

# ПИНЧЕВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА С НЕОДНОРОДНЫМ ОСЕВЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

*Д. А. Шальбков\**

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук  
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 29 сентября 2011 г.

Рассмотрена линейная устойчивость несжимаемой неидеальной жидкости, находящейся между двумя вращающимися соосными бесконечными цилиндрами, по отношению к осесимметричным возмущениям при наличии неоднородного осевого магнитного поля. Для проводящих цилиндров результаты для однородного и неоднородного магнитных полей качественно совпадают. Это же имеет место для непроводящих цилиндров при наличии магнитного поля неизменного направления. Для непроводящих цилиндров и магнитного поля переменного направления с величиной, превосходящей некоторое критическое значение, возникает неустойчивость. Эта новая неустойчивость существует и в отсутствие вращения и, следовательно, не зависит от его параметров. Кроме того, величина критического магнитного поля не зависит от магнитного числа Прандтля, что является благоприятным фактором для экспериментального наблюдения новой неустойчивости.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача об устойчивости вращающейся жидкости привлекает в последнее время большое внимание. Этот интерес вызван, в частности, проблемой устойчивости аккреционных дисков [1]. Согласно классическому критерию Рэлея (см. ниже формулу (1)), аккреционный диск с кеплеровским законом вращения устойчив. Однако наблюдаемые светимости аккреционных дисков столь высоки, что для их объяснения требуются такие значения вязкости вещества диска, которые могут быть объяснены только турбулентным состоянием диска. Долгое время причина турбулентности оставалась неясной. В настоящее время наиболее вероятной причиной турбулентности аккреционных дисков считается магнитовращательная неустойчивость [2], которая была теоретически предсказана Велиховым более 50 лет назад [3] при изучении устойчивости цилиндрического течения Куэтта с однородным осевым магнитным полем.

Цилиндрическое течение Куэтта — это ламинарное вращение жидкости, которое наблюдается между вращающимися соосными цилиндрами при их медленном вращении. Задача об устойчивости ци-

линдрического течения Куэтта является классической проблемой в теории гидродинамической и гидромагнитной устойчивости [4–7]. Согласно классическому критерию Рэлея для идеальной вращающейся жидкости [8], идеальное течение Куэтта является устойчивым по отношению к осесимметричным возмущениям при выполнении условия

$$\frac{d}{dR}(R^2\Omega)^2 > 0, \quad (1)$$

где использована цилиндрическая система координат  $(R, \phi, z)$ , а  $\Omega$  — угловая скорость вращения. Условие (1) является необходимым и достаточным и физически означает, что для устойчивости вращения по отношению к осесимметричным возмущениям необходимо и достаточно, чтобы угловой момент возрастал по модулю с ростом радиуса. Вязкость стабилизирует течение Куэтта и вязкое течение, неустойчивое согласно условию (1), реально теряет устойчивость только при достаточно больших скоростях вращения (или при больших числах Рейнольдса).

Общее условие устойчивости вращающейся жидкости по отношению к асимметричным возмущениям до сих пор неизвестно. Однако установлено, что условие (1) является для асимметричных возмуще-

\*E-mail: [dasha@astro.ioffe.ru](mailto:dasha@astro.ioffe.ru)

ний необходимым [9, 10], но не достаточным [11] условием устойчивости. Например, в работе [12] была показана неустойчивость вращающегося цилиндра по отношению к асимметричным модам на линии Рэлея,

$$\frac{d}{dR}(R^2\Omega)^2 = 0. \quad (2)$$

Однако этот результат существенно зависит от граничных условий [13]. Он был получен для свободных границ и полностью отсутствует для жестких границ [14], которые используются в качестве граничных условий в цилиндрическом течении Куэтта. Кроме того, устойчивая осевая стратификация плотности может приводить к дестабилизации асимметричных мод, которые становятся неустойчивыми за линией Рэлея (2) и вызывают стратовращательную неустойчивость [15, 16]. Отметим, что стратовращательная неустойчивость существенно зависит от величины зазора между цилиндрами [16].

Тем не менее, хорошо известно, что для классического неидеального течения Куэтта осесимметричная мода является наиболее неустойчивой модой для цилиндров, вращающихся в одном направлении [4–7]. Асимметричные моды могут стать наиболее неустойчивыми только для цилиндров, вращающихся в разные стороны [17]. Легко, однако, проверить, что течение с цилиндрами, вращающимися в разные стороны, будет, согласно условию (1), всегда неустойчивым. Таким образом, устойчивость течения Куэтта без магнитного поля подчиняется критерию (1). При этом вязкое течение устойчиво, если критерий выполняется, и теряет устойчивость при достаточно быстром вращении, если критерий нарушен.

Согласно работе [3], при наличии однородного осевого магнитного поля критерий устойчивости вращающейся идеальной несжимаемой жидкости по отношению к осесимметричным возмущениям меняется с условия (1) на

$$\frac{d}{dR}\Omega^2 > 0 \quad (3)$$

и для устойчивости вращения по отношению к осесимметричным возмущениям необходимо и достаточно не возрастание с ростом радиуса модуля углового момента, а возрастание модуля угловой скорости. Очевидно, что однородное магнитное поле является само по себе устойчивым. Однако в сочетании с устойчивым же вращением оно может приводить к неустойчивости. В настоящее время эту неустойчивость принято называть магнитовращательной неустойчивостью.

Существенной особенностью магнитовращательной неустойчивости является то, что она до сих пор не наблюдалась экспериментально (последние экспериментальные результаты представлены в работах [18–20]). В работах [21, 22] с помощью детальных численных расчетов было показано, что основной причиной экспериментальных трудностей является чрезвычайная малость магнитных чисел Прандтля ( $10^{-5}$  и меньше), которые имеют используемые в эксперименте жидкие металлы (ртуть, натрий, галлий). Недавно было показано [23], что свойства магнитовращательной неустойчивости могут быть крайне чувствительны к неоднородности осевого магнитного поля. К сожалению, работа [23] выполнена в приближении идеальной жидкости. Целью настоящей работы является изучение влияния неоднородности осевого магнитного поля на магнитовращательную неустойчивость для неидеального цилиндрического течения Куэтта. При этом нас в первую очередь интересует проблема экспериментальной реализации магнитовращательной неустойчивости.

В настоящей работе мы ограничимся осесимметричными возмущениями, которые, как было сказано ранее, являются наиболее неустойчивыми как для течения Куэтта без магнитного поля, так и для течения Куэтта с однородным осевым магнитным полем.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Несжимаемая вязкая жидкость с конечной проводимостью, находящаяся между двумя бесконечно длинными соосными вращающимися цилиндрами, описывается при наличии магнитного поля стандартными уравнениями магнитной гидродинамики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} &= -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U} + \frac{1}{\mu_0}\text{curl}\mathbf{B} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{curl}(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta\Delta\mathbf{B}, \\ \text{div}\mathbf{U} &= \text{div}\mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{U}$  — скорость,  $\mathbf{B}$  — напряженность магнитного поля,  $P$  — давление,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\eta$  — коэффициент магнитной диффузии,  $\mu_0$  — магнитная константа.

В цилиндрической системе координат  $(R, \phi, z)$ , выбор которой предопределен геометрией задачи, система (4) допускает решение вида (в дальнейшем нам не понадобится явное выражение для давления, которое мы опускаем)

$$\begin{aligned}
 P &= P(R), \quad \rho = \rho_0 = \text{const}, \\
 U_R &= U_z = B_R = B_\phi = 0, \\
 U_\phi &= R\Omega = c_\Omega R + \frac{d_\Omega}{R}, \quad B_z = c_z + d_z \ln(R).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь  $c_\Omega$ ,  $d_\Omega$ ,  $c_z$  и  $d_z$  — константы, которые определяются граничными условиями

$$\begin{aligned}
 c_\Omega &= \Omega_{in} \frac{\hat{\mu}_\Omega - \hat{\eta}^2}{1 - \hat{\eta}^2}, \quad d_\Omega = \Omega_{in} R_{in}^2 \frac{1 - \hat{\mu}_\Omega}{1 - \hat{\eta}^2}, \\
 c_z &= B_{zin} \left( 1 - \frac{1 - \hat{\mu}_z}{\ln(\hat{\eta})} \ln(R_{in}) \right), \\
 d_z &= B_{zin} \frac{1 - \hat{\mu}_z}{\ln(\hat{\eta})},
 \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\hat{\eta} = \frac{R_{in}}{R_{out}}, \quad \hat{\mu}_\Omega = \frac{\Omega_{out}}{\Omega_{in}}, \quad \hat{\mu}_z = \frac{B_{zout}}{B_{zin}}, \tag{7}$$

$R_{in}$  и  $R_{out}$  — радиусы,  $\Omega_{in}$  и  $\Omega_{out}$  — угловые скорости,  $B_{zin}$  и  $B_{zout}$  — напряженности осевого магнитного поля на внутреннем и внешнем цилиндрах. Отметим, что выражения для угловой скорости и напряженности магнитного поля (5) являются наиболее общими стационарными выражениями, допустимыми для неидеальной жидкости в цилиндрической системе координат. В этом смысле неидеальная жидкость существенно отличается от идеальной жидкости, для которой в качестве выражений для угловой скорости вращения и напряженности магнитного поля допустимы произвольные функции радиуса, удовлетворяющие граничным условиям.

Нас интересует устойчивость основного состояния (5). Представим возмущенное состояние в виде

$$\begin{aligned}
 u_R(R, \phi, z), \quad R\Omega(R) + u_\phi(R, \phi, z), \quad u_z(R, \phi, z), \\
 b_R(R, \phi, z), \quad b_\phi(R, \phi, z), \quad B_z(R) + b_z(R, \phi, z), \\
 P(R) + \frac{B_z^2(R)}{8\pi} + p(R, \phi, z),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где возмущения  $u_R$ ,  $u_\phi$ ,  $u_z$ ,  $b_R$ ,  $b_\phi$ ,  $b_z$ ,  $p$  предполагаются малыми по сравнению с невозмущенными величинами.

Коэффициенты линеаризованной системы (4) зависят только от радиуса и мы для любого возмущения  $F$  можем использовать разложение на нормальные моды

$$F = F(R) \exp[i(kz + m\phi + \omega t)], \tag{9}$$

где  $m$  — произвольное целое число,  $k$  — произвольное вещественное число,  $\omega$  — произвольное комплексное число. Симметрии задачи позволяют нам ограничиться для  $m$  и  $k$  только положительными

значениями. Осесимметричные возмущения соответствуют  $m = 0$ .

Для приведения величин к безразмерному виду используем длину  $R_0 = (R_{in}(R_{out} - R_{in}))^{1/2}$  как единицу длины, скорость  $\eta/R_0$  как единицу возмущенной скорости, угловую скорость вращения внутреннего цилиндра  $\Omega_{in}$  как единицу частоты и угловой скорости, магнитное поле на внутреннем цилиндре  $B_{zin}$  как единицу магнитного поля (основного и возмущенного) и давление  $\rho_0 \nu \eta / R_0^2$  как единицу давления.

Безразмерными числами задачи будут магнитное число Прандтля  $\text{Pm}$ , число Гартмана  $\text{Ha}$  и число Рейнольдса  $\text{Re}$

$$\text{Pm} = \frac{\nu}{\eta}, \quad \text{Ha} = \frac{B_{zin} R_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0 \nu \eta}}, \quad \text{Re} = \frac{\Omega_{in} R_0^2}{\nu}. \tag{10}$$

Линеаризуя систему (4), разлагая неизвестные на нормальные моды (9), приводя их к безразмерному виду (для безразмерных величин используем те же символы, что и для размерных) и представляя линеаризованную систему в виде системы уравнений первого порядка, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} + i \frac{m}{R} u_\phi + i k u_z &= 0, \\
 \frac{du_\phi}{dR} + \frac{u_\phi}{R} - X_2 &= 0, \\
 \frac{du_z}{dR} - X_3 &= 0, \\
 \frac{dp}{dR} + i \frac{m}{R} X_2 + i k X_3 + \left( k^2 + \frac{m^2}{R^2} \right) u_R + \\
 + i \text{Re}(\omega + m\Omega) u_R - 2 \text{Re} \Omega u_\phi - i k \text{Ha}^2 B_z b_R &= 0, \\
 \frac{dX_2}{dR} - \left( k^2 + \frac{m^2}{R^2} \right) u_\phi + 2i \frac{m}{R^2} u_R - \\
 - i \text{Re}(\omega + m\Omega) u_\phi - \\
 - \frac{\text{Re}}{R} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega) u_R + i k \text{Ha}^2 B_z b_\phi - i \frac{m}{R} p &= 0, \\
 \frac{dX_3}{dR} + \frac{X_3}{R} - \left( k^2 + \frac{m^2}{R^2} \right) u_z - \\
 - i k P - i \text{Re}(\omega + m\Omega) u_z + \\
 + \text{Ha}^2 \frac{dB_z}{dR} b_R + i k \text{Ha}^2 B_z b_z &= 0, \\
 \frac{db_R}{dR} + \frac{b_R}{R} + i \frac{m}{R} b_\phi + i k b_z &= 0, \\
 \frac{db_\phi}{dR} + \frac{b_\phi}{R} - X_4 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{db_z}{dR} + \frac{1}{k} \frac{m}{R} X_4 - \frac{i}{k} \left( k^2 + \frac{m^2}{R^2} \right) b_R + \\ + \frac{\text{Pm Re}}{k} (\omega + m\Omega) b_R - B_z u_R = 0, \\ \frac{dX_4}{dR} - \left( k^2 + \frac{m^2}{R^2} \right) b_\phi + \\ + i \frac{2m}{R^2} b_R - i \text{Pm Re} (\omega + m\Omega) b_\phi + \\ + \text{Pm Re} R \frac{d\Omega}{dR} b_R + ik B_z u_\phi = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где второе, третье и восьмое уравнения определяют величины соответственно  $X_2$ ,  $X_3$  и  $X_4$ .

Для завершения постановки задачи необходимо дополнить систему (11) десятью граничными условиями. Скорость вязкой жидкости на границе равна скорости границы, и для возмущений скорости имеем

$$u_R = u_\phi = u_z = 0 \quad (12)$$

как для внутреннего ( $R = R_{in}$ ), так и для внешнего ( $R = R_{out}$ ) цилиндров.

Граничные условия для магнитного поля определяются проводящими свойствами цилиндров. В теоретических расчетах обычно предполагается, что границы являются либо идеальными проводниками, либо идеальными диэлектриками (под идеальным мы понимаем диэлектрик с магнитной восприимчивостью, равной единице). Для идеального проводника нормальная компонента магнитного поля и тангенциальные компоненты электрического тока исчезают на границе

$$\frac{db_\phi}{dR} + \frac{b_\phi}{R} = b_R = 0. \quad (13)$$

Граничные условия (13) применимы как для внутреннего, так и для внешнего цилиндров.

Для идеального диэлектрика условие отсутствия нормальной компоненты электрического тока дает

$$b_\phi = \frac{m}{kR} b_z \quad (14)$$

при  $R = R_{in}$  и  $R = R_{out}$ . Кроме того, внутреннее магнитное поле должно совпадать с внешним магнитным полем на границе. Из решения потенциального уравнения  $\Delta\psi = 0$  (где  $\mathbf{V} = \nabla\psi$ ) имеем при  $R = R_{in}$

$$b_R + \frac{ib_z}{I_m(kR)} \left( \frac{m}{kR} I_m(kR) + I_{m+1}(kR) \right) = 0 \quad (15)$$

и при  $R = R_{out}$  —

$$b_R + \frac{ib_z}{K_m(kR)} \left( \frac{m}{kR} K_m(kR) - K_{m+1}(kR) \right) = 0, \quad (16)$$

где  $I_m$  и  $K_m$  — модифицированные функции Бесселя, которые имеют конечные пределы соответственно при  $R \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$ .

Для осесимметричных возмущений граничное условие (14) принимает вид

$$b_\phi = 0, \quad (17)$$

а граничные условия (15) и (16) —

$$b_R + b_z \frac{I_1(kR)}{I_0(kR)} = 0 \quad (18)$$

для  $R = R_{in}$  и

$$b_R - b_z \frac{K_1(kR)}{K_0(kR)} = 0 \quad (19)$$

для  $R = R_{out}$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Подчеркнем, что именно течение вида (5) называется течением Куэтта и наблюдается экспериментально при малых скоростях вращения цилиндров. Условие Рэлея (1) для течения Куэтта принимает простую форму (см., например, [4])

$$\hat{\mu}_\Omega > \hat{\eta}^2, \quad (20)$$

а условие Велихова (3) преобразуется в условие

$$\hat{\mu}_\Omega > 1. \quad (21)$$

Таким образом, однородное осевое магнитное поле дестабилизирует идеальные течения Куэтта при

$$\hat{\eta}^2 < \hat{\mu}_\Omega < 1. \quad (22)$$

В дальнейшем будем называть течения с  $\hat{\mu}_\Omega < \hat{\eta}^2$  (т. е. неустойчивые согласно критерию (20)) гидродинамически неустойчивыми, а течения с  $\hat{\eta}^2 < \hat{\mu}_\Omega < 1$  (т. е. неустойчивые согласно критерию (21), но устойчивые согласно критерию (20)) — магнитогидродинамически неустойчивыми.

Система (11) с граничными условиями (12) и (13) для проводящих цилиндров или (12), (17) и либо (18), либо (19) для непроводящих цилиндров образует задачу на собственные значения вида

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{b}, \mathbf{p}, \hat{\eta}, \hat{\mu}_\Omega, \hat{\mu}_z, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \omega, \text{Pm}, \text{Re}, \text{Ha}) = 0.$$

В общем случае  $\mathcal{L}$  — комплексное число. Его мнимая и вещественная части равны нулю одновременно, только если  $k$  и  $\omega$  являются собственными числами задачи (при фиксированных значениях других

параметров). При этом течение неустойчиво, если мнимая часть инкремента  $\mathcal{I}(\omega) > 0$  (см. (9)), и устойчиво при  $\mathcal{I}(\omega) < 0$ . Кривая, отделяющая область устойчивости от области неустойчивости, называется кривой нейтральной устойчивости. Соответственно, на кривой нейтральной устойчивости выполняется условие  $\mathcal{I}(\omega) = 0$ . Наша задача состоит именно в нахождении кривой нейтральной устойчивости и, соответственно, в дальнейшем мы будем полагать  $\mathcal{I}(\omega) = 0$ . Очевидно, что кривые нейтральной устойчивости зависят от осевого собственного числа  $k$ , азимутального собственного числа  $m$  и вещественной части инкремента  $\mathcal{R}(\omega)$  при фиксированных других параметрах, которые определяются физическими условиями эксперимента. Согласно работе Тейлора [24], среди всех возможных теоретических кривых нейтральной устойчивости мы должны выбрать такую, которая соответствует наименьшему числу Рейнольдса. В дальнейшем будем называть наименьшее число Рейнольдса критическим числом Рейнольдса. Оказывается, что для течения Куэтта критические числа Рейнольдса, вычисленные описанным выше способом, и экспериментальные числа Рейнольдса находятся, как правило, в прекрасном согласии [4–6, 24].

Экспериментальные и теоретические результаты показывают, что критическим числам Рейнольдса соответствует  $m = 0$  и  $\mathcal{R}(\omega) = 0$  как для течения Куэтта без магнитного поля, так и для течения Куэтта с однородным осевым магнитным полем. Строгое доказательство этого факта для течения Куэтта без магнитного поля было дано только недавно [25]. Наши результаты (хоть и далеко не исчерпывающие) показывают, что это же верно и для течения Куэтта с неоднородным осевым магнитным полем. Таким образом, ниже мы будем полагать, что  $m = 0$  и  $\mathcal{R}(\omega) = 0$ .

При численных вычислениях величина  $\mathcal{L}$  аппроксимировалась конечными разностями с типичным количеством узлов, равным 200. Подчеркнем, что данное число узлов обеспечивает достаточную численную точность, так как увеличение числа узлов не приводило к существенному изменению результатов. Отметим, что найденная в этой работе новая неустойчивость (см. ниже разд. 3.2) позволяет провести дополнительную проверку точности наших расчетов. В отсутствие вращения азимутальные компоненты собственных функций для скорости и магнитного поля должны отсутствовать. Отметим, что в наших расчетах этот тест полностью выполняется.

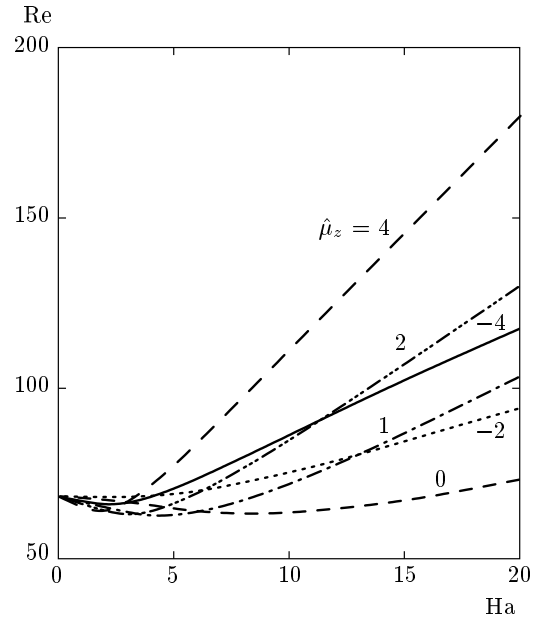


Рис. 1. Линии нейтральной устойчивости для течения Куэтта с  $\hat{\eta} = 0.5$  с покоящимся внешним цилиндром ( $\hat{\mu}_\Omega = 0$ ),  $\text{Pm} = 1$  и проводящими граничными условиями. Течение устойчиво (неустойчиво) под (над) кривой

### 3.1. Проводящие границы

На рис. 1 представлены кривые нейтральной устойчивости для течения Куэтта с проводящими цилиндрами и покоящимся внешним цилиндром ( $\hat{\mu}_\Omega = 0$ ). В этом случае течение Куэтта является гидродинамически неустойчивым. Действительно, линии нейтральной устойчивости пересекают ось ординат. Очевидно, что для течения Куэтта без магнитного поля (при  $\text{Ha} = 0$ ) критическое число Рейнольдса не зависит от  $\text{Pm}$  и  $\hat{\mu}_z$ .

Согласно рис. 1, поведение линий нейтральной устойчивости качественно совпадает со случаем течения с однородным магнитным полем (см. [21] и кривую с  $\hat{\mu}_z = 1$ ). При  $\text{Pm}$ , больших или порядка 1, магнитное поле дестабилизирует течение для не слишком больших чисел Гартманна (критические числа Рейнольдса для чисел Гартманна, находящихся вблизи интервала 5–10, меньше, чем критическое число Рейнольдса при  $\text{Ha} = 0$ ) и стабилизирует течение для больших чисел Гартманна. Неоднородность магнитного поля проявляется в изменении глубины и позиции минимума на кривой нейтральной устойчивости. Рисунок 2 демонстрирует поведение минимальных критических чисел Рейнольдса, минимизированных кроме осевого волнового числа также и по

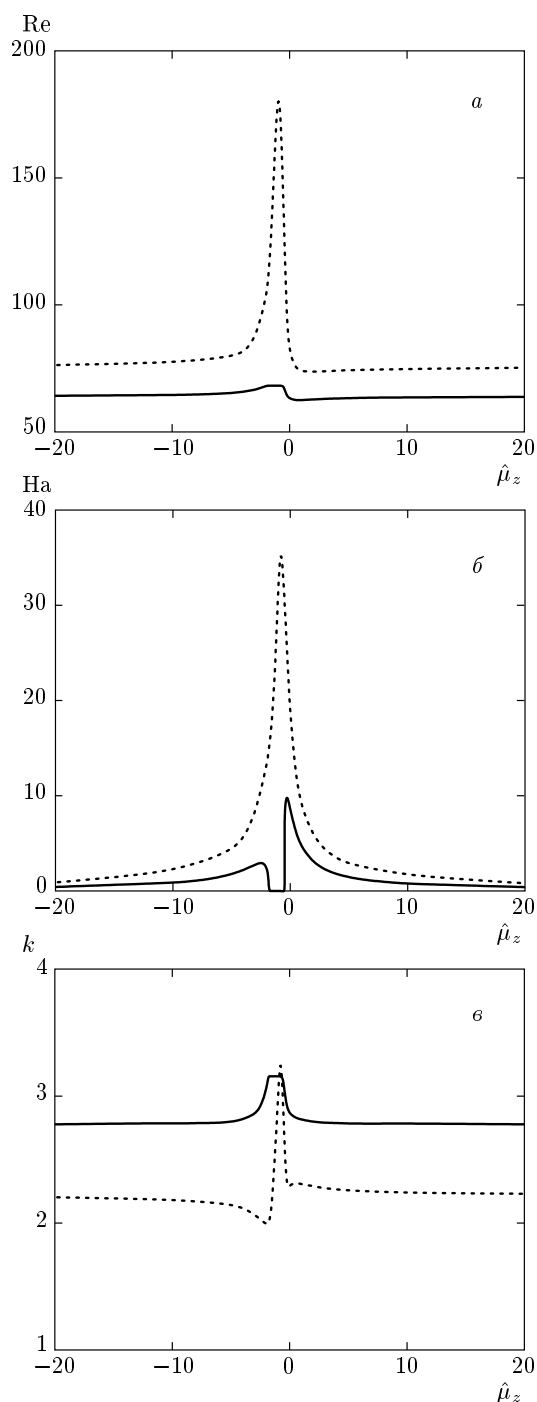


Рис. 2. Минимальные числа Рейнольдса для тех же параметров, что на рис. 1 (сплошные линии) и рис. 4 (пунктирные линии) и соответствующие числа Гартманна и осевые волновые числа

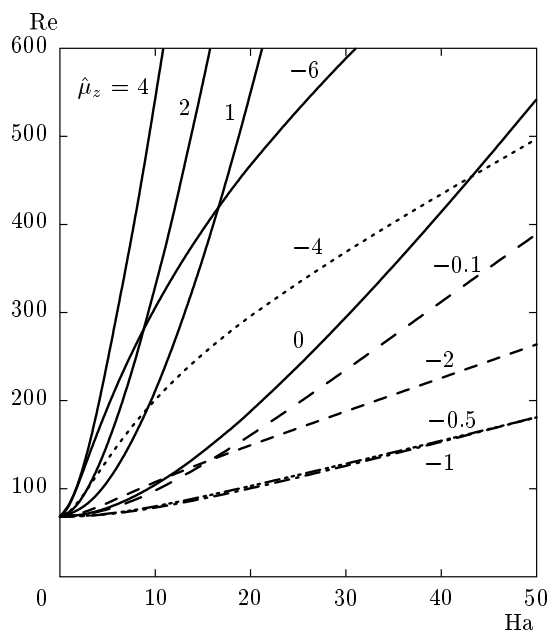


Рис. 3. То же, что на рис. 1, но для  $Pm = 10^{-5}$

числу Гартманна (отметим, что минимальное критическое число Рейнольдса может соответствовать  $Ha = 0$ , если критические числа Рейнольдса монотонно растут с ростом числа Гартманна), в зависимости от величины параметра  $\hat{\mu}_z$ , который характеризует неоднородность магнитного поля. Для течения с покоящимся внешним цилиндром минимальные критические числа Рейнольдса изменяются в узком интервале 60–70, а соответствующие им числа Гартманна изменяются в интервале 0–10. Наименьшее значение критического числа Рейнольдса составляет около 62.5 при  $\hat{\mu}_z \approx 0.5$ . Для больших  $|\hat{\mu}_z|$  минимальные критические числа Рейнольдса стремятся (снизу для положительных  $\hat{\mu}_z$  и сверху для отрицательных  $\hat{\mu}_z$ ) к универсальному пределу (около 64). Соответствующие числа Гартманна стремятся к нулю, а осевые волновые числа — к 2.8. Отметим, что уменьшение чисел Гартманна с ростом модуля  $\hat{\mu}_z$  (т. е. уменьшение величины магнитного поля, требуемого для возникновения неустойчивости) согласуется с результатами работы [23].

При малых магнитных числах Прандтля однородное осевое магнитное поле только стабилизирует гидродинамически неустойчивые течения Куэтта (см. [21] и кривую с  $\hat{\mu}_z = 1$  на рис. 3). Та же картина наблюдается и для неоднородного осевого магнитного поля. Согласно рис. 3, критические числа Рейнольдса монотонно растут с ростом числа Гартманна. Интересно отметить, что для положительных и

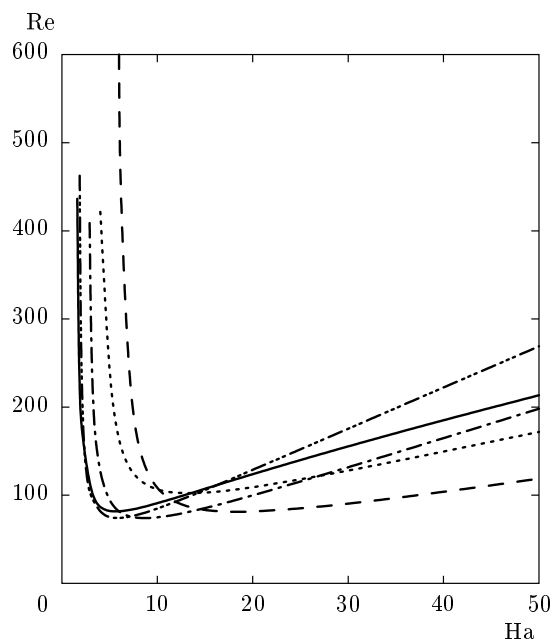


Рис. 4. Линии нейтральной устойчивости для течения Куэтта с  $\hat{\eta} = 0.5$ ,  $\hat{\mu}_\Omega = 0.4$ ,  $\text{Pm} = 1$ , проводящими цилиндрами и  $\hat{\mu}_z = -4$  (сплошная линия),  $-2$  (пунктирная),  $0$  (штриховая),  $1$  (штрихпунктирная),  $2$  (штрих-третий точка)

небольших по модулю отрицательных значений  $\hat{\mu}_z$  кривые нейтральной устойчивости вогнуты (вторая производная положительна), а для больших по модулю отрицательных значений  $\hat{\mu}_z$  кривые нейтральной устойчивости выпуклы (вторая производная отрицательна). Подчеркнем, что нам не удалось наблюдать уменьшение критических чисел Рейнольдса ни для одной выпуклой кривой даже для очень больших чисел Гартманна.

Рисунок 4 демонстрирует пример поведения кривых нейтральной устойчивости для магнитогидродинамически неустойчивого течения Куэтта. Отличительной чертой кривых нейтральной устойчивости в этом случае является наличие минимума, который вызван устойчивостью течения без магнитного поля, дестабилизацией течения при малых и средних магнитных полях (или числах Гартманна) с последующей стабилизацией большим магнитным полем. Минимальные критические числа Рейнольдса и соответствующие им числа Гартманна и осевые волновые числа приведены на рис. 2 для  $\text{Pm} = 1$ . В этом случае минимальные критические числа Рейнольдса изменяются в интервале 60–190 с максимальным значением около 183 при  $\hat{\mu}_z$  около  $-1$ . При больших  $|\hat{\mu}_z|$  минимальные критические числа Рейнольд-

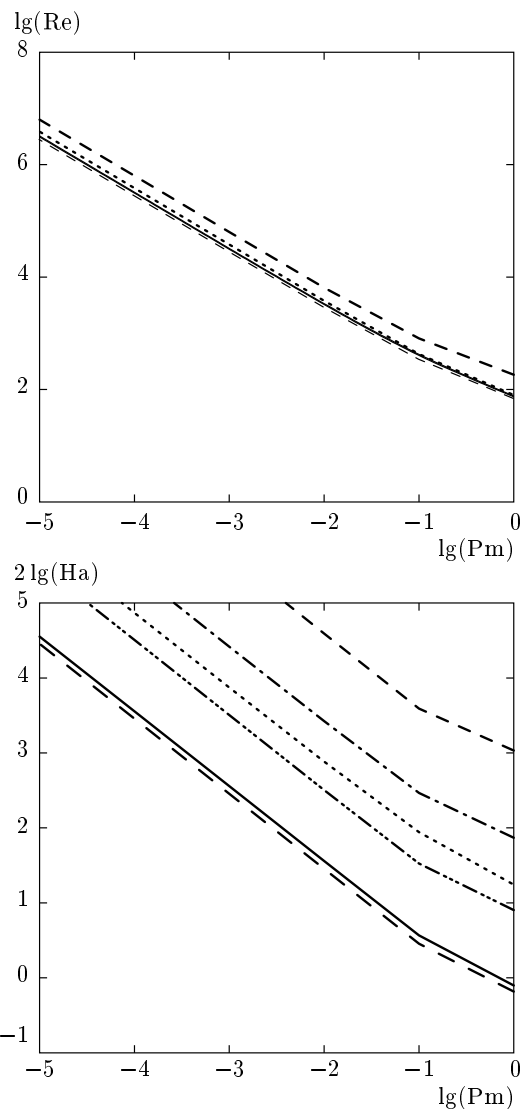


Рис. 5. Минимальные критические числа Рейнольдса и соответствующие числа Гартманна для проводящих цилиндров с  $\hat{\eta} = 0.5$ ,  $\hat{\mu}_\Omega = 0.4$  и  $\hat{\mu}_z = -20$  (сплошные линии),  $-5$  (штриховые),  $-1$  (пунктирные),  $1$  (штрихпунктирные),  $5$  (штрих-три точки),  $20$  (длинные штрихи)

са стремятся (снизу для положительных  $\hat{\mu}_z$  и сверху для отрицательных  $\hat{\mu}_z$ ) к универсальному пределу (около 76). Соответствующие числа Гартманна стремятся к нулю, а осевые волновые числа — к 2.2. Отметим, что для магнитных чисел Прандтля порядка единицы минимальные критические числа Рейнольдса примерно одинаковы (и составляют около 100) как для гидродинамически неустойчивых, так и устойчивых течений (см. рис. 2).

Как уже было сказано, при малых магнитных числах Прандтля магнитное поле всегда стабилизирует гидродинамически неустойчивое течение Куэтта и минимальное критическое число Рейнольдса соответствует течению без поля (при  $Ha = 0$ ). Очевидно, что в этом случае минимальное критическое число не зависит от магнитного числа Прандтля (см. рис. 1 и 3). Ситуация полностью меняется для магнитогидродинамически неустойчивых течений. Критические числа Рейнольдса растут, аналогично случаю с однородным магнитным полем [21], обратно пропорционально величине магнитного числа Прандтля при магнитных числах Прандтля, меньших примерно 0.1 (см. рис. 5):

$$Re \propto Pm^{-1}. \tag{23}$$

В результате критические числа Рейнольдса превышают значение  $10^6$  для магнитных чисел Прандтля, типичных для экспериментов с жидкими металлами. Для  $Pm$ , меньших 0.1, числа Гартманна, соответствующие минимальным критическим числам Рейнольдса, также растут как (см. рис. 5)

$$Ha \propto Pm^{-0.5}. \tag{24}$$

Таким образом, при малых магнитных числах Прандтля устойчивость течения Куэтта определяется, скорее, не числом Рейнольдса и числом Гартманна, а магнитным числом Рейнольдса  $Rm$  и числом Лундквиста  $Lu$  [21, 26]:

$$Lu = \frac{B_{zin} R_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0 \eta^2}}, \quad Rm = \frac{\Omega_{in} R_0^2}{\eta}. \tag{25}$$

Согласно рис. 2 и 5, минимальные критические числа Рейнольдса слабо зависят от величины  $\hat{\mu}_z$  за исключением небольшого интервала  $-2 < \hat{\mu}_z < 0$ . Зависимость соответствующих чисел Гартманна от  $\hat{\mu}_z$  более существенна и числа Гартманна тем меньше, чем больше  $|\hat{\mu}_z|$ .

Для однородного осевого магнитного поля соотношения (23) и (24) выполняются за линией Рэлея (2). Прямо на линии зависимость критических чисел Рейнольдса от  $Pm$  гораздо менее крутая,  $Re \propto Pm^{-0.5}$  [27]. В результате, эксперименты вблизи линии Рэлея представляются наиболее обещающими для наблюдения магнитовращательной неустойчивости. Однако для однородного осевого магнитного поля было показано, что вблизи линии Рэлея значения минимальных критических чисел Рейнольдса испытывают резкий скачок, отно-

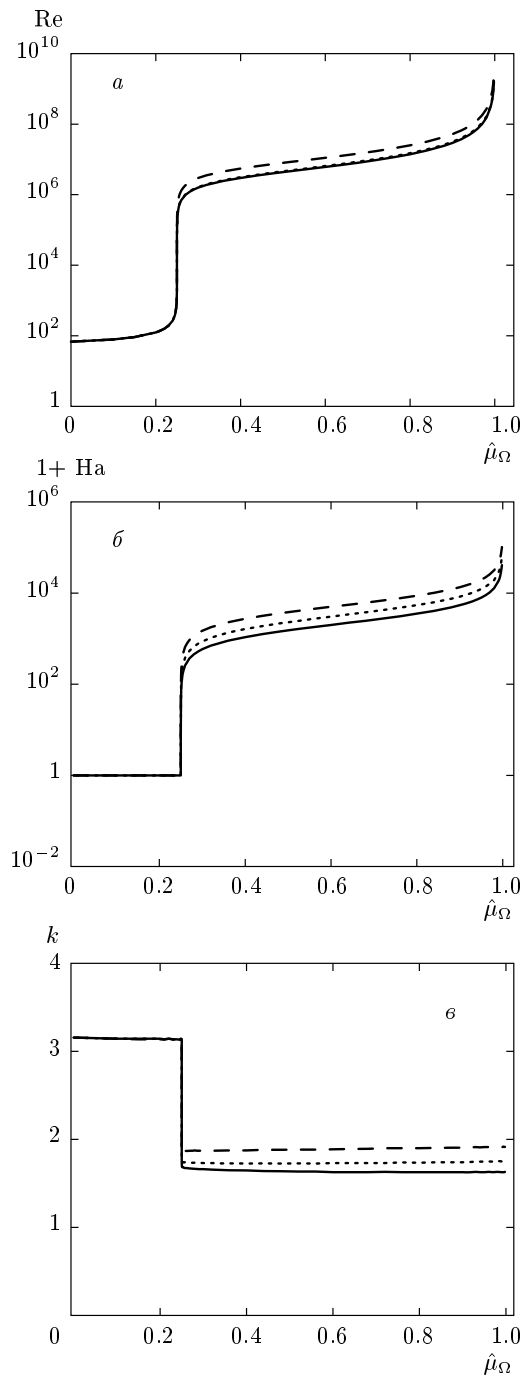


Рис. 6. Минимальные критические числа Рейнольдса и соответствующие числа Гартманна и осевые волновые числа для течения Куэтта с проводящими цилиндрами,  $\hat{\eta} = 0.5$ ,  $Pm = 1$  и  $\hat{\mu}_z = -2$  (пунктирные линии), 1 (штриховые), 2 (сплошные)



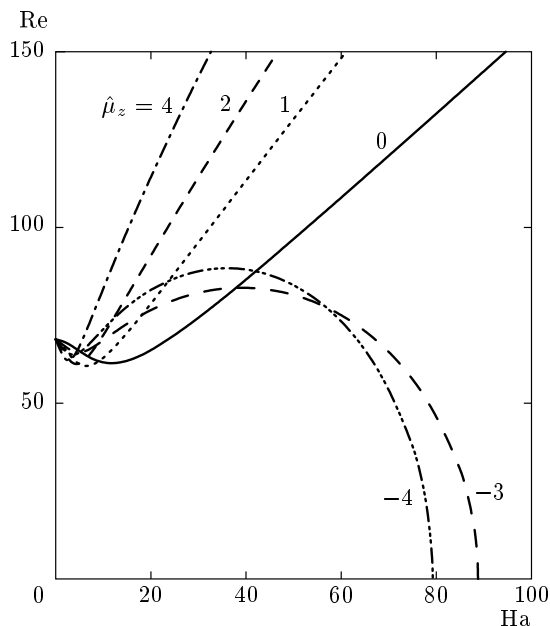


Рис. 7. То же, что на рис. 1, но для непроводящих цилиндров

сительная ширина которого пропорциональна величине  $Pm$  [22]. Такое поведение накладывает слишком сильное ограничение на точность выполнения эксперимента и делает его проведение практически нереальным. Согласно рис. 6, та же ситуация имеет место и для неоднородного осевого магнитного поля. Минимальные критические числа Рейнольдса испытывают вблизи линии Рэлея столь же резкий скачок. Кроме того, рис. 6 демонстрирует, что граница магнитовращательной неустойчивости для идеальной жидкости  $\hat{\mu}_\Omega = 1$  с однородным осевым магнитным полем является пределом магнитовращательной неустойчивости и для неидеальной жидкости с неоднородным осевым магнитным полем.

### 3.2. Непроводящие границы

Рассмотрим теперь устойчивость течения Куэтта для случая непроводящих границ. На рис. 7 приведены кривые нейтральной устойчивости для гидродинамически неустойчивого течения с  $Pm = 1$ . Для положительных значений  $\hat{\mu}_z$  линии ведут себя качественно аналогично случаю проводящих цилиндров. Существует интервал средних магнитных полей, где критические числа Рейнольдса меньше критического числа Рейнольдса для течения без поля, а числа Гартманна, соответствующие минимальному числу Рейнольдса уменьшаются с ростом  $|\hat{\mu}_z|$ . Отме-

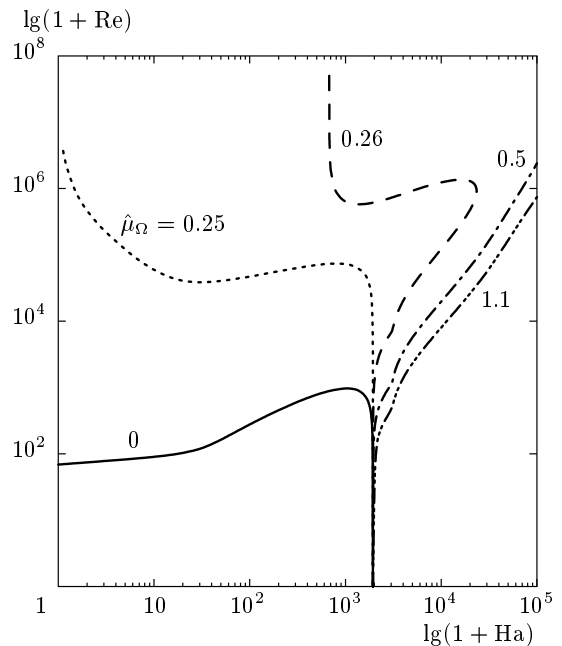


Рис. 8. Линии нейтральной устойчивости для течения Куэтта с непроводящими цилиндрами  $\hat{\eta} = 0.5$ ,  $Pm = 10^{-5}$ ,  $\hat{\mu}_z = -1$ . Течение устойчиво (неустойчиво) слева (справа) от кривых

тим, что ситуация не меняется в смысле качественного согласия результатов для проводящих и непроводящих цилиндров и для малых магнитных чисел Прандтля, а также для магнитогидродинамически неустойчивых течений при различных магнитных числах Прандтля. Соответственно, мы не приводим здесь конкретные результаты, так как они реально уже описаны в разд. 3.1.

Для отрицательных значений  $\hat{\mu}_z$  ситуация кардинально меняется. Согласно рис. 7, существует критическое число Гартманна, при превышении которого система неустойчива и без вращения (при  $Re = 0$ ). Очевидно, что критические числа Гартманна не зависят от свойств вращения (т. е. от  $Pm$  и  $\hat{\mu}_\Omega$ ). При этом критические числа Гартманна тем меньше, чем больше  $|\hat{\mu}_z|$  (см. рис. 7 и 8). Отметим, что критическое число Гартманна играет для магнитного поля ту же роль, что и критическое число Рейнольдса для вращения. Действительно, течение Куэтта, неустойчивое в приближении идеальной жидкости, теряет устойчивость в реальной вязкой жидкости только при превышении некоторого критического числа Рейнольдса (при достаточно быстром вращении). Аналогично, жидкость с магнитным полем, находящаяся между двумя неподвижными цилиндрами и

неустойчивая в приближении идеальной жидкости, будет терять устойчивость в случае реальной диссипативной жидкости только при превышении некоторого критического числа Гартманна (т. е. для достаточно большого магнитного поля). Таким образом, диссипативные эффекты в течении Куэтта стабилизируют и вращение, и магнитное поле.

На рис. 7 представлены кривые нейтральной устойчивости для различных  $\hat{\mu}_z$  при фиксированном  $\hat{\mu}_\Omega$ . На рис. 8 мы, наоборот, зафиксировали  $\hat{\mu}_z$  и изменяли  $\hat{\mu}_\Omega$ . Кроме того, на рис. 8 мы выбрали  $Rm$  достаточно малым, чтобы максимально приблизиться к условиям реального эксперимента. Течение устойчиво слева от кривых и неустойчиво справа. Согласно рис. 8, гидродинамически неустойчивые течения (представленные течением с  $\hat{\mu}_\Omega = 0$ ) устойчивы только при малых числах Рейнольдса и Гартманна (медленное вращение и малые магнитные поля).

Существенной особенностью гидродинамически устойчивых течений является то, что неустойчивость для них существует при малых числах Рейнольдса. Такое поведение говорит о том, что причиной неустойчивости является магнитное поле, а не вращение. При этом неустойчивость стабилизируется устойчивым вращением (течение с  $\hat{\mu}_\Omega > \hat{\eta}^2$ ) и течение становится устойчивым при больших числах Рейнольдса. Переход от неустойчивости к устойчивости происходит при тем меньших значениях чисел Рейнольдса, чем больше величина  $\hat{\mu}_\Omega$  (чем более устойчивым является вращение). Отметим, что поскольку критическое число Гартманна не зависит от  $\hat{\mu}_\Omega$ , эта неустойчивость существует при малых числах Рейнольдса и для течений с  $\hat{\mu}_\Omega > 1$ , для которых магнитовращательная неустойчивость полностью отсутствует.

Для отрицательных значений  $\hat{\mu}_z$  зависимость результатов от  $Rm$  определяется наличием как критического числа Рейнольдса  $Re_0$  при  $Ha = 0$  для гидродинамически неустойчивого течения, так и критического числа Гартманна  $Ha_0$  при  $Re = 0$ . Оба эти числа не зависят от  $Rm$ . Соответственно, критические числа Рейнольдса для гидродинамически неустойчивого течения слабо зависят от  $Rm$ . Однако для гидродинамически устойчивых течений при числах Гартманна, больших  $Ha_0$ , критические числа Рейнольдса зависят от  $Rm$  тем больше, чем меньше  $Rm$  (напомним, что в этом случае кривые нейтральной устойчивости отделяют область неустойчивости при малых числах Рейнольдса от области устойчивости при больших числах Рейнольдса).

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено влияние неоднородного осевого магнитного поля на устойчивость по отношению к осесимметричным возмущениям цилиндрического течения Куэтта несжимаемой неидеальной жидкости. Функциональный вид течения Куэтта (5) фиксируется азимутальной компонентой уравнения Навье–Стокса для вязкой жидкости. Именно течение (5) наблюдается экспериментально при малых скоростях вращения.

Для осевого магнитного поля ситуация полностью аналогична. Функциональный вид магнитного поля определяется осевой компонентой уравнения магнитной индукции для жидкости конечной проводимости и фиксирован с точностью до двух констант (см. (5)), определяемых граничными условиями.

Существенным отличием течения с неоднородным осевым магнитным полем от течения с однородным полем является наличие азимутального электрического тока, протекание которого может нарушать условие несжимаемости жидкости за счет омической диссипации. Тем не менее, согласно (5) плотность электрического тока будет обратно пропорциональна радиусу, и эта проблема решается путем простого увеличения размеров экспериментальной установки. Для достаточно больших размеров (однако, как легко оценить, совершенно разумных физически) электрический ток будет столь мал, что приближение несжимаемой жидкости будет хорошо выполняться.

Основным мотивом данной работы было изучение влияния неоднородного осевого магнитного поля на устойчивость течения Куэтта с целью проверки возможности экспериментальной реализации магнитовращательной неустойчивости. К сожалению, наши результаты не позволяют надеяться на наблюдение магнитовращательной неустойчивости для течения Куэтта с неоднородным осевым магнитным полем при экспериментах с жидкими металлами. В самом деле, для проводящих граничных условий свойства устойчивости течения Куэтта для однородного и неоднородного осевых магнитных полей качественно совпадают. Таким образом, магнитовращательная неустойчивость для гидродинамически неустойчивых течений с  $\hat{\mu}_\Omega < \hat{\eta}^2$  полностью отсутствует при значениях  $Rm$  порядка  $10^{-5}$  и меньших, типичных для жидких металлов. Для магнитогидродинамически неустойчивых течений с  $\hat{\eta}^2 < \hat{\mu}_\Omega < 1$  критические числа Рейнольдса для  $Rm \sim 10^{-5}$  столь велики ( $10^6$  и больше),

что неустойчивость при таких числах Рейнольдса наблюдается экспериментально и для теоретически устойчивых течений (см., например, [28]). Отметим, что эти неустойчивости вызываются, по-видимому, несовершенством эксперимента и отклонением реальных граничных условий от теоретических. Это подтверждается результатами, демонстрирующими, что неустойчивость теоретически устойчивого течения Куэтта наступает при все больших числах Рейнольдса при улучшении точности эксперимента [29]. Кроме того, для рассмотренных осесимметричных возмущений неоднородное осевое магнитное поле не изменяет предела магнитовращательной неустойчивости  $\hat{\mu}_\Omega = 1$ . Единственным существенным эффектом неоднородности магнитного поля для проводящих граничных условий является уменьшение чисел Гартманна, соответствующих минимуму кривой нейтральной устойчивости с ростом  $|\hat{\mu}_z|$ . Этот результат согласуется с выводами работы [23].

Для непроводящих граничных условий и положительных значений  $\hat{\mu}_z$  влияние неоднородности магнитного поля качественно полностью совпадает со случаем проводящих граничных условий.

Ситуация существенно изменяется для непроводящих граничных условий и отрицательных значений  $\hat{\mu}_z$  (отрицательные  $\hat{\mu}_z$  соответствуют тому, что магнитное поле изменяет направление). В этом случае наши результаты демонстрируют появление новой неустойчивости, которая не зависит от вращения жидкости. В диссипативном течении Куэтта эта неустойчивость развивается, если число Гартманна превышает некоторое критическое число Гартманна. Это критическое число Гартманна не зависит ни от числа Рейнольдса, ни от магнитного числа Прандтля, а определяется только модулем числа  $\hat{\mu}_z$  и тем меньше, чем больше модуль  $\hat{\mu}_z$ .

Аналогичная неустойчивость хорошо известна для плазменного  $z$ -пинча с азимутальным магнитным полем (см., например, [30]). Эта же неустойчивость была теоретически подтверждена и для течения Куэтта с азимутальным магнитным полем [31, 32]. Однако плазменный  $\theta$ -пинч с осевым магнитным полем является теоретически устойчивым [30], а найденная неустойчивость до сих пор была неизвестна. Главной причиной, ответственной за различные свойства устойчивости осевого магнитного поля в теории плазменного  $\theta$ -пинча и течения Куэтта, представляется использование различных граничных условий. В теории плазменного  $\theta$ -пинча никогда не применялись непроводящие граничные условия для магнитного поля (т. е. (17) и либо (18), либо (19)) совместно с жесткими границами для скорости (12).

Критические числа Гартманна не зависят ни от  $Rm$ , ни от  $\hat{\mu}_\Omega$  и тем меньше, чем больше  $|\hat{\mu}_z|$ , поэтому экспериментальное обнаружение этой неустойчивости представляется более простой задачей, чем обнаружение классической магнитовращательной неустойчивости. Тем не менее, эта неустойчивость является магнитной по своей природе и ее обнаружение ничего не скажет о магнитовращательной неустойчивости.

В данной работе мы ограничились только случаем осесимметричных возмущений, которые для течения Куэтта без магнитного поля и течения с однородным осевым магнитным полем являются наиболее неустойчивыми. Тем не менее, исследование устойчивости течения Куэтта с неоднородным осевым магнитным полем по отношению к асимметричным возмущениям представляется также необходимым. В частности, нельзя исключить, что асимметричные возмущения могут расширить предел магнитовращательной неустойчивости за классическое значение  $\hat{\mu}_\Omega = 1$ . Эти вопросы требуют дополнительных исследований.

Автор признателен рецензенту за замечания, которые позволили существенно улучшить стиль статьи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-02-00327) и программы «Ведущие научные школы РФ» (грант НШ-4035.2012.2).

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Balbus and J. F. Hawley, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1 (1998).
2. S. A. Balbus and J. F. Hawley, *Astrophys. J.* **376**, 214 (1991).
3. Е. П. Велихов, *ЖЭТФ* **36**, 1398 (1959).
4. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon, Oxford (1961).
5. P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1981).
6. P. Chossat and G. Iooss, *The Couette-Taylor Problem*, Springer, New York (1994).
7. Д. А. Шалыбков, *УФН* **179**, 971 (2009).
8. Rayleigh Lord, *Proc. Roy. Soc. London A* **93**, 148 (1917).

9. S. Leblanc and A. Le Duc, *J. Fluid Mech.* **537**, 433 (2005).
10. P. Billant and F. Gallaire, *J. Fluid Mech.* **542**, 365 (2005).
11. L. N. Howard and S. A. Gupta, *J. Fluid Mech.* **14**, 463 (1962).
12. O. M. Blaes and W. Glatzel, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **220**, 253 (1986).
13. P. Goldreich and R. Narayan, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **213**, 7p (1985).
14. H. Kubotani, S. M. Miyama, M. Sekiya et al., *Progr. Theor. Phys.* **82**, 523 (1989).
15. D. Shalybkov and G. Rüdiger, *Astron. Astrophys.* **438**, 411 (2005).
16. G. Rüdiger and D. Shalybkov, *Astron. Astrophys.* **493**, 375 (2009).
17. W. Langford, R. Tagg, E. Kostelich et al., *Phys. Fluids* **31**, 776 (1988).
18. F. Stefani, G. Gerbeth, T. Gundrum et al., *Phys. Rev. E* **80**, 066303 (2009).
19. M. D. Nornberg, H. Ji, E. Schartman et al., *Phys. Rev. Lett.* **104**, 074501 (2010).
20. S. A. Colgate, H. Li, V. Pariev et al., *Phys. Rev. Lett.* **106**, 175003 (2011).
21. G. Rüdiger and D. Shalybkov, *Phys. Rev. E* **66**, 016307 (2002).
22. G. Rüdiger, M. Schultz, and D. Shalybkov, *Phys. Rev. E* **67**, 046312 (2003).
23. В. И. Илгисонис, И. В. Хальзов, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 815 (2007).
24. G. J. Taylor, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **223**, 289 (1923).
25. I. H. Herron and H. N. Ali, *Quart. Appl. Math.* **61**, 279 (2003).
26. J. Goodman and H. Ji, *J. Fluid Mech.* **462**, 365 (2002).
27. A. P. Willis and C. F. Barenghi, *Astron. Astrophys.* **388**, 688 (2002).
28. M. S. Paoletti and D. P. Lathrop, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 024501 (2011).
29. F. Z. Schultz-Grunow, *Angew. Math. Mech.* **39**, 101 (1959).
30. J. P. Freidberg, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 801 (1982).
31. D. Shalybkov, *Phys. Rev. E* **73**, 016302 (2006).
32. D. Shalybkov, *Phys. Rev. E* **75**, 047302 (2007).