

СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ КВАЗИДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЛАБОРАТОРНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

A. E. Гледзер^a, Е. Б. Гледзер^a, А. А. Ханаев^a, О. Г. Чхетиани^{a,b}

^a Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова* Российской академии наук
109017, Москва, Россия

^b Институт космических исследований** Российской академии наук
117810, Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 ноября 2010 г.

Рассмотрены результаты экспериментов для турбулентных течений в тонком слое проводящей жидкости над твердой поверхностью, возбуждаемых силой Ампера при пропускании тока и действия пространственно-периодического магнитного поля. Показано, что статистические характеристики течений проявляют трехмерную динамику даже на масштабах по горизонтали, на порядок превышающих толщину слоя. При этом продольные структурные функции третьего порядка поля скорости приближенно линейны по пространственному смещению и отрицательны, как в трехмерной турбулентности, из-за доминирующего вклада диссипации энергии при выполнении граничного условия прилипания на нижней поверхности. Для уравнения баланса энергии проведены оценки диссипации и основных слагаемых производства энергии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квазидвумерные приближения в описании гидродинамических течений широко используются для моделей геофизической гидродинамики и трактовки данных лабораторных экспериментов, имитирующих атмосферные движения. В таких приближениях вертикальной структурой течений, как правило, пренебрегается или ее учет проводится через эффективные коэффициенты или дополнительные члены, модифицирующие двумерную динамику течений [1–8] (так называемое придонное трение). В лабораторном эксперименте с использованием относительно тонких слоев жидкости [9–11] обычно могут быть измерены лишь горизонтальные компоненты скорости, относящиеся к двумерному движению. Вертикальная структура поля скорости при этом практически не поддается измерению, хотя работы такого направления с учетом развития техники измерений в тонких слоях жидкости выполняются в последние годы (см. [12, 13]). При этом роль вертикальных движений может быть оценена через сравнение результатов с теорией, учитывающей вер-

тикальные движения в слое. Для течений, в которых достаточно сильно выражены случайные, хаотические вариации компонент скорости (по крайней мере, после вычитания усредненных по времени значений), такой теоретической основой могут выступать закономерности однородной турбулентности как в трехмерном (с учетом того, что в реальности квазидвумерное поле скорости имеет трехмерную структуру), так и в двумерном (как приближение) вариантах.

Одной из наиболее часто употребляемых характеристик турбулентности являются структурные функции второго и третьего порядков, для которых в пределе большого числа Рейнольдса имеются колмогоровские закономерности для вязкого и инерционного масштабов, подтвержденные в большом числе экспериментальных, численных и теоретических исследований. Однако для квазидвумерных течений при определенном наличии двух последних видов исследований указанных закономерностей их получение в лабораторном эксперименте является довольно затруднительным. Можно указать лишь несколько работ, изучавших тонкие слои или пленки различных жидкостей, где рассчитывались указанные структурные функции. В близкой к рас-

*E-mail: lgg@ifaran.ru

**E-mail: ochkheti@rss.ru

сматриваемой в данной работе геометрии при взаимодействии электрического тока с пространственно-периодическим внешним магнитным полем, действующим на проводящую несжимаемую жидкость, структурные функции третьего порядка были получены в работах [14–17], причем основное внимание уделялось обнаружению закономерностей обратного (от малых к большим масштабам) каскада энергии и подавлению турбулентности средним крупномасштабным организованным движением. Имеются и другие работы этого направления, использующие такой же метод возбуждения мелкомасштабной вихревой структуры течений в двумерном приближении [18, 19]. В другой постановке используется двумерное течение в мыльной пленке [20], где удается значительно расширить спектр разрешаемых масштабов в сторону их уменьшения или увеличения. Здесь также получены структурные функции третьего порядка наряду с другими энергетическими характеристиками двумерной динамики.

В экспериментах работ [14–17] влияние придонного трения и связанной с ним трехмерной диссиляции энергии подавляется при возбуждении двумерного поля скорости над тяжелой непроводящей жидкостью. Это и дает возможность получить экспериментально обратный каскад энергии в гидродинамическом течении. Цель данной работы противоположна и заключается в изучении влияния на статистику трехмерных эффектов, возникающих из-за трения тонкого слоя жидкости над твердой поверхностью при выполнении условия прилипания. Как уже отмечалось, эти эффекты могут проявляться в прямых измерениях поля скорости в тонких слоях [12, 13]. Но в течение долгого времени они в основном рассматривались через внесение в теорию эффективных параметров, влияющих на движение двумерной пленки. Это линейное или квадратичное по скорости трение, которое появляется при редукции вязких и нелинейных членов уравнений гидродинамики, содержащих вертикальные скорости и производные по вертикальной координате (см. [2–8, 21, 22]).

Трехмерная диссиляция энергии существенна для атмосферных процессов, если иметь в виду, что идея обратного каскада, сформулированная в 1989 г. Лилли [23], может быть использована, как отмечается в работах [16, 17], для объяснения некоторых особенностей спектрального распределения энергии при измерении поля скорости в масштабах 10–100 км в атмосфере. При этом трение существенно не только в области приземного пограничного слоя и в прилегающей к нему части тропосферы, но и для верхней тропосферы и нижней стратосферы, а также

для значительно более высокой области, переходной между мезосферой и нижней термосферой, на что указывают как данные ракетных пусков, так и meteorные следы [24–26]. Обнаруживаемые на этих высотах экмановские спирали являются прямым указанием на существенную роль при их генерации турбулентного трения, которое учитывается для всех слоев в атмосфере и при построении прогностических численных схем.

Диссиляция энергии является основным определяющим параметром для уравнения баланса турбулентной энергии, которое выписывается в следующем разделе с учетом возможной нестационарности и неоднородности процесса при действии внешней силы. Приводятся формулы для структурных функций (продольных и поперечных), где учет вертикальной структуры течения проводится через отличие от нуля горизонтальной дивергенции поля скорости. Полученные далее на основе измерений в лабораторных экспериментах результаты существенно определяются величиной трехмерной диссиляции в системе, а также притоком энергии, который имеет место не только в области мелкомасштабных вихрей, но, как и для атмосферных процессов из-за бароклинных потоков в баротропную составляющую движения, может давать вклад и в движения других масштабов. При этом для уравнения баланса энергии проведены оценки диссиляции и основных слагаемых производства энергии. В этих экспериментах не возникает крупномасштабное циркуляционное течение (конденсат, по терминологии работ [14–17]) или при его искусственной генерации оно слабо выражено. Однако вычитание усредненных характеристик поля скорости, возникающих в основном из-за действия внешних пространственно-периодических сил, оказалось важным для получения статистических характеристик.

2. СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ

Приведем некоторые формулы для структурных функций второго и третьего порядков для однородной локально изотропной трех- и двумерной турбулентности, — для двумерной в условиях, когда

$$\operatorname{div}_h \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0,$$

где u, v — горизонтальные компоненты скорости. Структурные функции определяются проекциями пространственной разности скоростей $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}, t | \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

на направление вектора $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$: $v_L(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{r}/r)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и ей перпендикулярной $v_N(\mathbf{r}, t)$, где \mathbf{r} — вектор разностей координат точек $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ и \mathbf{x} , $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

В условиях стационарности, однородности и локальной изотропии отличны от нуля и зависят от модуля r лишь структурные функции

$$\begin{aligned} D_{LLL}(r) &= \langle v_L^3(\mathbf{r}, t) \rangle, \\ D_{LNN}(r) &= \langle v_L(\mathbf{r}, t)v_N^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\langle \rangle$ означает ансамблевое усреднение.

Запишем уравнения Навье–Стокса для разностей скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и в соответствии с процедурой, изложенной, например, в работе [27], получим уравнение для энергии $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}^2(\mathbf{r}, t)/2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}_r(\mathbf{v}E) + \operatorname{div}_x(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)E) &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - p(\mathbf{x}))}{\partial x_i} v_i + \\ &+ \nu \Delta_{\mathbf{x} + \mathbf{r}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $r_i = (r_x, r_y, r_z)$ и используется условие трехмерной бездивергентности течения $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. (Близкое к (2) уравнение записано в работе [28]). При усреднении правая часть дает -2ε в соответствии с [27] и в случае пространственной однородности либо при отсутствии корреляций разности скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Здесь

$$\varepsilon = \nu \left\langle \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle$$

— диссипация энергии на единицу массы. Поэтому для случаев стационарной и бездивергентной трех- и двумерной турбулентности имеем

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}E) = -2\varepsilon. \quad (3)$$

Если двумерная (горизонтальная) дивергенция скорости $\operatorname{div}_h \mathbf{u}$ отлична от нуля, то для двумерной турбулентности в левой части (2) появятся слагаемые $-E \operatorname{div}_r \mathbf{v}, -E \operatorname{div}_x \mathbf{u}$, что дает вместо (3)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_r(\mathbf{v}E) + \operatorname{div}_x(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)E) - \langle E \operatorname{div}_r \mathbf{v} \rangle - \\ - \langle E \operatorname{div}_x \mathbf{u} \rangle = -2\varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь второй член в левой части оставлен для учета возможной пространственной неоднородности или наличия корреляций разности скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, как в реализуемом в экспериментах случае, когда отлично от нуля среднее (периодическое по пространству) поле скорости.

Для пространственной размерности n , используя работу Обухова [29] (также [27]), можно получить в условиях локальной изотропии соотношение между D_{LLL} и D_{LNN} :

$$D_{LNN} = \frac{1}{3(n-1)} \left(r \frac{d}{dr} D_{LLL} + (n-2) D_{LLL} \right). \quad (5)$$

Уравнение (4) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} r^{n-1} (D_{LLL} + (n-1) D_{LNN}) &= \\ &= -2\varepsilon + P_v(r) + P_u(r) - P_d(r) - \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} + \Pi(r), \end{aligned} \quad (6)$$

где $P_v(r) = 0, P_u(r) = 0$ в двумерном и трехмерном случаях бездивергентного поля скорости,

$$\begin{aligned} P_v(r) &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}^2(\mathbf{r}, t) \operatorname{div}_h \mathbf{v} \rangle, \\ P_u(r) &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}^2(\mathbf{r}, t) \operatorname{div}_h \mathbf{u} \rangle, \\ P_d(r) &= \operatorname{div}_x \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) E \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

для квазидвумерных течений. В правую часть (6) включены также члены, обусловленные возможной нестационарностью процесса,

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} (D_{LL}(r, t) + (n-1) D_{NN}(r, t)), \quad (8)$$

и притоком энергии при действии внешней силы $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (силы Ампера для данной работы),

$$\Pi(r) = \langle (\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \rangle, \quad (9)$$

где предполагается усреднение по всем направлениям вектора \mathbf{r} .

Функции $P_v(r), P_u(r), P_d(r)$ имеют смысл притока (или оттока в зависимости от знака) энергии, обусловленного циркуляцией в вертикальной плоскости слоя жидкости или указанной выше корреляцией. В общем случае функции имеют зависимость от z , от которой можно избавиться, считая, что усреднение в (7), а также в (1) проводится и по высоте слоя. В этом случае первое слагаемое в правой части (6) пропорционально диссипации энергии, усредненной по высоте. Такое усреднение для квазидвумерных течений проводить необходимо, поскольку формулы вида (5) имеют место лишь для изотропии во всем n -мерном пространстве, в частности, в двумерном. Из формул (6), (5) получаем (при $\partial/\partial t = 0$ и для значений r , при которых приток внешней энергии отсутствует, $\Pi(r) = 0$)

$$\begin{aligned} D_{LLL} + (n-1)D_{LNN} &= -\frac{4\varepsilon}{n}r + R(r), \\ R(r) &= 2 \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r r^{n-1} P(r) dr, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (n+1)D_{LLL} + r \frac{d}{dr} D_{LLL} &= -\frac{12\varepsilon}{n}r + 3R(r), \\ P(r) &= P_v(r) + P_u(r) - P_d(r). \end{aligned} \quad (11)$$

В отсутствие источников $P(r), R(r) = 0$ из (11) имеем решение (не имеющее особенности при $r = 0$)

$$D_{LLL} = -\frac{12}{n(n+2)}\varepsilon r, \quad (12)$$

что при $n = 3$ дает известный закон « $-4/5$ » Колмогорова: $D_{LLL} = -(4/5)\varepsilon r$. Формула (12) имеется также, например, в работе [30], где ее вывод использует отчасти и спектральное представление.

Заметим, что приведенные выше формулы не определяют направление передачи энергии по спектру масштабов. Закон « $-4/5$ » для трехмерной турбулентности основывается на каскадном механизме Ричардсона–Колмогорова передачи энергии в сторону мелких масштабов, где происходит ее диссиляция со скоростью ε . Для случая двумерной турбулентности формально из (12) следует закон « $-3/2$ », $D_{LLL} = -(3/2)\varepsilon r$, при условии, что и здесь энергия передается от крупных масштабов к мелким. Однако для «чистой» двумерной турбулентности поток энергии направлен от мелких масштабов к крупным (а энстрофии — наоборот). Поэтому, чтобы использовать формулу (12) при $n = 2$, необходимо принять, что вместо ε в ней входит величина притока энергии с обратным знаком: $\varepsilon_{inp} = -\varepsilon$. Это означает, что в уравнении (6) вместо -2ε появляется член, отвечающий за производство энергии: $+2\varepsilon_{inp}$, а ее диссиляция осуществляется крупными масштабами, которые не учитываются в уравнениях (6)–(12) в инерционном интервале r .

Для квазидвумерного случая формулы не верны из-за присутствия члена $R(r)$ в (11), знак которого, в целом, не определен. Но в предположении, что величина $R(r)$ знакопеременная, в силу линейности уравнения (11) можно надеяться, что величина D_{LLL} отрицательна, по крайней мере, в интервалах разности r , где первый член в (11) превалирует над вторым. Отрицательный знак структурной функции третьего порядка $D_{LLL} + (n-1)D_{LNN}$ (см. (10)) свидетельствует о наличии прямого каскада энергии от крупных масштабов к мелким, при этом величина диссиляции энергии становится определяющей.

Для линейной по r продольной структурной функции $D_{LLL}, D_{LLL} \propto r$, при $n = 3$ и $n = 2$ (как и для любых $n > 1$) поперечная функция согласно (5) равна

$$D_{LNN} = \frac{1}{3}D_{LLL}. \quad (13)$$

Для структурных функций второго порядка D_{LL}, D_{NN} для случаев трехмерной и двумерной несжимаемой турбулентности из условий бездивергентности имеют место соотношения соответственно (см. [27])

$$\begin{aligned} D_{NN} &= D_{LL} + \frac{r}{2} \frac{d}{dr} D_{LL}, \\ D_{NN} &= D_{LL} + r \frac{d}{dr} D_{LL}, \end{aligned} \quad (14)$$

что для линейных по r функций дает в трехмерном случае $D_{NN} = (3/2)D_{LL}$, в двумерном — $D_{NN} = 2D_{LL}$. Понятно, что, если условие бездивергентности нарушено, как для квазидвумерных потоков, эти соотношения не выполняются.

В дальнейшем для рассмотрения экспериментальных данных понадобится величина, определяемая из (5) как функция r , если функции D_{LLL} и D_{LNN} заданы, (функция размерности):

$$N(r) = 1 + \frac{D_{LLL} - r \frac{d}{dr} D_{LLL}}{D_{LLL} - 3D_{LNN}}. \quad (15)$$

Это связано с тем, что квазидвумерные потоки носят черты и особенности как двумерных, так и трехмерных течений. Последнее выполняется, по крайней мере, в процессах диссиляции энергии, которая осуществляется преимущественно при сдвигах по высоте горизонтальной скорости.

3. ЛАБОРАТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Подробное описание экспериментов содержится в работах [7, 8]. Квазидвумерное течение реализовано в прямоугольной кювете $40 \times 30 \text{ см}^2$, заполненной на высоту 7 мм электропроводящей жидкостью (слабый раствор CuSO_4). На двух противоположных боковых сторонах кюветы расположены электроды, с помощью которых через жидкость пропускается ток I . Кювета установлена на систему постоянных магнитов с шахматным изменением полярности магнитного поля. Используются две конфигурации расположения магнитов: 10×8 по площади кюветы — для прямоугольных магнитов размерами

40×36 мм² и 27×23 — для круглых магнитов диаметром 14 мм. При этом для снятия симметрии в конфигурации 27×23 в крайних рядах магнитов вдоль электродов последовательное чередование полюсов (...SNSN...) заменялось на (...NNSNNS...) и (...SSNNSN...). При пропускании тока на жидкость действует сила Ампера, которая при малой величине тока приводит к формированию такой же шахматной структуры вихрей в жидкости, которая в случае конфигурации 27×23 модифицирует крупномасштабное движение вдоль границ кюветы, что приводит к ненулевой средней завихренности течения (см. ниже). Аналогичный метод использовался в работе [31].

Регистрация частиц на поверхности жидкости осуществлялась с помощью видеокамеры. Эксперименты проводились при величинах электрического тока $I = 75, 100, 150, 200, 400$ мА в конфигурации 10×8 , а в конфигурации 27×23 — при $I = 500$ мА (эксперименты I и II) и при постоянном напряжении на электродах, но с уменьшающейся величиной тока I (от 1 А) при росте электрического сопротивления электролита из-за выделения части проводящей составляющей раствора на электродах, таком что его концентрация уменьшается (эксперименты III и IV). Для каждого эксперимента было сделано от $N = 11229$ до $N = 22496$ измерений (PIV-методом) горизонтальных компонент поля скорости u и v по осям x и y с интервалами по времени от $T = 4/24$ с до $T = 8/24$ с, что соответствовало записям до двух часов. Хотя видеосъемка осуществлялась для всей кюветы, последующая обработка проводилась только для центральной части течения в прямоугольнике с размерами 19.75×15.8 см² (для $I = 400$ мА — 27.5×22.5 см²) с пространственным шагом $\Delta l = 0.34$ см. Погрешность измерений скорости составляла около 10 %.

Усредненные по времени поля скорости сохраняют симметрию, задаваемую магнитным полем, в виде шахматной системы вихрей. Для каждого тока эти усредненные поля \bar{u}, \bar{v} вычитались из поля скорости для данного момента времени, чтобы получить нестационарные отклонения скорости от средних (для конфигурации 27×23 брались соответствующие 15-минутные средние). На рис. 1 приведен пример усредненного поля скорости и отклонений ($I = 75$ мА), где в каждой точке в сетке измерений проведен вектор с компонентами (\bar{u}, \bar{v}) (рис. 1a) и (u', v') , $u' = u - \bar{u}$, $v' = v - \bar{v}$ (рис. 1б) в одинаковых масштабах. Из рис. 1 видно, что отклонения скорости почти в три раза могут превышать средние значения.

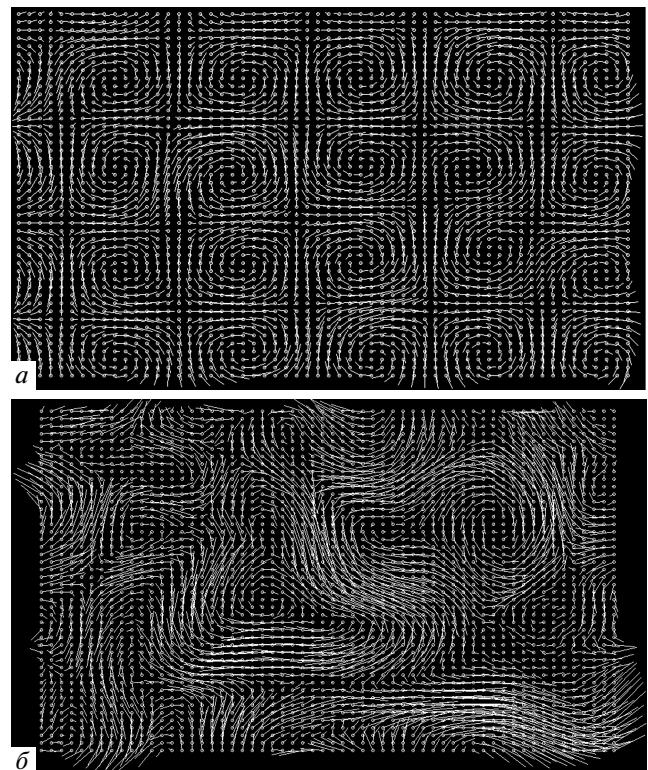


Рис. 1. Усредненное (a) поле скорости и его возмущения (б) в произвольный момент времени для конфигурации 10×8 . Ток $I = 75$ мА

Числа Рейнольдса Re для течений могут быть вычислены по масштабу $l \approx 4$ см вихрей (для конфигурации 10×8), генерируемых внешним полем, при заданной максимальной скорости V_m в усредненном поле. В работе [7] было показано, что $V_m \sim I^{2/3}$ и $V_m \approx 1$ см/с для выбранных величин токов $I = 75, 100, 150, 200, 400$ мА. Поэтому $Re \approx 500$, но следует заметить, что критическое число Рейнольдса на порядок меньше, так как ламинарное течение (стационарные вихри в шахматном порядке) теряет устойчивость при $I = 5$ мА (см. [7]). Поскольку изменения числа Re при этом невелики, в дальнейшем течения будем характеризовать величиной тока, как это делалось в работах [7–10]. Фактически в лабораторных экспериментах с МГД-форсингом трудно достичь больших чисел Рейнольдса. Но и при указанных числах возмущения поля скорости имеют выраженный хаотический характер, так что можно изучать их статистические характеристики. Упомянем в этой связи, что для лабораторных течений при исследовании турбулентных пограничных слоев со значительными величинами скоростей числа Рейнольдса, вычисленные по масштабам и размерам возника-

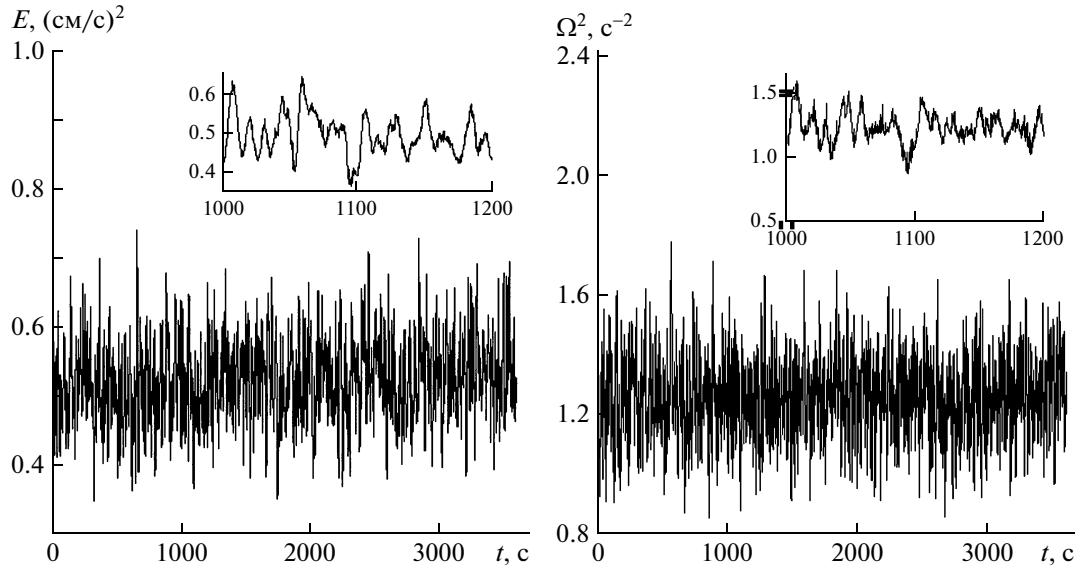


Рис. 2. Зависимости от времени энергии E и энстрофии Ω^2 на единицу площади возмущений горизонтального поля скорости для $I = 100$ мА (конфигурация 10×8). Вставки показывают части графиков в увеличенном масштабе

ющих в слое вихрей, оказываются равными 100–300 (см. [32]).

По возмущениям (u', v') , вычисленным в узлах сетки, можно найти энергию

$$E(t) = \frac{1}{S} \int u'^2 dx dy$$

и энстрофию

$$\Omega^2(t) = \frac{1}{S} \int \Omega^2 dx dy$$

возмущений на единицу площади ($S = 19.75 \times 15.8 \text{ см}^2$). Пример зависимости от времени этих величин показан на рис. 2 для $I = 100$ мА. Вставки на рисунках показывают, что характерный период (интегральный временной масштаб) $T_p \approx 15\text{--}20$ с, так что все время измерения T поля скорости составляет 200–250 интегральных масштабов.

На основе полученных отклонений $u'(x, y, t)$, $v'(x, y, t)$ от средних величин рассчитывались структурные функции второго и третьего порядков путем усреднения по площади прямоугольного поля измерений и по времени. Для этого брались точки сетки (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , $x_i = \Delta l \cdot i$, $y_i = \Delta l \cdot i$, которые задавали вектор $\mathbf{r}_{ij} = (x_j - x_i, y_j - y_i)$. При этом, чтобы в расчетах при усреднении не появлялись векторы \mathbf{r}_{ij} с обратным знаком, ставилось условие $x_j - x_i \geq 0$. По заданной начальной точке (x_i, y_i) учитывались только такие j , при

которых длина $|\mathbf{r}_{ij}| \leq \Delta l(1.0 + (i_m - 1) \cdot 1.755)$, где $i_m = 12$ или $i_m = 30$. Минимальная величина $|\mathbf{r}_{ij}|$ очевидно равна Δl . Проекции вектора $\mathbf{u}'_{ij} = (u'(x_j, y_j) - u'(x_i, y_i), v'(x_j, y_j) - v'(x_i, y_i))$ на направление \mathbf{r}_{ij} дают продольную компоненту вектора разности скорости u_{ij}^L , а на любое перпендикулярное вектору \mathbf{r}_{ij} направление — поперечную компоненту u_{ij}^N . Проводя суммирование по всем i, j так, чтобы вектор \mathbf{r}_{ij} не выходил из поля измерений скорости, а длина его приближенно равнялась заданной величине $r = \Delta l \cdot (1.0 + (k - 1) \cdot 1.755)$, $1 \leq k \leq i_m$, (суммируя также по всем моментам времени измерений $0 < t \leq T_k$ в заданном интервале T_k), получаем усредненные по пространству и времени функции:

$$\begin{aligned} D_{LLL}(r) &= \langle (u^L(r))^3 \rangle, & D_{LL} &= \langle (u^L(r))^2 \rangle, \\ D_{LNN} &= \langle u^L(r)(u^N(r))^2 \rangle, & (16) \\ D_{NN} &= \langle (u^N(r))^2 \rangle. \end{aligned}$$

Основные вопросы, которые можно рассмотреть, имея данные экспериментов, для (16) это: 1) знаки третьих моментов, определяющие направление потока энергии в выбранном интервале масштабов; 2) соотношения между D_{LLL} и D_{LNN} , D_{LL} и D_{NN} ; 3) линейность третьих моментов по r .

На рис. 3 показаны величины D_{LLL} и D_{LNN} для данных, усредненных по всему времени измерений $T = 1$ ч для различных токов. Из рисунка следует, что для выбранных интервалов $r < 7$ см величины структурных функций в основном отри-

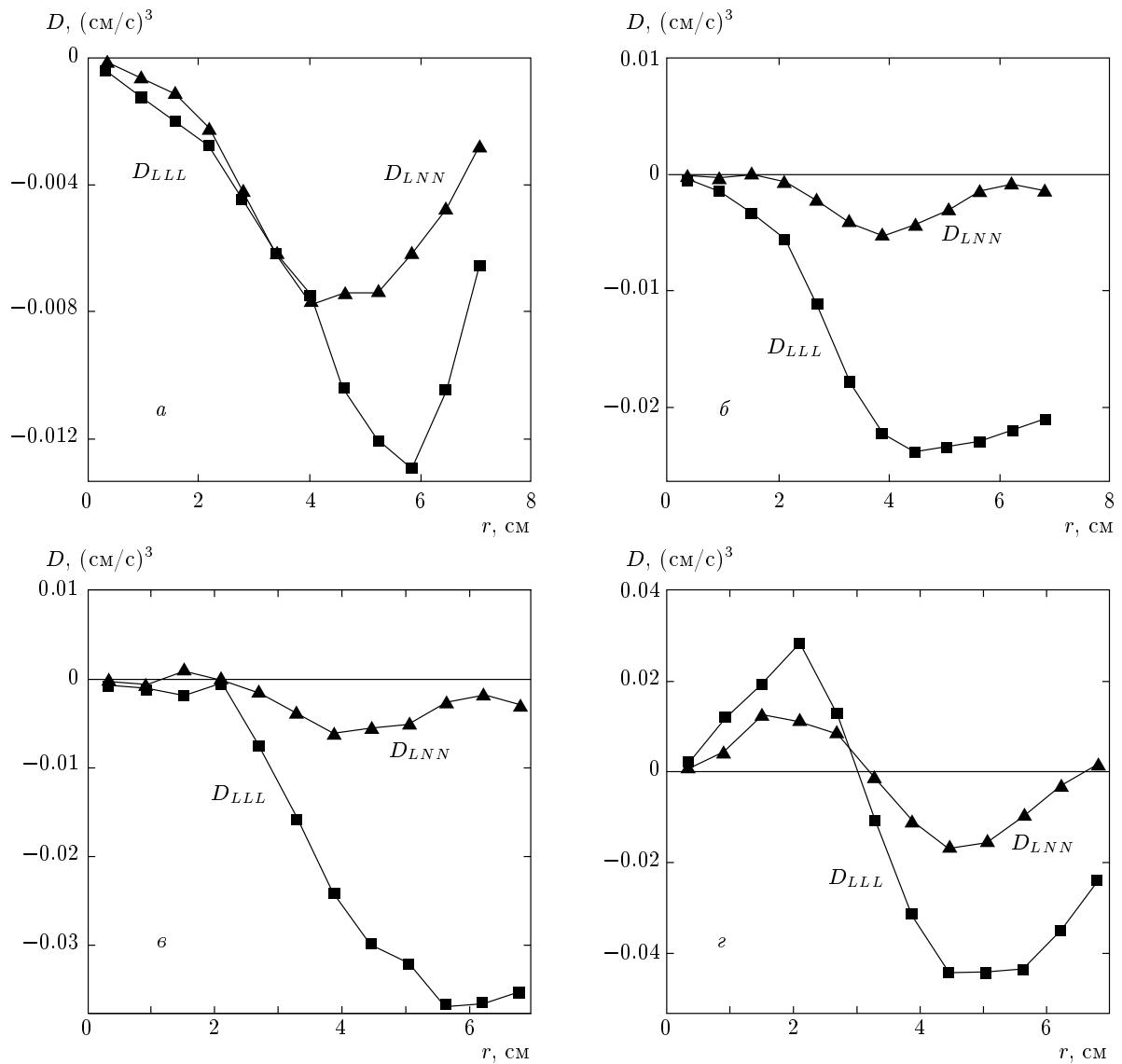


Рис. 3. Зависимости структурных функций третьего порядка $D_{LLL}(r)$ и $D_{LNN}(r)$ для токов 75 (a), 100 (б), 150 (в), 200 (г) мА. Усреднение по всему интервалу измерений $T = 3600$ с (конфигурация 10×8)

цательны (для $I = 200$ мА при $r > 3$ см) и растут по абсолютной величине с ростом r при $r < 6$ см. Использовалось также усреднение по меньшим, чем T , интервалам времени τ , чтобы посмотреть динамику стремления значений средних величин $\langle \cdot \rangle_\tau$ к значениям средних $\langle \cdot \rangle_T$. На рис. 4 показаны средние $D_\tau^{LLL}(r) = \langle (u^L(r))^3 \rangle_\tau$ в зависимости от τ . Каждая линия на рис. 4 — это зависимость от τ величин $\langle (u^L(r))^3 \rangle_\tau$ при фиксированных r , $3.3 \text{ см} < r < 6.8 \text{ см}$. Рисунки показывают, что для недостаточного времени усреднения τ средние $D_\tau^{LLL}(r)$ могут иметь положительный знак, который

меняется при приближении τ к T . В те интервалы времени, когда $D_\tau^{LLL}(r) > 0$, для рассматриваемого квазидвумерного течения существенный вклад вносит источник $P(r)$ (7) (так что $P(r) - 2\varepsilon > 0$), обусловленный неоднородным распределением вертикальной скорости v_z по толщине слоя или отличной от нуля горизонтальной дивергенцией поля скорости. Особенно сильно это заметно для относительно слабого внешнего воздействия $I = 75$ мА, от которого зависит амплитуда горизонтальной скорости в возмущениях $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$ (рис. 1): определяемые ими, в частности, функции D_{LLL} (ток $I = 75$ мА)

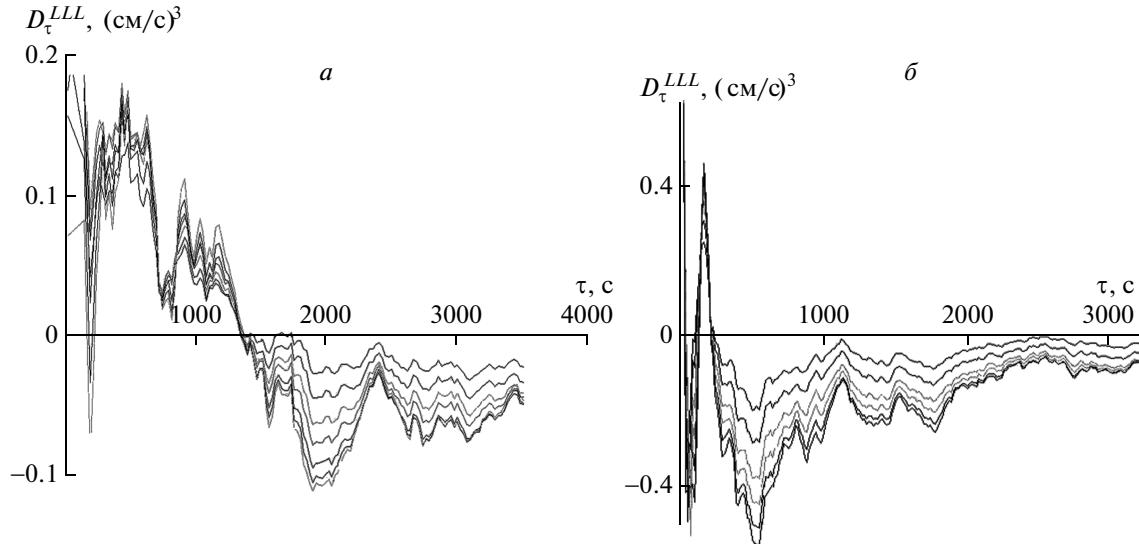


Рис. 4. Зависимости от интервала усреднения τ величин $D_{\tau}^{LLL}(r) = \langle (u^L(r))^3 \rangle_{\tau}$ для различных смещений $3.3 \text{ см} < r < 6.8 \text{ см}$ для токов $I = 150$ (а), 200 (б) мА (конфигурация 10×8)

значительно меньше ($D_{LLL} \sim 0.01 \text{ см}^3/\text{с}^3$, рис. 3а), чем для тока $I = 200$ мА, ($D_{LLL} \sim 0.05\text{--}0.1 \text{ см}^3/\text{с}^3$, рис. 3г, 4б). Для токов $I = 150, 200, 400$ мА при времени усреднения $\tau > 2000$ с можно говорить о переходе в квазиравновесный режим, при котором средние величины слабо меняются.

Для сильного воздействия (ток $I = 200$ мА) структурные функции D_{LLL} и D_{LNN} отрицательны в интервале $3 \text{ см} < r < 7 \text{ см}$. Однако при расширении интервала (до $r \approx 17$ см, что включает в себя достаточно удаленные точки в прямоугольнике усреднения) функции могут менять знак, поскольку для масштабов вихрей, больших выделенных внешним воздействием (рис. 1), $r \approx 6\text{--}8$ см, которые на структурных функциях четко проявляются, может реализовываться обратный каскад энергии в сторону макродвижения в системе. Это было продемонстрировано в работах [14–16, 20]. На рис. 5а для $I = 200$ мА показаны функции D_{LLL} и D_{LNN} при $r < 18$ см. Продольная функция D_{LLL} остается отрицательной до $r \approx 17$ см и в целом по модулю возрастает до $r \approx 14$ см (показано прямой линией на рис. 5а), а функция D_{LNN} после $r \approx 6$ см меняет знак, что свидетельствует о влиянии указанного выше источника $P(r)$ на статистику третьих моментов.

Чтобы более детально рассмотреть возможность перемены знаков функций D_{LLL} и D_{LNN} от отрицательных к положительным для крупных масштабов, где движение становится двумерным, были проведены эксперименты для более сильного воздействия

при $I = 400$ мА. При этом цифровая обработка проведена в прямоугольнике размерами $27.5 \times 22.5 \text{ см}^2$. На рис. 6а показаны функции D_{LLL} и D_{LNN} , полученные для интервала усреднения $T = 1$ ч. Функция D_{LLL} меняет знак и становится положительной при $r > 21$ см. На рис. 6б показаны средние $D_{\tau}^{LLL}(r)$ в зависимости от интервала усреднения τ для нескольких масштабов $14.5 \text{ см} < r < 18.8 \text{ см}$. Как и для токов $I = 150, 200$ мА (рис. 4), средние $D_{\tau}^{LLL}(r)$ принимают значения, равные значениям при равновесном режиме при $\tau > 2000$ с.

Структурные функции второго порядка D_{LL} и D_{NN} для всех внешних воздействий $I = 75, 100, 150, 200$ мА (рис. 5б) обнаруживают насыщение на масштабах вихрей, возбуждаемых взаимодействием тока и системы магнитов ($l \approx 4\text{--}6$ см). При этом D_{LL} и D_{NN} практически равны,

$$D_{NN} = D_{LL}. \quad (17)$$

Этот экспериментальный результат отражает квазидвумерную природу течения в эксперименте, поскольку сильно отличается от соотношений (14) для трехмерного и двумерного случаев. Здесь проявляется неизотропия поля возмущений (несоленоидальных), так как возбуждаемая система вихрей почти симметрична только при поворотах на $\pi/2$. Заметим также, что эти структурные функции показывают четкую линейную зависимость от r при малых значениях (меньше масштаба накачки),

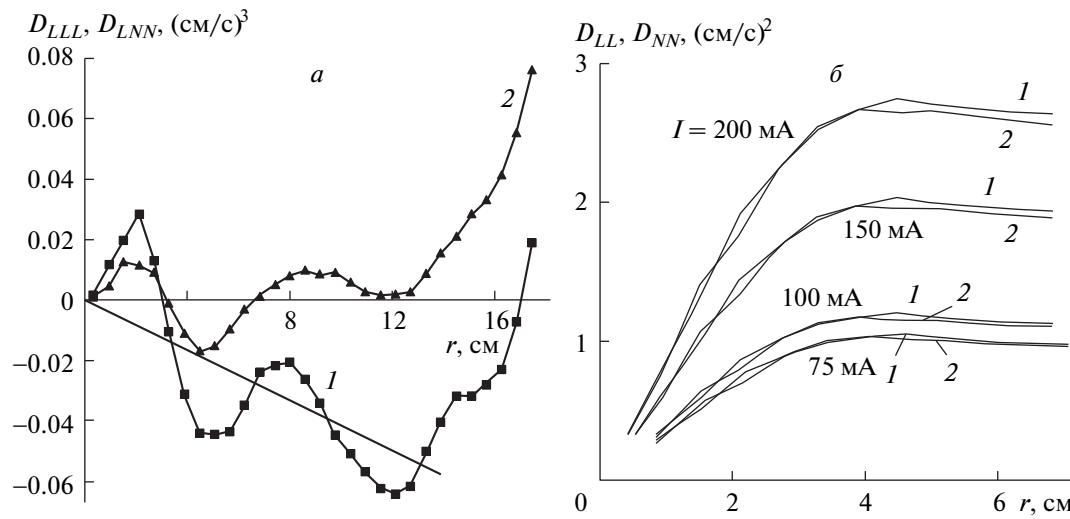


Рис. 5. а) Структурные функции третьего порядка D_{LLL} (1) и D_{LNN} (2) при $r < 18$ см. Ток 200 мА. б) Структурные функции второго порядка D_{LL} (1) и D_{NN} (2). Конфигурация 10×8

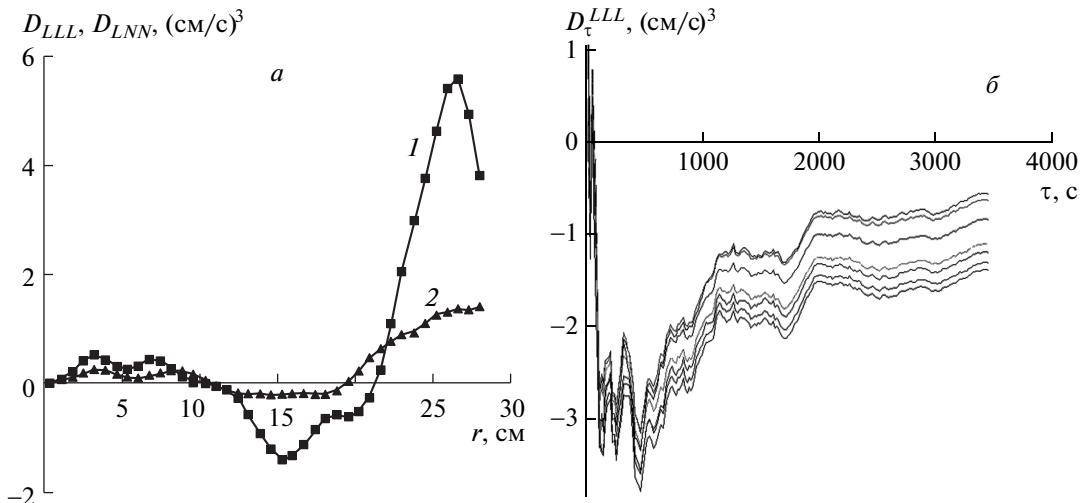


Рис. 6. а) Структурные функции третьего порядка D_{LLL} (1) и D_{LNN} (2) при $r < 27$ см. Ток 400 мА. б) Зависимости от интервала усреднения τ величин $D_{\tau}^{LLL}(r) = \langle (u^L(r))^3 \rangle_{\tau}$ для различных смещений $14.5 \text{ см} < r < 18.8 \text{ см}$ для тока 400 мА. Конфигурация 10×8

$D_{LL} \approx D_{NN} \sim r$, для всех экспериментов. Ниже мы вернемся к этому.

Соотношения между структурными функциями третьего порядка D_{LLL} и D_{LNN} можно оценить с помощью функции размерности (15) $N(r)$. Если в (15) функция D_{LLL} линейна по r , то $N = 1$. Если выполняется (13), т. е. $D_{LLL} = 3D_{LNN}$, то величина $N(r)$ в (15) становится неопределенной независимо от линейности D_{LLL} по r , т. е. значения $N(r)$ — любые, $-\infty \leq N(r) \leq \infty$. На рис. 7 ($I = 200$ мА) для каждого

го r при фиксированном времени измерений и для всех моментов по оси абсцисс отложена величина

$$d = \frac{D_{LLL} - 3D_{LNN}}{|D_{LLL}|} \quad (18)$$

(где в функциях D_{LLL} и D_{LNN} не проведено усреднение по времени, как в (16), а только по площади, в которой измеряется поле скорости), а по оси ординат — величина

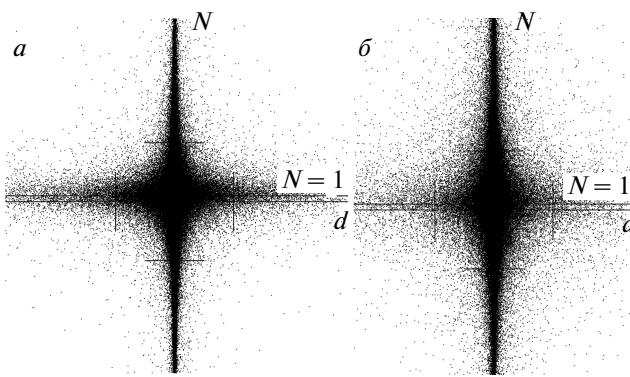


Рис. 7. Экспериментальные значения N (19) при различных d (18) для тока $I = 200$ мА при $0 < r < 7$ см (а) и $7 < r < 17$ см (б). Тонкие отрезки соответствуют $N = \pm 10$ и $d = \pm 10$. Конфигурация 10×8

$$N = 1 + \frac{D_{LLL} - r \frac{dD_{LLL}}{dr}}{D_{LLL} - 3D_{LNN}}. \quad (19)$$

Сгущения точек при $d = 0$ вдоль оси N показывают, что множество данных для D_{LLL} и D_{LNN} удовлетворяют соотношению (13). При этом имеется также сгущение, концентрирующееся вдоль линии $N = 1$, т. е. значительное число данных указывает на линейность по r функции D_{LLL} . Крестообразное сгущение по линиям $N = 1$ и $d = 0$ показывает, что подавляющее число данных для D_{LLL} и D_{LNN} соответствуют приближенной линейности по r и соотношению (13). Очевидно, что статистика (усреднение по времени) выделяет эти зависимости для функций в (16), так как плотность точек на рис. 7 вдоль направлений $N = 1$ и $d = 0$ максимальна. Приближенная линейность D_{LLL} по r отмечается также на рис. 5а. Заметим, что эти соотношения более выражены при небольших величинах r , $0 < r < 7$ см (рис. 7а).

В экспериментах с конфигурацией 27×23 круглых магнитов масштаб притока энергии при действии силы Ампера значительно меньше (около 2 см), чем для рассмотренных выше экспериментов. При этом из-за внесенной вдоль электродов несимметрии расположения магнитных полюсов двумерное поле скорости приобретает ненулевую среднюю по всей площади кюветы завихренность. Ниже рассмотрены результаты экспериментов при действии тока 500 мА, которые различаются небольшим уменьшением энергии (на единицу площади) — эксперимент I, слабым ростом энергии — эксперимент II, а также результаты экспериментов III и IV при постоянном напряжении на электродах, но с убы-

ванием энергии из-за уменьшения тока и соответствующего уменьшения силы Ампера, действующей на жидкость. На рис. 8 нижние кривые показывают энергию на единицу площади (как и на рис. 2) для экспериментов I и II в каждый момент времени. Заметим, что период T измерения в эксперименте I был равен двум часам, II — одному часу. Изменение энергии для указанных экспериментов происходит из-за несимметричной внешней силы, которая в результате приводит к росту струйных течений вблизи границ кюветы с долговременными колебаниями амплитуды. На рис. 9а для эксперимента I показана средняя по площади завихренность

$$\frac{1}{S} \int \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy$$

поля скорости. На рис. 9 видно, что ее величина в среднем по времени приблизительно равна -0.008 с^{-1} , причем дисперсия завихренности составляет примерно 0.015 с^{-1} . Для экспериментов в конфигурации 10×8 с симметричным расположением магнитов отношение величины средней по времени завихренности, близкой к нулю, к ее дисперсии было менее $1/10$. На рис. 9б показаны средние значения $D_{\tau}^{LLL}(r)$ в зависимости от интервала усреднения $\tau < 7200$ с для нескольких масштабов. Как и для токов $I = 150, 200, 400$ мА (рис. 4, 6б), средние $D_{\tau}^{LLL}(r)$ принимают значения, равные значениям при равновесном режиме при $\tau > 2000$ с. На рис. 8 верхние линии показывают зависимости от времени усреднения τ продольных структурных функций второго порядка $D_{\tau}^{LL}(r)$, которые, согласно (8), при $n = 2$ и выполнении в экспериментах I и II приближенного равенства (17) равны энергии разности скоростей в точках, разделенных расстоянием r . В среднем ход кривых соответствует изменению во времени средней энергии на единицу площади (нижние кривые на рис. 8). Рисунки 10 и 11 для экспериментов I и II демонстрируют структурные функции третьего порядка $D_{\tau}^{LLL}(r)$ и $3D_{\tau}^{LNN}(r)$ при $r < 12$ см для различных интервалов усреднения. Вне интервала притока энергии при действии силы Ампера $r \approx 2-3$ см структурные функции отрицательны и, кроме того, $D_{\tau}^{LLL}(r) \approx 3D_{\tau}^{LNN}(r)$, как следует из сравнения рис. 10 и рис. 11. Это соответствует формуле (13).

Отрицательные значения структурных функций вне интервала притока указывает, что основным слагаемым в правой части уравнения (6) является член с отрицательным знаком, пропорциональный трехмерной диссипации энергии, который подавляет возможный приток энергии $P(r)$ (11) за счет от-

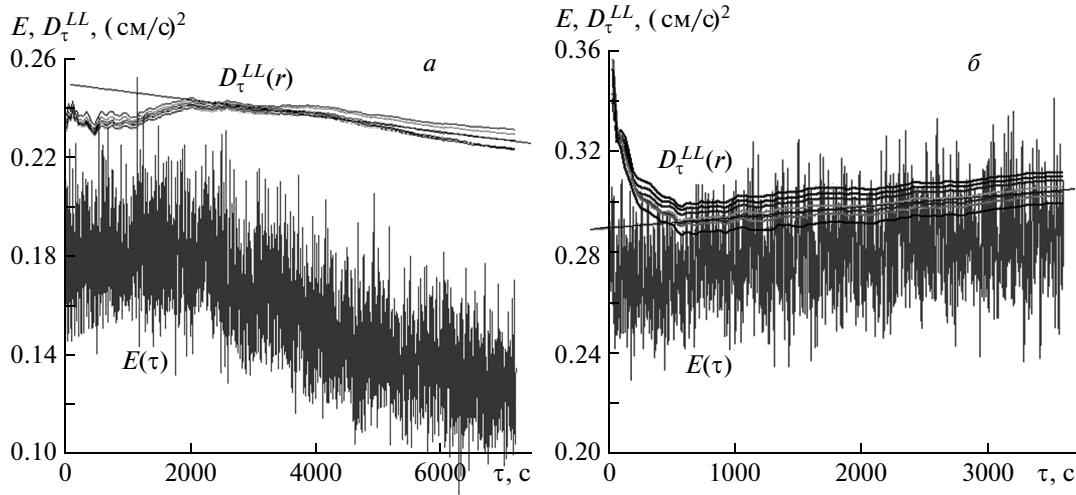


Рис. 8. Нижние кривые — зависимости от времени энергии $E(t)$ на единицу площади горизонтального поля скорости для $I = 500$ мА (конфигурация 27×23) для экспериментов I (a), II (б). Верхние кривые — зависимости от интервала усреднения τ структурных функций второго порядка $D_\tau^{LL}(r) = \langle (u^L(r))^2 \rangle_\tau$ для различных смещений $12.6 \text{ см} < r < 16.3 \text{ см}$ для тока 500 мА (конфигурация 27×23) для экспериментов I (a), II (б)

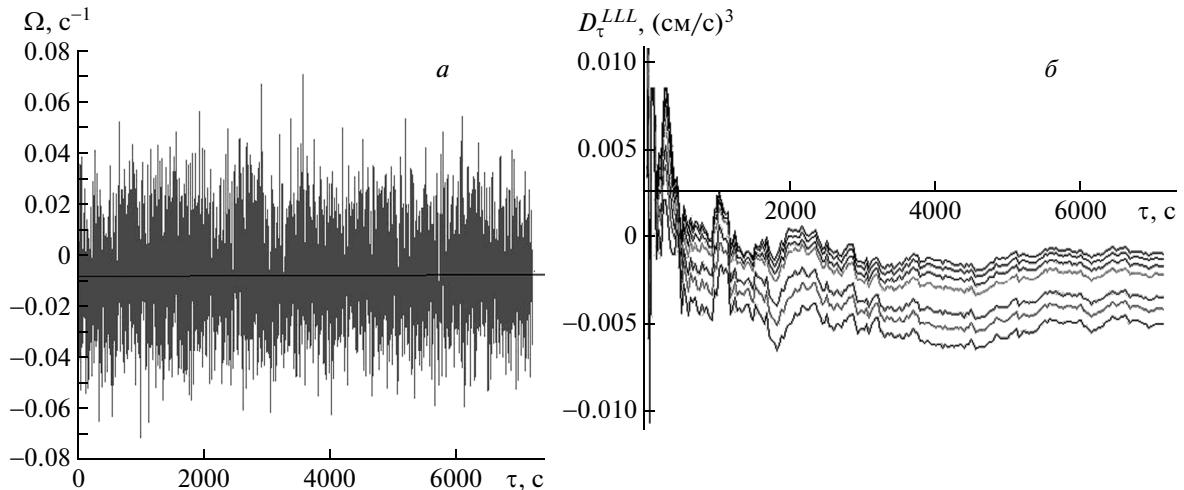


Рис. 9. а) Зависимости от времени завихренности (на единицу площади) горизонтального поля скорости для $I = 500$ мА (эксперимент I, конфигурация 27×23). б) Зависимости от интервала усреднения τ величин $D_\tau^{LLL}(r) = \langle (u^L(r))^3 \rangle_\tau$ для различных смещений $12.6 \text{ см} < r < 16.3 \text{ см}$ для эксперимента I (ток 500 мА, конфигурация 27×23)

личной от нуля двумерной дивергенции поля скорости и пространственной неоднородности среднего поля скорости. Величину $\varepsilon_p = \varepsilon - P(r)/2$ (приведенная диссипация) грубо можно оценить для экспериментов I и II, пользуясь соотношением Колмогорова $|D_{LLL}(r)| \sim \varepsilon r$, что из данных рис. 10а дает $\varepsilon_{pI} \sim 0.001/10 = 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}^3$, а из рис. 10б — $\varepsilon_{pII} \sim 0.005/10 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}^3$.

Входящую в правую часть уравнения (6) произ-

водную от $\langle E \rangle \approx D_{LL}(r, t)$ можно оценить из данных, приведенных на рис. 8: для эксперимента I (рис. 8а, см. прямую линию) имеем

$$\left| \frac{\delta D_{LL}}{\delta t} \right| \approx \frac{0.25 - 0.23}{7200} \approx 3 \cdot 10^{-6};$$

для эксперимента II (рис. 8б)

$$\left| \frac{\delta D_{LL}}{\delta t} \right| \approx \frac{0.30 - 0.29}{3600} \approx 3 \cdot 10^{-6}.$$

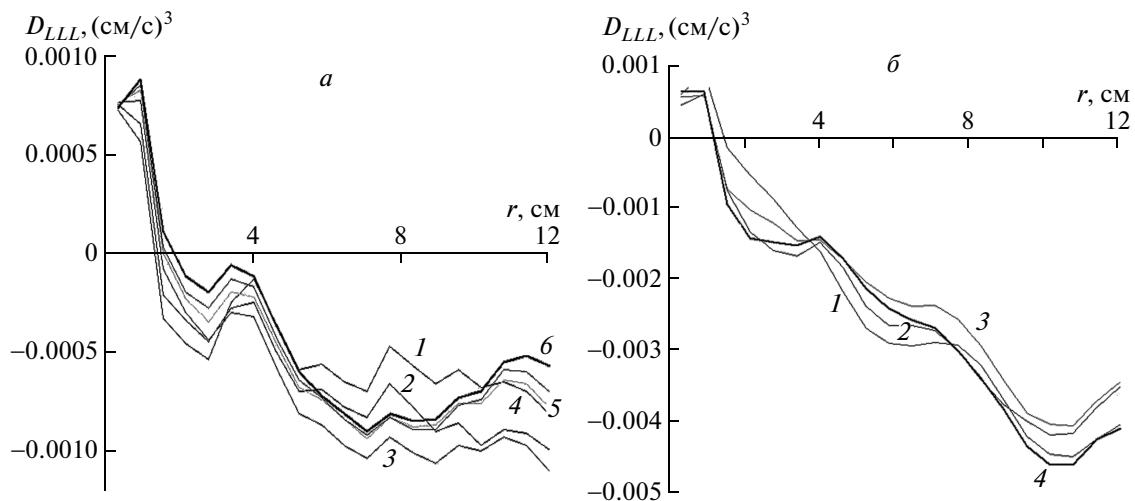


Рис. 10. Структурные функции третьего порядка $D_{LLL}(r)$ при $r < 12$ см для различных интервалов усреднения: $\tau = 2700$ с (1), 3600 с (2), 4500 с (3), 5400 с (4), 6300 с (5), 7200 с (6) для эксперимента I (*a*) и $\tau = 900$ с (1), 1800 с (2), 2700 с (3), 3600 с (4) для эксперимента II (*б*)

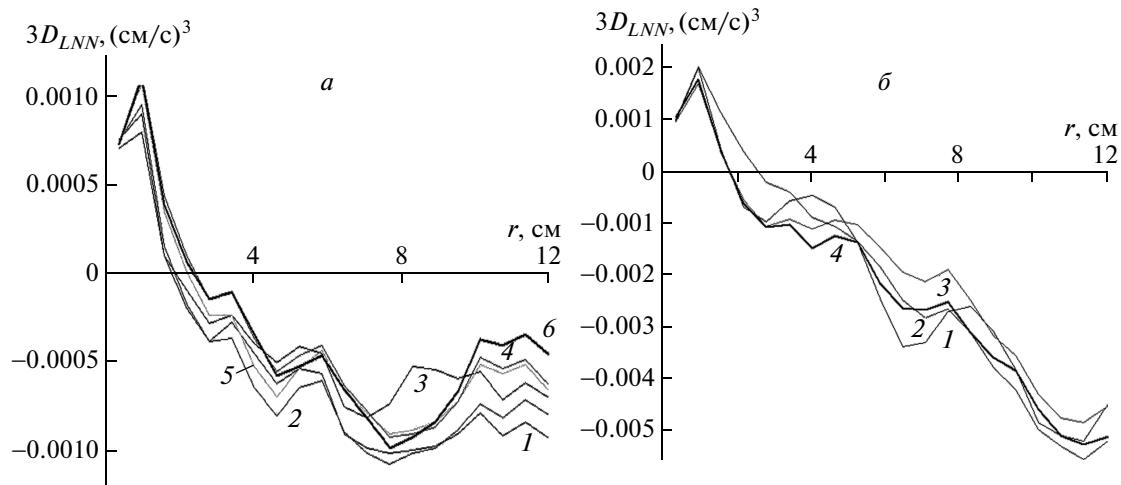


Рис. 11. Структурные функции третьего порядка $3D_{LNN}(r)$ при $r < 12$ см для различных интервалов усреднения: $\tau = 2700$ с (1), 3600 с (2), 4500 с (3), 5400 с (4), 6300 с (5), 7200 с (6) для эксперимента I (*a*) и $\tau = 900$ с (1), 1800 с (2), 2700 с (3), 3600 с (4) для эксперимента II (*б*)

Для этих двух случаев величины приведенной диссипации более чем на порядок превышают величину временной производной энергии.

Можно также оценить на основе экспериментальных данных вклады $P_v(r)$, $P_u(r)$ из (11) в функцию производства энергии $P(r)$ из (7). В верхней части рис. 12 a показаны эти величины для эксперимента IV при усреднении по интервалу времени $\tau < 3600$ с. Из рис. 12 a следует, что $P_v(r)$, $P_u(r)$ по амплитуде 0.001–0.002 соответствуют приведенным выше оцен-

кам для ε_p и оценке для этого эксперимента, которая следует из нижней части рис. 12 a .

Заметим, что приток внешней энергии $\Pi(r)$ для масштабов $r > 2$ –3 см отсутствует, но отличен от нуля приток $P_d(r)$ в (11), (7), поскольку при усреднении по площади прямоугольника, в котором определялись значения горизонтальной скорости, члены вида div_x дают ненулевой вклад, так как на границах этого прямоугольника условия обращения в нуль скоростей не выполняются.

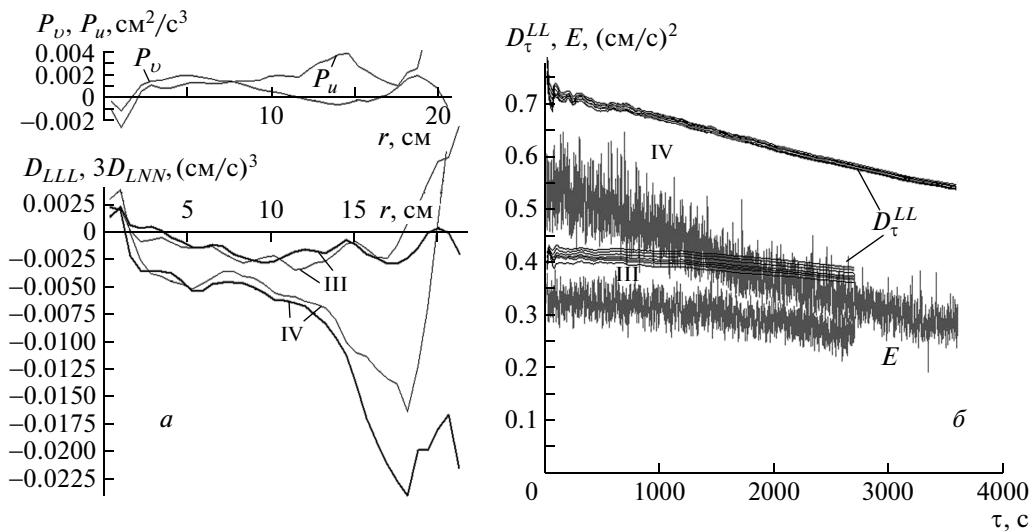


Рис. 12. *a)* Структурные функции третьего порядка $D_{LLL}(r)$ (жирные кривые) и $3D_{LNN}(r)$ (тонкие кривые) для экспериментов III и IV и функции $P_v(r)$, $P_u(r)$ (7) для эксперимента IV при усреднении по всему интервалу измерений. *б)* Зависимости от интервала усреднения τ структурных функций второго порядка $D_\tau^{LL}(r) = \langle (u^L(r))^2 \rangle_\tau$ для различных смещений $12.6 \text{ см} < r < 16.3 \text{ см}$ и зависимости от времени энергии $E(t)$ на единицу площади горизонтального поля скорости для экспериментов III и IV

Указанные выше соотношения величин приведенной диссипации ε_p и $\partial\langle E \rangle / \partial t$, $\varepsilon_p \gg \partial\langle E \rangle / \partial t$, имеют место и для экспериментов III и IV (при постоянном напряжении на электродах). В зависимости от величины начальной концентрации раствора получаются разные по амплитуде структурные функции $D_{LLL}(r) \approx 3D_{LNN}(r)$ (рис. 12*a*), а также различающиеся величиной энергии $E(t)$ и средние $D_\tau^{LL}(r)$ в зависимости от интервала усреднения $\tau < 2700$ с (для III), $\tau < 3600$ с (для IV) и для нескольких масштабов $12.6 \text{ см} < r < 16.3 \text{ см}$ (рис. 12*b*).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в квазидвумерной геометрии рассматривались статистические характеристики турбулентных движений в масштабах, не сильно отличающихся от энергосодержащих масштабов течения, задаваемых внешними силами. В этом состоит отличие от ряда экспериментальных исследований аналогичных течений [14–17, 20], где основные масштабы движений сильно превышали размеры внешне возбуждаемых вихрей. В последнем случае поток энергии в системе осуществляется в сторону укрупнения возникающих структур с диссипацией, описываемой линейным (рэлеевским) трением из-за придонных эффектов (см. [1, 2]). Вязкая трехмерная диссипация энергии в экспери-

ментах работ [14–17] подавлена, так как движение в тонком слое жидкости осуществляется над слоем более тяжелой непроводящей жидкости, так что в результате механизма обратного каскада в системе образуются крупномасштабные циркуляционные движения. Аналогичный эффект проявляется как для двумерных течений, что было показано численным экспериментом в [33] и объяснено теоретически в [34], так и для трехмерных течений в тонких слоях, где наряду с обратным каскадом существует и прямая передача энергии к вертикальным мелкомасштабным компонентам движения [35]. При этом структурная функция третьего порядка D_{LLL} для экспериментов работ [14–17] имеет четкий знак плюс, что отражает двумерную структуру течений. Это же демонстрирует рис. 6*a*, где для крупных масштабов функция D_{LLL} также имеет положительный знак, что свидетельствует об очевидной двумерной динамике для таких масштабов.

Необходимо также отметить, что положительный знак функции D_{LLL} и D_{LNN} при $I = 200, 400 \text{ mA}$ имеют и при малых величинах r : $r < 3 \text{ см}$ для $I = 200 \text{ mA}$ (рис. 5*a*), $r < 10 \text{ см}$ (рис. 6*a*) для $I = 400 \text{ mA}$ (в конфигурации 10×8) и $r < 3 \text{ см}$ для экспериментов I, II, III, IV — рис. 10, 11, 12*a* (в конфигурации 27×23). Фактически это означает, что и на малых масштабах $r \sim 1 \text{ см}$ имеет место приток энергии, который затем перераспределя-

ется в сторону укрупнения масштабов механизмом двумерного каскада. Этот приток энергии к горизонтальной составляющей движения, с одной стороны, обусловлен появлением мелкомасштабных (порядка толщины слоя) трехмерных вихрей в слое из-за условия прилипания на дне. Горизонтальные компоненты этих вихрей и формируют мелкомасштабные движения на поверхности жидкости. С другой стороны, именно на этих масштабах происходит подпитка энергией силой Ампера $\Pi(r)$, и ее величина может превышать остальные слагаемые в уравнении баланса (6).

Для рассмотренного выше случая в масштабах вихрей, возбуждаемых взаимодействием тока и внешнего магнитного поля, имеются вертикальные источники и стоки массы от поверхности к дну слоя жидкости, что нарушает двумерность течения, так что $P(r) \neq 0$ в уравнении (6). А трехмерные эффекты, приводящие к диссипации энергии на возмущениях малых масштабов, возвращают систему к трехмерной динамике со стандартным для трехмерного случая отрицательным знаком функции D_{LLL} . Это проявляется на рис. 3–6, 10–12 особенно при относительно сильном внешнем воздействии ($I = 200, 400$ мА — рис. 5, 6, $I = 500$ мА — рис. 10, 11, эксперименты III, IV — рис. 12). Фактически этот знак определяется знаком правой части уравнения баланса (6), в котором на масштабах r , где внешние силы не действуют (так что $\Pi(r) = 0$), основной вклад дают слагаемые -2ε , $P(r)$ и $-\partial\langle E \rangle / \partial t$. Как было показано выше, последнее слагаемое из приведенных значительно меньше, чем первое.

Интересно отметить, что функция D_{LLL} имеет отрицательный знак в случае турбулентности мыльной пленки в экспериментах [20], где отрицательность D_{LLL} имеет место для масштабов порядка расстояния между зубцами гребенки, вносимой в поток для возбуждения турбулентности. При этом толщина слоя, как и в нашем случае, намного меньше, чем характерный масштаб внешне возбуждаемых движений. В другом, противоположном по масштабу течений случае отрицательность третьих моментов ($D_{LLL} + D_{LNN}$) проявилась для геофизических процессов, а именно, для горизонтальных компонент скорости в интервале масштабов 10–100 км в верхней тропосфере и нижней стратосфере, полученных с помощью измерений концентрации озона (см. [36]).

Другой аспект полученных в экспериментах результатов связан с приближенной линейностью по r функции D_{LLL} и выполнением соотношения (13) для D_{LLL} и D_{LNN} . Сгущение точек вдоль линий $n = 1$ и $d = 0$ на рис. 7, а также данные, приведенные

на рис. 5, 10–12, показывают приближенную линейность по r и неплохую статистику выполнения (13). При этом осцилляции функции D_{LLL} около прямой линии, показанной на рис. 5а, вполне соответствуют ходу функции S_3 (но с обратным знаком) из работы [14] для течения, в котором внешнее крупномасштабное циркуляционное движение отсутствовало, что отвечает условиям экспериментов данной работы.

Наконец, вернемся к линейной зависимости от r структурных функций второго порядка D_{LL} и D_{NN} при r , меньшем расстояния между центрами магнитов (масштаба внешней накачки). Для этих же величин r структурные функции третьего порядка D_{LLL} и D_{LNN} положительны для токов $I = 200, 400$ мА (в конфигурации 10×8 , рис. 3г, 5а, 6а) и всех экспериментов I–IV (в конфигурации 27×23 , рис. 10, 11, 12а) и близки к нулю для слабых внешних воздействий при токах $I = 75, 100, 150$ мА (рис. 3а, б, в). Это указывает, что для данной области масштабов r в уравнении баланса (6) существенный вклад дают слагаемое $P(r)$, обусловленное трехмерными эффектами, и отчасти внешний приток энергии $\Pi(r)$, так что знак правой части (6) становится положительным.

Вклад $P(r)$ в уравнение (6), как уже отмечалось выше, связан с появлением мелкомасштабных (порядка и меньше толщины слоя) трехмерных вихрей (типа подковообразных, шпилькообразных или «стреков» в терминологии турбулентного пограничного слоя [32]), которые дают вклад в генерацию горизонтальных компонент поля скорости. При этом появление этих вихрей случайно во времени и по площади слоя жидкости. Можно считать временную статистику появления таких составляющих горизонтального движения δ -коррелированной, так что на частицы жидкости на поверхности в их мелкомасштабном движении действуют δ -коррелированные силы, которые обеспечивают им приток энергии. Известно (см. [27, 37, 38]), что для лагранжевой скорости частиц жидкости в моменты времени $t + \tau$ и t структурные функции второго порядка $D = \langle (v(t + \tau) - v(t))^2 \rangle$ имеют скейлинг $D = \varepsilon_{in}\tau$, где ε_{in} — приток энергии к частицам, τ — интервал времени, разделяющий частицы. Лагранжевые частицы, разделенные во времени интервалом τ , в среднем по пространству разделены расстоянием $r = \langle u^2 \rangle^{1/2}\tau$, где $\langle u^2 \rangle^{1/2}$ — среднеквадратичная скорость мелкомасштабных движений, связанных с указанными выше трехмерными структурами, поэтому для эйлеровых структурных функций второго порядка получаем

$$D_{LL} \approx D_{NN} = \varepsilon_{in} \langle u^2 \rangle^{-1/2} r, \quad (20)$$

т. е. линейную по r зависимость. Отметим, что указанный переход от лагранжевых характеристик турбулентности к эйлеровым аналогичен использованию гипотезы замороженности Тейлора, а формулы со среднеквадратичной скоростью применялись при рассмотрении функций и спектров для течения между вращающимися дисками (течение Кармана), например, при переходе от частотных спектров поля скорости к пространственным.

В формуле (20) наиболее неопределенной является величина ε_{in} притока энергии с помощью δ -коррелированных сил, которая должна учитывать специфику мелкомасштабных трехмерных движений в вязком пограничном слое над твердой поверхностью. Если средняя горизонтальная скорость в слое имеет порядок 1 см/с, то в вязком пограничном слое толщиной приблизительно 1 мм величина диссипации энергии на единицу массы составляет

$$\nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \sim 0.01 (1/10^{-1})^2 \sim 1 \text{ см}^2/\text{с}^3.$$

Это не средняя величина диссипации, а именно та, которая имеет место в названных выше структурах в вязком пограничном слое. Для того чтобы такие структуры существовали, необходимо, чтобы величина притока ε_{in} имела тот же порядок. Тогда при $\langle u^2 \rangle^{1/2} \sim 1$ см/с приведенная выше формула дает разумную оценку наклона кривых на рис. 5б при $r \rightarrow 0$. Здесь следует заметить, что рассматриваемая асимптотика ($\sim r$) для структурных функций второго порядка имеет явно не колмогоровский тип и включает два размерных параметра: ε_{in} с размерностью диссипации и $\langle u^2 \rangle^{-1/2}$ — среднеквадратичную скорость пульсаций скорости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 10-05-00457, 11-05-01206) и программой Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики».

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов, *Системы гидродинамического типа и их применение*, Наука, Москва (1981).
2. Ф. В. Должанский, Изв. АН СССР, Физика атмосф. и океана **23**, 348 (1987).
3. Ф. В. Должанский, В. А. Крымов, Д. Ю. Манин, УФН **160**, 1 (1990).
4. F. V. Dolzhanskii, V. A. Krymov, and D. Y. Manin, J. Fluid Mech. **241**, 705 (1992).
5. С. Д. Данилов, Д. Гуарий, УФН **170**, 921 (2000).
6. Ф. В. Должанский, Д. Ю. Манин, ДАН СССР **322**, 1065 (1992).
7. В. М. Пономарев, А. А. Хапаев, И. Г. Якушкин, Изв. АН СССР, Физика атмосф. и океана **44**, 48 (2008).
8. В. М. Пономарев, А. А. Хапаев, И. Г. Якушкин, ДАН **425**, 821 (2009).
9. Н. Ф. Бондаренко, М. З. Гак, Ф. В. Должанский, Изв. АН СССР, Физика атмосф. и океана **15**, 101 (1979).
10. S. D. Danilov, F. V. Dolzhansky, V. A. Dovzhenko, and V. A. Krymov, Chaos **6**, 297 (1994).
11. С. Д. Данилов, В. А. Довженко, Ф. В. Должанский, В. Г. Кошина, ЖЭТФ **122**, 57 (2002).
12. A. R. Cieslik, L. P. J. Kamp, H. J. H. Clercx, and G. J. F. van Heijst, J. Hydro-Environment Res. № 4, 89 (2010).
13. R. A. D. Akkermans, A. R. Cieslik, L. P. J. Kamp, R. R. Trieling, H. J. H. Clercx, and G. J. F. van Heijst, Phys. Fluids **20**, 116601 (2008).
14. M. G. Shats, H. Xia, H. Punzmann, and G. Falkovich, Phys. Rev. Lett. **99**, 164502 (2007).
15. H. Xia, H. Punzmann, G. Falkovich, and M. G. Shats, Phys. Rev. Lett. **101**, 194504 (2008).
16. H. Xia, M. G. Shats, and H. Punzmann, Adv. in Turbulence XII, ed. by B. Eckhardt, Springer Proc. Phys. **132**, 709, Springer-Verlag (2009).
17. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, Phys. Fluids **21**, 125101 (2009).
18. J. Sommeria, J. Fluid Mech. **170**, 139 (1986).
19. H. Kellay and W. I. Goldburg, Rep. Progr. Phys. **65**, 845 (2002).
20. A. Belmonte and W. I. Goldburg, Phys. Fluids **11**, 1196 (1999).
21. А. Е. Гледзер, Изв. РАН, Физика атмосф. и океана **39**, 466 (2003).
22. С. В. Кострыкин, А. А. Хапаев, И. Г. Якушкин, ЖЭТФ **139**, 395 (2011).
23. D. K. Lilly, J. Atmos. Sci. **40**, 2026 (1989).

- 24.** Ю. И. Портнягин, *Измерение ветра на высотах 90–100 км наземными методами*, Гидрометеоиздат, Ленинград (1978).
- 25.** А. Н. Фахрутдинова, *Циркуляция мезосфера-термосфера при низких широтах*, Казан. гос. унив., Казань (2004).
- 26.** О. Г. Чхетиани, С. Л. Шалимов, ДАН **431**, 113 (2010).
- 27.** А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, ч. 2, Наука, Москва (1967).
- 28.** H. O. Rasmussen, Phys. Fluids **11**, 3495 (1999).
- 29.** А. М. Обухов, Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 24, 3 (1954).
- 30.** G. Falkovich, I. Fouxon, and Y. Oz, J. Fluid Mech. **644**, 465 (2010).
- 31.** J. Wells and Ya. D. Afanasyev, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **98**, 1 (2004).
- 32.** B. J. Cantwell, Ann. Rev. Fluid Mech. **13**, 457 (1981).
- 33.** V. Chertkov, C. Connaughton, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **99**, 084501 (2007).
- 34.** V. Chertkov, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. E **81**, 015302(R) (2010).
- 35.** A. Celani, S. Musacchio, and D. Vincenzi, Phys. Rev. Lett. **104**, 184506 (2010).
- 36.** J. Y. N. Cho and E. Lindborg, J. Geophys. Res. **106**, 223 (2001).
- 37.** Г. С. Голицын, Изв. РАН, Физика атмосф. и океана **37**, 438 (2001).
- 38.** Е. Б. Гледзер, Г. С. Голицын, ДАН **433**, 466 (2010).