

ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИЯ ПРИ НАЛИЧИИ АВТОНОМНОЙ УНИПОЛЯРНОЙ ИНЖЕКЦИИ И ОСТАТОЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

*А. В. Тараут, Б. Л. Смородин**

*Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 16 января 2012 г.

Решена задача о конечно-амплитудной электроконвекции неоднородно нагретой жидкости, заполняющей горизонтальный конденсатор, при наличии автономной униполярной инжекции заряда с анода. Кроме инжектированного заряда в жидкости-носителе предполагается наличие собственных (образующихся благодаря диссоциации) ионов, обеспечивающих слабую собственную проводимость жидкости. Проанализировано влияние соотношения собственных и инжектированных ионов, а также степени нагрева на пороги монотонной и колебательной электроконвекции. Бифуркационные диаграммы решений построены в случаях нагрева слоя снизу или сверху. Обнаружены режимы электроконвекции неоднородно нагретой жидкости, возникающие в результате прямой и обратной бифуркаций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поведение слабопроводящих и диэлектрических жидкостей в электрическом поле представляет интерес с точки зрения формирования и сложной пространственно-временной (в том числе хаотической) динамики диссипативных структур [1–6]. Течение слабопроводящей жидкости в электрическом поле может возникнуть и поддерживаться вследствие действия силы Кулона на свободный заряд, который генерируется на границе жидкость–электрод в результате электрохимических окислительно-восстановительных реакций [7, 8]. В общих чертах образование одноименного с электродом заряда происходит следующим образом. Нейтральная молекула, подходя к аноду, отдает электрон, становясь ионом того же знака, что и поверхность электрода. Возникающие заряды отталкиваются от одноименно заряженной поверхности — происходит инжектирование заряда в жидкость. Такой механизм образования заряда в жидкости называется инжекционным. В узком слое вблизи анода образуется положительный заряд, который под действием сил Кулона распространяется в глубь жидкости и может увлекать за собой жидкость,

что, в свою очередь, приводит к появлению течения в слое.

Экспериментальные исследования электроконвекции показали, что в изотермической жидкости в результате обратной бифуркации возникает стационарное движение [3]. В некоторой области управляющего параметра, зависящего от напряжения на электродах, имеются два устойчивых режима: молекулярной проводимости и конвективного переноса, и гистерезисный переход между ними. Теоретический анализ, основанный на предположении об инжекции заряда в жидкость с анода [3, 9], позволил объяснить подобное поведение диссипативных структур. При этом предполагалось, что величина заряда в приэлектродном слое остается постоянной и не зависит от каких-либо внешних факторов (напряженности поля и температуры). Величина плотности заряда у электрода определяется его природой, типом жидкости-носителя и примесей, растворенных в ней. В неизотермической жидкости электроконвекция, возникающая в результате инжекции, была рассмотрена при нагреве жидкости в конденсаторе снизу [10] или сверху [5]. Существенно новые результаты при нагреве сверху таковы: 1) механическое равновесие теряет устойчивость к прямой бифуркации Хопфа, 2) в кольцевых каналах возникают волновые режимы электроконвекции.

*E-mail: bsmorodin@yandex.ru

Остаточная проводимость некоторых сред порождает дополнительные по отношению к инжектированным заряды в жидкости [8, 11], что оказывает существенное влияние на пороги и характер неустойчивости, которые были подробно проанализированы в широкой области параметров для случаев постоянного и переменного внешнего электрического поля [11, 12]. Даже в изотермическом случае электроконвекция может возникать колебательным образом [11].

В данной работе проведено исследование электроконвекции и характера нелинейной эволюции режимов в горизонтальном слое слабопроводящей жидкости, в которой объемный заряд возникает из-за инжекции заряда с анода и, кроме того, имеется остаточная проводимость среды, обусловленная диссоциацией примесей. Задача рассмотрена в двумерной постановке. Исследовано влияние внешнего электрического поля и нагрева слоя на эволюцию электроконвективных колебаний и динамику течения в межэлектродном промежутке. Изучены режимы стационарной конвекции, реализующиеся при нагреве слоя снизу, а также режимы стоячих и бегущих волн в слое, нагреваемом сверху.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим расположенный в поле тяжести плоский горизонтальный слой слабопроводящей жидкости плотностью ρ_0 , кинематической вязкостью ν . Теплопроводность жидкости равна χ , а диэлектрическая проницаемость — ε . Слой толщиной l ограничен горизонтальными электродами, которые поддерживаются при постоянной разности температур Θ . К электродам приложена разность потенциалов V_0 .

Электроконвекция такой жидкости описывается уравнением Навье–Стокса в приближении Буссинеска, уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости, электростатическим уравнением Пуассона, уравнениями для эволюции концентраций положительных n_+ и отрицательных n_- зарядов и уравнением теплопроводности без учета джоулевых потерь [11, 13]:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho_0 \nu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + e_0 (n_+ - n_-) \mathbf{E}, \quad (1a)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad (1b)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon \nabla \mathbf{E} = e_0 (n_+ - n_-), \quad (1c)$$

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla n_+ + K \nabla (\mathbf{E} n_+) = k_D c_0, \quad (1d)$$

$$\frac{\partial n_-}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla n_- - K \nabla (\mathbf{E} n_-) = k_D c_0, \quad (1e)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \vartheta = \chi \Delta \vartheta. \quad (1f)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость жидкости, ϑ — отклонение температуры от некоторого среднего значения, p — давление, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, e_0 — элементарный заряд, ε_0 — электрическая постоянная, K — подвижность ионов. В уравнении Навье–Стокса в качестве внешних сил учтены сила тяжести и сила Кулона, описывающая взаимодействие заряда в жидкости с электрическим полем $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, где Φ — потенциал. Поскольку рассматриваются малые градиенты температуры, диэлектрическую проницаемость ε будем считать постоянной. Для упрощения задачи не будем различать положительные заряды: инжектированные и диссоциировавшие ионы. Таким образом, в модели рассматривается эволюция двух типов ионов — положительных и отрицательных. В уравнениях для эволюции концентраций ионов (1d), (1e) учтен конвективный перенос частиц и подвижность ионов в электрическом поле. При этом подвижности K ионов при малых градиентах температуры считаются постоянными и одинаковыми для обоих сортов ионов. Скорость образования новых ионов, диссоциировавших в жидкости из примесей, может быть записана следующим образом:

$$k_D c_0 = k_R n_+ n_- = k_R n_0^2,$$

поскольку в термодинамическом равновесии жидкость должна оставаться электрически нейтральной (c_0 — концентрация диссоциировавших ионных пар, k_D — константа диссоциации, k_R — константа рекомбинации, n_0 — равновесное значение концентрации ионов). Для неполярных жидкостей константа рекомбинации записывается в виде [11]

$$k_R = \frac{e(K_+ + K_-)}{\varepsilon} n_0^2,$$

где K_+ и K_- — подвижности соответственно катионов и анионов. В нашем случае $K_+ = K_- = K$.

Изменением числа ионов в (1) за счет диффузии пренебрегаем, поскольку в нашем случае характерные времена диффузии ионов превышают время релаксации свободных зарядов в поле. Время релаксации заряда t_r и диффузионное время t_d можно оценить согласно выражениям

$$t_r = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma}, \quad t_d = \frac{l^2}{D_0}, \quad (2)$$

где σ — электропроводность, D_0 — коэффициент диффузии частиц. Используем характерные для слабопроводящей жидкости значения параметров: $\varepsilon = 2.2$, $\sigma = 2.54 \cdot 10^{-11}$ См/м, $D_0 = 10^{-10}$ м²/с, $l = 0.002$ м, $\nu = 10^{-6}$ м²/с. Тогда $t_r \sim 1$ с, $t_d \sim \sim 10^4$ с. Таким образом, $t_r \ll t_d$, т. е. диффузионными процессами можно пренебречь, поскольку эволюция конвективных структур за счет них проявляется только на временах, на три порядка больших времени t_r [14]. Характерное гидродинамическое время $t_h = l/u$ при типичных скоростях электроконвективного течения $u = \nu/l \approx 2 \cdot 10^{-3}$ м/с является малым: $t_h \approx 4$ с. Поэтому в данной модели необходимо учитывать конвективный перенос ионов.

Рассматривая случай электропроводящих и идеально теплопроводных границ слоя, на которых выполняется условие прилипания, запишем граничные условия в виде

$$\begin{aligned} z = 0: & \quad \Phi = V_0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \vartheta = \Theta, \quad n_+ = n_i; \\ z = l: & \quad \Phi = 0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \vartheta = 0, \quad n_- = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь n_i — концентрация инжектированных положительных ионов в узком прианодном слое. Инжекции отрицательного заряда на катоде не происходит, поэтому здесь концентрация отрицательного заряда равна нулю.

При расчете поведения жидкости применялся метод численного моделирования с использованием полей функции тока ψ и вихря скорости φ , для чего были выполнены преобразования:

$$\varphi = (\text{rot } \mathbf{v})_y, \quad \mathbf{v} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}; 0; -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Используя в качестве масштаба длины $[x] = l$, времени $[t] = l^2/\nu$, скорости $[\mathbf{v}] = \nu/l$, давления $[p] = \rho_0 \nu^2/l^2$, разности потенциалов $[\Phi] = V_0$, концентрации положительных и отрицательных ионов $[n_{\pm}] = n_i + n_0$ (объемная плотность положительных ионов n_+ содержит вклады как инжекции n_i , так и диссоциации n_0) и $[n_-] = n_0$, температуры $[\vartheta] = \Theta$, запишем систему (1) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \\ = \nabla^2 \varphi - \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{T^2}{M^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial x} \right), \\ \varphi &= \Delta \psi, \quad q = (C + C_0)n_+ - C_0 n_-, \\ \nabla^2 \Phi &= -q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial n_+}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial n_+}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \\ - \frac{T}{M^2} (qn_+ + \nabla \Phi \nabla n_+) &= \frac{2C_0 T}{M^2} \frac{C_0/C}{C_0/C + 1}, \\ \frac{\partial n_-}{\partial t} + \frac{\partial n_-}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial n_-}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\ + \frac{T}{M^2} (qn_- + \nabla \Phi \nabla n_-) &= \frac{2C_0 T}{M^2}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (5)$$

Дополним систему (5) граничными условиями, соответствующими твердым, идеально теплопроводным границам и автономной униполярной инжекции с анода, потенциал которого постоянен:

$$\begin{aligned} z = 0: & \quad \Phi = 1, \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial z = 0, \\ \vartheta = 1, & \quad n_+ = \frac{1}{C_0/C + 1}; \\ z = 1: & \quad \Phi = 0, \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial z = 0, \\ \vartheta = 0, & \quad n_- = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В системе уравнений (5), (6) $\text{Ra} = g\beta\Theta l^3/\nu\chi$ — число Рэлея (β — коэффициент теплового расширения), $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, параметр $C = en_i l^2/\varepsilon \varepsilon_0 V_0$ определяет степень инжекции положительных ионов, $C_0 = en_0 l^2/\varepsilon \varepsilon_0 V_0$ соответствует равновесному значению концентрации диссоциировавших (примесных) ионов в жидкости в отсутствие поля, $T = \varepsilon \varepsilon_0 V_0/\nu K \rho_0$ — электроконвективный параметр, а $M = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0/\rho_0}/K$ характеризует подвижность ионов. В дальнейшем при расчетах использованы типичные для слабопроводящих жидкостей значения параметров $M = 30$, $\text{Pr} = 10$ [3, 10].

3. ПОРОГИ ЭЛЕКТРОКОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Как было отмечено во Введении, подробное исследование электроконвективной неустойчивости жидкости, обладающей остаточной проводимостью, при наличии инжекции в широком интервале параметров задачи проведено в работах [11, 12]. Обсудим результаты, относящиеся к рассматриваемому случаю $M = 30$, $\text{Pr} = 10$, которые отсутствуют в статьях [11, 12], но необходимы для дальнейшего анализа нелинейной динамики системы.

Рассмотрим сначала слабопроводящую жидкость, помещенную в электрическое поле в отсутствие сил плавучести (числа Рэлея $\text{Ra} = 0$), что соответствует случаю отсутствия нагрева ($\Theta = 0$) или случаю невесомости ($g = 0$).

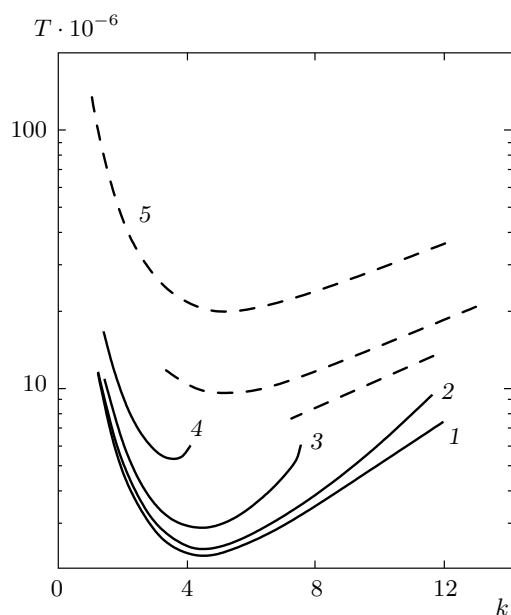


Рис. 1. Нейтральные кривые в изотермическом случае. Сплошные линии — границы монотонной неустойчивости, штриховые — границы колебательной неустойчивости. $C = 0.01$; $C_0/C = 0$ (1), 0.1 (2), 0.2 (3), 0.3 (4), 0.4 (5)

В этом случае движение жидкости и течение вызывает только сила Кулона, действующая на заряженные частицы: инжектированные ионы и ионы, появившиеся в результате процессов диссоциации. Порог устойчивости механического равновесия слабопроводящей жидкости при этом характеризуется электроконвективным параметром T , который пропорционален разности потенциалов на границах конденсатора: $T \propto V_0$. Таким образом, при фиксированных физических свойствах электроконвективной системы, изменяя потенциал на аноде, можно изменять безразмерный параметр T и влиять на устойчивость жидкости в электрическом поле.

На рис. 1 представлены нейтральные кривые — графики зависимости электроконвективного параметра от волнового числа $T(k)$ — для различных отношений C_0/C . Критический электроконвективный параметр и критическое волновое число, характеризующее пространственный масштаб возмущений $L = 2\pi/k$, таковы: 1 — $C_0/C = 0$, $T_c \approx 2.21 \cdot 10^6$, $k_c \approx 4.6$; 2 — $C_0/C = 0.1$, $T_c \approx 2.35 \cdot 10^6$, $k_c \approx 4.5$; 3 — $C_0/C = 0.2$, $T_c \approx 2.88 \cdot 10^6$, $k_c \approx 4.4$; 4 — $C_0/C = 0.3$, $T_c \approx 5.28 \cdot 10^6$, $k_c \approx 3.6$; 5 — $C_0/C = 0.4$, $T_c \approx 19.6 \cdot 10^6$, $k_c \approx 5.4$. Видно, что для малых отношений концентраций диссоциировавших и инжектированных в жидкость ионов (кривые 1, 2 на

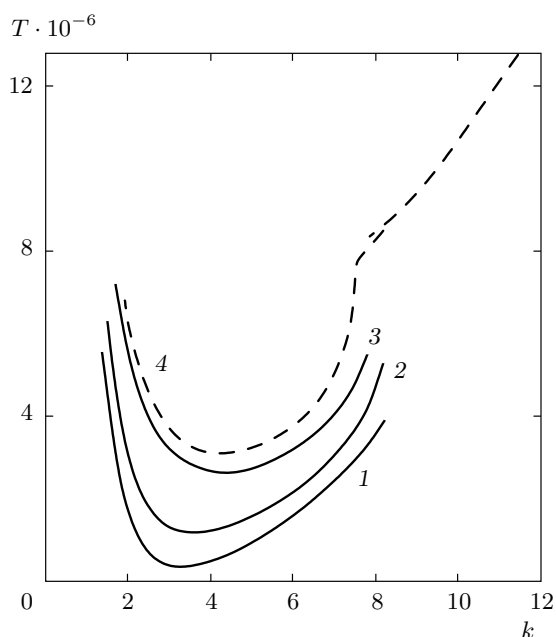


Рис. 2. Линейная устойчивость в неизотермическом случае для различных значений числа Ra . $C_0/C = 0.2$. 1 — $Ra = 1500$, $T_c \approx 0.33 \cdot 10^6$, $k_c \approx 3.3$; 2 — $Ra = 1000$, $T_c \approx 1.18 \cdot 10^6$, $k_c \approx 3.6$; 3 — $Ra = 200$, $T_c \approx 2.62 \cdot 10^6$, $k_c \approx 4.4$; 4 — $Ra = -1000$, $T_c \approx 3.09 \cdot 10^6$, $k_c \approx 4.3$

рис. 1) граница неустойчивости связана с монотонными возмущениями (сплошные линии). С ростом отношения C_0/C на границе неустойчивости появляется колебательная мода (кривые 3, 4 на рис. 1), однако неустойчивость по-прежнему связана с монотонными возмущениями. Только при относительно больших отношениях C_0/C (кривая 5 на рис. 1) электроконвекция наступает колебательным образом.

Рассмотрим теперь неравномерно нагретую слабопроводящую жидкость, помещенную в поле тяжести ($Ra \neq 0$). Помимо силы Кулона на объем жидкости действует подъемная сила, которая влияет на устойчивость. В отсутствие электрического поля горизонтальный слой жидкости под действием разности температур теряет устойчивость, когда число Рэлея превышает критическое $Ra_c = 1708$. На рис. 2 представлены зависимости электроконвективного параметра T от волнового числа k для значения $C_0/C = 0.2$ при разных способах нагрева. При нагреве снизу конвекция возникает монотонным образом. При нагреве сверху порождаются колебательные возмущения, благодаря конкуренции двух сил — силы Кулона и силы Архимеда, появляющейся в результате различной плотности от-

дельных неоднородно нагретых участков жидкости. Допустим, сила Кулона сместит некоторый объем жидкости, нагретый до определенной температуры в более нагретую область. Возвращающая сила, связанная с разностью плотностей данного элемента и его окружения, будет стремиться вернуть этот объем в исходное положение равновесия. Благодаря этому могут возникнуть колебания. Например, при $C_0/C = 0.2$ и $Ra = -1000$ критические значения, соответствующие порогу колебательной электроконвекции таковы: $T_c \approx 3.09 \cdot 10^6$, $k_c \approx 4.3$, при этом колебания происходят с собственной частотой $f_0 \approx 1.2$. При нагреве сверху ($Ra < 0$) минимумы нейтральных кривых колебательных возмущений для различных значений Ra практически совпадают.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ ПРИ АВТОНОМНОЙ УНИПОЛЯРНОЙ ИНЖЕКЦИИ

4.1. Метод решения

Задача о нелинейных режимах электроконвекции в полной нелинейной постановке решалась численно с применением двухполевого метода в прямоугольной области: высотой, равной единице, длиной $L = 2\pi/k$. На вертикальных границах использовалось условие периодичности для всех переменных задачи:

$$f(x, z, t) = f(x + L, z, t), \quad (7)$$

характеризующих электроконвективный режим. Такое условие соответствует электроконвективным режимам, реализующимся в кольцевом зазоре [6].

Расчет эволюционного уравнения для вихря скорости выполнялся методом дробных шагов, с использованием схемы продольно-поперечной прогонки [15]. Уравнения Пуассона — одно, связывающее функцию тока с вихрем скорости, другое для электрического поля — решались итерационным методом последовательной верхней релаксации. Нахождение распределения поля концентрации заряда осуществлялось явным образом. В расчетах использовалась сетка фиксированного размера: вдоль горизонтальной и вертикальной координат соответственно 20×40 ячеек в случае $k = 3.1$ (что соответствует тепловой конвекции) и 20×29 ячеек в случае $k = 4.3$ (случай изотермической электроконвекции).

Для характеристики электроконвективного движения использовались следующие величины: максимальное значение функции тока в слое

$$\psi_{max}(t) = \max[\psi(x_i, z_j, t_k)], \quad (8)$$

значение функции тока в некоторой точке внутри слоя

$$\psi_l(t) = \psi(x = L/4, z = 1/2, t). \quad (9)$$

В случае колебательной неустойчивости максимальное значение функции тока и значение функции тока $\psi_{max}(t)$ в точке $\psi_l(t)$ осциллируют. Анализ Фурье временных спектров нелинейных электроконвективных колебаний позволяет судить об основных частотах в системе и о характере течения жидкости в целом.

Дополнительную информацию о течении мы получаем, исследуя изменения полей концентрации, функции тока и температуры со временем. Для более подробного описания пространственно-временных свойств электроконвективных режимов мы использовали пространственное разложение в ряды Фурье полей функции тока, температуры и концентрации ионов. Ограничимся разложением функций в ряды по горизонтальной координате в сечении ($z = 0.5$):

$$F(x, t) = F_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) e^{inkx}, \quad (10)$$

где $F_n(t)$ — амплитуда n -пространственной гармоники.

В рассматриваемом случае в конвективной ячейке образуются преимущественно двухвихревые течения, поэтому первая мода $F_1(t)$ наиболее полно описывает характеристики структур.

Для изучения изменения частотного спектра колебаний системы выполнялся фурье-анализ колебаний функции тока в фиксированной точке ячейки в различные моменты времени. На сигнал накладывалось гауссово окно, чтобы вырезать таким образом фрагмент сигнала, соответствующий определенному интервалу времени. Затем выполнялся фурье-анализ полученной части сигнала и строился его спектр. Далее гауссово окно смещалось по оси времени на шаг Δt , после чего процедура повторялась. В результате получалась развертка во времени спектра частот колебаний с точностью, которую допускает фурье-анализ для данной ширины окна. Смещение окна проводилось с шагом $\Delta t = 0.008$, т.е. для анализа сигнала на единице безразмерного времени необходимо сделать 125 шагов. Поскольку, как будет видно ниже, характерные частоты колебаний оказываются порядка единицы, ширина гауссова окна составляла 10 единиц безразмерного времени. Шаг по времени при решении выбирался равным $\tau \approx 5 \cdot 10^{-6}$

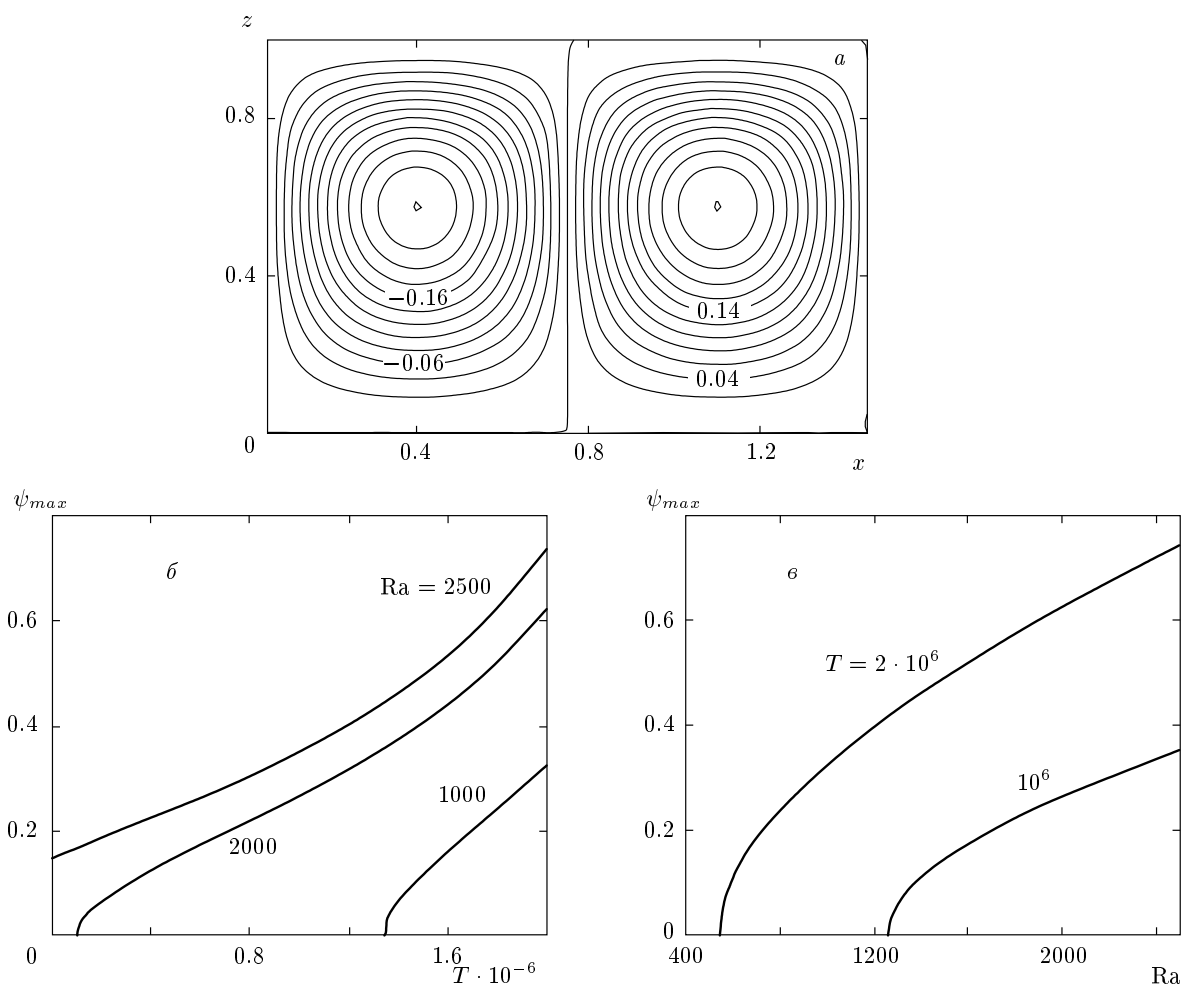


Рис. 3. Нагрев снизу. $C_0/C = 0.2$, $k = 4.3$. *a* — изолинии функции тока; $Ra = 1000$. *б, в* — зависимости максимального значения функции тока от параметра T (*б*), числа Рэлея (*в*)

и для выполнения фурье-анализа внутри окна в нашем распоряжении имеется порядка 10^7 точек.

4.2. Нагрев снизу: режим стационарной конвекции в постоянном поле

При нагреве снизу устанавливается стационарный режим электроконвекции: функция тока в фиксированной точке ячейки и максимальное ее значение после переходного процесса принимают постоянные значения. При этом в ячейке имеются два конвективных вала (рис. 3*a*), которые из-за наличия силы Кулона, направленной вдоль оси z , смещены от центра вверх.

На рис. 3*б, в* изображены зависимости максимального значения функции тока от параметров T и Ra . Как и следовало ожидать, увеличение нагре-

ва способствует более интенсивному конвективному движению — максимальное значение функции тока увеличивается. Анализируя изменение максимального значения функции тока при уменьшении управляющего параметра, можно определить порог конвекции, который совпадает с результатами линейной теории, что свидетельствует о мягком возбуждении конвекции.

В отсутствие электрического поля при значениях Ra , больших критического $Ra_c = 1708$, жидкость находится в движении, которое называется тепловой конвекцией. В нашем случае критическое волновое число $k = 4.3$ (длина конвективной ячейки составляет $L \approx 1.46$), поэтому значение Ra , при котором возникает конвекция в случае $T = 0$, согласно линейной теории, выше критического значения Ra_c (рис. 3*в*). Увеличение параметра T , что эквивалентно, напри-

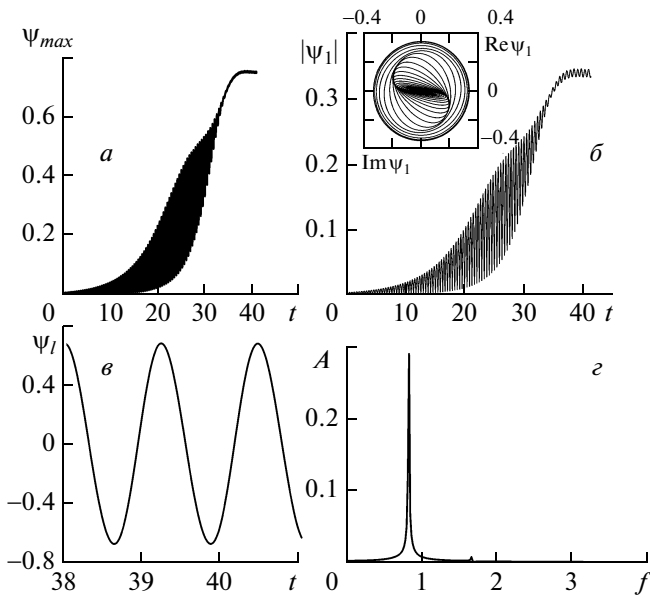


Рис. 4. Переход от стоячей волны к бегущей ($Ra = -1000, T = 3.12 \cdot 10^6, C_0/C = 0.2, k = 4.3$). Зависимости максимального значения функции тока (*a*) и амплитуды первой пространственной моды функции тока (*b*) от времени. Зависимости функции тока в точке $\psi_1(t)$ (*c*) и спектр колебаний (*d*) в режиме бегущей волны

мер, повышению напряжения, как и следовало ожидать, приводит к более интенсивному конвективному движению.

4.3. Режим бегущих волн в постоянном поле: нагрев сверху

При нагреве сверху ($Ra < 0$), когда величина $|Ra|$ превышает некоторое критическое значение ($|Ra| > |Ra_c|$), развиваются колебательные возмущения. На рис. 4*a* изображена эволюция максимального значения функции тока в конвективной ячейке.

На первой непродолжительной стадии развития течения наблюдается режим стоячей волны. Фазовая скорость волны вдоль оси x равна нулю. На ячейку приходится два конвективных вала, меняющих направление вращения. После $t \sim 10$ единиц безразмерного времени режим стоячей волны теряет устойчивость и в результате переходного процесса в интервале $10 < t < 40$ трансформируется в режим бегущей волны — максимальное значение функции тока принимает постоянное значение. Если представить амплитуду первой пространственной гармониче-

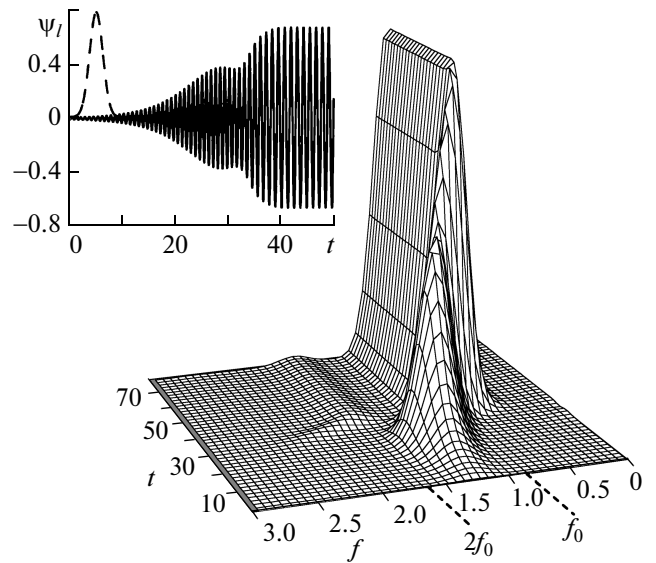


Рис. 5. Эволюция во времени частотного спектра колебаний функции тока в точке при трансформации стоячей волны в бегущую. На вставке представлена форма использованного сигнала (сплошная линия) и гауссова окна (штриховая линия); $T = 3.12 \cdot 10^6, Ra = -1000, C_0/C = 0.2, k = 4.3$

ки волны $F_1(t)$ в виде двух слагаемых

$$F_1(t) = A_+(t)e^{i\omega t} + A_-(t)e^{-i\omega t},$$

то характер результирующей волны будет зависеть от соотношения амплитуд A_+ и A_- . Если $A_+ = A_-$, то решение представляет собой суперпозицию двух волн, движущихся в противоположных направлениях, и устанавливается режим стоячих волн. В противном случае вклад одной из мод преобладает, что влечет формирование бегущей волны. Амплитуды A_+ и A_- сами являются функциями времени, и поэтому возможно наблюдать трансформацию стоячих волн в бегущие. На рис. 4*b* представлена эволюция модуля $|\psi_1|$ первой моды функции тока в разложении (10), а также (на вставке рис. 4*b*) траектория ψ_1 в комплексном пространстве. На начальном этапе эволюции наблюдается стоячая волна — первая мода осциллирует, имея нулевое среднее значение. Для данного режима амплитуды $A_+ \approx A_-$. Траекторией ($Re \psi_1, Im \psi_1$) в комплексной плоскости является прямая линия. С течением времени одна из амплитуд затухает и в системе появляется направленное поступательное движение вдоль горизонтальной координаты. Образ ψ_1 превращается в незамкнутую линию, которая с ростом амплитуды $|\psi_1|$ стре-

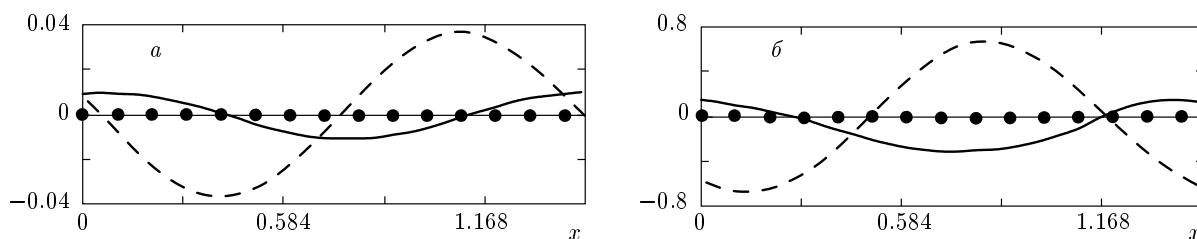


Рис. 6. Профили полей концентрации заряда (\bullet), температуры (сплошные линии) и функции тока (штриховые линии) в различные моменты времени $t = 10$ (а), 40 (б) в середине слоя ($z = 1/2$); $T = 3.12 \cdot 10^6$, $Ra = -1000$, $C_0/C = 0.2$, $k = 4.3$

мится к циклическому аттрактору бегущей волны — окружности на комплексной плоскости.

В режиме бегущей волны значение функции тока $\psi_l(t)$ в фиксированной точке ячейки с координатами $(L/4; 1/2)$ периодически меняет знак (см. рис. 4в), а спектр сигнала $\psi_l(t)$ (рис. 4з) демонстрирует наличие основной частоты бегущей волны $f_0 \approx 0.8$.

Отметим, что частоты колебаний начальной стоячей волны и сформированной бегущей волны различны. Во время переходного процесса одна частота плавно трансформируется в другую, что отображено на рис. 5. С помощью гауссова окна было выполнено быстрое фурье-преобразование в различные моменты времени и представлена графически эволюция спектра частот. На линейной стадии частота колебаний стоячей волны $f_0 \approx 1.2$. Основная частота сформировавшейся бегущей волны составляет $f_0 \approx 0.8$. В развитом нелинейном режиме ($t > 40$) имеются и кратные частоты значительно меньшей амплитуды.

Профили полей концентрации заряда, функции тока и температуры в середине слоя ($z = 0.5$), соответствующие режимам стоячей и бегущей волн, представлены на рис. 6. Для наглядности все величины были приведены к одному масштабу (были выполнены следующие преобразования: $\vartheta \rightarrow \vartheta - 0.5$, $q \rightarrow q - q_0$, где величина q_0 вычислялась с помощью решения, описывающего неподвижную жидкость [11]). Момент времени $t = 10$ (рис. 6а) соответствует стоячей волне, а при $t = 40$ (рис. 6б) сформировалась бегущая волна. Как видно из рис. 6, все профили имеют вид практически гармонических по горизонтальной координате функций. Интенсивность электроконвективного движения в режиме бегущей волны ($\psi_{max} \approx 0.8$) на порядок превосходит соответствующее значение для стоячей волны ($\psi_{max} \approx 0.04$).

На рис. 7а,б изображены изолинии функции тока и температуры, а также отклонения заряда от рав-

новесного значения в режиме бегущей волны. Вихри прижаты к катоду, их центры вращения смещены относительно середины слоя к верхней границе, что связано с влиянием силы Кулона на заряд единицы объема жидкости: из-за инъекции с анода жидкость в целом имеет положительный заряд, который стремится к катоду. Распределение поля функции тока вдоль координаты x хорошо описывается первой пространственной гармоникой, в то же время поле температуры явно демонстрирует ангармонизм.

На рис. 7в приведен профиль отклонения заряда от равновесного распределения в сечении, проходящем через центр одного из конвективных валов. Из графика видно, что по мере приближения к катоду заряд отклоняется от равновесного распределения в сторону положительных значений. Это объясняется тем, что положительный заряд (инжектированный и диссоциировавший) скапливается у катода благодаря большой скорости его конвективного переноса. Отрицательный заряд у анода присутствует в значительно меньших количествах, поскольку появляется в среде только за счет диссоциации.

Отметим, что характер возникновения колебательного режима конвекции при нагреве сверху зависит от значения волнового числа. Так, в минимуме нейтральной кривой при критическом волновом числе $k \approx 4.3$ (рис. 8а) значение T практически совпадает со значением, полученным при линейных расчетах T_c (отмечено наклонным крестом на оси абсцисс), что соответствует прямой бифуркации. При значениях параметра $T > T_c$ равновесие после переходного режима стоячих волн сменяется режимом бегущих волн. Бегущая волна обладает следующим свойством: интенсивность вращающихся в противоположных направлениях соседних конвективных валов одинакова, что проявляется в колебании функции тока в фиксированной точке ячейки в интервале $-\psi_{max} < \psi_l(t) < \psi_{max}$ (рис. 8б), а ее среднее за период значение равно нулю. Отметим, что в отличие

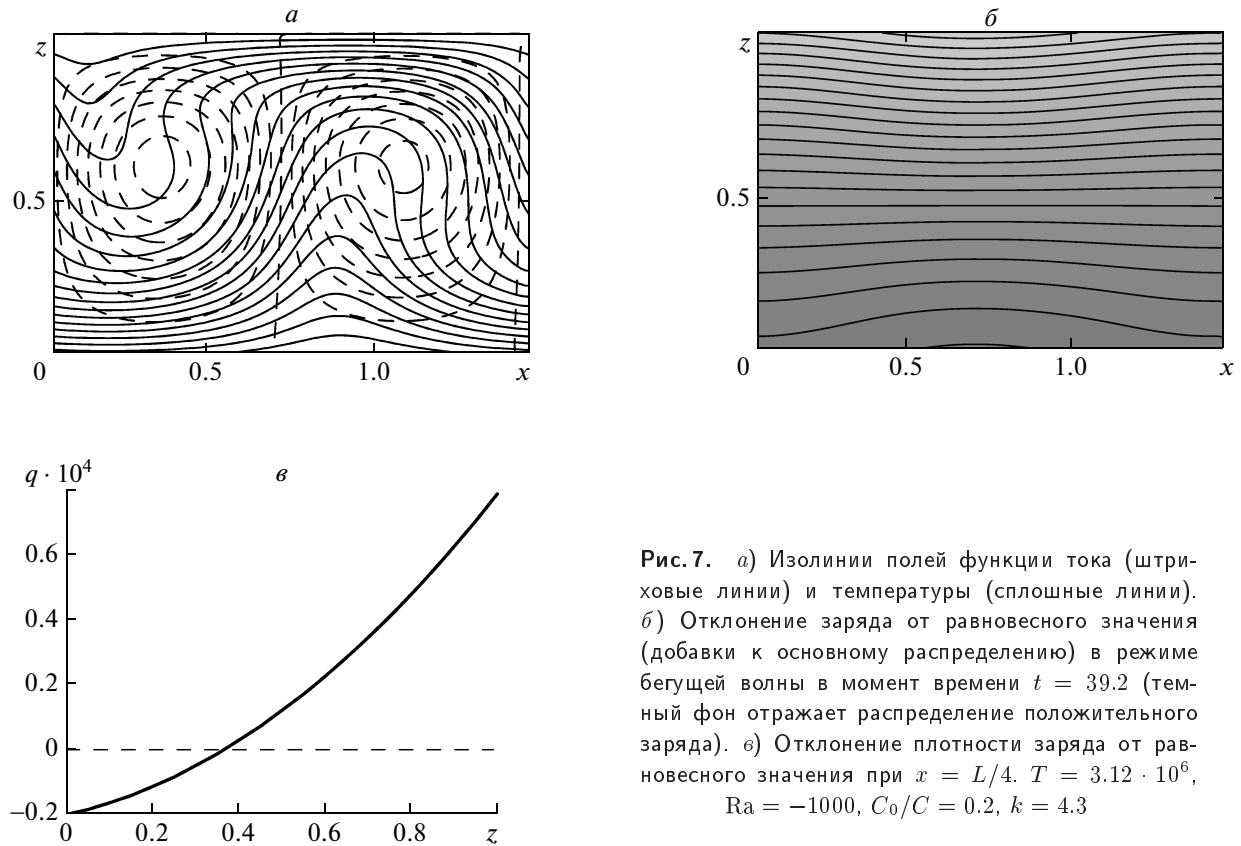


Рис. 7. а) Изолинии полей функции тока (штриховые линии) и температуры (сплошные линии). б) Отклонение заряда от равновесного значения (добавки к основному распределению) в режиме бегущей волны в момент времени $t = 39.2$ (темный фон отражает распределение положительного заряда). в) Отклонение плотности заряда от равновесного значения при $x = L/4$. $T = 3.12 \cdot 10^6$, $Ra = -1000$, $C_0/C = 0.2$, $k = 4.3$

от случая электроконвекции в отсутствие остаточной проводимости, подробно исследованного в работе [5], режимы модулированных волн, характеризующиеся генерацией второй пространственной гармоники в поле функции тока, обнаружены не были.

В случае, когда значение волнового числа равно критическому для задачи о свободной конвекции $k \approx 3.1$, пороговое значение параметра T (прямой крест на рис. 8в) отличается от значения, полученного в линейных расчетах (отмечено наклонным крестом): конвекция возникает в результате обратной бифуркации. При этом соседние конвективные валы имеют разную интенсивность, а среднее за период значение функции тока в фиксированной точке не равно нулю (рис. 8з). Отметим, что режим электроконвекции с разной интенсивностью вращения соседних валов наблюдался в эксперименте [6].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучены конечно-амплитудные режимы электроконвекции, возникающие в неоднородно нагретой слабопроводящей жидкости, обладающей остаточной проводимостью, при наличии автономной уни-

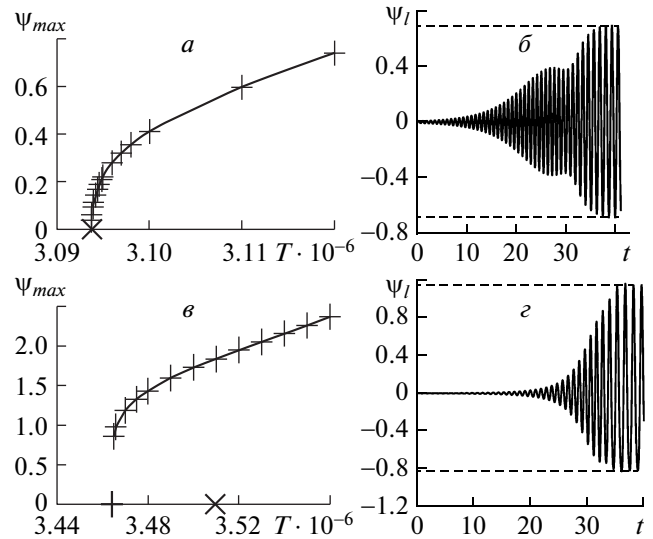


Рис. 8. Нагрев сверху ($Ra = -1000$, $C_0/C = 0.2$). Зависимости максимального значения функции тока от параметра T при $k = 4.3$ (а), 3.1 (в) и эволюция значения функции тока в центре ячейки ($x = l/2$, $z = d/2$) при $k = 4.3$, $T = 3.12 \cdot 10^6$ (б); $k = 3.1$, $T = 3.48 \cdot 10^6$ (г)

полярной инжекции. Бифуркационные диаграммы построены для различных значений чисел Рэлея. В отличие от случая отсутствия остаточной проводимости стационарная электроконвекция при нагреве снизу возникает в результате прямой бифуркации. При нагреве сверху в результате прямой бифуркации рождается режим бегущих волн, которому соответствует распределение заряда в конвективной ячейке со слабым пространственным ангармонизмом. Переход от стоячей к бегущей волне подробно проанализирован с использованием амплитуд Фурье разложения пространственных гармоник и анализа изменения частотного спектра во времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. J. Gross and J. E. Porter, *Nature* **212**, 1343 (1966).
2. M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
3. J. C. Lacroix, P. Atten, and E. J. Hopfinger, *J. Fluid Mech.* **69**, 539 (1975).
4. В. А. Ильин, Б. Л. Смородин, *Письма в ЖТФ* **31**(10), 57 (2005).
5. А. Н. Мордвинов, Б. Л. Смородин, *ЖЭТФ* **141**, 997 (2012).
6. Z. A. Daya, V. B. Deyirmenjian, S. W. Morris, and J. R. de Bruyn, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 964 (1998).
7. Ю. К. Стишков, А. А. Остапенко, *Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках*, Изд-во Ленинград. унив., Ленинград (1989).
8. А. И. Жакин, *УФН* **176**, 289 (2006).
9. А. Н. Верещага, Е. Л. Тарунин, в сб. *Численное и экспериментальное моделирование гидродинамических явлений в невесомости*, УрО АН СССР, Свердловск (1988), с. 93.
10. Ph. Traore, A. T. Perez, D. Koulova, and H. J. Romat, *Fluid Mech.* **658**, 279 (2010).
11. F. Pontiga and A. Castellanos, *Phys. Fluids* **6**, 1684 (1994).
12. Б. Л. Смородин, А. В. Тараут, *Изв. РАН, Механика жидкости и газа*, № 1, 3 (2010).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
14. В. Л. Smorodin, I. N. Cherepanov, В. I. Muzykova, and M. I. Shliomis, *Phys. Rev. E* **84**, 026305 (2011).
15. Е. Л. Тарунин, *Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции*, Изд-во Иркут. унив., Иркутск (1990).