

ДУАЛЬНЫЕ СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ В АТОМНО-ФОТОННОМ КЛАСТЕРЕ И ИХ ПРОЯВЛЕНИЯ

A. И. Трубилко*

*Государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 20 июня 2011 г.

С помощью кинетического уравнения релаксации одиночного двухуровневого атома и высокодобротной резонаторной моды в термостате, обладающем квантовыми корреляциями (перепутанном термостате), исследуются сжатые состояния коллективной системы. Для анализа введены два вида коллективных операторов, один из которых основан на бозонных коммутационных соотношениях, а другой — на коммутационных соотношениях алгебры, полученной полиномиальной деформацией алгебры углового момента. На основе этих соотношений построены соотношения для наблюдаемых, которые идентифицируют сжатые состояния в рассматриваемой системе. Показано, что при некоторых условиях коллективная система обнаруживает дуальное сжатие как в рамках соотношений для бозонных операторов, так и для операторов, построенных из алгебры углового момента. Продемонстрировано проявление такого сжатия при проекционном измерении атома и для протокола обмена перепутыванием. В последнем случае при измерении двух изначально независимых атомных систем, в зависимости от проводимого измерения, две резонаторные моды коллапсируют в несера贝尔ное состояние, которое описывается либо с помощью соотношения несера贝尔ности на основе бозонных операторов, либо с помощью соотношения, основанного на операторах алгебры квазимомента коллективной системы из этих двух мод.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одиночные и двухсоставные системы вновь стали привлекательными объектами исследования. Интерес к ним носит фундаментальный характер, что связано с тем, что при описании таких систем необходимо прибегать к их полностью квантовомеханическому рассмотрению, а следовательно, появляется возможность проверки основных положений квантовой механики. Также этот интерес обусловлен и практическим применением подобных систем в квантовых технологиях. Действительно, в последнее десятилетие удается проводить эксперименты с отдельными атомами, локализованными в ловушке, квантовыми точками и другими искусственными образованиями. При этом оказывается возможным не только локализовать одиночный объект, но и проводить его контролируемое взаимодействие, например, с одной высокодобротной модой резонатора. Так, например, уже успешно экспериментально реализован одноатомный лазер [1], описание которого невозможно в рамках классических и полуклассиче-

ских подходов, и его излучение, как и динамика атома, имеет существенно квантовый характер [2]. Наблюдается и целый ряд квантовомеханических эффектов в спектроскопии одиночных объектов, среди которых выделим, например, эффект вакуумного расщепления Раби в спектре спонтанного излучения одного атома, помещенного в высокодобротный резонатор [3]. Такие одиночные объекты могут служить в качестве источников, необходимых для целей квантовых информационных технологий и квантовой криптографии. Двухсоставные системы, естественно, намного сложнее и богаче, а спектр их применения значительно более широкий, чем у одиночественных. Такие двухкомпонентные системы в особых квантовых перепутанных состояниях являются основным ресурсом протоколов квантовых коммуникаций, являясь основой кодирования, распределения и измерения информации. Посредством систем в таких состояниях удается проверять фундаментальные основы квантовой механики, например, неравенства Белла [4].

Для того чтобы судить о нахождении системы в квантовом состоянии, иными словами иден-

*E-mail: trubilko.andrey@gmail.com

тифицировать ее возможное неклассическое состояние, обычно необходимо проверить нарушение какого-либо неравенства. Так, например, сжатое состояние одной моды электромагнитного поля [5] может быть установлено по уменьшению дисперсии одной из квадратурных компонент по сравнению с ее значением для когерентного состояния. Когерентное состояние, являясь предельным случаем классического состояния, определяет границу между квантовыми и классическими состояниями системы. Для одномодового поля нарушение указанного неравенства фиксируется при наблюдении спектра шума фототока регистрируемого излучения. Для сжатых состояний при гетеродинном способе регистрации наблюдается подавление в низкочастотной области спектра ниже стандартного квантового предела, который определяется когерентным состоянием. Отметим, что для операторов одной моды поля характерны бозонные коммутационные соотношения, отвечающие алгебре Гейзенберга–Вейля. Также были исследованы и экспериментально получены сжатые состояния атомных ансамблей [6]. Такие системы описываются посредством алгебры операторов $\text{su}(2)$. А идентификация сжатого состояния атомной системы определяется по уменьшению дисперсии одной из наблюдавшихся компонент коллективного спина относительно уровня, заданного средним значением оператора коллективной инверсии. Такие системы могут использоваться в качестве квантовой памяти для хранения квантовой информации и последующего ее считывания [7]. Отметим, что для сжатых состояний систем разной природы сжатие одной из канонически сопряженных компонент приводит к увеличению дисперсии другой сопряженной компоненты, так что соотношения неопределенностей, естественно, не нарушаются.

В этой работе мы исследуем сжатые стационарные состояния коллективной системы, состоящей из одиночного двухуровневого атома и одной высокодобротной резонаторной моды электромагнитного поля, полученные в результате воздействия на них двухкомпонентного светового поля в перепутанном состоянии. Такой источник может быть получен на основе параметрических источников света, или параметрических генераторов [8]. Например, при смешении на полупрозрачной непоглощающей делительной пластинке двух световых полей, разные сопряженные квадратурные компоненты которых сжаты, получается нужное состояние поля, компоненты которого обладают квантовыми взаимными корреляциями [9]. Такие световые поля обнаруживают подавление дробовых шумов фоторегистрации сум-

марного импульса и разностной координаты (или наоборот), которые могут быть измерены одновременно, и, следовательно, такие световые поля перепутаны относительно этих непрерывных переменных. Если теперь предполагать, что спектральные ширины полей, определяемые полосой синхронизма параметрического источника, много больше характерной скорости затухания возбуждаемых ими систем в вакууме, то сам широкополосный источник для анализируемых подсистем может рассматриваться как термостат, обладающий квантовыми корреляциями, или перепутанный термостат. При таком взаимодействии можно полагать, что состояние источника не изменяется, а значит, его эволюция определяется только свободным развитием. Основным моментом в такой постановке задачи является получение кинетического управляющего уравнения для анализируемой подсистемы, в данном случае это одиночный атом и резонаторная мода. Впервые задача об эволюции одиночной системы в поле сжатого термостата, обладающего квантовыми корреляциями, была решена в работе [10]. В работе [11] получено уравнение релаксации двухуровневого атома в поле сжатого термостата, где наряду с известными слагаемыми появляются и новые, ответственные за распад атомной когерентности и определяемые оптической когерентностью исходного поля термостата, что в итоге и приводит к изменению скорости спонтанного распада атома. В работе [12] было получено и исследовано уравнение релаксации одиночного многоуровневого атома с учетом поляризационных степеней свободы как атома, так и сжатого поля термостата. В наших работах [13, 14] исследована кинетика систем различной физической природы при их взаимодействии с двухкомпонентным термостатом в перепутанных состояниях. Было продемонстрировано, что в основном уравнении, наряду с известными слагаемыми, связанными с наличием когерентности одной из компонент термостата, появляются дополнительные слагаемые, обусловленные взаимной оптической когерентностью между двумя его компонентами. Эти слагаемые дают в уравнение вклад того же порядка величины, что и известные. Их наличие и ответственно за перенос квантовых корреляций от термостата к исследуемой системе. Отметим, что исследованию переноса квантовых корреляций и квантового состояния в последнее время посвящено значительное количество работ, а сами эти явления используются для создания эффективных квантовых каналов кодирования, распространения и хранения информации. Так, в работе [15] на основе интегралов движения нами продемонстрирована оптическая схе-

ма, позволяющая сохранять состояние светового поля. Исследование переноса корреляций с внутренних степеней свободы квантового состояния атома в процессе его взаимодействия со стоячей волной резонатора на трансляционные степени свободы этого же атома проведено в работе [16]. В работе [17] обсуждается динамика переноса состояний одной моды электромагнитного поля в сугубо квантовых сжатом и фоковском состояниях в оптомеханической системе на механическую степень специальной мембраны. Возможность переноса квантовых корреляций двухкомпонентного светового поля в состоянии Эйнштейна–Подольского–Розена на механические степени свободы двух осцилляторов рассмотрена в работе [18]. Отметим, что возможность усиления интенсивности световых полей в таких состояниях с сохранением их взаимной квантовой корреляции была показана в наших работах [19].

Здесь, как уже отмечалось, мы исследуем стационарное состояние отдельного двухуровневого атома и резонаторной моды, находящихся в разных пространственных областях и изначально невзаимодействующих между собой непосредственно, при воздействии на них широкополосных световых полей с квантовой корреляцией. Перепутанное состояние последних, выступающих в роли термостата, и переносится на состояние анализируемой системы. При этом атом и резонаторная мода могут выступать как коллективная система или единый атомно-фотонный кластер. Описание таких систем с помощью полиномиальных алгебр, полученных путем деформации исходной алгебры углового момента $su(2)$ были рассмотрены в работе [20], где исследовано взаимодействие атомного ансамбля, локализованного в микрорезонаторе, в условиях комбинационного резонанса внешних электромагнитных полей и квантов резонаторной моды с оптически запрещенным атомным переходом. Понятие полиномиальной алгебры в квантовой оптике было введено в работах [21] и посредством концепции квазиспина [22] применено для введения понятия поляризационно-скалярного света [23], описания поляризационной квантовой томографии [24] и поляризационных преобразований многомодовых световых полей [25]. Полиномиальные алгебры применяются и для описания коллективных кластерных состояний [26]. В рассматриваемой нами ситуации коллективная система обладает дуальными свойствами как атома, так и высокодобротной световой моды и может быть так же дуально описана разными коллективными операторами, отвечающими двум разным коммутационным соотношениям. Наличие в системе одиноч-

ного двухуровневого атома дает возможность введения коллективных операторов, образующих обычную алгебру Гейзенберга–Вейля, с бозонными коммутационными соотношениями. С помощью полиномиальной алгебры третьего порядка, полученной посредством деформации алгебры углового момента, можно получить и образующие алгебры коллективных операторов атомно-фотонного кластера, одно из соотношений неопределенностей которой отвечает алгебре $su(2)$. На основе введенных операторов образующих этих двух алгебр для исследуемой коллективной системы удается построить когерентные обобщенные состояния, а посредством коммутационных соотношений — выявить условия, при которых в системе обнаруживаются дуальные сжатые состояния. Они фиксируются по уменьшению среднего от дисперсии одной из наблюдаемых относительно ее соответствующего значения для когерентного состояния. Проявление такого дуального сжатия наблюдается при измерении атомной подсистемы. Мы демонстрируем обнаружение сжатого по импульсу и координате состояния резонаторной моды в зависимости от проекционного измерения атома. Наиболее полно обсуждаемые сжатые состояния кластера будут проявляться в проекционных измерениях, отвечающих протоколу обмена перепутыванием (entanglement swapping) [27]. Действительно, если приготовлены два одинаковых атомно-фотонных кластера, каждый из которых обладает взаимными квантовыми корреляциями между атомом и модой, то проекционное измерение атомов в базисе Белла может приводить к квантовой корреляции оставшихся двух свободных полевых мод. Квантовая корреляция этих мод может быть выявлена или идентифицирована на основе критериев несепарабельности для двух световых полей. Мы показываем, что при определенном типе белловского измерения свободные резонаторные моды оказываются несепарабельными относительно критерия Дуана и Саймона [28], отвечающего описанию этих полей в рамках алгебры Гейзенберга–Вейля. При этом можно говорить, что сжатое состояние атомно-фотонного кластера, определяемое бозонными коллективными операторами, продуктирует при этом измерении несепарабельное состояние изначально независимых мод, также идентифицируемое по неравенству, выведенному на основе бозонных операторов. Вместе с тем, как известно, две бозонные моды на основе соотношений Швингера [29] могут быть описаны и посредством коллективного оператора квазиспина, компоненты которого отвечают коммутационным соотношениям алгебры углового момента. Критерий несепарабельно-

сти состояния двух световых мод, описываемых алгеброй $su(2)$, был введен Нха и Кимом [30]. Отметим, что исходный световой источник, являющийся термостатом, согласно этому критерию является сепарабельным. Мы демонстрируем появление несепарабельного состояния двух свободных мод, описываемых на основе рассматриваемого критерия, при проектировании атомной системы на состояние белловского базиса, которое отличается от состояния, используемого для создания несепарабельности согласно критерия Дуана и Саймона. Таким образом, при этом проекционном измерении сжатое состояние коллективной системы, описываемое алгеброй, полученной деформацией алгебры $su(2)$, преобразуется в несепарабельное состояние свободных полей, фиксируемое для операторов этой же алгебры.

Статья построена следующим образом. В следующем разделе мы приводим основное кинетическое уравнение, описывающее эволюцию двухуровневого атома и резонаторной моды в поле двухкомпонентного широкополосного перепутанного термостата. В разд. 3 вводятся коллективные операторы атомно-фотонного кластера, отвечающие бозонным коммутационным соотношениям и операторной алгебре третьего порядка. На их основе и посредством введения когерентных состояний системы показано появление дуальных сжатых состояний в анализируемой системе. Их проявление при проекционных измерениях атомной подсистемы рассмотрено в разд. 4.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим двухуровневый атом с частотой перехода ω_0 и высокодобротный одномодовый резонатор с собственной частотой ω_c , которые находятся в разных пространственных областях и непосредственно не взаимодействуют между собой. Пусть обе системы возбуждаются широкополосными световыми полями, огибающие которых обозначим соответственно $b_1(t)$ и $b_2(t)$. Такие световые поля могут являться, например, двумя пространственными широкополосными квазимодами параметрического источника с центральными частотами, равными собственным резонансным частотам атома и моды, они могут различаться и направлением распространения. Широкополосность световых полей возбуждения в данном случае означает, что их спектральная ширина считается много большей скорости спонтанного излучения атома в вакуум и скорости релаксации внутрирезонаторной полевой моды. Будем пренебре-

гать эффектами отдачи при поглощении и излучении атома, вырождением его уровней по проекциям углового момента и поляризационным состоянием световых полей. Кроме того, мы предполагаем, что возбуждающие системы световые поля могут быть связаны между собой или обладать коррелированностью, в том числе и квантовой.

Такая постановка задачи (при возбуждении одной из подсистем) является традиционной для задач квантовой оптики, где широкополосное поле возбуждения, например, в сжатом состоянии, является термостатом [10]. В этих условиях в управляющем уравнении для матрицы плотности подсистемы наряду с известными появляются новые слагаемые, порождаемые оптической когерентностью поля термостата, которая и описывает его исходное квантовое состояние. Случай возбуждения двух систем двухкомпонентным термостатом, обладающим взаимными квантовыми корреляциями или находящимся в перепутанном состоянии, рассмотрен в ряде наших работ [13, 14]. В общем случае в уравнении для эволюции подсистем также появляются новые слагаемые, порождаемые авто- и кросскорреляционными функциями исходных полей и отвечающие за передачу исходной квантовой корреляции полей термостата на анализируемые выделенные подсистемы.

Основная задача заключается в получении управляющего кинетического уравнения для матрицы плотности подсистем, в данном случае — атома и высокодобротной резонаторной моды. Она может быть решена несколькими путями, например, использованием техники стохастического интегрирования Ито. Будем считать выполнеными условия марковского приближения, что отвечает двум особенностям. Во-первых, следует считать световые поля источников заданными. Это означает, что развитие полей возбуждения в гейзенберговской картине определяется только их свободной эволюцией:

$$b_m(\omega, t) = b_m(\omega)(t_0) \exp(-i\omega(t - t_0)).$$

Иными словами, световые поля источников являются термостатами. Во-вторых, следует считать константы связи $\eta_m(\omega)$ широкополосных полей со своими подсистемами не зависящими от частоты ω [10], полагая $\eta_m(\omega) = \sqrt{\gamma_m/2\pi}$.

Взаимодействие между каждой из компонент источника и соответствующей ей подсистемой выберем в электродипольном приближении. Пусть резонатор возбуждается компонентой внешнего поля с огибающей $b_1(t)$, а сама высокодобротная внутрирезонаторная мода описывается операторами рождения a^\dagger

и уничтожения a фотонов. Тогда взаимодействие с этой подсистемой задано в виде

$$V_{fb_1} = -i\hbar \int d\omega \eta_1(\omega) (b_1(\omega, t)a^\dagger - \text{H.c.}), \quad (1)$$

где $b_1^\dagger(\omega, t)$, $b_1(\omega, t)$ — операторы рождения и уничтожения моды источника. Интегрирование здесь и далее проводится по всей полосе источника.

Двухуровневый атом опишем посредством известных операторов, отвечающих алгебре $\text{su}(2)$, со следующими коммутационными соотношениями:

$$[S^+; S^-] = S_z, \quad [S_z; S^\pm] = \pm 2S^\pm,$$

где $S^+ = |e\rangle\langle g|$, $S^- = |g\rangle\langle e|$ — операторы перехода между нижним $|g\rangle$ и верхним $|e\rangle$ состояниями, а $S_z = (|g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|)$ — оператор инверсии. Взаимодействие атома с полем $b_2(t)$ выберем в виде

$$V_{ab_2} = -i\hbar \int d\omega \eta_2(\omega) (S^+ b_2(\omega, t) - \text{H.c.}). \quad (2)$$

Полный гамильтониан всей системы, состоящей из источника, резонаторной моды и атома, имеет вид

$$H = H_b + H_{sys} + V_{fb_1} + V_{ab_2}. \quad (3)$$

Здесь

$$H_b = \hbar \sum_{m=1,2} \int d\omega \omega b_m^\dagger(\omega, t) b_m(\omega, t)$$

— свободный гамильтониан поля источника, $H_{sys} = H_f + H_a$, $H_f = \hbar\omega_c a^\dagger a$ и $H_a = (1/2)\hbar\omega_0 S_z$ — свободные гамильтонианы резонаторной моды и атома, слагаемые V_{fb_1} и V_{ab_2} определены согласно (1) и (2).

Теперь для любой наблюдаемой A , отвечающей за эволюцию атома и резонаторной моды, стандартным образом напишем квантовое ланжевеновское уравнение и отвечающее ему квантовое стохастическое уравнение Ито вида

$$\begin{aligned} dA = & -i\hbar^{-1}[A, H_{sys}]dt + \\ & + \sqrt{\gamma_1}([A, a^\dagger]dB_1^-(t) - [A, a]dB_1^\dagger(t)) + \\ & + \sqrt{\gamma_2}([A, S^+]dB_2^-(t) - [A, S^-]dB_2^\dagger(t)) + \mathcal{I} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Инкременты $dB_m^-(t)$ этого уравнения описывают квантовые винеровские процессы

$$B_m^-(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' b_m(t'),$$

а их коммутационные соотношения

$$[B_m^-(t, t_0); B_n^\dagger(t, t_0)] = (t - t_0), \quad n, m = 1, 2$$

отвечают условиям связанных коррелированных источников. Правила дифференцирования Ито для любых двух операторов

$$d(A_1 A_2) = d(A_1) A_2 + A_1 d(A_2) + d(A_1) d(A_2),$$

и соотношения

$$dB_m^i dB_n^j = \mathcal{K}_{mn}^{i,j} dt, \quad dB_m^i(t) dt = dt dB_m^i = dt dt = 0$$

позволяют определить выражение для \mathcal{I} в симметричном виде. Элементы корреляционной матрицы $\mathcal{K}_{mn}^{i,j}$ определяются средними второго порядка от полевых операторов огибающих:

$$b_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \exp(-i\omega(t - t_0)) b_m(\omega)(t_0),$$

которые в данном случае выбраны в виде

$$\langle b_m^i(t) b_n^j(t + \tau) \rangle = \mathcal{K}_{mn}^{i,j} \delta(\tau), \quad (5)$$

характерном для параметрических источников. Здесь и далее верхние индексы $i, j = \dagger, -$ отвечают операторам рождения или уничтожения. В правой части (5) временная δ -функция является крупномасштабной и определяется обратной шириной спектральной полосы синхронизма параметрического взаимодействия. Явный вид коэффициентов корреляционной матрицы зависит от выбранной модели. В случае смешивания излучений от двух независимых параметрических источников на полупрозрачной непоглощающей делительной пластинке, имеем полный набор отличных от нуля коэффициентов следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11}^{\dagger, -} &= \mathcal{K}_{22}^{\dagger, -} = \frac{1}{2} (\text{sh}^2 r_1 + \text{sh}^2 r_2), \\ \mathcal{K}_{11}^{-, \dagger} &= \mathcal{K}_{22}^{-, \dagger} = \frac{1}{2} (\text{ch}^2 r_1 + \text{ch}^2 r_2), \\ \mathcal{K}_{11}^{\dagger, \dagger} &= \mathcal{K}_{22}^{\dagger, \dagger} = \frac{1}{2} (\text{ch} r_1 \text{sh} r_1 \exp(-i\phi_1) + \\ &+ \text{ch} r_2 \text{sh} r_2 \exp(-i\phi_2)), \\ \mathcal{K}_{11}^{-, -} &= \mathcal{K}_{22}^{-, -} = \frac{1}{2} (\text{ch} r_1 \text{sh} r_1 \exp(i\phi_1) + \\ &+ \text{ch} r_2 \text{sh} r_2 \exp(i\phi_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} &= \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} r_1 \operatorname{sh} r_1 \exp(-i\phi_1) - \\
&\quad - \operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} r_2 \exp(-i\phi_2)), \\
\mathcal{K}_{12}^{-,-} &= \mathcal{K}_{21}^{-,-} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} r_1 \operatorname{sh} r_1 \exp(i\phi_1) - \\
&\quad - \operatorname{ch} r_2 \operatorname{sh} r_2 \exp(i\phi_2)), \\
\mathcal{K}_{12}^{-,\dagger} &= \mathcal{K}_{21}^{-,\dagger} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}^2 r_1 - \operatorname{ch}^2 r_2), \\
\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} &= \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}^2 r_1 - \operatorname{sh}^2 r_2).
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь r_m — параметры сжатия источников, а ϕ_m с точностью до аддитивной постоянной являются фазами классических полей накачек параметрических источников. Отметим, что такой источник оказывается перепутанным. Это можно установить посредством критерия Дуана и Саймона [28], согласно которому для любого сепарабельного источника с гауссовой статистикой должно выполняться неравенство

$$(\Delta Q_{\mp})^2 + (\Delta P_{\pm})^2 \geq 1. \tag{7}$$

Левая часть неравенства (7) представляет сумму дисперсий разностной (суммарной) координаты и суммарного (разностного) импульса двух световых мод. Канонические координата q_m и импульс p_m для одной моды определены соотношениями $b_m = q_m + ip_m$, $m = 1, 2$.

Поскольку в данном случае источник реализован на взаимодействиях, отвечающих билинейной форме гамильтонианов взаимодействия, он отвечает требованиям названного критерия. Если в (6) выбрать фазы классических волн накачек $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi$, то на выходе источника генерируется перепутанное состояние в отношении операторов разностной координаты Q_- и суммарного импульса P_+ . Если в (6) выбрать $\phi_1 = \pi$, $\phi_2 = 0$, то возникает перепутанное состояние в отношении операторов суммарной координаты Q_+ и разностного импульса P_- . Неравенство (7) нарушается тем сильнее, чем большими значениями обладают параметры сжатия r_1, r_2 .

Полагая все коэффициенты перед инкрементами неупреждающими функциями времени и усреднения в этих условиях уравнение (4) по состоянию заданного источника, для матрицы плотности ρ атома и моды в представлении взаимодействия следует релаксационное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -R\rho, \tag{8}$$

в котором релаксационный оператор R действует на матрицу плотности следующим образом:

$$\begin{aligned}
R\rho &= \frac{\gamma_1}{2}\{\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-}(aa^\dagger\rho - 2a^\dagger\rho a + \rho aa^\dagger) + \\
&\quad + \mathcal{K}_{11}^{-,\dagger}(a^\dagger a\rho - 2a\rho a^\dagger + \rho a^\dagger a) - \\
&\quad - \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger}(a a^\dagger\rho - 2a a^\dagger a + \rho a a^\dagger) - \\
&\quad - \mathcal{K}_{11}^{-,-}(a^\dagger a^\dagger\rho - 2a^\dagger \rho a^\dagger + \rho a^\dagger a^\dagger)\} + \\
&\quad + \frac{\gamma_2}{2}\{\mathcal{K}_{22}^{\dagger,-}(S^-S^+\rho - 2S^+\rho S^- + \rho S^-S^+) + \\
&\quad + \mathcal{K}_{22}^{-,\dagger}(S^+S^-\rho - 2S^-\rho S^+ + \rho S^+S^-) - \\
&\quad - \mathcal{K}_{22}^{\dagger,\dagger}(S^-S^-\rho - 2S^-\rho S^- + \rho S^-S^-) - \\
&\quad - \mathcal{K}_{22}^{-,-}(S^+S^+\rho - 2S^+\rho S^+ + \rho S^+S^+)\} - \\
&\quad - \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{2}\{\mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger}(aS^-\rho - 2S^-\rho a + \rho aS^-) + \\
&\quad + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger}(S^-a\rho - 2a\rho S^- + \rho S^-a)\} - \\
&\quad - \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{2}\{\mathcal{K}_{12}^{-,-}(a^\dagger S^+\rho - 2S^+\rho a^\dagger + \rho a^\dagger S^+) + \\
&\quad + \mathcal{K}_{21}^{-,-}(S^+a^\dagger\rho - 2a^\dagger\rho S^+ + \rho S^+a^\dagger)\} + \\
&\quad + \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{2}\{\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-}(aS^+\rho - 2S^+\rho a + \rho aS^+) + \\
&\quad + \mathcal{K}_{21}^{-,\dagger}(S^+a\rho - 2a\rho S^+ + \rho S^+a)\} + \\
&\quad + \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{2}\{\mathcal{K}_{12}^{-,\dagger}(a^\dagger S^-\rho - 2S^-\rho a^\dagger + \rho a^\dagger S^-) + \\
&\quad + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}(S^-a^\dagger\rho - 2a^\dagger\rho S^- + \rho S^-a^\dagger)\}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Вид релаксационного оператора определен всеми возможными комбинациями корреляционных функций второго порядка источника, поэтому носит довольно общий характер. Отметим важные свойства, следующие из полученного уравнения. Если $\gamma_1 = 0$, имеем известное уравнение Гардинера для релаксации двухуровневого атома в поле широкополосного сжатого термостата [11]. Если $\gamma_2 = 0$, имеем обычное уравнение, описывающее релаксацию одной моды в поле сжатого параметрического источника [31]. В выражении для R присутствуют слагаемые, которые пропорциональны корню из произведения констант релаксации, которые обусловлены межмодовыми корреляциями $\mathcal{K}_{mn}^{i,j}$, $m \neq n$, источника. Именно они и ответственны за перенос квантовых свойств от термостата к анализируемой системе. В данном случае эти слагаемые имеют тот же порядок величины, что и слагаемые, которые определяются средними $\mathcal{K}_{mm}^{i,j}$.

3. КОГЕРЕНТНЫЕ И СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМА И МОДЫ

Будем анализировать стационарные корреляции, возникающие в рассматриваемой системе, состоящей из атома и выделенной резонатором высокочастотной моды. Для этого воспользуемся уравнением (8) и определим матрицы плотности атома и моды в базисе состояний, соответствующих когерентным и сжатым состояниям.

добротной моды. Следует отметить, что даже такой простейший атомно-фотонный кластер, как коллективная система, является сложной. Это обусловлено тем фактом, что данная система состоит из двух компонент, одна из которых дискретная, а другая непрерывная. Кроме того, каждая компонента описывается разной алгеброй операторов ее образующих. Так, для описания моды применяется алгебра Гейзенберга–Вейля с бозонными коммутационными соотношениями, а для двухуровневого атома — алгебра $su(2)$. Такая двойственность приводит в условиях возбуждения системы внешним термостатом с квантовой корреляцией (термостатом в перепутанном состоянии) к дуальным сжатым состояниям коллективной системы. Мы продемонстрируем, что для всей системы в данном случае образуются два вида сжатых состояний. Первый вид обусловлен бозонными коммутационными соотношениями, характерными для алгебры Гейзенберга–Вейля, а второй — коммутационными соотношениями, отвечающими полиномиальной алгебре третьего порядка. Как известно, последняя образуется полиномиальной деформацией алгебры углового момента, посредством которой вводятся так называемые сжатые атомные состояния.

3.1. Сжатые состояния атомно-фотонного кластера на основе коммутационных соотношений алгебры Гейзенберга–Вейля

Коммутационные соотношения Гейзенберга–Вейля $[\mathcal{A}, \mathcal{A}^\dagger] = 1$, характерные для бозонных операторов, могут быть введены на основе коллективных операторов рождения \mathcal{A}^\dagger и уничтожения \mathcal{A} ,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\dagger &= a^\dagger(S^+ + iS^-), \\ \mathcal{A} &= a(S^- - iS^+),\end{aligned}\tag{10}$$

объединенной системы, состоящей из одного атома и резонаторной моды. В данном случае это оказывается возможным, поскольку мы имеем одиночный атом и норма коллективного оператора числа возбуждений $\mathcal{N} = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}$ определяется средним от оператора числа фотонов $\langle \mathcal{N} \rangle = \langle a^\dagger a \rangle \geq 0$, а следовательно, положительна. Указанные свойства позволяют рассматривать (10) как бозонные операторы и ввести соответствующие коллективные операторы канонической координаты $\hat{Q} = (1/2)(\mathcal{A}^\dagger + \mathcal{A})$ и импульса $\hat{P} = (1/2i)(\mathcal{A}^\dagger - \mathcal{A})$ с обычными коммутационными соотношениями и соотношением неопределенностей $\langle (\Delta \hat{Q})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle \geq 1/16$.

Для того чтобы ввести сжатые состояния, как хорошо известно, необходимо определить когерентные

состояния рассматриваемой системы. Последние являются предельным случаем классических состояний и определяют границу между классическими и квантовыми состояниями системы. В данном случае когерентные состояния коллективной системы можно построить на основе коллективных операторов, определенных согласно (10). Тогда когерентные состояния порождаются действием на вакуумное состояние нормально упорядоченного оператора сдвига

$$D_N(\alpha) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha \mathcal{A}^\dagger + \alpha^* \mathcal{A}\right).$$

Коллективный оператор уничтожения действует на вакуум $|vac\rangle$ стандартным образом: $\mathcal{A}|vac\rangle = 0$. В нашем случае вакуумное состояние можно выбрать разными способами. Пусть $|vac\rangle = |0\rangle_f \otimes |g\rangle_{at}$, где $|0\rangle_f$ — вакуум электромагнитного поля, а $|g\rangle_{at}$ — нижнее состояние атома. Тогда когерентное состояние будет иметь вид

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle &= D_N(\alpha)|vac\rangle = \frac{1}{2\sqrt{i}} \times \\ &\times \left[|\sqrt{i}\alpha\rangle_f (|e\rangle_{at} + |g\rangle_{at}) + \right. \\ &\left. + |-\sqrt{i}\alpha\rangle_f (|g\rangle_{at} - |e\rangle_{at}) \right].\end{aligned}\tag{11}$$

Обсудим теперь сжатые состояния системы. Чтобы состояние было сжатым, необходимо, чтобы дисперсия канонической координаты или импульса была бы меньше, чем для когерентного состояния, для которого $\langle (\Delta \hat{Q})^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle = 1/4$. Особо отметим, что здесь речь идет не о состоянии только моды или только атома, а о сжатом состоянии всего атомно-фотонного кластера.

Рассмотрим возникающее стационарное состояние атома и моды в поле перепутанного термостата. Дисперсии импульса и координаты определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\langle \hat{Q}^2 \rangle &= \frac{1}{4}(\langle aa^\dagger \rangle + \langle a^\dagger a \rangle - i(\langle a^2 \rangle - \langle a^{\dagger 2} \rangle)), \\ \langle \hat{P}^2 \rangle &= \frac{1}{4}(\langle aa^\dagger \rangle + \langle a^\dagger a \rangle + i(\langle a^2 \rangle - \langle a^{\dagger 2} \rangle)), \\ \langle \hat{Q} \rangle &= \frac{1}{2}(\langle a^\dagger S^+ \rangle + \langle a S^- \rangle + i(\langle a^\dagger S^- \rangle - \langle a S^+ \rangle)), \\ \langle \hat{P} \rangle &= \frac{1}{2i}(\langle a S^- \rangle - \langle a^\dagger S^- \rangle - i(\langle a S^+ \rangle - \langle a^\dagger S^- \rangle)),\end{aligned}$$

где все искомые стационарные авто- и кросскорреляционные средние для атома и моды можно получить с помощью управляющего уравнения (8). В рассматриваемом случае полевые средние равны

$$\begin{aligned}\langle a^\dagger a \rangle &= \mathcal{K}_{11}^{\dagger,-}, \quad \langle aa^\dagger \rangle = \mathcal{K}_{11}^{-,\dagger}, \\ \langle a^{\dagger 2} \rangle &= \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger}, \quad \langle a^2 \rangle = \mathcal{K}_{11}^{-,-}.\end{aligned}\tag{12}$$

Билинейные комбинации атомно-полевых средних, входящие в формулу (12), определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \langle S^+ a^\dagger \rangle &= D^{-1} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \langle S_z \rangle \times \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2} [\gamma_2 (\mathcal{K}_{22}^{-,\dagger} + \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-}) + \gamma_1] \times \right. \\ &\times \left. \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} + \gamma_2 \mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} \mathcal{K}_{22}^{\dagger,\dagger} \right\}, \\ \langle S^- a^\dagger \rangle &= D^{-1} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \langle S_z \rangle \times \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2} [\gamma_2 (\mathcal{K}_{22}^{-,\dagger} + \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-}) + \gamma_1] \times \right. \\ &\times \left. \mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \gamma_2 \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} \mathcal{K}_{22}^{-,-} \right\}, \\ \langle S^+ a \rangle &= D^{-1} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \langle S_z \rangle \times \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2} [\gamma_2 (\mathcal{K}_{22}^{-,\dagger} + \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-}) + \gamma_1] \times \right. \\ &\times \left. \mathcal{K}_{21}^{-,\dagger} + \gamma_2 \mathcal{K}_{12}^{-,-} \mathcal{K}_{22}^{\dagger,\dagger} \right\}, \\ \langle S^- a \rangle &= D^{-1} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \langle S_z \rangle \times \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2} [\gamma_2 (\mathcal{K}_{22}^{-,\dagger} + \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-}) + \gamma_1] \times \right. \\ &\times \left. \mathcal{K}_{12}^{-,-} + \gamma_2 \mathcal{K}_{21}^{-,\dagger} \mathcal{K}_{22}^{-,-} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$D = \frac{1}{4} (\gamma_1 + \Gamma_+) (\gamma_1 + \Gamma_-),$$

$$\Gamma_\pm = \gamma_2 \left\{ \mathcal{K}_{22}^{-,\dagger} + \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-} \mp 2 \sqrt{\mathcal{K}_{22}^{-,-} \mathcal{K}_{22}^{\dagger,\dagger}} \right\},$$

а стационарное значение атомной инверсии

$$\langle S_z \rangle = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 r_1 + \operatorname{sh}^2 r_2 + 1}. \quad (14)$$

Проанализируем ситуацию для оптимального случая равенства скоростей затухания атома и молды, $\gamma_1 = \gamma_2$. Будем считать состояние термостата перепутанным по отношению к разностной координате и суммарному импульсу исходных полей термостата и положим в (6) $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi$. Как видно на рис. 1, для некоторой области значений параметров сжатия исходного термостата r_1, r_2 наблюдается сжатое состояние коллективной координаты атомно-фотонного кластера. Обратим внимание на то, что для получения такого состояния необходимо наличие двух сжатых полей термостатов. Если хотя бы один из источников находится, например, в вакуумном состоянии, то дисперсия координаты $\langle \Delta \hat{Q}^2 \rangle \geq 0.25$. Это означает классическую корреляцию состояния анализируемой составной системы.

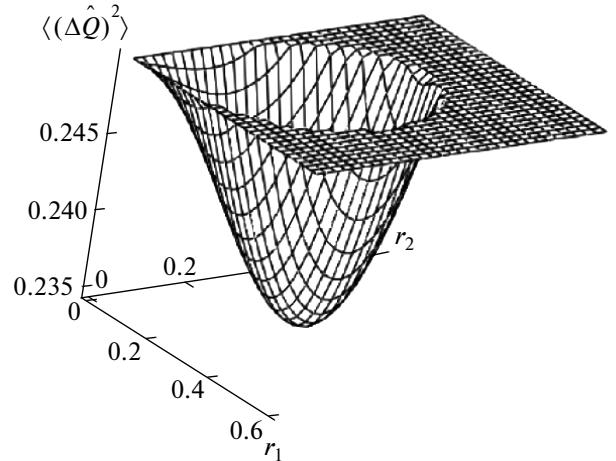


Рис. 1. Область сжатых по координате состояний атомно-фотонного кластера при его описании на основе коллективных бозонных операторов

Оптимальное сжатие $\langle \Delta \hat{Q}^2 \rangle = 0.235$ достигается в симметричном случае при $r_1 = r_2 = 0.25$. Дисперсия импульса при любых значениях параметров сжатия оказывается больше, чем в случае когерентного состояния: $\langle \Delta \hat{P}^2 \rangle \geq 0.25$. Сжатое по импульсу состояние может быть получено, если взять источник с состоянием, перепутанным по другой паре переменных Q_+ и P_- , полагая в (6) значения $\phi_1 = \pi$, $\phi_2 = 0$.

3.2. Сжатые состояния коллективной системы на основе коммутационных соотношений полиномиальной алгебры третьего порядка

Построим теперь для рассматриваемой системы сжатые состояния на основе полиномиальной алгебры, полученной деформацией алгебры углового момента. Рассмотрим коллективные операторы рождения $\mathcal{M}_+ = a^\dagger S^+$ и уничтожения $\mathcal{M}_- = a S^-$ возбуждения в системе из одного атома и одной резонаторной моды. Вместе с коллективным оператором числа возбуждений в системе,

$$\mathcal{M}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{S_z}{2} + a^\dagger a \right),$$

эти операторы являются образующими полиномиальной алгебры возбуждений третьего порядка со следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\pm] &= \pm \mathcal{M}_\pm, \\ [\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_-] &= p_n(\mathcal{M}_0) - p_n(\mathcal{M}_0 + 1). \end{aligned} \quad (15)$$

Оператор Казимира для этой алгебры,

$$\mathcal{K} = a^\dagger a - \frac{S_z}{2} + \frac{1}{2}, \quad (16)$$

совместно с оператором числа возбуждений \mathcal{M}_0 определяет базис Карлтана–Вейля с неотрицательными собственными значениями этих операторов. Структурный полином задан произведением образующих

$$p_n(\mathcal{M}_0) = \mathcal{M}_+ \mathcal{M}_- = c_0 \prod_{i=1}^{n=3} (\mathcal{M}_0 - q_i) \quad (17)$$

и имеет следующие операторозначные параметры:

$$\begin{aligned} c_0 &= -1, \quad q_1 = \frac{1}{2} (1 - \mathcal{K}), \quad q_2 = \frac{1}{2} \left(\mathcal{K} - \frac{3}{2} \right), \\ q_3 &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{K} + \frac{5}{2} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что единственность именно этой алгебры третьего порядка диктуется представлением второго коммутационного соотношения (15) в виде разности соответствующих полиномов.

На основе рассматриваемых операторов обычным образом введем эрмитовские операторы наблюдаемых

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \mathcal{M}_+ + \mathcal{M}_-, \\ i\mathcal{M}_y &= \mathcal{M}_+ - \mathcal{M}_-, \end{aligned} \quad (18)$$

которые удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y] = -\frac{2}{i}\mathcal{C}, \quad (19)$$

где оператор

$$\mathcal{C} \equiv a^\dagger a S_z + \frac{S_z}{2} - \frac{1}{2}.$$

Из соотношения (19) для дисперсий операторов наблюдаемых имеем

$$\langle (\Delta\mathcal{M}_x)^2 \rangle \langle (\Delta\mathcal{M}_y)^2 \rangle \geq \langle \mathcal{C} \rangle^2. \quad (20)$$

Соотношение (20) является основанием для введения сжатых состояний рассматриваемой системы на основе введенной полиномиальной алгебры. Для этого прежде всего необходимо ввести когерентные состояния, которые в данном случае определяются на основе обобщенных когерентных состояний [32]. Когерентное состояние $|\xi\rangle$ может быть получено действием на вакуумное состояние системы $|vac\rangle = |0\rangle_f \otimes |g\rangle_{at}$, где $|0\rangle_f$ — вакуумное состояние резонаторной моды, а $|g\rangle_{at}$ — нижнее состояние атома, обобщенного оператора сдвига:

$$|\xi\rangle = \exp(\xi\mathcal{M}_+ - \xi^*\mathcal{M}_-) |vac\rangle.$$

Используя представление оператора обобщенного сдвига в виде

$$\begin{aligned} \exp(\xi\mathcal{M}_+ - \xi^*\mathcal{M}_-) &= \cos(|\xi| \sqrt{a^\dagger a + S^- S^+}) + \\ &+ \frac{\xi\mathcal{M}_+ - \xi^*\mathcal{M}_-}{|\xi| \sqrt{a^\dagger a + S^- S^+}} \sin(|\xi| \sqrt{a^\dagger a + S^- S^+}), \end{aligned}$$

и тот факт, что оператор $a^\dagger a + S^- S^+$ коммутирует с операторами \mathcal{M}_\pm , S_z , $a^\dagger a S_z$, нетрудно получить выполнение равенства в (20) при одинаковых значениях дисперсий операторов наблюдаемых в когерентном состоянии:

$$\begin{aligned} \langle \xi | (\Delta\mathcal{M}_x)^2 | \xi \rangle &= \langle \xi | (\Delta\mathcal{M}_y)^2 | \xi \rangle = \\ &= \langle \xi | a^\dagger a S_z + \frac{S_z}{2} - \frac{1}{2} | \xi \rangle = 1. \end{aligned}$$

Именно это равенство определяет границу между классическими и неклассическими (квантовыми) состояниями рассматриваемой системы с точки зрения наблюдаемых на основе введенных операторов.

Сжатые или неклассические состояния в данном случае могут быть определены посредством неравенства

$$\langle (\Delta\mathcal{M}_\alpha)^2 \rangle < |\langle \mathcal{C} \rangle| \quad (21)$$

для любой из компонент $\alpha = x, y$. Средние от дисперсий операторов простым образом выражаются через стационарные атомно-полевые средние:

$$\langle (\Delta\mathcal{M}_\alpha)^2 \rangle = \langle a^\dagger a \rangle - \frac{1}{2}(\langle S_z \rangle - 1) \pm (\langle a^\dagger S^+ + a S^- \rangle)^2,$$

где верхний знак у последнего среднего в правой части равенства отвечает дисперсии оператора \mathcal{M}_x , а нижний — дисперсии оператора \mathcal{M}_y . Для рассматриваемого в задаче стационарного состояния необходимые средние определены соотношениями (12), (13) и (14). При вычислении среднего значения оператора \mathcal{C} необходимо найти среднее от произведения оператора числа фотонов в моде на оператор инверсии атома, которое согласно основному управляющему уравнению (8) в условиях равенства скоростей релаксации обеих систем $\gamma_1 = \gamma_2$ равно

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger a S_z \rangle &= (1 + \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{22}^{-,\dagger})^{-1} \times \\ &\times \left(2\mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} \langle a S^- \rangle - 2\mathcal{K}_{12}^{-,-} \langle a^\dagger S^+ \rangle + \right. \\ &\left. + (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}) \langle (a^\dagger S^+ + a S^-) \rangle \right). \quad (22) \end{aligned}$$

Исследуем поведение среднего значения дисперсии оператора \mathcal{M}_x , нормированного на модуль среднего значения оператора \mathcal{C} . Область сжатых состояний представлена на рис. 2 фигурой со значениями функции, меньшими единицы. Минимальное

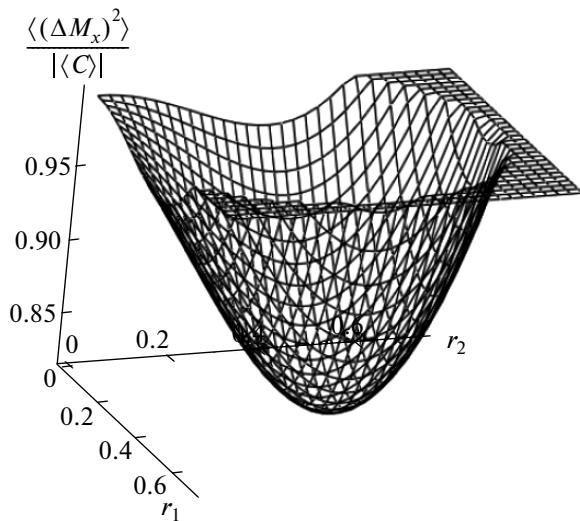


Рис. 2. Область сжатых состояний колективного оператора M_x . Единица отвечает когерентным состояниям атомно-фотонного кластера

сжатое состояние из всех возможных реализуется при возбуждении системы симметричным источником с равными значениями параметров сжатия $r_1 = r_2 = 0.37$, при этом сжатие дисперсии анализируемой квадратуры достигает значения 0.82 относительно уровня когерентного состояния, принятого здесь за единицу. Особенностью сжатия рассматриваемых операторов в отличие от сжатия, наблюдаемого для бозонных коллективных операторов системы, заключается в его возможном наблюдении и для несимметричного исходного источника. Действительно, как видно из рис. 2, и в случае возбуждения системы светом, полученным путем смешения на делителе сжатого света ($r \neq 0$) и вакуума ($r = 0$), также возможно сжатое состояние для оператора M_x . При этом средняя дисперсия этого оператора достигает минимальной величины, равной 0.971, при значении параметра $r = 0.33$. Обратим внимание, что в этих же условиях при описании системы на основе бозонных коллективных операторов \mathcal{A}^\dagger и \mathcal{A} сжатия не возникает. Это означает, что область сжатых состояний, полученных на основе соотношений для коллективных операторов, которая получена деформацией алгебры $su(2)$, включает в себя сжатые состояния, построенные для бозонных коллективных операторов.

Итак, мы показали, что рассматриваемая система в условиях возбуждения, обладающего квантовой корреляцией, приводит к двойственным или дуальным сжатым состояниям. При этом возможно получение квантового состояния, которое оказывается

сжатым как в смысле одного, так и другого набора образующих разных операторов, отвечающих алгебрам с разными коммутационными соотношениями, а следовательно, и разными свойствами. Вместе с тем, поскольку операторы наблюдаемых, как и образующие, обеих введенных алгебр не коммутируют между собой, с точки зрения эксперимента возможно наблюдение только одного типа сжатых состояний названной системы.

4. ПРОЯВЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ АТОМА И РЕЗОНАТОРНОЙ МОДЫ В ПРОЕКЦИОННОМ ИЗМЕРЕНИИ

Найденные квантовые корреляции атома и резонаторной моды, описываемые в рамках операторов разных алгебр, могут проявляться в различных физических явлениях. Так, в работе [13] мы показали, что эти стационарные корреляции, выступающие в качестве начальных условий, приводят к изменению контура линии спонтанного излучения одиночного атома в режиме сильного взаимодействия с резонаторной модой, а также к изменению разностной населенности атома в модели Джейнса–Каммингса по сравнению с обычными традиционными начальными условиями. В этом разделе мы рассмотрим проявление этих корреляций при измерении состояния атома. Продемонстрируем связь между фиксированием атома на нижнем уровне и редуцированием при этом состояния резонаторной моды в квантовое сжатое состояние. Кроме того, рассмотрим традиционный протокол обмена перепутыванием между двумя независимыми двухчастичными системами, обладающими квантовой корреляцией, где проявляется эффект, обусловленный дуальными сжатыми состояниями атомно-фотонного кластера. При этом измерению в базисе Белла вновь подвергаются только атомные системы. Оставшиеся две фотонные подсистемы, в зависимости от производимого измерения, переходят в несекреабельное состояние, отвечающее двум разным критериям несекреабельности. Один из них основан на бозонных операторах, а другой отвечает алгебре углового момента. Эти два эффекта могут быть использованы для приготовления системы, в данном случае фотонной, в необходимом квантовом состоянии.

4.1. Приготовление сжатого состояния резонаторной моды путем измерения атома

Стационарные квантовые корреляции между атомом и резонаторной модой, описываемые ста-

ционарной матрицей плотности всей системы ρ , являющейся решением основного управляющего уравнения (8), могут проявляться при измерении состояния атома. Под измерением здесь и далее будем понимать проекционное измерение атомной подсистемы. При этом состояние оставшейся подсистемы, в данном случае выделенной резонаторной моды, в некоторых условиях оказывается сжатым.

Рассмотрим проекционное измерение, соответствующее k -му исходу. Согласно проекционному постулату фон Неймана, состояние резонаторной моды вследствие измерения описывается редуцированной матрицей

$$\rho_f = \frac{1}{\text{Prob}(k)} \text{Sp}_{at}(\Pi_k^\dagger \rho \Pi_k), \quad (23)$$

где нижний индекс означает взятие следа по атомной подсистеме, а проекционный оператор $\Pi_k = |U_k\rangle\langle U_k|$, $|U_1\rangle = |g\rangle$, $|U_2\rangle = |e\rangle$, отвечает разложению по базису атомных состояний $\sum_{k=1,2} \Pi_k = 1$. Вероятность исхода определяется усреднением матрицы плотности всей системы по состояниям как атомов, так и поля:

$$\text{Prob}(k) = \text{Sp}_{at,f}(\Pi_k^\dagger \rho \Pi_k). \quad (24)$$

С помощью (23) могут быть определены все интересующие полевые наблюдаемые. Например, будем интересоваться средними дисперсиями канонических операторов координаты $q = (a^\dagger + a)/2$ и импульса $p = (a^\dagger - a)/2i$ резонаторной моды. Названные операторы отвечают традиционному коммутационному соотношению $[q, p] = 1/2i$, на основе которого определяются сжатые состояния полевой моды. Для последних характерно значение дисперсии одной из компонент, меньшее, чем соответствующее значение в случае когерентного состояния $\langle(\Delta q)^2\rangle_c = \langle(\Delta p)^2\rangle_c = 1/4$.

Пусть происходит фиксирование атома на нижнем уровне, тогда искомые дисперсии определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \langle(\Delta q)^2\rangle &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2 \text{Prob}(1)} [\langle a^{\dagger 2} \rangle + \langle a^2 \rangle + \right. \\ &\quad \left. + 2\langle a^\dagger a \rangle - \langle S_z a^{\dagger 2} \rangle - \langle S_z a^2 \rangle - 2\langle a^\dagger a S_z \rangle] \right), \\ \langle(\Delta p)^2\rangle &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2 \text{Prob}(1)} (\langle a^{\dagger 2} \rangle + \langle a^2 \rangle - \right. \\ &\quad \left. - 2\langle a^\dagger a \rangle - \langle S_z a^{\dagger 2} \rangle - \langle S_z a^2 \rangle + 2\langle a^\dagger a S_z \rangle) \right), \end{aligned} \quad (25)$$

правая часть которых представляет собой атомно-полевые средние по стационарному состоянию системы, а вероятность исхода измерения

$$\text{Prob}(1) = \frac{1}{2} (1 - \langle S_z \rangle). \quad (26)$$

Входящие в эти формулы средние определены посредством выражений (12), (22), а средние $\langle S_z a^{\dagger 2} \rangle$, $\langle S_z a^2 \rangle$ в условиях равенства скоростей релаксации систем равны

$$\begin{aligned} \langle S_z a^{\dagger 2} \rangle &= (1 + \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{22}^{-,\dagger})^{-1} \times \\ &\quad \times (2\mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger} \langle S_z \rangle - \langle a^{\dagger 2} \rangle + 4\mathcal{K}_{12}^{+,-} \langle a^\dagger S^+ \rangle), \\ \langle S_z a^2 \rangle &= (1 + \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{22}^{-,\dagger})^{-1} \times \\ &\quad \times (2\mathcal{K}_{11}^{-,-} \langle S_z \rangle - \langle a^2 \rangle + 2(\mathcal{K}_{21}^{+,-} + \mathcal{K}_{12}^{-,+}) \langle a S^+ \rangle). \end{aligned} \quad (27)$$

На рис. 3 приведены зависимости анализируемых величин от параметров сжатия исходных источников. Так, рис. 3а демонстрирует вероятность исхода измерения. Видно, что эта вероятность с ростом значения параметров сжатия уменьшается и достигает при $r_1 = r_2 = 0.8$ величины порядка $\text{Prob}(1) = 0.7$, если же изначально использовать несимметричный источник $r_1 = 0, r_2 = 0.8$, то величина $\text{Prob}(1) = 0.8$. Области формирования сжатых по координате и импульсу состояний резонаторной моды представлены соответственно на рис. 3б, в. Эти области отвечают значениям дисперсии соответствующих величин, меньшим значений 0.25, определяемых когерентным состоянием. Из последних двух зависимостей можно заключить, что для формирования сжатого состояния в рассмотренном случае необходимо иметь несимметричные исходные источники с разным значением параметров сжатия r_1 и r_2 . В заключение отметим, что фиксирование атома на верхнем уровне не приводит к сжатым состояниям резонаторной моды.

4.2. Обмен перепутыванием как проявление дуальности сжатых состояний коллективной системы

Рассмотрим еще одно явление, где будут проявляться квантовые корреляции между атомом и резонаторной модой — обмен перепутыванием. Именно в этом явлении, как оказывается, в полной мере выявляются дуальные особенности обсуждаемых сжатых состояний как коллективной системы. Как известно, само это явление заключается в появлении квантовых корреляций между двумя изначально независимыми двухчастичными системами, каждая из которых обладает квантовыми корреляциями. Такой обмен оказывается возможным в результате проекционного измерения над двумя независимыми подсистемами. Важным обстоятельством протокола является факт измерения в перепутанном, например, бел-

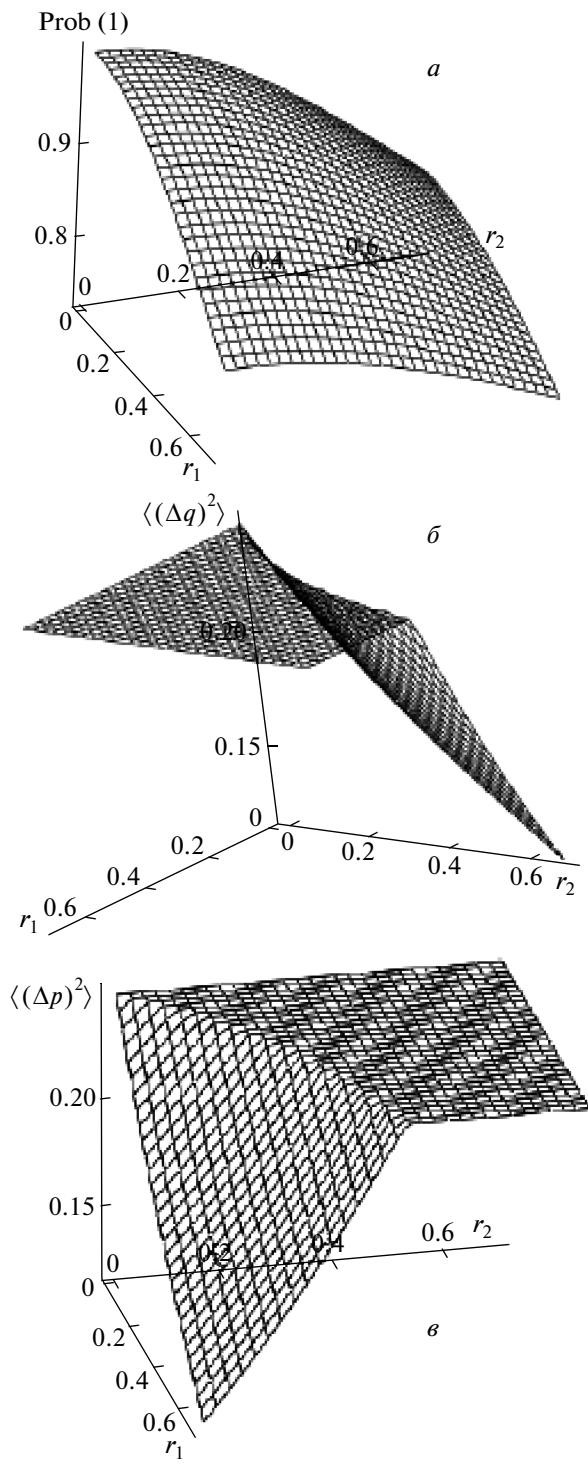


Рис. 3. Зависимости вероятности исхода проекционного измерения (a), областей сжатых по координате состояний свободной моды (б), областей сжатых по импульсу состояний свободной моды (в) от параметров сжатия исходных источников

ловском базисе. В результате измерения оставшиеся две подсистемы, конечно, с некоторой вероятностью редуцируются в несепарабельное состояние. Таким образом можно сформировать квантовую корреляцию между двумя изначально независимыми подсистемами.

Обсудим предлагаемый протокол применительно к нашей ситуации. Пусть имеются две идентичные одинаковым образом приготовленные системы, состоящие из одного атома и одной резонаторной моды. Каждая из этих систем описывается матрицами плотности $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$, являющимися решением стационарного уравнения (8). Тогда матрица плотности всей системы представляет собой произведение $\rho = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$. Рассмотрим проекционное измерение, проводимое над атомными системами в базисе Белла. Естественно, в данном случае возникают четыре возможных исхода. Вероятность k -го определена согласно (24), а состояние полевых мод в результате этого измерения описывается редуцированной матрицей плотности (23). Следует учитывать, что усреднение проводится по атомным переменным обоих атомов. В названных уравнениях проекционный оператор $\Pi_k = |W_k\rangle\langle W_k|$ является одним из четырех проекторов на известные двухчастичные состояния белловского базиса:

$$|W_{1,2}\rangle = |\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|gg\rangle \pm |ee\rangle),$$

$$|W_{3,4}\rangle = |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ge\rangle \pm |eg\rangle).$$

Результаты исследования показывают, что в двух случаях из четырех оставшиеся свободными резонаторные моды при определенных условиях обнаруживают несепарабельность. Последняя, в зависимости от типа проводимого измерения, определяется средними от бозонных и фермионных коллективных операторов двух мод.

Действительно, рассмотрим исход, определяемый проецированием на атомную волновую функцию $|\Phi^+\rangle$. В рассматриваемых стационарных условиях его вероятность зависит только от стационарной инверсии, которая имеет одинаковое значение для обоих атомов, и потому

$$\text{Prob}(1) = \frac{1}{4} \left(1 - \langle S_z \rangle^2\right). \quad (28)$$

При записи (28) мы учли тот факт, что в стационарном состоянии средние значения операторов

$$\langle S_1^\pm S_2^\mp \rangle = \langle S_1^\pm \rangle \langle S_2^\mp \rangle = 0$$

из-за того, что мы используем стационарное состояние независимых атомов. Средние дисперсии опера-

торов разностной координаты и суммарного импульса обеих резонаторных мод после измерения определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta Q_-)^2 \rangle &= \\ &= \frac{1}{4 \text{Prob}(1)} \left(\langle a^{\dagger 2} \rangle + 2\langle a^{\dagger}a \rangle + \langle a^2 \rangle + 1 + \right. \\ &+ [\langle S_z a^{\dagger 2} \rangle + 2\langle S_z a^{\dagger}a \rangle + \langle S_z a^2 \rangle + \langle S_z \rangle] \langle S_z \rangle - \\ &- 2\langle S^- a^{\dagger} \rangle [\langle S^- a^{\dagger} \rangle + 2\langle S^- a \rangle] - \\ &- 2\langle S^+ a^{\dagger} \rangle [\langle S^+ a^{\dagger} \rangle + 2\langle S^+ a \rangle] - \\ &\left. - 2\langle S^- a \rangle^2 - 2\langle S^+ a \rangle^2 \right), \quad (29) \\ \langle (\Delta P_+)^2 \rangle &= \\ &= -\frac{1}{4 \text{Prob}(1)} \left(\langle a^{\dagger 2} \rangle - 2\langle a^{\dagger}a \rangle + \langle a^2 \rangle - 1 + \right. \\ &+ [\langle S_z a^{\dagger 2} \rangle + 2\langle S_z a^{\dagger}a \rangle + \langle S_z a^2 \rangle - \langle S_z \rangle] \langle S_z \rangle + \\ &+ 2\langle S^- a^{\dagger} \rangle [\langle S^- a^{\dagger} \rangle - 2\langle S^- a \rangle] + \\ &+ 2\langle S^+ a^{\dagger} \rangle [\langle S^+ a^{\dagger} \rangle - 2\langle S^+ a \rangle] + \\ &\left. + 2\langle S^- a \rangle^2 + 2\langle S^+ a \rangle^2 \right). \end{aligned}$$

При записи (29) мы учитываем только отличные от нуля средние от операторов, являющиеся одинаковыми для двух систем атом–мода до измерения. Входящие в эти соотношения средние определены согласно (12)–(14), (22) и (27). Теперь проверим выполнение неравенства Дуана и Саймона (7). Результаты представлены на рис. 4а. Здесь показана зависимость суммы средних дисперсий разностной координаты и суммарного импульса двух резонаторных мод, полученных в результате исследуемого исхода проекционного измерения, от параметров сжатия исходных источников. Область несепарабельных состояний показана фигурой, лежащей ниже единицы. Видно, что такие несепарабельные состояния могут генерироваться только с помощью двух исходных источников сжатого света. Если хотя бы один из источников отсутствует, иными словами, находится в вакуумном состоянии, несепарабельности в рамках рассматриваемого критерия не возникает. Максимальное нарушение неравенства наблюдается для симметричного светового источника с параметрами сжатия $r_1 = r_2 = 0.26$, при этих условиях значение исследуемой функции равно 0.965. На рис. 4б представлена вероятность исхода измерения в зависимости от параметров сжатия исходных источников. Видно, что такая вероятность монотонно уменьшается с ростом значений этих величин. Для оставшихся трех других исходов измерений неравенство (7) не нарушается, а следовательно, в рамках представленного критерия генери-

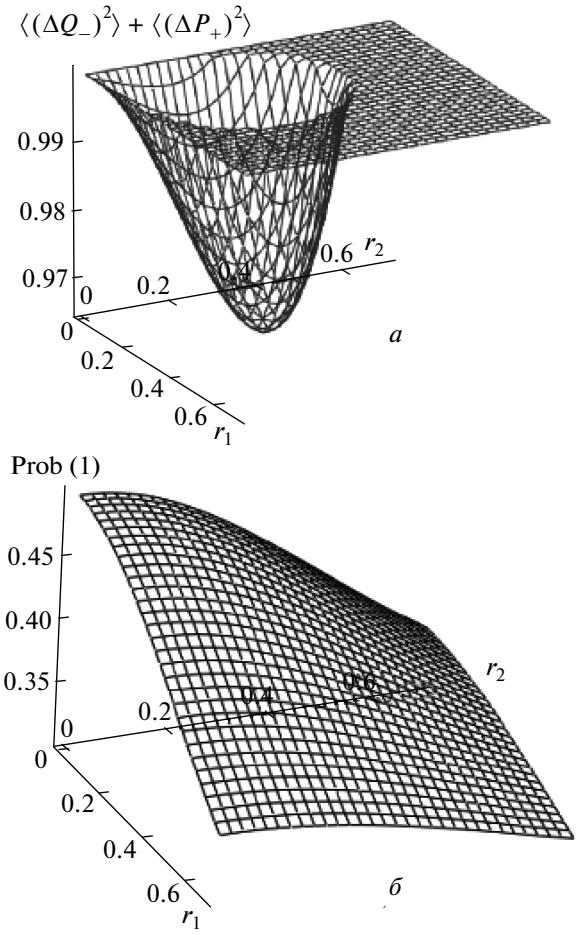


Рис. 4. Зависимости области несепарабельных состояний свободных мод, полученных в результате проекционного измерения атомов на белловское состояние $|\Phi^+\rangle$, на основе критерия Дуана и Саймона (а), а также вероятности исхода этого проекционного измерения (б) от параметров сжатия исходных источников

руются только сепарабельные состояния анализируемой системы. Подчеркнем, что исследуемые операторы разностной координаты и суммарного импульса двух мод отвечают бозонным коммутационным соотношениям, с помощью которых в работах [28] и было проведено построение неравенства, отделяющего областей сепарабельных и несепарабельных состояний.

Вместе с тем, как известно, двухмодовая система может быть описана и с помощью коллективных операторов, которые отвечают алгебре углового момента $\text{su}(2)$. Для этого на основе исходных операторов рождения и уничтожения для двух мод вводят операторы квазимомента

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger), \\ J_y &= \frac{1}{2i}(a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger), \\ J_z &= \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2), \end{aligned} \quad (30)$$

отвечающие коммутационным соотношениям алгебры $\text{su}(2)$ $[J_i, J_j] = i\epsilon_{i,j,k}J_k$ ($i, j, k = x, y, z$), где $\epsilon_{i,j,k}$ — известный антисимметричный тензор Леви-Чивитта. С помощью этих операторов также может быть выведено неравенство, разделяющее сепарабельные и несепарабельные состояния коллективной системы. Этот критерий был введен в работе Нха и Кима [30] посредством сопоставления соотношений неопределенности для алгебр $\text{su}(2)$ и $\text{su}(1,1)$. В этой работе показано, что для сепарабельных состояний должно выполняться следующее неравенство:

$$\langle(\Delta J_x)^2\rangle + \langle(\Delta J_y)^2\rangle \geq \frac{1}{2}\langle N_+\rangle, \quad (31)$$

левая часть которого является суммой средних от дисперсий операторов проекций квазимомента, а правая часть представляет среднее от оператора суммарного числа фотонов $N_+ = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2$ обеих мод. Заметим, что исходный световой источник, который является термостатом и описывается средними, заданными соотношениями (6), согласно этому критерию является сепарабельным.

Рассмотрим исход измерения, реализуемый при проецировании на атомное состояние $|\Psi^+\rangle$. Вероятность такого исхода определяется соотношением

$$\text{Prob}(3) = \frac{1}{4}(1 + \langle S_z \rangle^2).$$

В этом случае средние от исследуемых операторов следующим образом явно выражаются через атомно-полевые средние:

$$\begin{aligned} \langle(J_x)^2\rangle &= \frac{1}{8\text{Prob}(3)} \times \\ &\times \left(\langle a^{\dagger 2} \rangle \langle a^2 \rangle - \langle S_z a^{\dagger 2} \rangle \langle S_z a^2 \rangle + \right. \\ &+ \langle a^\dagger a \rangle [1 + \langle a^\dagger a \rangle] - \langle S_z a^\dagger a \rangle [\langle S_z a^\dagger a \rangle + \langle S_z \rangle] \Big), \\ \langle(J_y)^2\rangle &= \frac{1}{8\text{Prob}(3)} \times \\ &\times \left(-\langle a^{\dagger 2} \rangle \langle a^2 \rangle + \langle S_z a^{\dagger 2} \rangle \langle S_z a^2 \rangle + \right. \\ &+ \langle a^\dagger a \rangle [1 + \langle a^\dagger a \rangle] - \langle S_z a^\dagger a \rangle [\langle S_z a^\dagger a \rangle + \langle S_z \rangle] \Big), \\ \langle J_x \rangle &= \frac{\langle S^- a^\dagger \rangle \langle S^+ a \rangle + \langle S^+ a^\dagger \rangle \langle S^- a \rangle}{2\text{Prob}(3)}, \\ \langle J_y \rangle &= 0, \\ \langle N_+ \rangle &= \frac{\langle a^\dagger a \rangle - \langle S_z a^\dagger a \rangle \langle S_z \rangle}{4\text{Prob}(3)}. \end{aligned} \quad (32)$$

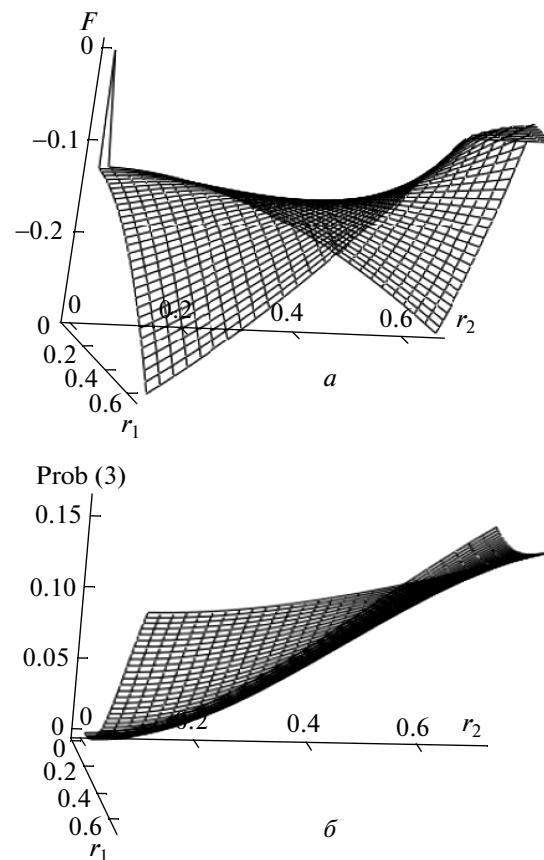


Рис. 5. Зависимости области нарушения критерия сепарабельности Нха и Кима (а) для состояний свободных мод, полученных в результате проекционного измерения атомов на белловское состояние $|\Psi^+\rangle$, а также вероятности исхода этого проекционного измерения (б) от параметров сжатия исходных источников

При записи этих выражений мы вновь оставили только отличные от нуля стационарные средние двух одинаковых систем, которые определены согласно (12)–(14), (22) и (27).

Область несепарабельных состояний двух мод, полученных в результате анализируемого проекционного измерения, представлена на рис. 5. Область отрицательных значений функции

$$F(r_1, r_2) = \langle(\Delta J_x)^2\rangle + \langle(\Delta J_y)^2\rangle - \frac{1}{2}\langle N_+\rangle$$

свидетельствует о нарушении неравенства (31). Обратим внимание, что для симметричного источника $r_1 = r_2$ область несепарабельных состояний ограничена значениями $0 < r \lesssim 0.56$, в то время как для несимметричного источника верхнего ограничения не наблюдается. Вместе с тем естественно, что значения r не могут быть сколь угодно большими,

поскольку рассмотрение проводится в рамках приближений, в которых не учитываются эффекты, связанные со штарковским сдвигом и пр. Именно поэтому все представленные графики ограничены значениями $r \approx 0.8$, указанные значения этих параметров сжатия также являются и предельно достигнутыми величинами в современных экспериментах. Особо отметим, что в рассматриваемом нами случае получено несепарабельное состояние нового светового источника. Обычно световые поля, демонстрирующие нарушение неравенства (31), получались детерминистически. Так, необходимое состояние можно получить смешиванием на полуупрозрачной делительной пластинке сжатого света и светового поля в фоковском состоянии [30]. При этом, однако, удается генерировать нужные состояния лишь с малым числом фотонов. В рассмотренном нами случае можно получить несепарабельное состояние и достаточно «яркого» света.

5. ВЫВОДЫ

Описание квантовых корреляций атомно-фотонного кластера, полученных в результате воздействия на него двухкомпонентного широкополосного поля, также обладающего квантовыми взаимными корреляциями, оказывается возможным посредством коллективных операторов образующих двух разных видов алгебр. В этом проявляется дуальная природа самого такого кластерного образования, состоящего из одиночного двухуровневого атома и выделенной резонаторной высокодобротной моды. Действительно, такие объекты сами по себе описываются дискретно и непрерывно, а также и посредством образующих двух разных алгебр. Одиночному двухуровневому атому отвечает фермионная алгебра $su(2)$, а резонаторной моде — бозонная алгебра Гейзенберга — Вейля. Для описания такого кластера, как коллективной системы, мы ввели два вида коллективных операторов. Образующие одного типа подчиняются бозонным коммутационным соотношениям, а другого типа отвечают полиномиальной алгебре третьего порядка, которая порождена деформацией исходной алгебры $su(2)$. Мы показываем, что квантовые корреляции такого кластера могут приводить к дуальным сжатым состояниям системы. Последние характеризуются как сжатием оператора обобщенной координаты коллективной системы, так и сжатием оператора одной из компонент образующих полиномиальной алгебры. Такое сжатие наблюдается как уменьшение среднего от дисперсии ана-

лизируемых операторов ниже уровня, соответствующего их значениям для коллективных когерентных состояний системы. Обнаруженные сжатые состояния будут проявляться при проекционных измерениях, например, атома. Так, показано, что фиксирование атома на нижнем уровне приводит к редукции состояния резонаторной моды и к сжатым по импульсу или координате состояниям. Особый случай возникает при измерении двух изначально независимых кластеров, каждый из которых обладает квантовыми корреляциями. Измерение двух атомов таких кластеров в белловском базисе приводит к колапсированию свободных мод в несепарабельное состояние, также обнаруживающее дуальные свойства. При проецировании на белловское состояние $|\Phi^+\rangle$ моды оказываются несепарабельными по отношению к критерию Дуана и Саймона, характерному для бозонных систем. При проекции атомов на другую функцию белловского базиса $|\Psi^+\rangle$ эти свободные моды оказываются несепарабельными на основании критерия Нха и Кима, отвечающего описанию системы из этих двух мод на основе операторов квазимомента с коммутационными соотношениями алгебры момента. Естественно, что в последнем случае анализируемые моды сепарабельны согласно критерию Дуана и Саймона.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, J. R. Buck, and H. J. Kimble, *Nature* **425**, 268 (2003).
2. A. D. Boozer, A. Boca, J. R. Buck, J. McKeever, and H. J. Kimble, *Phys. Rev. A* **70**, 023814 (2004); С. Я. Килин, Т. Б. Карлович, ЖЭТФ **122**, 195 (2002).
3. A. Boca, R. Miller, K. M. Birnbaum, A. D. Boozer, J. McKeever, and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 233603 (2004); H. J. Carmichael, R. J. Brecha, M. G. Raizen, and H. J. Kimble, *Phys. Rev. A* **40**, 5516 (1989).
4. J. H. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964); S. J. Freedman, and J. F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938 (1972); A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982); P. G. Kwiat, A. M. Steinberg, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. A* **47**, R2472 (1993).
5. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2000).
6. Г. Ф. Гром, А. М. Кузмич, Письма в ЖЭТФ **61**, 883 (1995); A. Kuzmich, N. P. Bigelow, and L. Mandel, *Europhys. Lett.* **43**, 481 (1998); A. Kuzmich,

- K. Molmer, and E. S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **79**, 4782 (1997).
7. A. Kuzmich, K. Molmer, and E. S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **62**, 033809 (2000).
8. Д. Н. Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, Наука, Москва (1980); T. Iskhakov, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, Phys. Rev. Lett. **102**, 183602 (2009).
9. P. van Loock and S. L. Braunstein, Phys. Rev. Lett. **84**, 3482 (1998).
10. C. W. Gardiner and M. J. Collett, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985).
11. C. W. Gardiner, Phys. Rev. Lett. **56**, 1917 (1986).
12. А. М. Башаров, ЖЭТФ **111**, 25 (1997); А. М. Башаров, Изв. АН, сер. физ. **62**, 438 (1998).
13. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ **89**, 571 (2009); В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **135**, 227 (2009).
14. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ, **92**, 689 (2010); В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **138**, 616 (2010).
15. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ **83**, 213 (2006).
16. С. В. Пранц, ЖЭТФ **136**, 872 (2009).
17. M. Wallquist, K. Hammerer, P. Zoller, C. Genes, M. Ludwig, F. Marquardt, P. Treutlein, J. Ye, and H. J. Kimble, Phys. Rev. A **81**, 023816 (2010); K. Hammerer, M. Wallquist, C. Genes, M. Ludwig, F. Marquardt, P. Treutlein, P. Zoller, J. Ye, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **103**, 063005 (2009).
18. J. Zhang, K. Peng, and S. L. Braunstein, Phys. Rev. A **68**, 013808 (2003).
19. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ **77**, 563 (2003); В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **132**, 355 (2007).
20. А. М. Башаров, ЖЭТФ **137**, 1090 (2010).
21. В. П. Карасев, ТМФ **95**, 3 (1993).
22. В. П. Карасев, Письма в ЖЭТФ **84**, 759 (2006).
23. В. П. Карасев, А. В. Масалов, Опт. и спектр. **74**, 928 (1993).
24. В. П. Карасев, ТМФ **145**, 344 (2005); В. П. Карасев, А. В. Масалов, ЖЭТФ **126**, 63 (2004).
25. В. П. Карасев, С. П. Кулик, ЖЭТФ **131**, 37 (2007).
26. V. P. Karassiov, A. A. Gusev, and S. I. Vinitsky, Phys. Lett. A **295**, 247 (2002).
27. J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **80**, 3891 (1998); N. Takei, H. Yonezawa, T. Aoki, and A. Furusawa, Phys. Rev. Lett. **94**, 220502 (2005).
28. L.-M. Duan, G. Gedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2002); R. Simon, Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2002).
29. J. Schwinger, *Quantum Theory of Angular Momentum*, ed. by E. L. Biedenharn and H. Van Dam, Acad. Press, New York (1965).
30. H. Nha and J. Kim, Phys. Rev. A **75**, 012326 (2007).
31. S. Stenholm, Opt. Comm. **58**, 177 (1986).
32. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применение*, Наука, Москва (1987).