

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ДВУМЕРНОЙ ФЕРРО- И АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛЯХ ПОТТСА НА ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

А. К. Муртазаев^{a,b}, А. Б. Бабаев^{a,c*}

^a Институт физики Дагестанского научного центра Российской академии наук
367003, Махачкала, Россия

^b Дагестанский государственный университет
367025, Махачкала, Россия

^c Дагестанский государственный педагогический университет
367003, Махачкала, Россия

Поступила в редакцию 19 марта 2012 г.

На основе кластерных методов и классического метода Монте-Карло исследованы фазовые переходы в двумерных ферро- и антиферромагнитной моделях Поттса с числом состояний спина $q = 3$ на треугольной решетке. Рассмотрены системы с линейными размерами $L = 20$ – 120 . Используя метод кумулянтов Биндера четвертого порядка и гистограммный анализ данных, мы показали, что в ферромагнитной модели Поттса наблюдается фазовый переход второго рода, а в антиферромагнитной модели Поттса — фазовый переход первого рода. На основе теории конечно-размерного скейлинга для ферромагнитной модели Поттса рассчитаны статические критические индексы теплоемкости α , восприимчивости γ , намагниченности β и индекса радиуса корреляции ν .

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интенсивно обсуждаются фазовые переходы (ФП) и критические явления (КЯ) в магнетиках, описываемых двумерными ($2D$) решеточными моделями Изинга и Поттса [1, 2]. Особый интерес представляет $2D$ -модель Поттса на треугольной решетке. Это обусловлено тем, что решеточные $2D$ -модели Поттса на треугольной решетке описывают большой класс реальных физических систем: слоистые магнетики, пленки жидкого гелия, сверхпроводящие пленки, адсорбированные пленки и др. [3–5]. В частности, адсорбция инертных газов на адсорбентах типа графита может описываться моделями решеточного газа Поттса. Такие физически адсорбированные пленки дают экспериментальную реализацию ФП в двумерных системах [3, 6]. Обычно антиферромагнетики с треугольной решеткой являются фрустрированными магнетиками. Однако необходимо отметить, что в случае модели Поттса с числом состояний спина $q = 3$ на треугольной ре-

шетке в основном состоянии фрустрация, обусловленная геометрией решетки, отсутствует (см. рис. 1) и магнитная система упорядочена при конечной температуре. Поэтому можно считать, что антиферромагнитная $2D$ -модель Поттса с $q = 3$ на треугольной решетке эквивалентна трехвершинной модели Поттса с тремя подрешетками A, B, C .

Несмотря на интенсивные теоретические исследования двумерных спиновых решеточных систем, описываемых моделями Поттса, в течение последних тридцати лет, к настоящему времени существует совсем немного надежно установленных фактов. Известно, что в чистой модели Поттса с состоянием $q > q_c(D)$, где D — размерность системы, наблюдается ФП первого рода, а ФП второго рода — в случае $q < q_c(d)$ [3, 7]. Для $2D$ -модели Поттса $q_c(d = 2) = 4$ [7], в то время как для $3D$ -модели $q_c(d = 3) = 2.45$ [8]. При этом для $q_c(d = 2) = 4$ наблюдается ФП второго рода, а для $q_c(d = 3) = 2.45$ — слабо выраженный ФП первого рода. Характер ФП в двумерной антиферромагнитной модели Поттса с $q = 3$ на треугольной решетке до сих пор еще не ясен. По

*E-mail: b_albert78@mail.ru

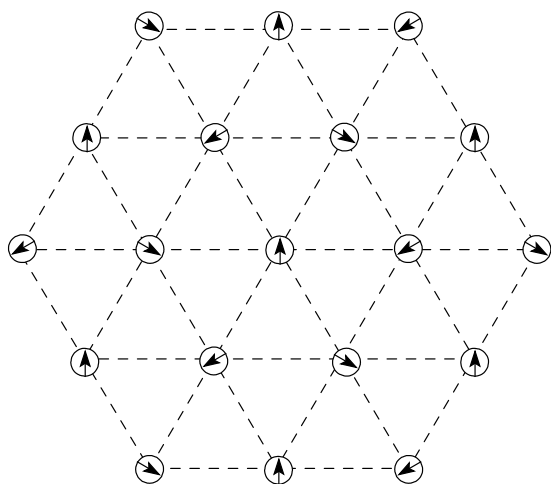


Рис. 1. Пример отсутствия фрустраций на треугольной решетке (антиферромагнитная модель Поттса с числом состояний спина $q = 3$)

одним данным это слабо выраженный ФП первого рода [5, 9, 10], по другим — переход второго рода [11].

В данной работе методом Монте-Карло (МК) и гистограммным методом анализа данных исследованы фазовые переходы и термодинамические свойства двумерных ферро- и антиферромагнитных моделей Поттса с числом состояний спина $q = 3$ на треугольной решетке.

Отметим, что первые попытки исследования этих моделей методами вычислительной физики предпринимались в то время, когда мощности вычислительных машин и используемые алгоритмы метода МК не позволяли рассчитывать критические параметры с необходимой степенью точности.

2. ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПОТТСА НА ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

Приведем здесь формулировку $2D$ -модели Поттса с числом состояний спина $q = 3$ на треугольной решетке.

1. В узлах двумерной треугольной решетки расположены спины S_i , которые могут находиться в одном из $q = 3$ состояний (см. рис. 1).

2. Энергия связи между двумя узлами равна нулю, если они находятся в разных состояниях (безразлично, в каких именно), и равна $|J|$, если взаимодействующие узлы находятся в одинаковых состояниях (опять же, все равно, в каких именно).

С учетом этих особенностей микроскопический гамильтониан такой системы может быть представлен в виде

$$H = -\frac{1}{2} J \sum_{i,j} \delta(S_i, S_j), \quad S_i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где J — параметр обменного ферро- ($J > 0$) или антиферромагнитного ($J < 0$) взаимодействия,

$$\delta(S_i, S_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } S_i = S_j, \\ 0, & \text{если } S_i \neq S_j. \end{cases}$$

3. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Кластерные алгоритмы метода МК [12, 13] оказались мощными и весьма эффективными инструментами исследования критических явлений в различных системах и моделях [14, 15]. Критические параметры, рассчитанные на основе данных, полученных с помощью кластерных алгоритмов, обладают высокой точностью и надежностью [14]. Из всех вариантов кластерных алгоритмов метода МК наиболее эффективным на сегодняшний день является алгоритм Вольфа [12]. Этот алгоритм был реализован нами для исследования двумерной ферромагнитной модели Поттса на треугольной решетке. Подробно детали реализации алгоритма Вольфа для спиновых моделей даны в работах [16–20]. В случае антиферромагнитной модели Поттса на треугольной решетке для выполнения условий эргодичности этот алгоритм использовался в сочетании с классическим алгоритмом Метрополиса метода МК.

Исследовались системы с линейными размерами $L \times L = N$, $L = 20$ –120. Начальные конфигурации задавались таким образом, чтобы все спины находились в одинаковом состоянии в случае ферромагнитной модели Поттса и в разных состояниях в случае антиферромагнитной модели Поттса. Для вывода системы в равновесное состояние вычислялось время релаксации τ_0 для всех систем с линейными размерами L . Этот неравновесный участок длиной τ_0 отбрасывали. Затем усреднение проводилось по участку марковской цепи длиной $\tau = 150\tau_0$. Кроме того, для повышения точности расчетов проводилось усреднение по десяти различным начальным конфигурациям. Затем эти данные, полученные путем усреднения, использовались для последующего анализа.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для наблюдения за температурным ходом поведения теплоемкости и восприимчивости использовались флуктуационные соотношения [21]

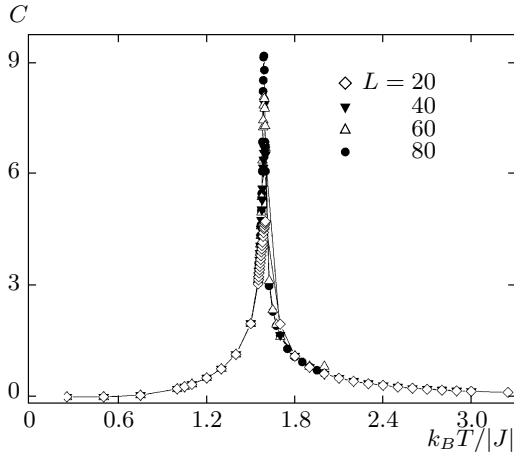


Рис. 2. Температурная зависимость теплоемкости C для ферромагнитной 2D-модели Поттса на треугольной решетке

$$C = (NK^2) (\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2), \quad (2)$$

$$\chi = (NK) (\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2), \quad (3)$$

где $K = |J|/k_B T$, $N = L^2$ — число магнитных узлов, U — внутренняя энергия, m — параметр порядка системы, угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю. В качестве параметра порядка для ферромагнитной (m_F) и антиферромагнитной (m_{AF}) моделей Поттса использовались следующие выражения [22]:

$$m_F = \left\langle \frac{3}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{N_\alpha}{N} - \frac{1}{3} \right)^2 \right\rangle^{1/2}, \quad (4)$$

$$m_{AF} = \left\langle \frac{3}{2} \sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma} \left(\frac{N_\alpha + N_\beta + N_\gamma}{N} - \frac{1}{3} \right) \right\rangle^{1/2}, \quad (5)$$

где $N_\alpha = \{N_1, N_2, N_3\}$, N_1 — число спинов в состоянии с $q = 1$, N_2 — число спинов в состоянии с $q = 2$, N_3 — число спинов в состоянии с $q = 3$, N_α , N_β , N_γ — число спинов соответственно в подрешетках A , B и C ; $N = L^2$.

На рис. 2 и 3 представлены характерные зависимости теплоемкости C от температуры T соответственно для ферромагнитной и антиферромагнитной 2D-моделей Поттса с числом состояний спина $q = 3$ для систем с линейными размерами $L = 20, 40, 60, 80$. Здесь и далее на всех рисунках погрешность данных не превышает размеров символов, используемых для построения графиков. Отметим, что в зависимостях теплоемкости C от температуры для всех исследуемых нами систем проявляются четко

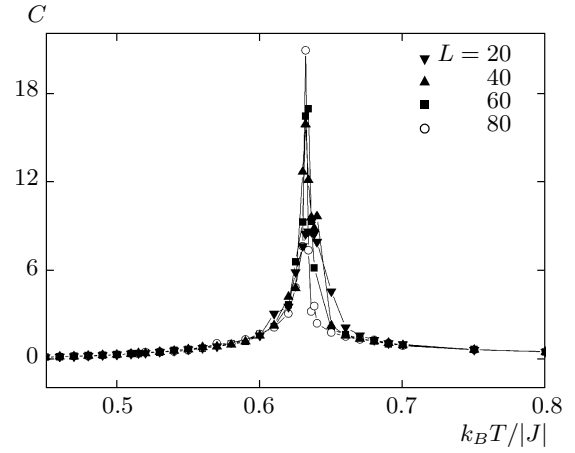


Рис. 3. Температурная зависимость теплоемкости C для антиферромагнитной 2D-модели Поттса на треугольной решетке

выраженные максимумы, и эти максимумы в пределах погрешности приходятся на одну и ту же температуру.

Для определения критических температур и анализа характера фазового перехода использовался метод кумулянтов Биндера четвертого порядка [23, 24]:

$$V_L(T) = 1 - \frac{\langle E^4 \rangle_L}{3 \langle E^2 \rangle_L^2}, \quad (6)$$

$$U_L(T) = 1 - \frac{\langle m^4(T, L) \rangle_L}{3 \langle m^2(T, L) \rangle_L^2}, \quad (7)$$

где E — энергия и m — параметр порядка системы с линейными размерами L . Выражения (6) и (7) позволяют с хорошей точностью определить T_c при фазовых переходах соответственно первого и второго рода. Следует отметить, что применение кумулянтов Биндера позволяет также хорошо тестировать тип фазового перехода в системе. Известно, что фазовые переходы первого рода характеризуются, в частности, следующими отличительными особенностями [25]: усредненная величина $V_L(T)$ стремится к некоторому нетривиальному значению V^* согласно выражению

$$V(T) = V^* + bL^{-d} \quad (8)$$

при $L \rightarrow \infty$ и $T = T_c(L)$, где V^* отлична от $2/3$, а минимальная величина $U_{L,min}(T = T_{min})$ расходится $U_{L,min}(T = T_{min}) \rightarrow -\infty$ при $L \rightarrow \infty$, что и продемонстрировано на рис. 4 и 5 соответственно для исследованной нами антиферромагнитной 2D-модели Поттса с $q = 3$; максимумы теплоемкости C и восприимчивости χ пропорциональны объему L^d . В слу-

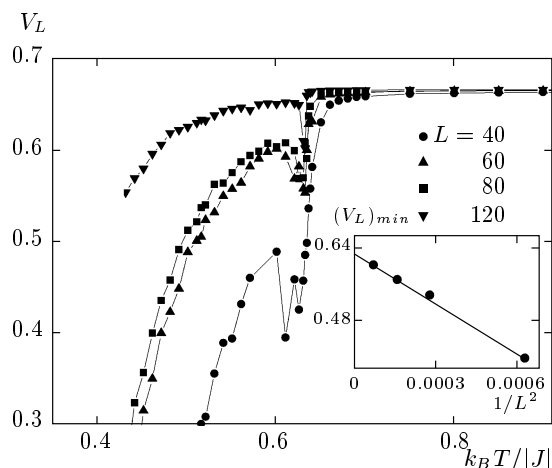


Рис. 4. Температурная зависимость кумулянтов Биндера $V_L(T)$ для антиферромагнитной 2D-модели Поттса с $q = 3$

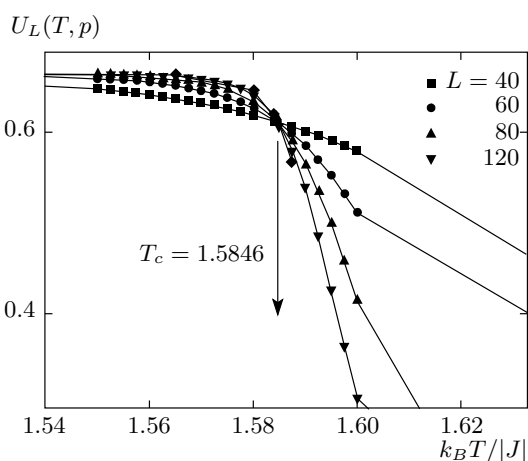


Рис. 6. Температурная зависимость кумулянтов Биндера $U_L(T)$ для ферромагнитной 2D-модели Поттса с $q = 3$

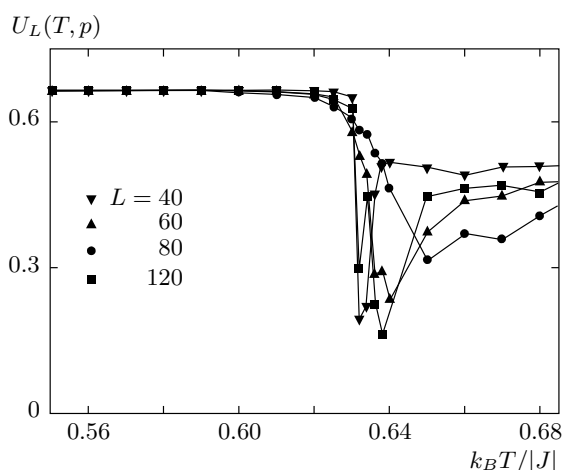


Рис. 5. Температурная зависимость кумулянтов Биндера $U_L(T)$ для антиферромагнитной 2D-модели Поттса с $q = 3$

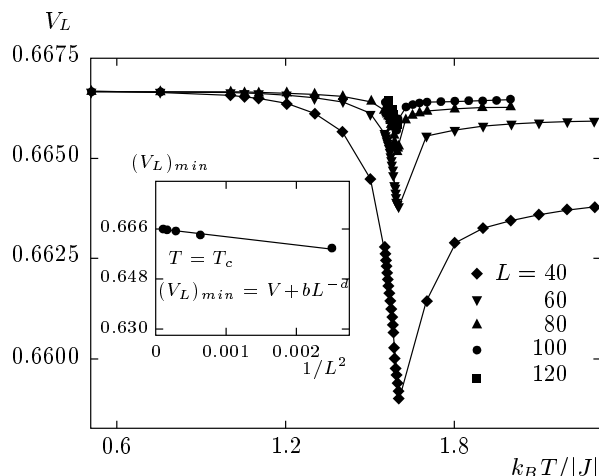


Рис. 7. Температурная зависимость кумулянтов Биндера $V_L(T)$ для ферромагнитной 2D-модели Поттса с $q = 3$

чае ФП второго рода кривые температурной зависимости кумулянтов Биндера $U_L(T)$ имеют четко выраженную точку пересечения. Характерные зависимости кумулянтов Биндера $U_L(T)$ для ферромагнитной 2D-модели Поттса от температуры для систем с разными линейными размерами L приведены на рис. 6. Как видно на рис. 6, в критической области наблюдается четко выраженная точка пересечения, что и свидетельствует о ФП второго рода. Кроме того, этот рисунок демонстрирует, насколько точно можно определить критическую температуру T_c . На рис. 7 представлены температурные зависимости $V_L(T)$ для ферромагнитной 2D-модели Поттса. Как видно на вставке рис. 7, в критической обла-

сти $V_L(T)$ не стремится к нетривиальному значению $V_L^*(T)$, а стремится к $2/3$, что также характерно для ФП второго рода.

Кроме кумулянтов Биндера, для анализа типа ФП нами использовался и гистограммный анализ данных метода МК [26]. Этот метод анализа данных МК считается весьма эффективным способом определения рода ФП. Гистограммный метод основан на случайном блуждании в энергетическом пространстве. Этот метод позволяет получить надежные оценки распределения плотности состояний энергии $g(U)$. Вероятность перехода из одного состояния в другое определяется на основе следующего выражения:

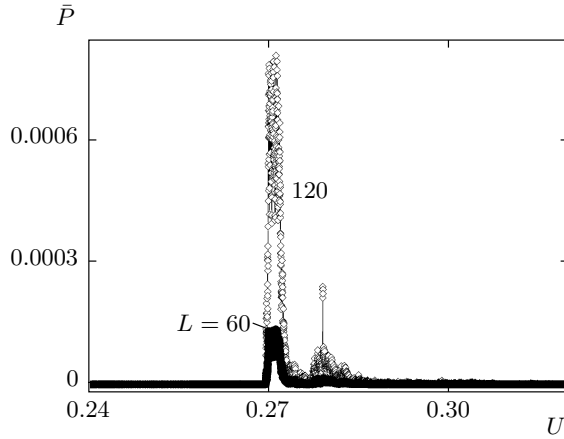


Рис. 8. Гистограмма распределения энергии для антиферромагнитной 2D-модели Поттса на треугольной решетке при $T = 0.6302$ и $L = 120$

$$P(U \rightarrow U') = \min [g(U)/g(U'), 1], \quad (9)$$

где U и U' — энергии до и после переворота спина.

Гистограммный анализ данных, проведенный нами для антиферромагнитной 2D-модели Поттса на треугольной решетке, также свидетельствует о наличии ФП первого рода. Это продемонстрировано на рис. 8. На этом рисунке представлена гистограмма распределения энергии вблизи критической точки T_c для систем с линейными размерами $L = 60, 120$. Как видно на рисунке, на зависимости вероятности P от энергии системы U для системы $L = 120$ наблюдаются два хорошо выраженных максимума, в то время как для системы с линейным размером $L = 60$ наблюдается лишь один максимум. Следовательно, для исследования «истинного» характера ФП в данной модели необходимо изучать системы, линейные размеры L которых не меньше 120. Наличие бимодальности в распределении энергии является важным признаком ФП первого рода. Соответствующий гистограммный анализ данных был проведен и для ферромагнитной 2D-модели Поттса на треугольной решетке, но бимодальность в гистограмме распределения энергии для этой модели обнаружить не удалось.

Таким образом, наши данные свидетельствуют о том, что в двумерной ферромагнитной модели Поттса с $q = 3$ происходят ФП второго рода. В то же время, в антиферромагнитной модели Поттса мы наблюдаем ФП первого рода, но для этого размеры L изучаемых систем должны быть не менее, чем $L = 120$.

Для ферромагнитной 2D-модели Поттса с $q = 3$,

в которой наблюдаются ФП второго рода, на основе теории конечно-размерного скейлинга (КРС) мы рассчитали статические критические индексы (КИ) теплоемкости α , восприимчивости γ и намагниченности β . Согласно этой теории, свободная энергия для бесконечно большой системы при температуре T , близкой к критической температуре T_c бесконечно большой системы, может быть представлена в виде [14, 27]

$$F(T, L) \propto L^{-d} F_0(tL^{1/\nu}), \quad (10)$$

где $t = |T - T_c|/T_c$, $T_c = T_c(L = \infty)$ и ν — статический критический индекс радиуса корреляции бесконечной системы ($L = \infty$).

Уравнение (10) ведет к аналогичным уравнениям для теплоемкости, восприимчивости и спонтанной намагниченности, приходящихся на один спин:

$$C(T, L) \propto L^{\alpha/\nu} C_0(tL^{1/\nu}), \quad (11)$$

$$\chi(T, L) \propto L^{\gamma/\nu} \chi_0(tL^{1/\nu}), \quad (12)$$

$$m(T, L) \propto L^{-\beta/\nu} m_0(tL^{1/\nu}), \quad (13)$$

где α, γ, β — статические критические индексы для системы с $L = \infty$, связанные соотношением гиперскейлинга $2 - \alpha = d\nu = 2\beta + \gamma$ [28].

Кроме того, в настоящее время на основе теории конечно-размерного скейлинга предложен целый ряд способов определения критического индекса радиуса корреляции ν [14, 29]. В соответствии с этой теорией в точке фазового перехода выполняется соотношение

$$V_n = L^{1/\nu} g_{V_n}, \quad (14)$$

где g_{V_n} — некоторая постоянная, а в качестве V_n могут выступать

$$V_i = \frac{\langle m^i E \rangle}{\langle m^i \rangle} - \langle E \rangle \quad (i = 1, 2, 3), \quad (15)$$

$$V_3 = \frac{dU_L}{d\beta} = \frac{1}{3\langle m^2 \rangle^2} \times \left[\langle m^4 \rangle \langle E \rangle - 2 \frac{\langle m^4 \rangle \langle m^2 E \rangle}{\langle m^2 \rangle^2} + \langle m^4 E \rangle \right], \quad (16)$$

где $\beta = 1/T$.

Из соотношений (12), (13) следует, что в системе с размерами $L \times L$ при $T = T_c$ и достаточно больших L восприимчивость и намагниченность удовлетворяют следующим аналитическим выражениям:

$$\chi \propto L^{\gamma/\nu}, \quad (17)$$

$$m \propto L^{-\beta/\nu}. \quad (18)$$

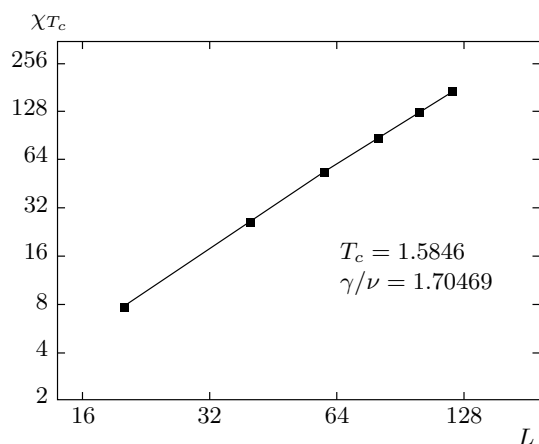


Рис. 9. Зависимость восприимчивости χ_{T_c} от линейных размеров системы L для ферромагнитной $2D$ -модели Поттса с $q = 3$ при $T = T_c$

Эти соотношения использовались нами для определения величин γ и β . Аналогичное выражение для теплоемкости не описывает наблюдаемые на практике результаты, что было продемонстрировано в работе [30]. Для аппроксимации температурной зависимости теплоемкости от L используются, как правило, другие выражения, например [21],

$$C_{max}(L) = C_{max}(L = \infty) - AL^{\alpha/\nu}, \quad (19)$$

где A — некоторый коэффициент.

Для расчета КИ α , β , γ и ν строились зависимости C , m , χ и V_n от L . Анализ данных, выполненный с использованием нелинейного метода наименьших квадратов, позволил определить значения α/ν , β/ν , γ/ν и $1/\nu$. Затем с использованием значений ν , полученных в рамках данного исследования, определялись индексы α , β и γ .

На рис. 9 в двойном логарифмическом масштабе представлена характерная зависимость восприимчивости от линейных размеров решетки L для ферромагнитной $2D$ -модели Поттса на треугольной решетке. Обратим внимание на то, что данные, полученные для восприимчивости, не отклоняются от прямой даже при малых значениях L . Очевидно, что использованное нами для усреднения количество различных начальных конфигураций и размеры $L \geq 20$ изучаемых систем позволяют достичь асимптотического критического режима. Очень важным моментом является и то, что мы вычисляли индекс ν непосредственно из результатов численного эксперимента в рамках данного исследования, тогда как во многих других подобных работах этот индекс определялся из различных скейлинговых соотношений.

Отметим, что для ферромагнитной модели Поттса с числом состояний спина q критические индексы точно известны. В частности, при $q = 3$ модель Поттса и модель жестких шестиугольников имеют одинаковые критические индексы $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/9$, $\gamma = 13/9$, $\nu = 5/6$ [3, 4, 31–33]. Значения КИ, полученные при соответствующем ν , и их сравнение с известными точными значениями приведены в таблице. В первой строке приведены результаты, полученные на основе применения теории КРС. Вторая строка — точные числовые значения критических параметров, полученные в работах Бекстера [4, 31–33]. Как следует из таблицы, полученные значения КИ для намагниченности β , восприимчивости γ и индекса радиуса корреляции ν достаточно хорошо, в пределах погрешности, совпадают с точными значениями для модели Поттса с $q = 3$. Различие критического индекса теплоемкости α в первой и во второй строках, по-видимому, связано со сложностью аппроксимации температурной зависимости теплоемкости, проводимой нами для решеток с конечными линейными размерами L на основе выражения (15). Критическая температура $T_c = 1.5846$, определенная в данной работе, практически совпадает с точным значением температуры, полученной Бекстером [4] для вершинных моделей на треугольной решетке.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе с соблюдением единой методики исследованы фазовые переходы в ферро- и антиферромагнитной двумерных моделях Поттса с числом состояний спина $q = 3$ на треугольной решетке. Данные, полученные в результате наших исследований, свидетельствуют о следующем.

1. В ферромагнитной $2D$ -модели Поттса с $q = 3$ на треугольной решетке происходят фазовые переходы второго рода. Для этой модели рассчитан набор основных статических критических индексов и показано, что они находятся в хорошем согласии с точными теоретическими значениями, полученными для двумерной модели Поттса с $q = 3$;

2. В антиферромагнитной $2D$ -модели Поттса с $q = 3$ на треугольной решетке для систем с линейными размерами $L > 120$ наблюдаются четко выраженные ФП первого рода. Для систем с $L < 120$ обнаружить ФП первого рода не удастся.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 10-02-00130-а, 12-02-96504_p_юг_а), в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной

Таблица. Критические индексы ферромагнитной 2D-модели Поттса с числом состояний спина $q = 3$ на треугольной решетке, определенные на основе теории конечно-размерного скейлинга

Критический параметр	$k_B T_c / J$	$1/\nu$	ν	α/ν	α	γ/ν	γ	β/ν	β
Наши данные	1.5846(2)	1.1723	0.853(20)	0.3519	0.300(10)	1.7047	1.454(10)	0.1245(1)	0.106(5)
Точная теория, [3, 31–33]	1.5849		0.833...		0.333...		1.444...		0.111...

России» на 2009–2013 гг. (госконтракты №№ П559, 02.270.11.03.97) и «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России» на 2007–2013 гг. (госконтракт № 16.552.11.7051).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Малеев, УФН **172**, 617 (2002).
2. F. A. Kassan-Ogly, V. E. Naish, and I. V. Sagaradze, *Phase Transitions* **49**, 89 (1994).
3. F. Y. Wu, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 235 (1982).
4. Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, Москва (1985).
5. W. Zhang and Y. Deng, *Phys. Rev. E* **78**, 031103 (2008).
6. А. Н. Ермилов, *Физика элементарных частиц и атомного ядра* **20**, 1379 (1989).
7. M. Loulidi, *Physica A* **287**, 177 (2000).
8. A. J. Guttmann and I. G. Enting, *J. Phys. A* **27**, 5801 (1994).
9. G. S. Grest, *J. Phys. A: Math. Gen.* **14**, L217 (1981).
10. J. Adler, A. Brand, W. Janke, and S. Shmulyian, *J. Phys. A: Math. Gen.* **28**, 5117 (1995).
11. M. Schick and R. Griffiths, *J. Phys. A: Math. Gen.* **10**, 2123 (1977).
12. U. Wolff, *Phys. Lett.* **62**, 361 (1989).
13. J.-S. Wang and R. H. Swendsen, *Physica A* **167**, 565 (1990).
14. D. Loison, *Phys. Lett. A* **257**, 83 (1999).
15. В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. Н. Вакилов, А. С. Криницин, *ЖЭТФ* **132**, 417 (2007).
16. А. К. Муртазаев, И. К. Камилов, А. Б. Бабаев, *ЖЭТФ* **126**, 1377 (2004).
17. А. К. Муртазаев, А. Б. Бабаев, Г. Я. Азнаурова, *ЖЭТФ* **136**, 516 (2009).
18. А. К. Муртазаев, А. Б. Бабаев, Г. Я. Азнаурова, *ФТТ* **50**, 703 (2008).
19. A. K. Murtazaev and A. B. Babaev, *J. Magn. Magn. Mater.* **321**, 2630 (2009).
20. А. К. Муртазаев, А. Б. Бабаев, Г. Я. Азнаурова, *ФНТ* **37**, 167 (2011).
21. P. Peczac, A. M. Ferrenberg, and D. P. Landau, *Phys. Rev. B* **43**, 6087 (1991).
22. Y. Saito, *J. Phys. A: Math. Gen.* **15**, 1885 (1982).
23. K. Binder, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 693 (1981).
24. K. Eichhorn and K. Binder, *J. Phys.: Condens. Matter* **8**, 5209 (1996).
25. D. Loison and K. D. Schotte, *Eur. Phys. J. B* **5**, 735 (1998).
26. F. Wang and D. P. Landau, *Phys. Rev. E* **64**, 056101 (2001).
27. M. E. Fisher and M. N. Barber, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1516 (1972).
28. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
29. A. Mailhot, M. L. Plumer, and A. Caille, *Phys. Rev. B* **50**, 6854 (1994).
30. А. К. Муртазаев, И. К. Камилов, М. А. Магомедов, *ЖЭТФ* **120**, 1535 (2001).
31. R. J. Baxter, *J. Phys. A* **13**, L61 (1980).
32. R. J. Baxter and S. K. Tsang, *J. Phys. A* **13**, 1023 (1980).
33. R. J. Baxter and P. A. Pearce, *J. Phys. A* **15**, 897 (1982).