ЖЭТФ, 2011, том 140, вып. 4 (10), стр. 712–721

К ВИЛЬСОНОВСКОЙ ТЕОРИИ КОНФАЙНМЕНТА

И. М. Суслов[*]

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 февраля 2011 г.

Недавние результаты для функции Гелл-Манна – Лоу $\beta(g)$ четырехмерной теории ϕ^4 показывают, что эта функция является знакопостоянной и имеет линейную асимптотику на бесконечности. Согласно классификации Боголюбова – Ширкова это означает возможность построения континуальной теории с конечным взаимодействием на больших расстояниях. Последний вывод находится в противоречии с решеточными результатами, указывающими на тривиальность теории ϕ^4. Это противоречие разрешается необычным характером перенормируемости теории ϕ^4: для построения континуальной перенормированной теории не требуется устранять решетку из затравочной теории. Такой характер перенормируемости не является случайным и находит объяснение в рамках вильсоновской многопараметрической ренормгруппы. Применение этих идей к КХД показывает, что вильсоновская теория конфайнмента не является чисто иллюстративной, но имеет прямое отношение к реальной ситуации. В результате проблему аналитического доказательства конфайнмента и массовой щели можно считать решенной на физическом уровне строгости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавние исследования режима сильной связи в теории ϕ^4 обнаружили необычный характер ее перенормируемости: континуальный предел в перенормированной теории не требует континуального предела в затравочной теории. Ниже показано, что такой характер перенормируемости не является случайным и находит объяснение в рамках вильсоновской многопараметрической ренормгруппы. Эти результаты позволяют окончательно разрешить вопрос о тривиальности или нетривиальности теории ϕ^4. Применение этих идей к вильсоновской теории конфайнмента показывает, что эта теория не является чисто иллюстративной, но имеет прямое отношение к реальной КХД. В результате проблему аналитического доказательства конфайнмента и массовой щели можно считать решенной на физическом уровне строгости.

2. ХАРАКТЕР ПЕРЕНОРМИРУЕМОСТИ В ТЕОРИИ ϕ^4

Согласно недавним работам [1–4] (см. также [5, 6]), функция Гелл-Манна – Лоу $\beta(g)$ четырехмерной теории ϕ^4 является знакопостоянной и имеет асимптотику $\beta(g) = 4g$ при $g \to \infty$. Согласно классификации Боголюбова – Ширкова [7] (см. обсуждение в работе [3]) это означает возможность построения континуальной теории с конечным взаимодействием на больших расстояниях. Последний вывод находится в противоречии с решеточными результатами, указывающими на тривиальность теории ϕ^4 (см. [8–12] и многочисленные ссылки в работе [13]).

Фактически, нужно различать два определения тривиальности. Согласно Вильсону [8], тривиальность означает, что интегрирование уравнения Гелл-Манна – Лоу

$$-\frac{dg}{d\ln L} = \beta(g) \tag{1}$$

в сторону больших расстояний L дает нулевой предел для эффективного заряда g (рис. 1*а*); это определение предполагает безмассовую теорию, так как иначе рост L останавливается на масштабе m^{-1}. В определении истинной тривиальности (рис. 1*б*) предполагается массивная теория. На масштабах $L \gtrsim m^{-1}$ (где уравнение Гелл-Манна – Лоу неприменимо) предполагается конечное взаимодействие g_∞; теория тривиальна, если интегрирование уравнения Гелл-Манна – Лоу в сторону малых L приводит к расходимости в конечной точке L_0 (так называе-

[*]E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

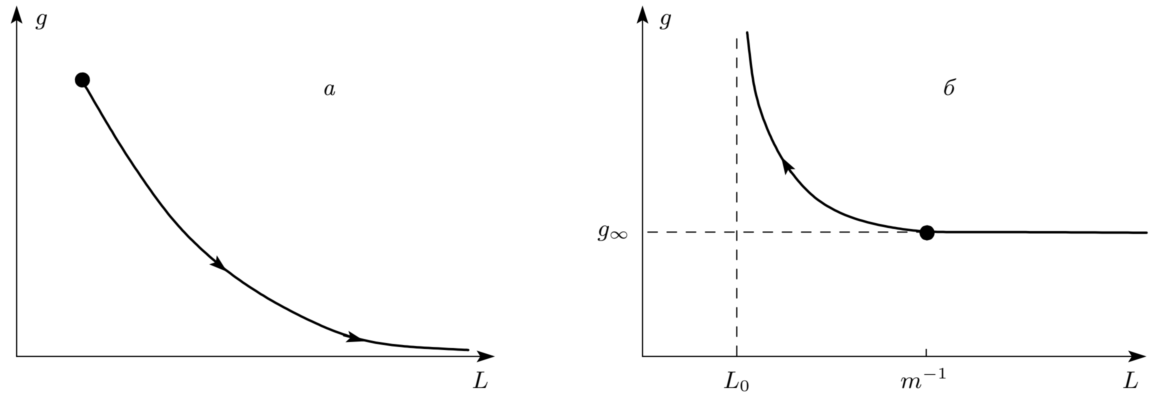

Рис. 1. Тривиальность по Вильсону (*а*) и истинная тривиальность (*б*)

мый полюс Ландау), что не позволяет реализовать предел $L \to 0$. Такая ситуация внутренне противоречива [7] и означает несправедливость исходного предположения о конечном взаимодействии на больших расстояниях; фактически $L_0 \to 0$ при $g_\infty \to 0$. Тривиальность по Вильсону соответствует неотрицательности β-функции и отсутствию у нее нуля, отличного от $g = 0$. Истинная тривиальность требует, кроме того, достаточно быстрого роста $\beta(g)$ на бесконечности, $\beta(g) \propto g^\alpha$ с $\alpha > 1$. Согласно работам [1–6] теория ϕ^4 и квантовая электродинамика тривиальны в вильсоновском смысле, но не обладают истинной тривиальностью.

Два определения тривиальности были безнадежно перепутаны в литературе [13], что обусловлено следующими причинами:

а) работы Боголюбова и Ширкова плохо известны на западе;

б) в рамках решеточного подхода легко проверить тривиальность по Вильсону, но трудно проверить истинную тривиальность[1)];

в) существуют аргументы, «доказывающие» эквивалентность двух определений.

Для иллюстрации последнего рассмотрим следующее рассуждение. Единственная альтернатива пертурбативному подходу состоит в том, чтобы все величины, относящиеся к перенормированной теории, выразить через функциональные интегралы. Последние зависят от затравочного заряда g_0, затравочной массы m_0 и параметра обрезания по импульсу Λ. С учетом размерности получим следующие соотношения для перенормированного заряда g, перенормированной массы m и наблюдаемых величин A_i

$$g = F_g\left(g_0, m_0/\Lambda\right), \quad m = \Lambda F_m\left(g_0, m_0/\Lambda\right), \tag{2}$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i\left(g_0, m_0/\Lambda\right), \tag{3}$$

где d_i — физическая размерность величины A_i. Выражая g_0 и m_0/Λ через g и m/Λ, получим

$$A_i = m^{d_i} \tilde{F}_i\left(g, m/\Lambda\right). \tag{4}$$

Чтобы устранить зависимость от Λ, мы должны перейти к пределу $m/\Lambda \to 0$. В решеточном подходе он соответствует пределу $\xi/a \to \infty$ (ξ — корреляционный радиус, a — постоянная решетки), т. е. точке фазового перехода. Последняя определяется нулем β-функции, что в четырехмерной теории ϕ^4 дает $g = 0$.

Нетрудно видеть, что в этом рассуждении мы считаем заданной тривиальность по Вильсону и «выводим» истинную тривиальность. Разумеется, это не может быть правильным, так как два определения заведомо неэквивалентны. Дефект рассуждения состоит в том, что мы предполагаем в формуле (4) ситуацию общего положения, для которой предел $m/\Lambda \to 0$ действительно необходим. Однако возможна особая ситуация, при которой зависимость от m/Λ в формуле (4) полностью отсутствует и предельного перехода не требуется. Возможность такой ситуации заполняет «зазор» между двумя определениями и делает их неэквивалентными.

[1)] Определение истинной тривиальности в решеточном подходе дано в математических работах [9, 10]. При устремлении постоянной решетки a к нулю затравочные параметры g_0 и m_0 должны рассматриваться как функции a. Теория нетривиальна, если существует такой выбор функций $g_0(a)$ и $m_0(a)$, который обеспечивает конечное взаимодействие на больших расстояниях; если таких функций не существует, то теория тривиальна. Легко понять, что проверить «существование» или «несуществование» при численных исследованиях довольно проблематично.

Такая особая ситуация действительно имеет место в теории ϕ^4 [3, 4]. Вернемся к уравнениям (3) и наложим на них условие $m \ll \Lambda$, соответствующее континуальному пределу перенормированной теории. Если это условие наложено в области сильной связи $g_0 \gg 1$, то теория ϕ^4 переходит в модель Изинга, содержащую один параметр κ, играющий роль обратной температуры [3, 4]; соотношения (3) принимают вид

$$g = F_g(\kappa), \quad m = \Lambda F_m(\kappa), \\ A_i = \Lambda^{d_i} F_i(\kappa). \tag{5}$$

Пока в этом нет ничего необычного: условие $m/\Lambda \to 0$ дает соотношение между g_0 и m_0/Λ, в результате чего все функции в соотношениях (3) зависят только от одного параметра, который мы обозначили как κ. Нетривиальный же момент состоит в том, что условие $m \ll \Lambda$ является достаточным, но не необходимым для перехода к модели Изинга: фактически такой переход возможен при более слабых условиях, которые совместимы с произвольным значением m/Λ [3, 4]. Исключая κ из формулы (5), получим уравнения

$$A_i = m^{d_i} F_i(g), \tag{6}$$

аналогичные (4), но не содержащие параметра m/Λ. В результате программа перенормировок полностью выполнена и никаких дополнительных предельных переходов не требуется. Это означает, что (а) мы можем сохранить решетку в затравочной теории (как удобный технический инструмент для представления функциональных интегралов) и (б) соотношение между m и Λ (или ξ и a) может быть произвольным, что обеспечивает возможность произвольного значения g.

Обычно решеточная теория содержит больше параметров, чем исходная теория поля. Например, дискретизация градиентного члена в d-мерной теории ϕ^4

$$\int d^d x\,[\nabla\phi(x)]^2 = -\int d^d x \phi(x)\nabla^2\phi(x) \to \\ \to \sum_{x,x'} J_{x-x'}\phi_x\phi_{x'} \tag{7}$$

соответствует замене $-\nabla^2 = \hat{p}^2$ на $\epsilon(\hat{p})$, где $\epsilon(p)$ — затравочный решеточный спектр

$$\epsilon(p) = \sum_x J_x e^{ip\cdot x} = p^2 + O(p^4), \tag{8}$$

тогда как $\hat{p}$ — оператор импульса, а $\exp\{i\hat{p}\cdot x\}$ — оператор сдвига на вектор x. Интегралы перекрытия J_x могут быть выбраны произвольно и ограничены только условием (8). Возникает интересный вопрос: если мы можем сохранить решетку в затравочной теории, то о какой решетке идет речь?

Решение может быть найдено из выражения (4). Поскольку зависимость от m/Λ отсутствует, можно положить $m/\Lambda \to 0$. Но в этом пределе (когда $\xi/a \to \infty$) имеются физические основания ожидать независимости функций F_i от способа обрезания. Если такая независимость имеет место для $m/\Lambda \to 0$, то она сохраняется для произвольных значений m/Λ ввиду независимости функций F_i от этого параметра. Фактически эта аргументация подразумевает перенормируемость теории (ввиду которой зависимость от Λ может быть исключена из результатов) и принадлежность решеточной модели к соответствующему классу универсальности (в рамках которого только и отсутствует зависимость от способа обрезания).

Решеточная теория часто рассматривается как разумное приближение для соответствующей полевой теории. В этом случае нужно принять условие $\xi \gg a$, согласно которому на характерном масштабе изменения поля должно быть много узлов решетки. Это условие можно ужесточить до $\xi/a \to \infty$ или либерализовать до $\xi \gtrsim a$. В первом случае, соответствующем точке фазового перехода, получим результат $g = 0$. Во втором случае получается ограничение $g \lesssim 1$ (при «естественной» нормировке заряда [4]), которое можно использовать для верхней оценки массы хиггсовского бозона [12, 14].

Фактически же решеточная теория вообще не должна рассматриваться как какое-то приближение к истинной. Истинная теория поля в принципе не содержит никакой решетки; решетка возникает лишь в затравочной теории, которая является вспомогательной конструкцией и в дальнейшем полностью устраняется. Затравочная теория не имеет физического смысла и никакие физические требования (типа $\xi \gg a$) к ней неуместны; если же отказаться от ограничения $\xi \gg a$, то перенормированный заряд может принимать любое значение[2)]. Реальное назначение затравочной теории состоит в том, чтобы

[2)] Как техническое требование условие $\xi/a \gg 1$ неактуально ввиду независимости величины (6) от ξ/a. Заметим, что высказанная концепция находится в полном соответствии с математическими определениями [9, 10], согласно которым континуальный предел $a \to 0$ берется при произвольно выбранных зависимостях $g_0(a)$ и $m_0(a)$ (см. сноску 1)); мы подчиняем их условиям $g_0 \to \infty$, $g_0^{-1/2} m_0^2 a^2 \to -\infty$, $g_0^{-1} m_0^2 a^2 = -\kappa$, при которых происходит переход к модели Изинга [3, 4].

представить соотношения между физическими величинами в параметрической форме (3). Такое представление не имеет глубокого смысла уже в силу его неоднозначности: его можно записать во многих формах, переходя от g_0 и m_0/Λ к любой другой паре переменных.

Таким образом, противоречие между континуальным и решеточным подходами разрешается особым характером перенормируемости теории ϕ^4, который можно резюмировать следующим образом.

Правильные соотношения (6) между физическими величинами могут быть получены для произвольного значения параметра a/ξ, зависимость от которого отсутствует. Для построения континуальной перенормированной теории не обязательно устранять решетку из затравочной теории.

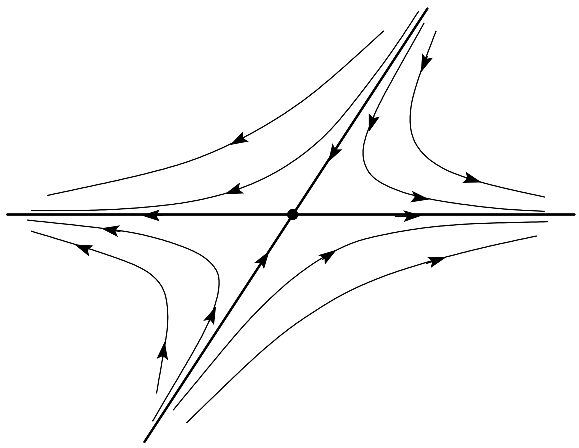

Рис. 2. Простейший вариант седловой точки

3. ОБЩАЯ СИТУАЦИЯ В ПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ТЕОРИЯХ

Возникает интересный вопрос: связан ли такой характер перенормируемости со специфическими свойствами теории ϕ^4 или он обусловлен какими-то общими закономерностями?

Как мы увидим, правильным является второй вариант. Это можно понять в рамках вильсоновской многопараметрической ренормгруппы [8]. Возьмем некоторый решеточный гамильтониан с параметрами p_i, которые будем рассматривать как функции масштаба расстояний l[3)]. Изменение этих параметров определяется уравнениями ренормгруппы, которые могут быть записаны в дифференциальной форме

$$-\frac{dp_i}{d\ln(l/a)} = F_i\{p_k\}. \qquad (9)$$

Эти уравнения могут быть линеаризованы вблизи неподвижной точки

$$p_i(l) = p_i^* \quad (\text{для всех } l) \qquad (10)$$

и исследованы стандартными методами линейной алгебры. Как правило, фазовые переходы описываются седловыми точками таких уравнений. Простейшая седловая точка в пространстве двух параметров (рис. 2) имеет прямолинейные траектории в двух главных направлениях (одном устойчивом, а другом неустойчивом), тогда как остальные траектории являются гиперболическими. Для обычных фазовых переходов имеется бесконечное число устойчивых направлений и (в простейшем случае) одно неустойчивое направление. Последнее связано с контролирующим параметром типа температуры, который определяет расстояние до критической точки.

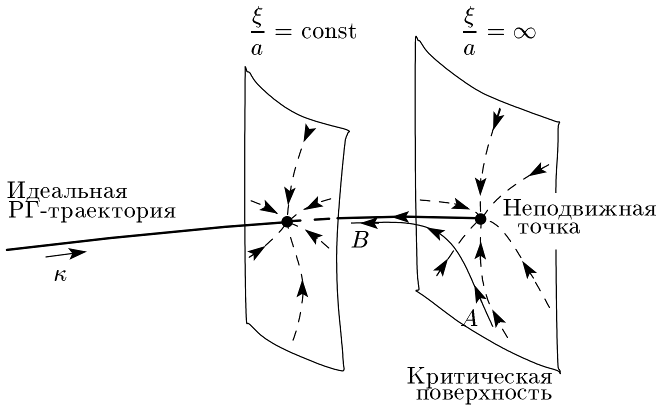

Рис. 3. Схематическое изображение вильсоновского многопараметрического пространства

Вместо увеличения l при фиксированном a можно уменьшать a при фиксированном l. Континуальный предел $a \to 0$ теории поля соответствует критической поверхности $\xi/a = \infty$ в многопараметрическом пространстве (рис. 3), которая является гео-

[3)] Физически это поясняется известным построением Каданова. При описании магнетиков вместо микроскопического гамильтониана для спинов, находящихся в узлах решетки, можно ввести макроскопические спиновые переменные, относящиеся к блокам размера l, и написать для них эффективный обменный гамильтониан. Поскольку блоки размера nl могут быть построены из n^d блоков размера l, существует процедура пересчета $p_i(l) \to p_i(nl)$, т. е. $p_i(nl) = H_i(n, \{p_k(l)\})$. Считая n близким к единице, можно получить уравнения (9).

метрическим местом точек фазового перехода. Все траектории, лежащие на критической поверхности, сходятся в неподвижной точке. Неустойчивую траекторию, исходящую из неподвижной точки, будем называть «идеальной РГ-траекторией»: вдоль нее имеет место точный однопараметрический скейлинг, который является пределом мечтаний во многих областях физики (см., например, [15]). Для ее строгого определения рассмотрим предел $a \to 0$ при фиксированном ξ/a; тогда все траектории, лежащие на поверхности $\xi/a = \text{const}$ (рис. 3), сходятся к одной точке (аналогично тому, как это имеет место на критической поверхности), а геометрическое место таких точек образует идеальную РГ-траекторию.

Пусть параметр κ измеряет расстояние вдоль идеальной РГ-траектории: тогда ξ/a (или Λ/m) является функцией κ. Аналогично, все безразмерные величины зависят только от κ, тогда как размерные величины измеряются в единицах Λ. В результате мы приходим к уравнениям

$$g = F_g(\kappa), \quad m = \Lambda F_m(\kappa), \quad A_i = \Lambda^{d_i} F_i(\kappa), \quad (11)$$

совпадающим с (5), которые дают соотношения (6), не содержащие m/Λ.

Поясним смысл проведенного построения. Если переходить к континуальному пределу $a \to 0$ произвольным образом, то система уйдет на бесконечность по неустойчивому направлению и окажется вдали от критической поверхности, которая является нашей целью. Поэтому континуальный предел предлагается брать в два этапа:

а) взять предел $a \to 0$ при $a/\xi = \text{const}$;

б) взять предел $a/\xi \to 0$.

При этом выясняется, что зависимость от a в перенормированной теории исчезает уже на первом шаге. Второй шаг становится необязательным и мы можем не переходить к континуальному пределу в затравочной теории. Используемая в пункте (а) константа const является одним из возможных определений параметра κ.

Эти идеи близки специалистам по КХД, и фактически изложенная картина частично заимствована из обзора R. Gupta [16]. Она обсуждается там в связи с проблемой оптимизации решеточного действия и автор приходит к выводу, что «simulations done along the ideal RG trajectory will reproduce the continuum physics without discretization errors». Это подразумевает отсутствие зависимости от a/ξ в соответствии с нашими результатами. Не был сделан только окончательный вывод о необязательности континуального предела в затравочной теории. Фактически такой вывод является достаточно «крамольным» с точки зрения современной практики решеточных вычислений, которые производятся в области больших ξ/a (обычно $\xi/a = 5 - 15$) с аккуратной экстраполяцией $a/\xi \to 0$.

Любая РГ-траектория является «линией постоянной физики», так как преобразование ренормгруппы (при его точной реализации) представляет собой просто мысленное построение, не влияющее на крупномасштабные свойства системы. Все траектории, лежащие на критической поверхности, сходятся в неподвижной точке, так что соответствующие им модели являются физически эквивалентными и соответствуют единственной континуальной теории поля. Идеальная РГ-траектория, исходящая из неподвижной точки, также дает эквивалентное представление для континуальной теории. Рассмотрим траекторию AB, которая начинается в точке, близкой к критической поверхности, и идет вдоль нее, а затем стремится к идеальной РГ-траектории (рис. 3). Вводя параметр $\tilde{\kappa}$ как расстояние вдоль траектории AB, получим параметрическое представление, аналогичное (11),

$$g = \tilde{F}_g(\tilde{\kappa}), \quad m = \Lambda \tilde{F}_m(\tilde{\kappa}), \quad A_i = \Lambda^{d_i} \tilde{F}_i(\tilde{\kappa}), \quad (12)$$

приводящее к соотношениям типа (6), не содержащим параметра ξ/a. Если выбрать ξ/a большим или малым, то это соответствует «концам» траектории AB, которые сколь угодно мало отклоняются от критической поверхности и идеальной траектории; а следовательно, полученные соотношения (6) соответствуют континуальной теории. Параметрическое же представление (12) оказывается существенно отличным от (11) и не сводится к замене переменных $\kappa = f(\tilde{\kappa})$. Действительно, сохраним определение параметра κ как расстояния вдоль идеальной РГ-траектории, приводя ему в соответствие точку траектории AB, отвечающую тому же значению $\xi/a = \text{const}$. Тогда второе соотношение (12) будет совпадать с (11), но остальные два соотношения останутся отличными:

$$g = \tilde{F}_g(\kappa), \quad m = \Lambda F_m(\kappa), \quad A_i = \Lambda^{d_i} \tilde{F}_i(\kappa). \quad (12')$$

Действительно, заряд g обычно относится к числу несущественных параметров, и на критической поверхности можно ввести соответствующую «ось зарядов»; неподвижной точке соответствует значение $g = 0$. Предел $a/\xi \to 0$ при движении вдоль идеальной траектории дает $g \to 0$; при движении же вдоль

AB можно получить в формуле (12′) любую функцию $g = \tilde{F}_g(\kappa)$, по-разному направляя траекторию AB относительно «оси зарядов». Таким образом, соотношение между g и κ становится бессодержательным и может быть отброшено.

В результате перенормированный и затравочный секторы теории становятся полностью развязанными в функциональном отношении. Перенормированный сектор определяется соотношениями (6), где g и m являются независимыми переменными; в затравочном же секторе остается лишь соотношение $a/\xi = m/\Lambda = F_m(\kappa)$, определяющее зависимость κ от a и не представляющее интереса для физики. С точки зрения перенормированной теории, параметр a/ξ становится совершенно свободным.

Совокупность всевозможных траекторий AB определяет класс универсальности изучаемой теории поля. Такие траектории заполняют все пространство, если критическую поверхность и идеальную траекторию считать неограниченными. Фактически же критическая поверхность заведомо ограничена по некоторым направлениям, так как в многомерном пространстве существует много таких поверхностей, соответствующих различным фазовым переходам. Легко понять, что для получения правильных соотношений (6) не обязательно строить идеальную РГ-траекторию — вместо нее можно использовать произвольную траекторию типа AB, принадлежащую к нужному классу универсальности.

Таким образом, мы приходим к следующему выводу. Перенормируемая теория рассмотренного типа допускает представление в виде решеточной теории, которая обеспечивает правильные соотношения между физическими величинами и содержит свободный параметр a/ξ, не входящий в эти соотношения.

4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ КОНФАЙНМЕНТА

Квантовая хромодинамика (КХД) с одним сортом кварков содержит два параметра — константу взаимодействия g и массу кварка m. Ее характер перенормируемости аналогичен таковому для теории ϕ^4 или квантовой электродинамики и выражается соотношениями (3), (4); фактически разд. 3 вводит аксиоматику для описания таких теорий. Мы ограничимся обсуждением теории без кварков, т. е. чистой теории Янга–Миллса; поскольку масса кварка не входит в качестве параметра, в теории вообще отсутствует естественная шкала масс. Чтобы избежать специфических трудностей, связанных с такой ситуацией, введем в рассмотрение «расширенную версию» теории Янга–Миллса, в которой роль затравочной массы кварка m_0 (точнее, отношения m_0/Λ) переходит к одному из вспомогательных параметров p, характеризующих решеточную теорию; в качестве перенормированной массы m примем массу легчайшего глюболла (связанного состояния нескольких глюонов), тогда как корреляционный радиус ξ определяется как m^{-1}. Таким образом, два затравочных параметра g_0 и p обеспечивают наблюдаемые значения двух перенормированных величин g и m (где g относится к масштабу m). Для того чтобы вернуться к стандартному варианту теории, нужно устранить введенную лишнюю степень свободы, зафиксировав одно соотношение между наблюдаемыми величинами; но это можно сделать на достаточно позднем этапе (см. конец разд. 4), тогда как основной анализ проводится для «расширенной версии», которая аналогична теории ϕ^4.

Согласно Вильсону [17], конфайнмент может быть доказан в решеточной версии теории Янга–Миллса при больших значениях затравочного заряда g_0. Энергия взаимодействия двух пробных кварков, находящихся на расстоянии R, есть $V(R) = \sigma R$, а для натяжения струны σ и массы глюболла справедливы результаты [16–18]

$$\sigma = \frac{\ln(3g_0^2)}{a^2}, \quad m = \frac{4\ln(3g_0^2)}{a}. \tag{13}$$

Несмотря на очевидный успех, вильсоновская теория считается чисто иллюстративной и не имеющей отношения к реальной КХД. Как указано самим Вильсоном, его теория соответствует ситуации

$$\xi \ll a \quad \text{или} \quad m \gg \Lambda, \tag{14}$$

которая считается нефизической. Попытка выхода в физическую область неизбежно разрушает режим сильной связи. Действительно, приняв параметр σ равным его наблюдаемому значению, получим $g_0^2(a) = (1/3)\exp(\sigma a^2)$ и подстановка в уравнение Гелл-Манна–Лоу для схемы обрезания [19]

$$-\frac{dg_0^2}{d\ln a^2} = \beta(g_0^2) = \beta_0 g_0^4 + \beta_1 g_0^6 + \ldots \tag{15}$$

дает $\beta(g_0^2) = -g_0^2\ln(3g_0^2)$ для больших g_0 [20]. С учетом отрицательности β_0 и β_1 можно ожидать отрицательности β-функции при всех g_0 (рис. 4), что подтверждается решеточными результатами (см. так-

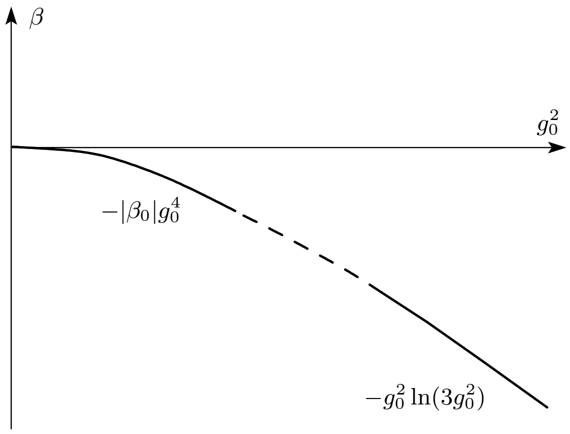

Рис. 4. Функция Гелл-Манна – Лоу теории Янга – Миллса в схеме обрезания

же [21])[4]. Тогда очевидно, что g_0 стремится к нулю в континуальном пределе $a \to 0$. Это не означает тривиальности теории, так как поведение $g_0 \to 0$ совместимо с конечностью перенормированного заряда g; это легко видеть из однопетлевого результата при $\Lambda \to \infty$:

$$g_0^2 = \frac{g^2}{1+|\beta_0|g^2\ln\Lambda^2/m^2} \to \frac{1}{|\beta_0|\ln\Lambda^2/m^2} \to 0. \quad (16)$$

Хотя тривиальности удается избежать, режим сильной связи неизбежно разрушается и вильсоновская теория становится неприменимой. Стандартная точка зрения состоит в том, что области слабой и сильной связи не разделены точкой фазового перехода, поэтому на качественном уровне вильсоновская картина может быть перенесена в область $\xi \gg a$. Эта аргументация убедительно подтверждается численным моделированием, но, разумеется, не может считаться доказательством.

Ситуация радикально меняется, если использовать представление (5), (6), введенное в предыдущих разделах. Тогда

1) не требуется брать континуальный предел в затравочной теории, поэтому g_0 остается конечным;

2) ввиду независимости результатов от ξ/a этот параметр можно брать произвольным: это устраняет возражения против нефизического режима в вильсоновской теории;

3) опыт теории ϕ^4 показывает, что не существует прямой связи между затравочным и перенормированным зарядами[5]: представление (5) строго вводится в пределе $g_0 \to \infty$ (см. сноску 2)), однако g остается конечной функцией κ [4]. С некоторыми оговорками аналогичное свойство справедливо для КХД. Переписывая второе соотношение (13) в виде

$$g_0^2 = \frac{1}{3}\exp\left(\frac{ma}{4}\right) = \frac{1}{3}\exp\left\{\frac{a}{4\xi}\right\}, \qquad (17)$$

легко видеть, что независимо от перенормированных значений g и m можно выбрать свободный параметр a/ξ так, чтобы обеспечить достаточно большое значение g_0 для применимости вильсоновской теории. Тогда первое соотношение (13) дает конечное значение σ, т. е. конфайнмент[6].

Мы пользовались соотношениями (13), справедливыми для простейшего вильсоновского действия [16–18]. Однако последнее оказывается неудовлетворительным для наших целей — по тривиальной причине, что оно не содержит достаточного количества параметров. Чтобы получить наблюдаемые значения σ и m

$$\sigma = a^{-2}f_\sigma(g_0), \quad m = a^{-1}f_m(g_0), \qquad (18)$$

нужно зафиксировать как g_0, так и a; но фиксация a означает невозможность ввести представление, содержащее a/ξ в качестве свободного параметра. Поэтому нужно рассмотреть некоторые обобщения.

Простейшее вильсоновское действие [16–18]

$$S = -\frac{1}{g_0^2}\sum_{\Box} W_{\Box}^{1\times 1} \qquad (19)$$

представляет собой сумму по элементарным плакетам $\Box$ размера 1×1, где вклад плакета $W_{\Box}^{1\times 1}$ определяется произведением матриц, сопоставляемых его

[4] В этом месте проявляется различие между абелевым и неабелевым случаями. Как известно, вильсоновское доказательство применимо и к абелевым теориям, таким как КЭД [16]. Поэтому для последней поведение β-функции при больших g_0 (см. рис. 4) будет таким же, как в КХД, но при малых g_0 β-функция является положительной. В результате неизбежно возникает неподвижная точка, так что области больших и малых g_0 оказываются разделенными точкой фазового перехода. Дальнейшая аргументация в полной мере применима и к КЭД, но относится к ее «нефизической ветви». Строго говоря, нельзя гарантировать, что для КХД не существует «нефизической ветви» без конфайнмента; однако в любом случае мы выберем вариант с конфайнментом из физических соображений.

[5] Обычно считается, что g_0 совпадает с перенормированным зарядом g, взятом на масштабе Λ; но это верно лишь в случае, когда одновременно выполняются условия $g \ll 1$ и $g_0 \ll 1$.

[6] В отличие от стандартной точки зрения (см. текст после формулы (16)), мы не пытаемся обосновать кроссовер между областью сильной и областью слабой связи, но устанавливаем кроссовер между режимами $a \ll \xi$ и $a \gg \xi$. Такой кроссовер является тривиальным ввиду отсутствия зависимости от a/ξ.

ребрам. В современных исследованиях используются более сложные варианты действия, содержащие вклады плакетов размера $m \times n$ [16],

$$S = -\frac{1}{g_0^2} \sum_{\square} \sum_{m,n} C_{mn} W_{\square}^{m\times n}, \tag{20}$$

где коэффициенты C_{mn} достаточно быстро убывают с ростом m и n[7]. Если предположить, что в сумме доминирует вклад плакета $n \times n$, то получится формула (13) с заменой $a \to na$. Легко понять, что в общем случае в формулах (13) происходит эффективное усреднение по a в некоторых конечных пределах от $a_{min} = a$ до $a_{max} = ka$. В результате соотношения (13) примут вид

$$\sigma = \frac{\ln(3g_0^2)}{a_1^2}, \quad m = \frac{4\ln(3g_0^2)}{a_2}, \tag{21}$$

где $a_1 = k_1 a$, $a_2 = k_2 a$ просто из соображений размерности. Такие модификации не повлияют на сделанные выше качественные выводы.

Соотношение (6) для σ дает

$$\sigma = m^2 F_\sigma(g), \tag{22}$$

так что g функционально связано с σ/m^2; из формул (21) имеем

$$\frac{\sigma}{m^2} = \frac{a_2^2}{16a_1^2 \ln(3g_0^2)}, \tag{23}$$

и для $a_1 \sim a_2$ величина σ/m^2 оказывается малой в условиях применимости приближения сильной связи. Это означает возможность воспроизведения лишь ограниченного интервала значений g. Такое ограничение является естественным и обусловлено физической сутью проблемы — линейный потенциал конфайнмента ожидается лишь в области больших расстояний, когда перенормированный заряд g заведомо не мал; а следовательно, малые значения g недостижимы в вильсоновском режиме. Напротив, ограниченность диапазона возможных значений σ/m^2 противоречит логике теории. Действительно, параметр a/ξ является свободным, поэтому любые физические результаты могут быть получены (аналитически или нет) при его произвольном значении. При $a/\xi \gg 1$ режим конфайнмента контролируется аналитически и любое физически достижимое значение σ/m^2 должно быть возможным

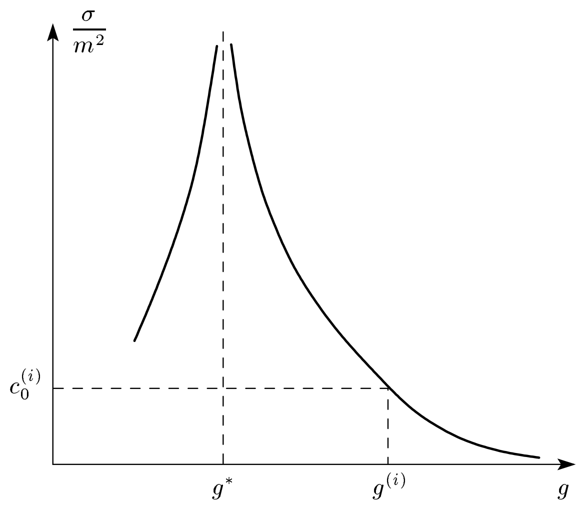

Рис. 5. Зависимость отношения σ/m^2 от g. Для получения особых значений $c_0^{(i)}$, при которых массовая щель обращается в нуль, нужно отложить на горизонтальной оси все устойчивые неподвижные точки $g^{(i)}$ и провести построение, показанное на рисунке

в этом пределе; по-видимому, это можно обеспечить, используя модели с существенно различными a_1 и a_2[8]. Отсутствие ограничений на σ/m^2 при сохранении ограничений на g возможно лишь в случае, если зависимость σ/m^2 от g имеет вид кривой с максимумом; можно продемонстрировать, что это действительно так.

Исследование более сложных решеточных версий теории Янга–Миллса [16] обнаруживает существование в области $g_0 \sim 1$ фазовых переходов, при которых масса m легчайшего глюболла обращается в нуль при конечных значениях σ и других массовых параметров. Эти переходы считаются решеточными артефактами, так как они не сохраняются при стремлении шага решетки к нулю, когда $g_0 \to 0$. В нашем подходе предел $a \to 0$ не требуется и такие фазовые переходы приобретают физический смысл. Из их существования следует, что зависимость $\sigma/m^2 = F_\sigma(g)$ является сингулярной (рис. 5), что обеспечивает достижимость произвольных значений σ/m^2 при сохранении ограничений на g.

[7] Для пояснения этого момента вернемся к формуле (8). Интегралы перекрытия J_x должны убывать с ростом $|x|$ быстрее любой степени (например, экспоненциально), чтобы затравочный спектр $\epsilon(p)$ допускал регулярное разложение по степеням p. Аналогичные аргументы можно привести для теории Янга–Миллса.

[8] Такие модели заведомо существуют. Если в сумме (20) доминирует вклад плакета $1\times n$, то обычное заполнение плакетами вильсоновской петли или корреляционной трубки [16, 18] дает $a_1^2 = na^2$, $a_2 = na$, так что правая часть (23) оказывается в n раз больше, чем для вильсоновского действия. Чтобы понять, какие значения σ/m^2 реально достижимы, нужно исследовать, сохраняется ли условие сильной связи в виде $g_0 \gg 1$ или заменяется более сложным условием, зависящим от n.

Существование в параметрическом пространстве точек с $m = 0$ означает, что «расширенная» теория Янга – Миллса не имеет массовой щели. Для устранения этого дефекта нужно вернуться к стандартному варианту теории, зафиксировав одно условие между наблюдаемыми величинами. Характер таких условий хорошо известен и определяется так называемой размерной трансмутацией [16, Sec. 14.1], [22, Гл. IV, § 6]. Если для наблюдаемой величины A имеем $A = a^\mu f(g_0)$, то ее независимость от a требует, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dA}{da} = \mu a^{\mu-1} f(g_0) + a^\mu \frac{df(g_0)}{dg_0^2}\,\frac{dg_0^2}{da} = \\ = a^{\mu-1}\left[\mu f(g_0) - 2\frac{df(g_0)}{dg_0^2}\,\beta(g_0^2)\right] = 0,$$

где учтено уравнение Гелл-Манна – Лоу (15). Интегрирование полученного уравнения для $f(g_0)$ дает

$$A = \mathrm{const}\, a^\mu \exp\left\{\frac{\mu}{2}\, B(g_0^2)\right\}, \quad B(g_0^2) = \int \frac{dg_0^2}{\beta(g_0^2)},$$

откуда ясно, что все величины одинаковой размерности имеют одинаковую зависимость от g_0 и различаются лишь постоянным множителем. Для наших целей удобно ввести условие

$$\sigma/m^2 = c, \qquad (24)$$

которое определяет однопараметрическое семейство теорий Янга – Миллса, различающихся структурной константой c[9]. Нетрудно видеть, что условие (24) делает точки с $m = 0$, $\sigma = \mathrm{const}$ автоматически недостижимыми.

Этим еще не доказано существование массовой щели, так как возможны ситуации, когда $m \to 0$, $\sigma \to 0$ одновременно. Для их анализа рассмотрим уравнение Гелл-Манна – Лоу для перенормированного заряда, отнесенного к масштабу m:

$$\frac{dg^2}{d\ln m^2} = \beta(g^2) = \beta_0 g^4 + \beta_1 g^6 + \ldots, \qquad (25)$$

где β-функция не совпадает с (15), но имеет одинаковые первые коэффициенты β_0 и β_1. Легко понять, что значение g^* (рис. 5) является корнем β-функции; вообще говоря, у нее есть несколько корней, являющихся неподвижными точками ренормгруппы. В пределе $m \to 0$ заряд g стремится к одной из неподвижных точек; при этом для величины σ/m^2 возможны варианты а) $\sigma/m^2 \to \infty$, б) $\sigma/m^2 \to 0$, в) $\sigma/m^2 \to c_0$. Первые два варианта несовместны с условием (24), третий возможен при случайном совпадении $c = c_0$. При наличии нескольких устойчивых неподвижных точек $g^{(i)}$ возникает несколько значений $c_0^{(i)}$ (см. рис. 5), для которых массовая щель обращается в нуль; при всех прочих значениях параметра c она отлична от нуля.

С физической точки зрения наиболее вероятно[10], что имеется лишь одна неподвижная точка g^*, для которой $\sigma/m^2 \to \infty$, так что никаких особых значений $c_0^{(i)}$ не возникает. С математической точки зрения допустима ситуация, когда неподвижных точек бесконечно много, а соответствующие им значения $c_0^{(i)}$ расположены всюду плотно в интервале $(0, \infty)$. Однако малые значения σ/m^2 соответствуют вильсоновскому режиму, когда конечность σ и m проверяется непосредственно. Поэтому для малых значений структурной константы c доказательство массовой щели является полным[11]. Перспективы усиления этого утверждения намечены в сноске 8).

Отметим связь с работами [6, 23], в которых исследовались функции Гелл-Манна – Лоу, близкие к (25). В работе [23] рассматривалась β-функция в MS-схеме, для которой дифференцирование в формуле (25) проводится по произвольному масштабу импульсов μ; при больших g получено поведение $\beta(g^2) = \beta_\infty g^{2\alpha}$, $\alpha \approx -13$, где знак константы β_∞ остался неопределенным, так что существование неподвижной точки является одним из вариантов. Альтернативное определение $\beta(g^2)$ получается, если рассмотреть КХД с произвольным числом кварков, имеющих одинаковую массу m, и соотнести заряд g с масштабом m; если определять g по кварк-глюонной вершине, то вычисление асимпто-

[9] «Расширенная» теория соответствует совокупности всех «стандартных» теорий с различными значениями c.

[10] Результаты для β-функции в разных теориях [5, 21] показывают, что обычно она имеет простое поведение, сводящееся к интерполяции между асимптотиками сильной и слабой связей.

[11] Мы предполагали, что «расширенная» теория Янга – Миллса принадлежит к типу, рассмотренному в разд. 3. Мотивация этого следующая. Затравочная теория Янга – Миллса содержит один параметр g_0, который непосредственно связан с неустойчивым направлением. Теорию можно расширить по тем направлениям в параметрическом пространстве, которые устойчивы по отношению к неподвижной точке. Расширение вдоль неустойчивых направлений можно искусственно запретить — с ними связаны существенные параметры, соответствующие теории более общей, чем теория Янга – Миллса; такие теории безусловно существуют, но не являются предметом нашего рассмотрения. Таким образом, принадлежность «расширенной» теории Янга – Миллса к рассмотренному в разд. 3 типу может быть принята аксиоматически.

тики β-функции в точности повторяет вычисление для квантовой электродинамики [6], приводя к результату $\beta(g^2) = g^2$ и необходимому существованию неподвижной точки. Выше показано существование неподвижной точки при использовании в качестве m массы глюболла. Перечисленные определения β-функции различаются в техническом плане, но являются близкими по физическому смыслу, описывая зависимость перенормированного заряда от масштаба расстояний[12)]. Физический смысл существования неподвижной точки фактически ясен из изложенного выше.

При введении в теорию безмассовых кварков[13)] сохраняется режим «размерной трансмутации» и использование трюка с «расширением» теории остается по-прежнему актуальным; по-видимому, при этом сохраняется и общая структура теории.

Сформулируем окончательные выводы.

Каковы бы ни были свойства континуальной теории Янга–Миллса, существует решеточная теория, которая их воспроизводит. Затравочный заряд g_0 в этой решеточной теории может быть выбран произвольным, и в частности — бесконечно большим. Любая разумная решеточная версия теории Янга–Миллса дает конечные значения σ и m в режиме сильной связи. Обращение σ и m в нуль возможно лишь для исключительных конфигураций параметров, которые избегаются в общем случае. Таким образом, проблему аналитического доказательства конфайнмента и массовой щели можно считать решенной, по крайней мере на физическом уровне строгости.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Суслов, ЖЭТФ **120**, 5 (2001).

2. И. М. Суслов, ЖЭТФ **134**, 490 (2008).

3. И. М. Суслов, ЖЭТФ **138**, 508 (2010).

4. И. М. Суслов, ЖЭТФ **139**, 319 (2011).

5. И. М. Суслов, ЖЭТФ **127**, 1350 (2005).

6. И. М. Суслов, ЖЭТФ **135**, 1129 (2009).

7. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).

8. К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и ϵ-разложение*, Мир, Москва (1975).

9. J. Frölich, Nucl. Phys. B **200** [FS4], 281 (1982).

10. M. Aizenman, Comm. Math. Soc. **86**, 1 (1982).

11. B. Freedman, P. Smolensky, and D. Weingarten, Phys. Lett. B **113**, 481 (1982).

12. M. Lüscher and P. Weisz, Nucl. Phys. B **290** [FS20], 25 (1987); **295** [FS21], 65 (1988); **318**, 705 (1989).

13. I. M. Suslov, arXiv: 0806.0789.

14. R. F. Dashen and H. Neuberger, Phys. Rev. Lett. **50**, 1897 (1983).

15. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishman, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).

16. R. Gupta, arXiv: hep-lat/9807028.

17. K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).

18. М. Кройц, *Кварки, глюоны и решетки*, Мир, Москва (1987).

19. А. А. Владимиров, Д. В. Ширков, УФН **129**, 407 (1979).

20. C. Callan, R. Dashen, and D. Gross, Phys. Rev. D **20**, 3279 (1979).

21. J. B. Kogut, R. B. Pearson, and J. Shigemitsu, Phys. Rev. Lett. **43**, 484 (1979).

22. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, Москва (1988).

23. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **76**, 387 (2002).

24. I. M. Suslov, arXiv: hep-ph/0605115.

[12)] Согласно работе [24] существование нуля β-функции является инвариантным свойством, сохраняющимся в физических ренормировочных схемах.

[13)] Для фермионов перенормировка массы является мультипликативной и выбор нулевой затравочной массы обеспечивает равенство нулю перенормированой массы.