могут быть определены на основе численных методов. В нелинейной системе (25) возникает сразу несколько стационарных точек — на рис. 5 представлен фазовый портрет вблизи двух таких точек Y и Z. В работе исследуется только одна из них — точка устойчивого фокуса Z, параметры  $A$ ,  $B$  и  $C$  импульса для которой являются наиболее физически обусловленными. Стабильность полученных решений для нее может быть выявлена из условия  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,



**Рис. 6.** Параметрическая плоскость (плотность допирования  $\rho_3$ , частота отстройки поля накачки от резонанса  $\Delta_c$ ). Светло-серая область получена методом моментов и соответствует устойчивому фокусу для особых точек типа Z с рис. 5, темно-серая соответствует неустойчивым режимам, незакрашенная — отсутствию физических решений системы. Штриховкой выделена область существования стационарных солитонов, полученных при прямом численном моделировании УГЛ. На вставке: полученные по методу моментов стационарные решения для параметров солитона над выделенной штриховой линией области параметрической плоскости.

Параметры системы соответствуют рис. 2

где  $\lambda_j$  — собственные значения матрицы Якоби системы (25) [32].

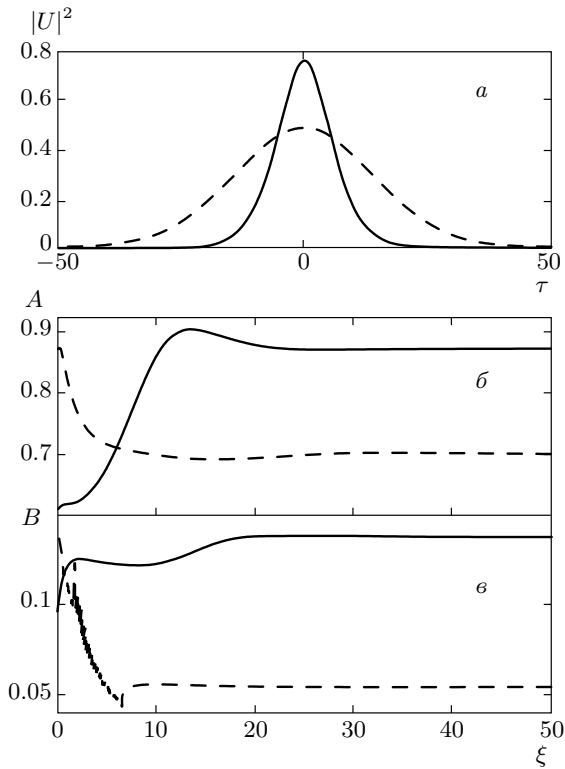
На рис. 6 показана параметрическая плоскость, образованная параметрами плотности допирования  $\rho_3$  и частоты отстройки поля накачки от резонанса  $\Delta_c$  с обозначенными на ней областями стабильности стационарных солитонных решений, полученных вариационным методом при решении системы (25), а также методом расщепления по физическим факторам при прямом численном моделировании УГЛ (23) с учетом подстановки (24). Светло-серая область получена использованием метода моментов и соответствует устойчивым особым точкам типа фокус ( $\text{Re } \lambda_{1,2,3} < 0$  и  $\text{Im } \lambda_{1,2} \neq 0$  [33]) — в центральной части области устойчивости, либо узел ( $\text{Re } \lambda_{1,2,3} < 0$  и  $\text{Im } \lambda_{1,2} = 0$ ) — на ее границе. Во всей этой области могут возникать стационарные солитоны, параметры которых не зависят от времени. Предсказанная изначально на основе качественного анализа коэф-

фициентов уравнения (23) «затравочная» точка A (на частоте  $\Delta_c^A$ , см. рис. 4) попадает в представленную область стабильности.

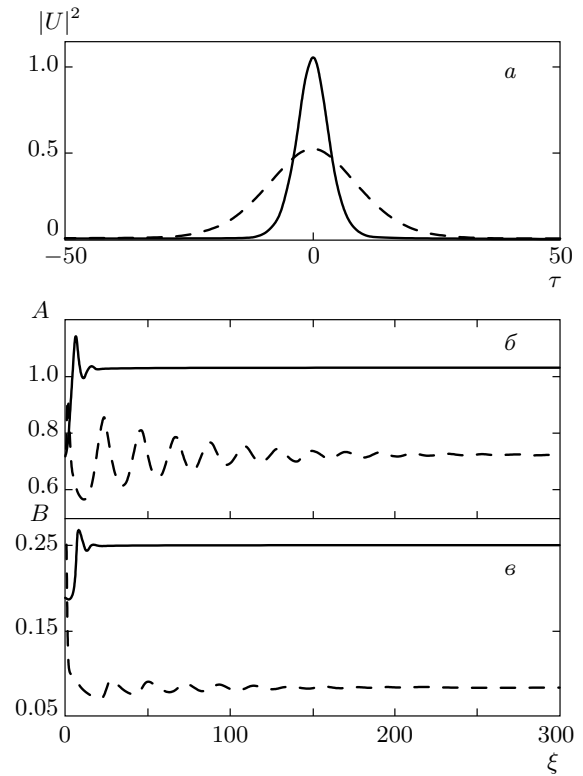
В темно-серой области на рис. 6 наблюдается неустойчивое поведение найденных стационарных решений системы (25) при условии, что вещественная часть хотя бы одного собственного числа  $\text{Re } \lambda_j$  становится положительной; в незакрашенных областях отслеживаемая стационарная точка пропадает и физические решения системы перестают существовать. Нижняя граница области устойчивости проходит вблизи сепаратрисы  $\alpha_4 = 0$  (см. (22)), ниже которой нарушается необходимое чередование знаков линейного/нелинейного поглощений, необходимое для наблюдения диссипативных солитонов [29]. Нижняя граница темно-серой области совпадает с сепаратрисой  $\nu_2 = 0$ , что соответствует изменению знака спектральной фильтрации; в рассматриваемом случае устойчивые решения могут наблюдаться только при  $\nu_2 < 0$ .

Значения параметров  $A$ ,  $B$  и  $C$  найденных стационарных решений системы (25) представлены на вставках к рис. 6 в правом верхнем углу — они использовались в качестве начального приближения при прямом численном моделировании (23) с подстановкой (24). Полученная в результате такого прямого моделирования область устойчивости стационарных солитонов нанесена на рис. 6 штриховкой; она полностью находится внутри области устойчивости, полученной по методу моментов. Такой же штриховкой на вставках к рис. 6 выделены те области значений  $A$ ,  $B$  и  $C$ , которые приводят к действительному формированию солитона УГЛ (23). Таким образом, варьируя концентрацию примеси на стадии изготовления допированного волновода, с одной стороны, и частоту отстройки поля накачки при осуществлении эксперимента, с другой, при выборе подходящих параметров входного импульса можно добиться существования стационарных солитонов в такой системе.

Учет локального поля в рассмотренной модели имеет принципиальное значение: при условии  $\chi = 0$  область стабильности настолько трансформируется, что полностью уходит за пределы представленной на рис. 6 параметрической плоскости, а все решения на ее прежнем месте перестают быть устойчивыми. Это является важным обстоятельством при оценках параметров возможного эксперимента, поскольку без учета локального поля область устойчивости будет определена неверно, что аналогично проблеме практического получения солитонов самоиндуцированной прозрачности [13] в предсказанных областях. Отметим, что истинная (получаемая экс-



**Рис. 7.** а) Форма пробного импульса на входе (сплошная линия) и при прохождении в допированном волноводе расстояния  $z = 2$  мм (штриховая линия). б, в) Зависимости параметров солитона  $A(\xi)$  (б),  $B(\xi)$  (в), рассчитанных по методу моментов (сплошные линии) и прямым численным моделированием УГЛ (штриховые линии) от приведенной длины среды допированного волновода  $\xi$ . Параметры системы соответствуют точке М на рис. 6



**Рис. 8.** а) Форма пробного импульса на входе (сплошная линия) и при прохождении в допированном волноводе расстояния  $z = 2.2$  мм (штриховая линия). б, в) Зависимости параметров солитона  $A(\xi)$  (б),  $B(\xi)$  (в), рассчитанных по методу моментов (сплошные линии) и прямым численным моделированием УГЛ (штриховые линии) от приведенной длины среды допированного волновода  $\xi$ . Параметры системы соответствуют точке N на рис. 6

периментально) область устойчивости может быть гораздо шире заштрихованной на рис. 6, что связано с проблемой подбора иных, отличных от получаемых в методе моментов, начальных приближений для УГЛ, которые также могут приводить к устойчивым решениям.

Вид огибающей для солитонов, получаемых прямым численным моделированием сильно зависит от координат выбранной точки в области устойчивости на рис. 6. В центральной ее части (точка М) сформировавшийся солитон фактически сохраняет форму огибающей согласно (24), см. рис. 7а, а его параметры отличаются от получаемых по методу моментов. При этом наблюдается качественное согласие сценариев стабилизации системы в результате использования численного моделирования и метода моментов. Так, рис. 7б,в для точки М с рис. 6

демонстрируют плавный переход системы к стационарному уровню в случае, когда получаемые по методу моментов значения параметров  $A$ ,  $B$  и  $C$  используются в качестве начального приближения для численного моделирования УГЛ (23). При этом сами параметры УГЛ (23), рассчитанные для точки М составляют:  $\nu = 30.66$ ,  $\delta = 0.064$ ,  $\varepsilon_1 = -0.8$ ,  $\mu = 2.53$ ,  $\beta = 0.033$ . Вернемся к размерным величинам, тогда переход к стационарному режиму для этой точки происходит на характерной длине  $z_0 = 30\xi = 1.6$  мм импульса (24) при начальных значениях интенсивности  $I_p = 27$  кВт/см<sup>2</sup>, длительности  $T_0 = 2.25 \cdot 10^{-11}$  с и с линейной частотной модуляцией  $C_I = C/T_0^2 = 1.9 \cdot 10^{22}$  с<sup>-2</sup>. Сформировавшийся солитон будет иметь интенсивность  $I_p = 17.5$  кВт/см<sup>2</sup> при длительности импульса  $T_0 = 5.8 \cdot 10^{-11}$  с. Для другой точ-

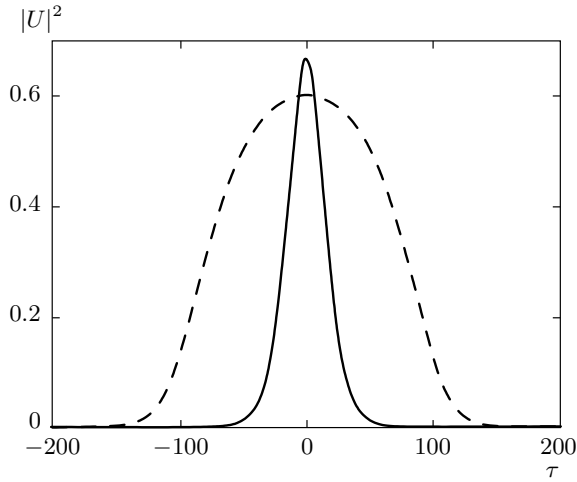


Рис. 9. Форма пробного импульса на входе (сплошная линия) и на выходе (штриховая линия) допированного волновода. Параметры системы соответствуют точке О на рис. 6

ки  $N$  в самой нижней части области стабильности наблюдается более «затяжной» (осцилляторный) переход к режиму образования солитона на характерной длине  $z_0 = 1.76$  мм при начальной интенсивности  $I_p = 34.7$  кВт/см<sup>2</sup>, длительности  $T_0 = 1.24 \cdot 10^{-11}$  с и с линейной частотной модуляцией  $C_I = C/T_0^2 = 4.7 \cdot 10^{22}$  с<sup>-2</sup> (параметры сформированного солитона  $I_p = 17.1$  кВт/см<sup>2</sup>,  $T_0 = 3.9 \cdot 10^{-11}$  с), см. рис. 8. Рассчитанные параметры УГЛ для данной точки составляют:  $\nu = 28.793$ ,  $\delta = 0.064$ ,  $\varepsilon_1 = -0.748$ ,  $\mu = 0.378$ ,  $\beta = 0.021$ . Непосредственно вблизи верхней границы области устойчивости (точка О) солитон формируется, но его форма становится сильно отличной от (24) — на рис. 9 он имеет длительность порядка  $T_0 = 3.1 \cdot 10^{-10}$  с (при параметрах УГЛ:  $\nu = 29.487$ ,  $\delta = 0.064$ ,  $\varepsilon_1 = -0.753$ ,  $\mu = 1.013$ ,  $\beta = 0.0072$ ).

Следует дополнительно отметить, что исследованная отдельно модель с линейным усилением  $\alpha_I < 0$  в инверсных средах при условии  $\alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_4 < 0$  также приводит к возможности устойчивых солитонных решений при использовании метода моментов, тогда как прямое численное моделирование опровергает эти решения. Добиться устойчивости в этом случае практически невозможно из-за резкого роста интенсивности в «крыльях» импульса (24), которые «поднимаются» за счет отсутствия компенсации линейного усиления нелинейным поглощением в далеких от его центра областях с малой интенсивностью — на месте фронтов возникает сильно уширяющийся с расстоянием пьедестал.

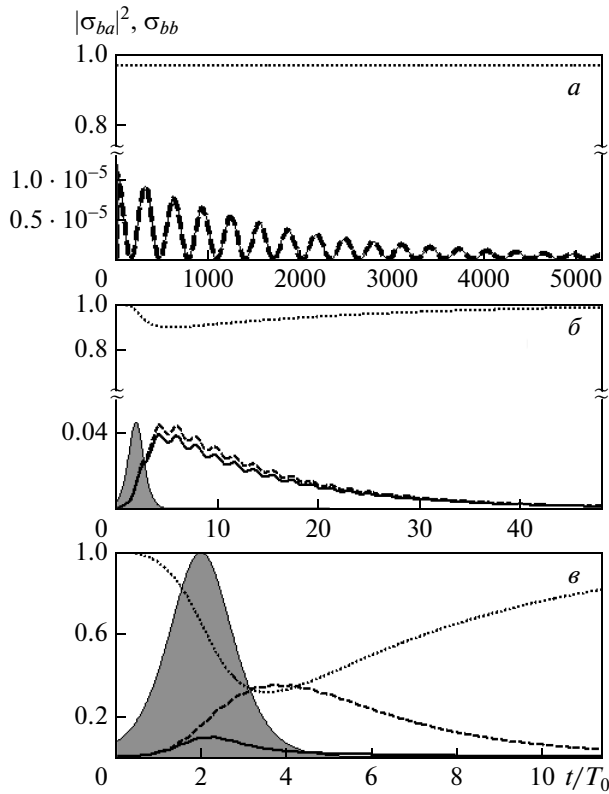
## 5. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ ТРЕХУРОВНЕВОЙ СРЕДЫ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ ПРОВНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ РАЗЛИЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Проблема применимости адиабатического приближения для трехуровневой атомной среды при ее возбуждении в результате нелинейного рассеяния света имеет непосредственное значение для описания условий возможного эксперимента. Данный вопрос применительно к режиму ЭМИП разобран в работе [7], где выделяют два характерных случая. Ступенчатое включение пробного поля ведет к достаточно медленному (за несколько обратных времен релаксации  $1/\Gamma_{ab}$ ) осцилляторному выходу поляризации среды  $\sigma_{ab}$  на стационарный уровень. Адиабатическое включение при  $\tau_0 \gg \Omega^{-1}$  ( $\tau_0$  — время перехода интенсивности пробного поля к стационарному значению) в условиях сильной связи  $\Omega \gg \Gamma_{ab}$  ведет к адиабатическому слежению атома — в форме единичного всплеска для  $\sigma_{ab}$  за время  $\Omega^{-1}$ . Так обстоит дело в случае точечной модели для линейного режима. Однако в представленной модели допированного волновода имеется протяженная среда и пробный импульс в разные моменты времени оказывается в разных ее точках: каждая из них проходит фазы увеличения и уменьшения интенсивности пробного импульса при переходе от переднего фронта к заднему. Таким образом, существенное влияние на динамику атомной системы будет оказывать не только способ включения пробного поля, но и конечность общего времени его взаимодействия со средой. В этом случае используемые математические приближения для перехода от системы (14) к системе (16) должны сильно зависеть от длительности пробного импульса. В частности, пробный импульс длительностью, значительной по сравнению со временем жизни возбужденного состояния  $T_0 \gg 1/\Gamma_{ab}$ , может приводить к существенному заселению возбужденного состояния, что практически невозможно с импульсом сверхкороткой длительности, когда срабатывает механизм инертности среды.

На рис. 10 представлены результаты независимого решения точной (14) и приближенной (16) систем для случая, когда трехуровневая атомная среда при включенном поле оптической накачки возбуждается смещенным по времени пробным импульсом вида

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \operatorname{sh} \left( \frac{t - 2T_0}{T_0} \right) \exp \left( i \left( C(t - 2T_0)^2 \right) \right). \quad (26)$$

Параметры атомно-оптической системы на рис. 10a выбраны так же, как для точки М на рис. 6, но с



**Рис. 10.** Зависимости матричных элементов от нормированного на длительность пробного импульса времени. Сплошная для  $|\sigma_{ba}|^2$  и пунктирная для  $\sigma_{bb}$  линии соответствуют решению системы (14), штриховая линия для  $|\sigma_{ba}|^2$  — системы (16). Выделенная светло-серым цветом область соответствует форме входящего пробного импульса в соответствии с (26)

использованием сверхкороткого импульса длительностью  $T_0 = 19$  фс. При значениях параметров  $\Omega = 5.3 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ,  $\Gamma_{ab} = 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  и выполнении неравенства  $1/T_0 \gg \Omega > \Gamma_{ab}$  наблюдается режим, близкий к пределу мгновенного включения, когда верхний атомный уровень не успевает заселяться ( $\sigma_{bb} = 1$ ,  $\sigma_{aa} = 0$ ) и решение системы (14) для  $\sigma_{ba}$  полностью совпадает с решением системы (16). Однако наблюдаемые для этого матричного элемента быстрые осцилляции должны приводить к сильной модуляции огибающей пробного импульса — вплоть до его сегментации.

Случай полного соответствия параметров точке М с рис. 6, которое выглядит как наложение режима адиабатического слежения на режим мгновенного включения, представлен на рис. 10б. При выбранных параметрах выполняется условие  $\Omega \geq 1/T_0 > \Gamma_{ab}$  ( $T_0\Omega = 1.66$ ) также и в режиме слабой адиабатичности и соответствующего ей малого заселения возбужденного состояния, решения систем (14) и (16) с достаточной точностью аппроксимируют друг друга как доказательство справедливости используемых в разд. 2 приближений. Возникающие при этом в системе высокочастотные осцилляции  $\sigma_{ba}$  в том числе могут приводить к экспериментально наблюдаемым так называемым «сайдбендам» [15], когда огибающая сформировавшегося солитона испытывает возмущения малой амплитуды.

Рисунок 10в выполнен для более длительного импульса при условии  $\Gamma_{ab} < 1/T_0 < \Omega$ , когда  $T_0\Omega = 7$ . Возникающая здесь ситуация почти идеального слежения атома в условиях быстрого заселения его верхнего состояния приводит к сильным расхождениям решений систем (14) и (16). Для изучения динамики пробного импульса в этом случае необходимо использовать прямое численное моделирование самосогласованной задачи (14) и (15) [34], а анализ возможностей получения оптических солитонов, аналогично представленному в данной работе, является более трудной задачей в условиях сильных трансформаций всех матричных элементов системы.

Кроме того, для более точного решения задачи необходим учет зависимостей материальных параметров среды от спектральной составляющей пробного импульса, что будет иметь особое значение для формирования солитонов сверхкороткой длительности и позволит надеяться на их экспериментальное обнаружение в предложенных средах допированных кварцевых волноводов.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе решена задача формирования оптических солитонов для импульсов пробного поля в рамановском (нелинейном) режиме работы Λ-схемы взаимодействия, реализованной в оптически-плотной среде трехуровневых атомов с учетом эффектов локального поля. Предложена модель кварцевого волновода, допированного атомами  $^{87}\text{Rb}$ , и определены физические условия для возможностей практического наблюдения оптических солитонов в нем. Последовательный учет локального поля в такой задаче позволяет не только расширить картину вынужденного комбинационного рассеяния, но и определяет новые перспективы использования этого широко известного эффекта нелинейной оптики для управления устойчивостью изученных солитонных режимов. В частности, в представленном случае требуемая мощность накачки

ки составляет 210 мВт (для точки М на рис. 6) и характерная длина среды — несколько миллиметров, что является принципиальным, если речь идет о создании компактных (солитонных) устройств обработки оптической информации, ср. с [15, 35]. В этом случае допированный волновод может быть создан как отдельный элемент либо, в силу малости характерных размеров, — как часть общей интегральной оптической структуры с использованием уже известных на настоящее время технологий (ср. с [36]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/11823) и государственного задания высшим учебным заведениям № 2.4053.2011, а также РФФИ (гранты №№ 10-02-90713-моб\_ст, 11-02-97513-р\_центр\_а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, Р. В. Амбарцумян, В. С. Зуев и др., ЖЭТФ **50**, 23 (1966).
2. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. **183**, 457 (1969).
3. R. E. Slusher and H. M. Gibbs, Phys. Rev. A **5**, 1634 (1972).
4. S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoglu, Phys. Rev. Lett. **64**, 1107 (1990).
5. L. N. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton et al., Lett. Nature **397**, 594 (1999).
6. A. V. Gorshkov, A. André, M. D. Lukin, and A. S. Sørensen, Phys. Rev. A **76**, 033805 (2007).
7. М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2003).
8. H. Wang, D. Goorskey, and M. Xiao, Phys. Rev. Lett. **87**, 073601 (2001).
9. B. J. Herman, J. H. Eberly, and M. G. Raymer, Phys. Rev. A **39**, 3447 (1989).
10. С. А. Ахманов, К. Н. Драбович, А. П. Сухоруков и др., ЖЭТФ **59**, 485 (1970).
11. V. V. Kozlov, P. G. Polynkin, and M. O. Scully, Phys. Rev. A **59**, 3060 (1999).
12. E. Saglamyurek, N. Sinclair, J. Jin et al., Nature **469**, 512 (2011).
13. M. Nakazawa, K. Suzuki, H. Kubota et al., Opt. Lett. **18**, 613 (1993).
14. А. В. Прохоров, Н. В. Королькова, С. М. Аракелян, Опт. и спектр. **99**, 638 (2005).
15. M. L. Dennis and I. N. Duling III, IEEE J. Quant. Electron. **30**, 1469 (1994); D. Y. Tang, W. S. Man, H. Y. Tam et al., Phys. Rev. A **61**, 023804 (2000).
16. F. A. Hopf, C. M. Bowden, and W. H. Louisell, Phys. Rev. A **29**, 2591 (1984).
17. Д. В. Кузнецов, М. Г. Гладуш, Вл. К. Рерих, ЖЭТФ **140**, 742 (2011).
18. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов*, Физматлит, Москва (2005).
19. W. H. Renninger, A. Chong, and F. W. Wise, Phys. Rev. A **77**, 023814 (2008).
20. S. Chouli and P. Grelu, Phys. Rev. A **81**, 063829 (2010).
21. D. Y. Tang, L. M. Zhao, X. Wu et al., Phys. Rev. A **80**, 023806 (2009).
22. Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны*, Физматлит, Москва (2003).
23. А. А. Афанасьев, Р. А. Власов, А. Г. Черствый, ЖЭТФ **117**, 489 (2000).
24. M. E. Crenshaw, Phys. Rev. A **78**, 053827 (2008).
25. G. D. Marshall, A. Politi, J. C. F. Matthews et al., arXiv:quant-ph/0902.4357v2.
26. Р. Нокс, *Теория экситонов*, Мир, Москва (1966).
27. M. Fleischhauer and M. D. Lukin, Phys. Rev. A **65**, 022314 (2002).
28. R. Fleischhaker, T. N. Dey, and J. Evers, Phys. Rev. A **82**, 013815 (2010).
29. N. Akhmediev and A. Ankiewicz, Lect. Notes Phys. **751**, 1 (2008).
30. А. И. Маймистов, ЖЭТФ **104**, 3620 (1993).
31. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **61**, 118 (1971).
32. Л. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва (1974).
33. В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Ижевская республиканская типография, Ижевск (2000).
34. G. Demeter, D. Dzsotjan, and G. P. Djotyan, Phys. Rev. A **76**, 023827 (2007).
35. L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and M. N. Islam, Opt. Lett. **10**, 229 (1985).
36. P. Lobotka, J. Dérer, I. Vávra et al., Phys. Rev. B **75**, 024423 (2007).