

## К ТЕОРИИ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДАХ С РЕЗКИМИ ГРАНИЦАМИ

*Д. В. Карловец\**

*Национальный исследовательский томский политехнический университет  
634 050, Томск, Россия*

Поступила в редакцию 13 ноября 2010 г.

Рассмотрено поляризованное излучение, возникающее при равномерном и прямолинейном движении точечного заряда в вакууме вблизи сред, обладающих конечной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon''$  и резкими границами. Развита метод, в котором поляризованное излучение представлено как поле тока, индуцированного в веществе полем движущегося заряда. Получено решение задачи об излучении, возникающем при движении заряда по оси вакуумного цилиндрического канала в тонком экране конечного радиуса и конечной проницаемости. В зависимости от параметров задачи полученное решение описывает различные типы излучения: черенковское, переходное, дифракционное. В частности, при стремлении радиуса канала к нулю, а внешнего радиуса экрана к бесконечности найденное выражение для излученной энергии совпадает с известным решением о переходном излучении в пластинке. В другом частном случае идеальной проводимости ( $\varepsilon'' \rightarrow \infty$ ) полученная формула совпадает с известными результатами для дифракционного излучения от круглого отверстия в бесконечно тонком экране. Найденное решение задачи об излучении, генерируемом при пролете заряда вблизи тонкого прямоугольного экрана, обладающего конечной диэлектрической проницаемостью. Оно описывает дифракционный и черенковский механизмы излучения и учитывает возможные многократные переотражения излучения внутри экрана. Также найдено решение задачи об излучении, генерируемом при пролете частицы вблизи тонкой решетки, состоящей из конечного числа стрипов прямоугольного сечения и конечной диэлектрической проницаемости, разделенных вакуумными промежутками (излучение Смита – Парселла). В частном случае идеальной проводимости полученное выражение для излученной энергии совпадает с известным результатом модели поверхностных токов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Поле заряженной частицы, движущейся равномерно и прямолинейно в среде, может приводить к динамической поляризации атомных оболочек и возникновению излучения, называемого в микроскопической теории поляризованным [1]. В макроскопической теории движение частицы через среду (либо вблизи среды) с резкими границами приводит к различным типам поляризованного излучения: черенковскому (нет границ), переходному (частица пересекает границу раздела сред), дифракционному (частица движется вблизи границы раздела) и т. п. Точных решений задачи о поляризованном излучении для сред с резкими границами известно немного. Важнейшими из точно решаемых задач являются задачи о переходном излучении в пластинке ко-

нечной диэлектрической проницаемости [2], дифракционного излучения от идеально проводящих полуплоскости [3, 4] и клина [5, 6]. Решение подобных задач в более сложных геометриях затруднено в связи со сложностью постановки граничных условий. Известно, например, что строгое решение задачи об излучении заряда при его движении вблизи идеально проводящей решетки (так называемое излучение Смита – Парселла) выражается в виде бесконечных рядов и приводит к системе из бесконечного числа уравнений [7, 8]. Однако именно поверхности со сложным профилем представляют практический интерес. Поэтому актуальным является развитие приближенных методов для решения задачи о поляризованном излучении.

В данной работе развит метод, в котором поляризованное излучение представлено как поле тока, индуцированного внутри вещества полем равномерно и прямолинейно движущегося точечного за-

\*E-mail: d.karlovets@gmail.com

ряда. Преимущество данного метода заключается в возможности находить характеристики различных видов поляризованного излучения (в том числе в случае, когда несколько видов излучения генерируются одновременно) для широкого диапазона форм поверхности с учетом реальных диэлектрических свойств вещества и частотной дисперсии. Как будет показано, в ряде частных случаев полученные с помощью развиваемого метода результаты переходят в известные в литературе выражения для черенковского, переходного и дифракционного излучения (а также параметрического рентгеновского излучения, см. [9]).

Работа построена следующим образом. В разд. 2 излагается метод индуцированных токов и находится поле излучения, генерируемое при движении заряда по оси вакуумного цилиндрического канала в экране конечных диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon''$ , толщины и радиуса. Далее рассматривается выход излучения из вещества в вакуум и с помощью известной теоремы взаимности находится излученная в вакуум энергию в направлениях «вперед» и «назад». В разд. 3 получено решение задачи об излучении, возникающем при пролете частицы вблизи прямоугольного экрана конечных размеров и диэлектрической проницаемости. В отличие от известного ранее решения проведен учет возможных многократных переотражений поля излучения внутри экрана. В разд. 4 находится решение задачи об излучении, генерируемом частицей, движущейся вблизи тонкой решетки, состоящей из стрипов (пластинок) прямоугольного сечения и конечной диэлектрической проницаемости. Обсуждение результатов, в частности, границ применимости полученных решений приведено в разд. 5.

## 2. ПОЛЯРИЗАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, ГЕНЕРИРУЕМОЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ В ЭКРАНЕ КОНЕЧНЫХ ТОЛЩИНЫ И РАДИУСА

### 2.1. Излучение внутри экрана конечной диэлектрической проницаемости

Рассмотрим однородную и изотропную немагнитную среду с комплексной проводимостью, обладающую частотной дисперсией:

$$\sigma(\omega) = \frac{i\omega}{4\pi}(1 - \varepsilon(\omega)). \quad (1)$$

Заряженная частица с энергией

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

движущаяся с постоянной скоростью  $v = \beta c$  в веществе, индуцирует в нем плотность поляризованных токов:

$$\mathbf{j}_{pol} = \sigma(\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^{pol}(\mathbf{j}_{pol})), \quad (2)$$

где  $\mathbf{E}^0 \equiv \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega)$ ,  $\mathbf{E}^{pol} \equiv \mathbf{E}^{pol}(\mathbf{r}, \omega)$  — соответственно фурье-образы поля частицы в вакууме и поля индуцированных в веществе токов.

Для определения поля поляризованного излучения, распространяющегося внутри вещества в виде поперечных волн, необходимо решать «вакуумные» уравнения Максвелла с плотностью токов  $\mathbf{j}_{pol}$  в правой части. Но уравнение для плотности тока (2) является интегральным. Пренебрежение интегральным членом возможно, если проводимость среды невелика:  $|\varepsilon - 1| \ll 1$ , что позволяет находить соответствующие решения для рентгеновской части спектра [9, 10]. В общем случае, когда параметр  $|\varepsilon - 1|$  не является малым, действующее на каждый атом и молекулу поле уже не совпадает с вакуумным  $\mathbf{E}^0$ . Однако в этом случае можно поступить аналогично тому, как это делается при выводе макроскопических уравнений Максвелла. Перенесем интегральный член  $\sigma \mathbf{E}^{pol}$  в левую часть этих уравнений. Для напряженности магнитного поля получим уравнение

$$\left(\Delta + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{H}^{pol}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) \text{rot } \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega). \quad (3)$$

Решение данного уравнения в волновой зоне дает поле поляризованного излучения, испущенного атомами и молекулами вещества под воздействием поля частицы в результате так называемых далеких столкновений, когда потери энергии частицей пренебрежимо малы по сравнению с ее полной энергией. Как будет показано ниже, данное решение совпадает с полем черенковского излучения в бесконечной среде.

Если поляризованные токи индуцируются в ограниченном объеме вещества, т. е. среда имеет границы, то интегрирование в решении уравнения (3) будет выполняться лишь по области  $V_T$ , занимаемой токами:

$$\mathbf{H}^{pol}(\mathbf{r}, \omega) = \text{rot} \frac{1}{c} \int_{V_T} \sigma(\omega) \mathbf{E}^0(\mathbf{r}', \omega) \times \frac{\exp(i\sqrt{\varepsilon(\omega)}\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (4)$$

В ограниченном объеме вещества помимо волн поляризованного излучения присутствуют также отраженные от границ раздела волны, не описываемые выражением (4). Их учет, однако, можно провести позднее, рассматривая выход поля излучения из среды в вакуум. Вычисляя в (4) ротор, получаем (зависимость  $\varepsilon$  от частоты подразумевается)

$$\mathbf{H}^{pol}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int_{V_T} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \sigma(\omega) \mathbf{E}^0(\mathbf{r}', \omega) \times \left( i\sqrt{\varepsilon} \frac{\omega}{c} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \frac{\exp(i\sqrt{\varepsilon}\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (5)$$

Как видно из данного выражения, границы волновой зоны определяются следующими неравенствами:

$$r \gg \lambda/\sqrt{\varepsilon(\omega)}, \quad r \gg r'_{eff}, \quad (6)$$

где  $r'_{eff}$  определяет эффективную область вещества, занимаемую токами и дающую основной вклад в интеграл (5). Заметим, что первое из условий волновой зоны не может быть выполнено вблизи нулей диэлектрической проницаемости:  $\varepsilon(\omega) \rightarrow 0$ . Это соответствует известному факту отсутствия уходящих на бесконечность поперечных волн в веществе на резонансных частотах [11]. При выполнении условий (6) выражение для поля индуцированных токов описывает поперечное поле излучения в веществе:

$$\mathbf{H}^{pol} \approx \mathbf{H}^R = \sqrt{\varepsilon} \frac{i\omega}{c^2} \frac{\exp(ir\sqrt{\varepsilon}\omega/c)}{r} \mathbf{e} \times \int_{V_T} \sigma(\omega) \mathbf{E}^0(\mathbf{r}', \omega) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') d^3r', \quad (7)$$

где  $\mathbf{k} = \sqrt{\varepsilon}\omega/c$  — волновой вектор излучения в среде. Из уравнений Максвелла следует, что напряженность электрического поля определяется как

$$\mathbf{E}^{pol} \approx \mathbf{E}^R = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{e} \times \mathbf{H}^R. \quad (8)$$

Рассмотрим излучение, возникающее при равномерном и прямолинейном движении заряженной частицы по оси вакуумного цилиндрического канала радиуса  $a$  в экране с толщиной  $d$  и внешним радиусом  $b$  (см. рис. 1а). Для нахождения поля излучения необходимо взять объемный интеграл в (7), где поле частицы определяется известным выражением (см., например, [12]):

$$\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e\omega}{\pi v^2 \gamma} \times \left( \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} K_1 \left[ \frac{\omega \rho}{v\gamma} \right] - \frac{i \mathbf{v}}{\gamma v} K_0 \left[ \frac{\omega \rho}{v\gamma} \right] \right) \exp\left(i \frac{\omega}{v} z\right), \quad (9)$$

где  $\boldsymbol{\rho} = \{x, y\}$ ,  $K_0, K_1$  — модифицированные функции Бесселя второго рода. Для напряженности магнитного поля излучения имеем

$$\mathbf{H}^R(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e\omega^2(\varepsilon - 1)}{4\pi^2 v^2 c \gamma} \frac{\exp(ir\sqrt{\varepsilon}\omega/c)}{r} \mathbf{k} \times \int_a^b \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-d}^0 dz' \left( \frac{\boldsymbol{\rho}'}{\rho'} K_1 \left[ \frac{\omega \rho'}{v\gamma} \right] - \frac{i \mathbf{v}}{\gamma v} K_0 \left[ \frac{\omega \rho'}{v\gamma} \right] \right) \exp\left(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' + i \frac{\omega}{v} z'\right), \quad (10)$$

где единичный вектор излучения в среде имеет вид

$$\mathbf{e} = \{\sin \Theta \cos \phi, \sin \Theta \sin \phi, \cos \Theta\}. \quad (11)$$

Подчеркнем, что получаемое таким образом поле поляризованного излучения не содержит информации ни о возможных отражениях волн от границ самого вещества, ни о возможных переотражениях волн внутри вакуумного канала. Если переотражения волн внутри вещества учесть можно (см. следующий раздел), то переотражения волн в вакуумном канале в рамках данного подхода учесть не представляется возможным. Однако если ограничиться случаем не слишком малых энергий частицы ( $\beta \lesssim 1$ ), то данное ограничение является существенным лишь для достаточно больших толщин экрана, поскольку черенковское излучение, как известно, не выходит в вакуум из среды через плоскость, параллельную вектору скорости частицы (полное внутреннее отражение: см. [13] и ниже разд. 4), а дифракционное излучение распространяется под малыми в релятивистском случае углами  $\theta \sim \gamma^{-1} \ll 1$ . Для вывода количественного условия предположим, что волна испускается под углом  $\theta = \gamma^{-1}$  в точке  $z = -d$  и доходит до противоположного края канала в точке  $z = 0$  (см. рис. 1б). Тогда условием отсутствия вторичных переотражений излучения внутри канала и, следовательно, условием применимости полученных ниже формул будет неравенство

$$d \ll d_{max} = 2a\gamma. \quad (12)$$

Если радиус канала в несколько раз больше длины волны излучения (в противном случае переотражение можно просто не учитывать), то величина  $d_{max}$  на порядок больше параметра  $\gamma\lambda$ . Для терагерцевого диапазона длин волн и релятивистских энергий частицы экспериментальные значения толщины экрана обычно удовлетворяют условию применимости модели, поскольку в этом случае  $d_{max}$  составляет величину в десятки сантиметров и больше. Для

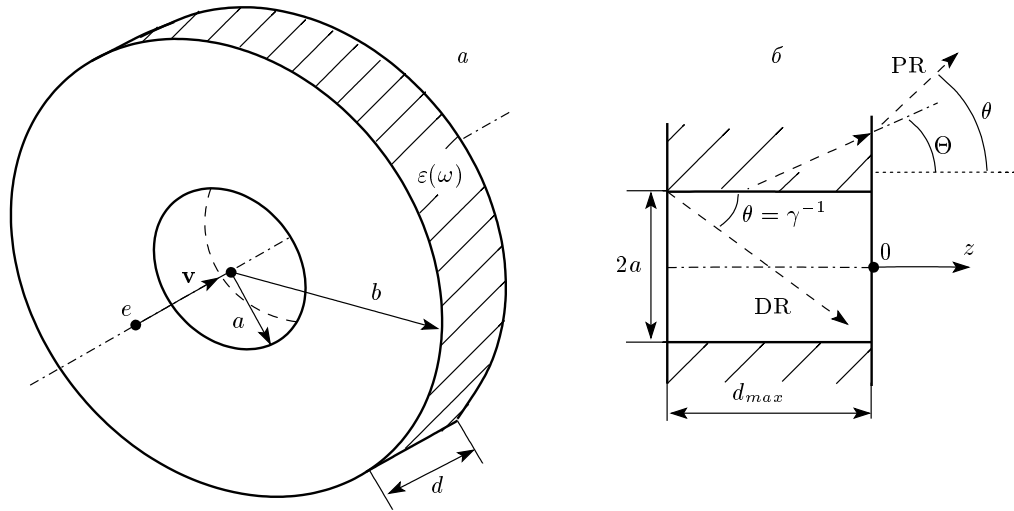


Рис. 1. а) Схема генерации поляризационного излучения заряженной частицей, движущейся в цилиндрическом канале. б) К определению границ применимости модели. PR — поляризационное излучение, DR — дифракционное излучение

оптического диапазона модель справедлива лишь для достаточно больших энергий:  $\gamma \sim 10^3$  и выше. Наконец, в рентгеновской части спектра отражение также можно не учитывать.

Интегрирование в формуле (10) проводится с использованием известных соотношений для функций Бесселя [14]. Результат имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^R(\mathbf{r}, \omega) = & \frac{e}{2\pi c} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}(\varepsilon - 1) \frac{\exp(ir\sqrt{\varepsilon}\omega/c)}{r} \times \\ & \exp\left(-id\frac{\omega}{c}\left(\frac{1}{\beta} - \sqrt{\varepsilon} \cos \Theta\right)\right) - 1 \\ & \times \frac{1}{(1 - \beta\sqrt{\varepsilon} \cos \Theta)(1 + \varepsilon(\beta\gamma \sin \Theta)^2)} \{\sin \phi, -\cos \phi, 0\} \times \\ & \times \left(\sin \Theta (\gamma^{-1} - \beta\gamma\sqrt{\varepsilon} \cos \Theta) \left(aJ_0\left(a\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon} \sin \Theta\right) \times \right. \right. \\ & \times K_1\left(a\frac{\omega}{v\gamma}\right) - bJ_0\left(b\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon} \sin \Theta\right) K_1\left(b\frac{\omega}{v\gamma}\right) - \\ & - (\cos \Theta + \beta\sqrt{\varepsilon} \sin^2 \Theta) \left(aJ_1\left(a\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon} \sin \Theta\right) \times \right. \\ & \times K_0\left(a\frac{\omega}{v\gamma}\right) - bJ_1\left(b\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon} \sin \Theta\right) \times \\ & \left. \left. \times K_0\left(b\frac{\omega}{v\gamma}\right)\right)\right). \end{aligned} \quad (13)$$

В частном случае слоя толщины  $d$  (при этом  $a \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow \infty$ ) для функций Бесселя, зависящих от переменной  $a$ , имеем

$$aJ_0K_1 \rightarrow \frac{v\gamma}{\omega}, \quad aJ_1K_0 \rightarrow 0. \quad (14)$$

Функции, зависящие от  $b$ , обращаются в нуль ввиду экспоненциального затухания функций  $K_0, K_1$  с ростом  $b$  [14]. В случае прозрачной среды энергия, излученная в слое в единичный интервал частот, находится как

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega} = & \int \frac{cr^2}{\sqrt{\varepsilon}} |\mathbf{H}^R|^2 d\Omega = \frac{2e^2\beta^2}{\pi c} \sqrt{\varepsilon} \times \\ & \times \int_0^\pi \frac{\sin^2\left(\frac{d}{2}\frac{\omega}{v}(1 - \beta\sqrt{\varepsilon} \cos \Theta)\right)}{(1 - \beta\sqrt{\varepsilon} \cos \Theta)^2} \times \\ & \times \left[\frac{(\varepsilon - 1)(1 - \beta^2 - \beta\sqrt{\varepsilon} \cos \Theta)}{1 - \beta^2 + (\beta\sqrt{\varepsilon} \sin \Theta)^2}\right]^2 \sin^3 \Theta d\Theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Вблизи черенковского угла  $\cos \Theta = 1/\beta\sqrt{\varepsilon}$  члены в квадратных скобках, связанные с переходным механизмом излучения, обращаются в единицу. Формула (15) в этом случае полностью совпадает с аналогичным выражением, полученным в теории черенковского излучения в слое конечной толщины (см., например, [15, 16]). Для слоя большой толщины интерференционный член переходит в дельта-функцию:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2\left(\frac{d}{2}\frac{\omega}{v}(1 - \beta\sqrt{\varepsilon} \cos \Theta)\right)}{(1 - \beta\sqrt{\varepsilon} \cos \Theta)^2} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{d}{2} \frac{\omega}{v} \pi \delta(1 - \beta\sqrt{\varepsilon} \cos \Theta), \end{aligned} \quad (16)$$

после чего интегрирование в (15) дает обычную формулу Тамма–Франка для черенковского излучения в безграничной прозрачной среде:

$$\frac{1}{d} \frac{dW}{d\omega} = \frac{e^2}{c^2} \omega \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon} \right). \quad (17)$$

### 2.2. Энергия, излученная в вакууме

Найденное поле поляризационного излучения (13) имеет вид сферической волны, поскольку получено в предположении, что наблюдатель находится в волновой зоне. Однако поле волны, падающей из поглощающей среды на границу экрана, расположенную в плоскости  $z = 0$  (см. рис. 1а), разумеется, отличается от (13). Для корректного решения задачи о преломлении волны из среды в вакуум необходимо использовать известный принцип взаимности [17]:

$$(\mathbf{E}^{R(vac)}, \mathbf{d}^{(vac)}) = (\mathbf{E}^{R(m)}, \mathbf{d}^{(m)}), \quad (18)$$

где  $\mathbf{E}^{R(vac)} \equiv \mathbf{E}^{R(vac)}(\mathbf{r}, \omega)$  — искомое поле излучения в вакууме, создаваемое диполем с моментом  $\mathbf{d}$ , расположенным в среде;  $\mathbf{E}^{R(m)} \equiv \mathbf{E}^{R(m)}(\mathbf{r}, \omega)$  — поле излучения в среде, создаваемое таким же диполем, расположенным в вакууме далеко от границы раздела (в волновой зоне). Дипольный момент  $\mathbf{d}$  будем полагать ориентированным перпендикулярно поверхности, через которую рассматривается выход излучения, т. е. в нашем случае по оси  $z$ . Физически такая ориентация означает, что тонкий проводящий экран на больших расстояниях является двойным слоем. Учитывая, что вектор  $\mathbf{E}^R$  перпендикулярен  $\mathbf{e}$ , из формулы (18) можно найти модуль поля излучения в вакууме

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}^{R(vac)}| &= \left| \frac{\sin \Theta}{\sin \theta} \mathbf{E}^{R(m)} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{E}^{R(m)} \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{H}^{R(m)} \right|. \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь использован закон Снеллиуса для связи «вакуумного» угла  $\theta$  и угла в среде  $\Theta$ , а также тот факт, что для поля сферической волны в среде выполняется равенство

$$|\mathbf{E}^{R(m)}| = \varepsilon^{-1/2} |\mathbf{H}^{R(m)}|.$$

Связь между входящими в формулу (13) углами излучения в среде и углами излучения в вакууме можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right\}. \quad (20)$$

Тогда в соответствии с формулой (19) необходимо найти магнитное поле в среде в случае, когда поле падающей из вакуума на границу раздела волны выражается через поле (13), т. е. решить обратную задачу. При этом для проводящих сред можно ограничиться использованием обычных френелевских законов для одной границы раздела, т. е. пренебречь волнами, отраженными внутри вещества от второй границы экрана, расположенной в плоскости  $z = -d$ . Такая программа была реализована в нашей предыдущей работе [18]. В общем случае поле падающего на границу раздела излучения уже не равно полю излучения «вперед» (13), поскольку волны излучения «назад», распространяющиеся под углами  $\Theta > \pi/2$ , также могут выйти в вакуум через переднюю грань пластинки, отразившись от задней грани. Кроме того, преломление падающей из вакуума волны внутрь экрана должно рассматриваться с учетом возможных многократных переотражений. Здесь необходимо сделать существенную оговорку, касающуюся рассматриваемых толщин экрана  $d$ . Если размеры области, через которую рассматривается выход излучения в вакуум, много больше толщины экрана (тонкий экран), а среда обладает отличным от нуля поглощением, то волнами, отраженными от верхней и нижней граней пластинки, можно пренебречь. Действительно, при выполнении неравенства  $b - a \gg d$  на верхнюю и нижнюю грани экрана падают лишь волны черенковского излучения с  $\Theta \approx \pi/2$ , что соответствует значениям  $\varepsilon' \gg 1$ . Данные волны, как уже говорилось, испытывают полное внутреннее отражение и могут выйти в вакуум через переднюю грань пластинки под углами  $\theta \approx \pi/2$ . Мы еще вернемся к данному вопросу в разд. 5.

С учетом приведенных рассуждений будем полагать, что падающая на границу раздела волна состоит из поля излучения «вперед» (13), обозначаемого ниже индексом ( $F$ ), а также поля излучения «назад», отраженного от задней стенки экрана в плоскости  $z = -d$ , (индекс ( $B$ )). Поле излучения «назад» находится из формулы (13), как обычно, заменой  $z$ -проекции волнового вектора или заменой  $\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \rightarrow -\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}$ . При возведении величин (19) в квадрат выражение  $|\mathbf{H}^{R(m)}|^2$  необходимо представить в виде суммы квадратов модулей компонент поля, одна из которых перпендикулярна плоскости падения волны на границу раздела, а вторая лежит в плоскости падения. Учитывая, что лежащая в плоскости падения компонента магнитного поля связана с перпендикулярной плоскости падения компонентой электрического поля через  $\sqrt{\varepsilon}$ , для

энергии, излученной в вакуум в полупространство  $z > 0$ , окончательно получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} &= cr^2 |\mathbf{E}^{R(vac)}|^2 = \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \Big|_{\perp} + \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \Big|_{\parallel} = \\ &= \frac{cr^2}{|\varepsilon|^2} \left( |f_H|^2 |H_{\perp(F)}^R + R_H H_{\perp(B)}^R|^2 + \right. \\ &\quad \left. + |\sqrt{\varepsilon} f_E|^2 |H_{\parallel(F)}^R + R_E H_{\parallel(B)}^R|^2 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что при падении волны (13) из вакуума амплитуда сферической волны должна браться без множителя  $\sqrt{\varepsilon}$  в экспоненте. В выражении (21) компонента магнитного поля, лежащая в плоскости падения, в используемой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} H_{\parallel(F,B)}^R &= \left( (H_{z(F,B)}^R)^2 + (H_{x(F,B)}^R \cos \phi + \right. \\ &\quad \left. + H_{y(F,B)}^R \sin \phi)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (22)$$

а лежащая перпендикулярно плоскости падения компонента находится как

$$H_{\perp(F,B)}^R = H_{y(F,B)}^R \cos \phi - H_{x(F,B)}^R \sin \phi. \quad (23)$$

В формулу (21) входят коэффициенты  $R_{H,E}$  отражения от границы  $z = -d$  волн, у которых магнитное или электрическое поле перпендикулярно плоскости падения:

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \varepsilon \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta} \times \\ &\quad \times \exp \left( i2d \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right), \\ R_E &= \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \cos \theta} \times \\ &\quad \times \exp \left( i2d \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

а также коэффициенты  $f_H, f_E$  Френеля, связывающие амплитуду волны, падающей на поверхность пластинки из вакуума, и амплитуду волны, прошедшей в пластинку с учетом многократных переотражений внутри. Данные коэффициенты легко находятся с использованием стандартных граничных условий в полной аналогии со случаем одной границы раздела (см., например, [16, 17]). Приведем их без вывода:

$$\begin{aligned} f_H &= 2\varepsilon \cos \theta \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta \right) \exp \left( -id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \times \\ &\quad \times \left\{ \left( \varepsilon \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( -id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \varepsilon \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right\}^{-1}, \\ f_E &= 2 \cos \theta \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \cos \theta \right) \exp \left( -id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \times \\ &\quad \times \left\{ \left( \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( -id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для больших толщин экрана данные коэффициенты переходят в обычные выражения для одной границы раздела (при этом  $\varepsilon'' \neq 0$ ).

Возвращаясь к вопросу об ориентации излучающего диполя в формуле (18), заметим, что в случае наличия у  $\mathbf{d}$  составляющей, параллельной плоскости, через которую выходит излучение, в формуле (19) появился бы член, пропорциональный

$$\frac{\cos \theta}{\cos \theta} \propto \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}{\sqrt{\varepsilon}},$$

содержащий дополнительную степень  $\sqrt{\varepsilon}$  в числителе. В конечном итоге это привело бы к обращению интенсивности излучения в бесконечность в пределе идеальной проводимости экрана:  $\varepsilon'' \rightarrow \infty$ .

Нетрудно видеть, что в рассматриваемой азимутально-симметричной задаче  $H_{\parallel(F,B)}^R = 0$ , и для излученной в вакуум энергии в направлении «вперед» ( $\theta < \pi/2$ ) после приведения подобных получаем выражение

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \right|_F &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^2 \cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \left( \frac{\omega}{v\gamma} \right)^2 \times \\ &\times \left| \frac{(\varepsilon - 1)(1 - \beta^2(\varepsilon - \sin^2 \theta))^{-1}}{\left( \varepsilon \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp\left(-id\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}\right) - \left( \varepsilon \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp\left(id\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}\right)} \right|^2 \times \\ &\times \left| \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \varepsilon \cos \theta \right) \left( 1 - \beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \left( \sin \theta \left( 1 - \beta^2 + \beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \zeta_1 - \right. \right. \\ &- \gamma^{-1} \left( \beta \sin^2 \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \zeta_2 \exp\left(id\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}\right) + \left. \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta \right) \left( 1 + \beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right) \times \\ &\times \left( \sin \theta \left( 1 - \beta^2 - \beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \zeta_1 - \gamma^{-1} \left( \beta \sin^2 \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \zeta_2 \right) \exp\left(-id\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}\right) - \\ &- 2\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \left( \sin \theta (1 - \beta^2 - \beta^2(\varepsilon - \sin^2 \theta) - \beta^3 \varepsilon \cos \theta) \zeta_1 - \right. \\ &\left. - \gamma^{-1} \varepsilon (\beta + \cos \theta + \beta^2 \sin^2 \theta \cos \theta) \zeta_2 \right) \exp\left(-i\frac{\omega}{v}d\right) \Big|^2. \quad (26) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= aJ_0 \left( a\frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_1 \left( a\frac{\omega}{v\gamma} \right) - \\ &- bJ_0 \left( b\frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_1 \left( b\frac{\omega}{v\gamma} \right), \\ \zeta_2 &= aJ_1 \left( a\frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_0 \left( a\frac{\omega}{v\gamma} \right) - \\ &- bJ_1 \left( b\frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_0 \left( b\frac{\omega}{v\gamma} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Сразу заметим, что в предельном случае переходного излучения в пластинке толщины  $d$  (при этом  $a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty$ ) функции  $\zeta_1, \zeta_2$  имеют значения соответственно  $v\gamma/\omega$  и 0. Формула (26) в этом случае

полностью совпадает с известным решением Пафомова [2, 19–21] (обратим внимание на очевидную опечатку в формуле (3.55) работы [19], отсутствующую в работах [2, 20, 21]). В случае большой толщины экрана получаемое таким образом решение переходит в известную формулу Гинзбурга–Франка для переходного излучения от полубесконечной среды.

Полус  $|1 - \beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}| \rightarrow 0$  в знаменателе (26) отвечает условию черенковского излучения в вакууме. Однако данный полюс является устранимым, и в окрестности черенковского угла  $\theta_{ChR}$  формула (26) в предположении прозрачности среды приобретает вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \right|_F &\rightarrow \left. \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \right|_{ChR} = \frac{e^2 \omega^2 c^3}{4\pi^2 \gamma^2 v^6} (1 + \beta^2 - \varepsilon\beta^2) \times \\ &\times \left( \frac{\left( 1 - \varepsilon\sqrt{1 + \beta^2 - \varepsilon\beta^2} \right) \left( \zeta_1(2 - \beta^2)\sqrt{\beta^2\varepsilon - 1} + \zeta_2\gamma^{-1}(2 - \beta^2\varepsilon) \right)}{\left( 1 - \varepsilon\sqrt{1 + \beta^2 - \varepsilon\beta^2} \right)^2 - \left( 1 + \varepsilon\sqrt{1 + \beta^2 - \varepsilon\beta^2} \right)^2 \exp(-i2d\omega/v)} \right)^2. \quad (28) \end{aligned}$$

В силу того, что

$$\sin \theta_{ChR} = \sqrt{\varepsilon - 1/\beta^2} < 1,$$

стоящие под знаком корня величины всегда положительны.

Особенностью формулы (26) является тот факт, что энергия, излученная в направлении «назад» ( $\theta > \pi/2$ ), не может быть получена простой заменой  $\beta \rightarrow -\beta$ . Действительно, рассмотрение выхода излучения через заднюю грань экрана отвечает перемене местами индексов ( $F$ ) и ( $B$ ) в формуле (21), что

приводит в первых двух слагаемых формулы (26) к замене

$$\beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \rightarrow -\beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta},$$

а также

$$\beta \sin^2 \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \leftrightarrow \beta \sin^2 \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}.$$

Последняя замена и нарушает симметрию, имеющую место лишь в предельном случае переходного излучения. Простое изменение знака скорости частицы в (26) невозможно уже потому, что как в дан-

ной формуле, так и в исходном выражении для поля частицы (9), ее скорость входит в аргумент функций Бесселя и является положительной величиной.

Вычисление энергии, излученной в направлении «назад», удобно проводить в той же системе коор-

динат (при этом по-прежнему  $\theta < \pi/2$ ), изменяя направление скорости частицы, что приводит к изменению знака  $z$ -компоненты ее поля (9), а также к замене  $z \rightarrow -z$  в показателе экспоненты. Аналогичные вычисления приводят к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \right|_B &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^2 \cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \left( \frac{\omega}{v\gamma} \right)^2 \times \\ &\times \left| \frac{(\varepsilon - 1)(1 - \beta^2(\varepsilon - \sin^2 \theta))^{-1}}{(\varepsilon \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta})^2 \exp(-id\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}) - (\varepsilon \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta})^2 \exp(id\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta})} \right|^2 \times \\ &\times \left| \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \varepsilon \cos \theta \right) \left( 1 + \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \left( \sin \theta \left( 1 - \beta^2 - \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \zeta_1 - \right. \right. \\ &- \gamma^{-1} \left( \beta \sin^2 \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \zeta_2 \exp(id\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}) + \left. \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta \right) \left( 1 - \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right. \\ &\times \left. \left( \sin \theta \left( 1 - \beta^2 + \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \zeta_1 - \gamma^{-1} \left( \beta \sin^2 \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \zeta_2 \right) \exp(-id\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}) - \right. \\ &\left. - 2\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \left( \sin \theta (1 - \beta^2 - \beta^2(\varepsilon - \sin^2 \theta) + \beta^3 \varepsilon \cos \theta) \zeta_1 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \gamma^{-1} \varepsilon (\beta - \cos \theta - \beta^2 \sin^2 \theta \cos \theta) \zeta_2 \right) \exp(i\frac{\omega}{v}d) \right|^2. \quad (29) \end{aligned}$$

Видно, что формулы (26), (29) переходят друг в друга при заменах (езде кроме показателей экспонент)

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} &\rightarrow -\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}, \quad \cos \theta \rightarrow -\cos \theta, \\ \exp\left(-i\frac{\omega}{v}d\right) &\rightarrow \exp\left(i\frac{\omega}{v}d\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Особенностью выражения (29) для интенсивности излучения «назад» является наличие «черенковского» полюса

$$|1 - \beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}| \rightarrow 0,$$

отсутствующего для переходного излучения «назад» в полубесконечной среде. Это связано с тем, что испущенное по направлению скорости частицы излучение может отразиться от передней грани экрана и выйти в вакуум через заднюю грань.

В частном случае идеальной проводимости ( $\varepsilon'' \rightarrow \infty$ ) зависимость от толщины экрана  $d$  исчезает (скин-эффект) и мы имеем выражение для дифракционного излучения от круглого отверстия в бесконечно тонком экране конечного радиуса:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \right|_F &= \left. \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \right|_B = \frac{e^2}{\pi^2 c} \times \\ &\times \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \left( \frac{\omega}{v\gamma} \right)^2 \left( \zeta_1 + \frac{\zeta_2}{\beta\gamma \sin \theta} \right)^2, \quad (31) \end{aligned}$$

причем излученная в обоих направлениях энергия одинакова. Данное решение совпадает с решением, найденным ранее другим методом в работе [3], и в ультрарелятивистском случае — с результатами работ [9, 22–24], где задача изначально решалась в ультрарелятивистском пределе. Поскольку зависимость от толщины экрана исчезла, формула (31) пригодна в том числе для нерелятивистского заряда, если потери на излучение все еще можно считать малыми по сравнению с полной энергией частицы.

Подчеркнем, что рассмотрение выхода излучения из экрана в вакуум через плоскость  $z = 0$  отвечает малой толщине экрана и, соответственно, возникновению скин-эффекта при  $\varepsilon'' \gg 1$  именно вблизи данной плоскости. По этой причине переход к излучению в идеально проводящем волноводе, так же как и переход к черенковскому излучению в бесконечном канале, на основе полученных формул невозможен.

### 3. ПОЛЯРИЗАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЭКРАНА

В случае азимутальной симметрии задачи в общем выражении для излученной энергии (21) члены с коэффициентом  $f_E$  не дают вклада, поскольку магнитное поле поляризовано перпендикулярно плоскости падения. При генерации поляризационного из-



лучения заряженной частицей, движущейся вблизи прямоугольного экрана (см. рис. 2), данное обстоятельство уже не имеет места, поскольку азимутальная симметрия нарушена. В используемой системе координат компоненты магнитного поля излучения имеют вид

$$\begin{aligned} H_{\perp(F,B)}^R &= H_{x(F,B)}^R \cos \phi - H_{y(F,B)}^R \sin \phi, \\ H_{\parallel(F,B)}^R &= \left( (H_{z(F,B)}^R)^2 + (H_{x(F,B)}^R \sin \phi + \right. \\ &\quad \left. + H_{y(F,B)}^R \cos \phi)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Для нахождения поля излучения используем тот факт, что ширина экрана вдоль оси  $x$  предполагается бесконечной. Тогда из формулы (7) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^R(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{2\pi i \omega}{c^2} \sqrt{\varepsilon} \frac{\exp(ir\sqrt{\varepsilon}\omega/c)}{r} \mathbf{e} \times \\ &\times \int_{-d}^0 dz' \int_0^a dy' \sigma(\omega) \mathbf{E}^0(k_x, y', z', \omega) \times \\ &\times \exp(-ik_y y' - ik_z z'). \end{aligned} \quad (33)$$

Соответствующая фурье-компонента поля заряда имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0(k_x, y', z', \omega) &= \frac{-ie}{2\pi v} \frac{\exp(i\omega z'/v)}{\sqrt{1 + \varepsilon(\beta\gamma e_x)^2}} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{\varepsilon} \beta \gamma e_x, i\sqrt{1 + \varepsilon(\beta\gamma e_x)^2}, \gamma^{-1} \right\} \times \\ &\times \exp\left(- (y' + h) \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + \varepsilon(\beta\gamma e_x)^2}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь  $h$  — расстояние между траекторией движения частицы и экраном, а единичный вектор излучения  $\mathbf{e}$  в «вакуумных» переменных имеет вид

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ \sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right\}. \quad (35)$$

Подстановка (34) в (33) и (32) позволяет получить компоненты поля излучения:

$$\begin{aligned} H_{\perp(F,B)}^R &= \frac{e}{\pi c} \frac{\beta\gamma}{4} (\varepsilon - 1) \frac{\exp(ir\sqrt{\varepsilon}\omega/c)}{r} \frac{1 - \exp\left\{ id \frac{\omega}{c} \left( -\frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right\}}{1 \mp \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}} \times \\ &\times \exp\left(-h \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2}\right) \frac{\exp\left\{ -a \frac{\omega}{v\gamma} \left( i\beta\gamma \sin \theta \cos \phi + \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \right\} - 1}{\sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \left( i\beta\gamma \sin \theta \cos \phi + \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right)} \times \\ &\times \left( \gamma^{-1} \sin \theta \mp \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \left( i \cos \phi \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} + \beta\gamma \sin \theta \sin^2 \phi \right) \right), \\ H_{\parallel(F,B)}^R &= \frac{e}{\pi c} \frac{\beta\gamma}{4} (\varepsilon - 1) \frac{\exp(ir\sqrt{\varepsilon}\omega/c)}{r} \frac{1 - \exp\left\{ id \frac{\omega}{c} \left( -\frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right\}}{1 \mp \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}} \times \\ &\times \exp\left(-h \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2}\right) \times \\ &\times \frac{\exp\left\{ -a \frac{\omega}{v\gamma} \left( i\beta\gamma \sin \theta \cos \phi + \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \right\} - 1}{\sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \left( i\beta\gamma \sin \theta \cos \phi + \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right)} \times \\ &\times \sqrt{\varepsilon} \sin \phi \left( \beta\gamma \sin \theta \cos \phi - i\sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь верхний знак соответствует излучению «вперед», а нижний — «назад». При возведении в квадрат можно воспользоваться соотношением

$$\begin{aligned} &\left| \exp\left\{ -a \frac{\omega}{v\gamma} \left( i\beta\gamma \sin \theta \cos \phi + \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \right\} - 1 \right|^2 = \\ &= 4 \left( \operatorname{sh}^2 \left( \frac{a}{2} \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) + \sin^2 \left( \frac{a}{2} \frac{\omega}{c} \sin \theta \cos \phi \right) \right) \exp\left(-a \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2}\right). \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя (36) в (21), после приведения подобных для излучения «вперед» получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \Big|_{\perp(F)} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^2 \cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)(1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2)} \left( \text{sh}^2 \left( \frac{\omega}{v\gamma} \frac{a}{2} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) + \right. \\
&+ \left. \sin^2 \left( \frac{\omega}{c} \frac{a}{2} \sin \theta \cos \phi \right) \right) \left| \frac{\varepsilon - 1}{1 - \beta^2(\varepsilon - \sin^2 \theta)} \right|^2 \exp \left\{ - \left( h + \frac{a}{2} \right) \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right\} \times \\
&\times \left| \left( \varepsilon \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( -id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \right. \\
&- \left. \left( \varepsilon \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right|^{-2} \times \\
&\times \left| \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \varepsilon \cos \theta \right) \left( 1 - \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \times \right. \\
&\times \left( \gamma^{-1} \sin \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \left( \beta\gamma \sin \theta \sin^2 \phi + i \cos \phi \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \right) \times \\
&\times \exp \left( id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) + \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta \right) \left( 1 + \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \times \\
&\times \left( \gamma^{-1} \sin \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \left( \beta\gamma \sin \theta \sin^2 \phi + i \cos \phi \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \right) \times \\
&\times \exp \left( -id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - 2 \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \times \\
&\times \left[ \gamma^{-1} \sin \theta (1 + \beta \varepsilon \cos \theta) - (\varepsilon \cos \theta + \beta(\varepsilon - \sin^2 \theta)) \left( \beta\gamma \sin \theta \sin^2 \phi + i \cos \phi \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \right] \times \\
&\times \exp \left( -i \frac{\omega}{v} d \right) \Big|^2, \\
\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \Big|_{\parallel(F)} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{(\beta\gamma \cos \theta \sin \phi)^2}{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \times \\
&\times \left( \text{sh}^2 \left( \frac{\omega}{v\gamma} \frac{a}{2} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) + \sin^2 \left( \frac{\omega}{c} \frac{a}{2} \sin \theta \cos \phi \right) \right) \left| \frac{\varepsilon - 1}{1 - \beta^2(\varepsilon - \sin^2 \theta)} \right|^2 \times \\
&\times \exp \left\{ - \left( h + \frac{a}{2} \right) \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right\} \times \\
&\times \left| \left( \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( -id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \left( \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right|^{-2} \times \\
&\times \left| \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \cos \theta \right) \left( 1 - \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \exp \left( id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) + \right. \\
&+ \left. \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \cos \theta \right) \left( 1 + \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \exp \left( -id \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \right. \\
&- \left. 2 \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (1 + \beta \cos \theta) \exp \left( -i \frac{\omega}{v} d \right) \right|^2.
\end{aligned} \tag{38}$$

Полная интенсивность дается суммой приведенных выражений. Заметим, что используемое разделение спектрально-угловой плотности на компоненты определяется поляризационными характеристиками именно магнитного поля излучения (а не электрического, как это часто делается — см., например, [2]).

Особенностью данных выражений является учет возможных многократных переотражений излучения внутри экрана. В случае проводящего экрана вклад излучения, отраженного от задней грани пластинки, мал и найденная формула совпадает с полученной в работе [18]. Также отметим, что в по-

лученную формулу входит «черенковский» полюс  $|1 - \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}| \rightarrow 0$ , являющийся устранимым при конечной толщине экрана  $d$ .

Подчеркнем, что для того, чтобы получить формулу для излучения «назад» недостаточно поменять местами соответствующие поля в выражении (21), поскольку в этом случае выход излучения в вакуум будет рассматриваться через плоскость  $z = -d$ , а не  $z = 0$ . Для получения правильного результата необходимо также изменить направление скорости частицы, чему отвечает изменение знака  $z$ -компоненты и замена

$$\exp\left(i\frac{\omega}{v}z'\right) \rightarrow \exp\left(-i\frac{\omega}{v}z'\right) \qquad -\frac{1}{\beta} - \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \rightarrow \frac{1}{\beta} + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}$$

в формуле (34). В этом случае поле излучения «назад», распространяющееся в положительном направлении оси  $z$ , будет отличаться от (36) заменой

в показателе экспоненты. С учетом данных рассуждений для энергии, излученной в направлении «назад», получаем (здесь по-прежнему  $\theta < \pi/2$ )

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \right|_{\perp(B)} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^2 \cos^2\theta}{(1 - \beta^2 \cos^2\theta)(1 + (\beta\gamma \sin\theta \sin\phi)^2)} \left( \text{sh}^2\left(\frac{\omega}{v\gamma} \frac{a}{2} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin\theta \sin\phi)^2}\right) + \right. \\ &+ \left. \sin^2\left(\frac{\omega}{c} \frac{a}{2} \sin\theta \cos\phi\right) \right) \left| \frac{\varepsilon - 1}{1 - \beta^2(\varepsilon - \sin^2\theta)} \right|^2 \exp\left\{-\left(h + \frac{a}{2}\right) \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin\theta \sin\phi)^2}\right\} \times \\ &\times \left| \left( \varepsilon \cos\theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \right)^2 \exp\left(-id\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\right) - \right. \\ &\left. - \left( \varepsilon \cos\theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \right)^2 \exp\left(id\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\right) \right|^{-2} \times \\ &\times \left| \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} - \varepsilon \cos\theta \right) \left( 1 + \beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \right) \left( \gamma^{-1} \sin\theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \left( \beta\gamma \sin\theta \sin^2\phi + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. i \cos\phi \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin\theta \sin\phi)^2} \right) \right) \exp\left(id\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\right) + \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} + \varepsilon \cos\theta \right) \left( 1 - \beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \right) \times \\ &\times \left( \gamma^{-1} \sin\theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \left( \beta\gamma \sin\theta \sin^2\phi + i \cos\phi \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin\theta \sin\phi)^2} \right) \right) \exp\left(-id\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\right) - \\ &- 2\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \left( \gamma^{-1} \sin\theta(1 - \beta\varepsilon \cos\theta) - (-\varepsilon \cos\theta + \beta(\varepsilon - \sin^2\theta)) \left( \beta\gamma \sin\theta \sin^2\phi + \right. \right. \\ &\left. \left. + i \cos\phi \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin\theta \sin\phi)^2} \right) \right) \exp\left(i\frac{\omega}{v}d\right) \Big|^2, \tag{39} \\ \left. \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \right|_{\parallel(B)} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{(\beta\gamma \cos\theta \sin\phi)^2}{1 + (\beta\gamma \sin\theta \sin\phi)^2} \left( \text{sh}^2\left(\frac{\omega}{v\gamma} \frac{a}{2} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin\theta \sin\phi)^2}\right) + \right. \\ &+ \left. \sin^2\left(\frac{\omega}{c} \frac{a}{2} \sin\theta \cos\phi\right) \right) \left| \frac{\varepsilon - 1}{1 - \beta^2(\varepsilon - \sin^2\theta)} \right|^2 \exp\left\{-\left(h + \frac{a}{2}\right) \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin\theta \sin\phi)^2}\right\} \times \\ &\times \left| \left( \cos\theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \right)^2 \exp\left(-id\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\right) - \left( \cos\theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \right)^2 \exp\left(id\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\right) \right|^{-2} \times \\ &\times \left| \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} - \cos\theta \right) \left( 1 + \beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \right) \exp\left(id\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\right) + \right. \\ &+ \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} + \cos\theta \right) \left( 1 - \beta\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta} \right) \exp\left(-id\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}\right) - \\ &\left. - 2\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}(1 - \beta \cos\theta) \exp\left(i\frac{\omega}{v}d\right) \right|^2. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что формулы (38) и (39) переходят друг в друга как при замене (30), так и при замене  $\beta \rightarrow -\beta$ ,  $\cos\phi \rightarrow -\cos\phi$ , что отвечает сдвигу азимутального угла на  $\pi$ . Данное выражение также содержит «черенковский» полюс, обусловленный

вкладом волн, отраженных от передней грани экрана и вышедших в вакуум через заднюю грань.

В частном случае идеально проводящей полуплоскости ( $\varepsilon'' \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow \infty$ ) излученная в оба полупространства энергия также одинакова и равна

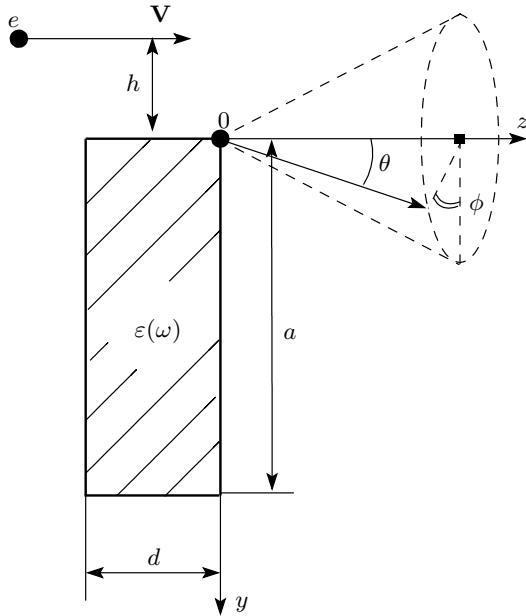


Рис. 2. Схема генерации поляризационного излучения заряженной частицей, движущейся вблизи прямоугольного экрана

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2c} \times \{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2 (1 + \cos^2 \theta)\} \times \frac{1}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)(1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2)} \times \exp\left(-h \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2}\right), \quad (40)$$

что совпадает с результатом, полученным в работах [3, 4] другим методом.

Из сравнения полученных формул с результатами предыдущего раздела видно, что отсутствие азимутальной симметрии приводит к возникновению в знаменателе формул для излученной энергии множителя  $1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2$ , дающего в релятивистском случае для углов  $\theta \gg \gamma^{-1}$  (т. е. по сути для черенковского излучения) максимум излучения вблизи плоскости  $yz$ , перпендикулярной плоскости экрана (см. также [9, 18]). Ввиду отсутствия множителя  $\sin^2 \theta$  в числителях (38), (39) максимум в угловом распределении дифракционного излучения приходится, как и ожидалось, на угол  $\theta = 0$ . Обратим также внимание на отсутствие «лоренцевского» члена  $1 - \beta^2 \cos^2 \theta$  в знаменателе выражений для параллельной компоненты интенсивности  $d^2W/d\omega d\Omega_{\parallel}$ .

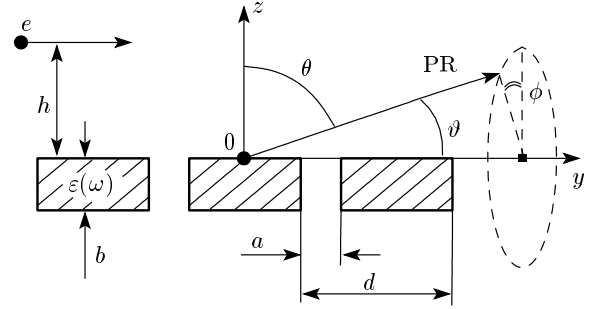


Рис. 3. Схема генерации поляризационного излучения (PR) заряженной частицей, движущейся вблизи решетки

#### 4. ПОЛЯРИЗАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ТОНКОЙ РЕШЕТКИ КОНЕЧНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Используемый метод индуцированных токов можно применить и для расчета излучения, испущенного атомами и молекулами решетки, состоящей из  $N$  стрипов прямоугольного сечения и конечной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon''$ , под воздействием поля движущейся частицы (так называемое излучение Смита–Парселла; см. рис. 3). Для упрощения вычислений можно потребовать по аналогии с предыдущим разделом, чтобы толщина стрипов  $b$  была много меньше длины стрипа  $d - a$ :

$$b \ll d - a, \quad (41)$$

где  $d$  — период решетки,  $a$  — ширина вакуумного промежутка между стрипами. В этом случае выход излучения в вакуум можно рассматривать только через верхнюю или нижнюю грани стрипов. Поскольку для излучения Смита–Парселла практический интерес в большинстве случаев представляют большие углы излучения  $\vartheta$ , используемое приближение тонкой решетки может применяться для описания реальных экспериментов в соответствующей области.

Однако в рассматриваемой геометрии кроме приближения тонкой решетки необходимо также потребовать, чтобы ширина вакуумных промежутков между стрипами была много меньше длины волны излучения. Для большого числа периодов  $N \gg 1$  длина волны излучения жестко связана с периодом решетки (см. ниже), поэтому для всех углов  $\vartheta$ , далеких от нуля и  $\pi$ , данное условие имеет вид

$$a \ll \lambda \sim d. \quad (42)$$

Происхождение данного условия связано с тем, что, если учет многократных переотражений излучения внутри каждого стрипа в принципе возможен, то переотражения излучения внутри вакуумных промежутков между стрипами в рамках данного подхода учесть не представляется возможным. Однако если стрипы достаточно тонкие ( $b \ll d$ ), то учет многократных переотражений излучения между стрипами даже при невыполнении условия (42) привел бы к поправкам в области углов  $\vartheta \sim b/d \ll 1$ . Поэтому ниже мы будем считать выполненными следующие неравенства:

$$\pi - b/d > \vartheta > b/d. \quad (43)$$

Как будет ясно из дальнейшего, условие (42) по сути приводит к тому, что поле излучения от решетки представляется в виде векторной суммы полей излучения от каждого стрипа, что, очевидно, справедливо лишь при пренебрежении переотражением излучения между стрипами и для углов, удовлетворяющих неравенствам (43). При этом в развиваемом подходе, учитывающем реальные диэлектрические свойства решетки, суммирование проводится для полей излучения внутри среды, а не в вакууме, что как раз и отвечает малому рассеянию излучения на «частицах» размерами  $a \ll \lambda$ . Наконец, только при условиях (41), (42) возможно использование формулы (21) для интенсивности излучения, а также коэффициентов Френеля (25), выведенных для бесконечной пластинки. Данное обстоятельство накладывает существенные ограничения на область применимости ряда известных моделей излучения, где расчет изначально велся для идеально проводящей решетки (см. ниже разд. 5).

Рассмотрим сначала излучение над решеткой, т. е. в полупространстве, где движется заряд. Задачу удобно решать в переменных  $\theta, \phi$ , используе-

мых в предыдущем разделе (компоненты единичного вектора излучения см. в (35)), а переход к переменным  $\vartheta, \varphi$ , обычно используемым в геометрии излучения Смита–Парселла, можно совершить в конечных формулах. Выражение для необходимой фурье-компоненты поля заряда в «вакуумных» переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0(k_x, y', z', \omega) = & \frac{-ie}{2\pi v} \frac{\exp(i\omega y'/v)}{\sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2}} \times \\ & \times \left\{ \beta\gamma \sin \theta \sin \phi, \gamma^{-1}, -i\sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right\} \times \\ & \times \exp\left( (z' - h) \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right). \quad (44) \end{aligned}$$

Здесь  $h$  — расстояние между траекторией движения частицы и решеткой. Поле излучения внутри решетки находится по аналогии с формулой (33) (ширина решетки вдоль оси  $x$  предполагается бесконечной) с той разницей, что интегрирование выполняется по объему всех  $N$  стрипов. Компоненты поля, необходимые для расчета излученной в вакуум энергии, затем определяются по формулам (32). С учетом известного равенства (расчет ведется для нечетного числа стрипов, однако конечные формулы для интенсивности излучения будут применимы в том числе для четных значений  $N$ )

$$\begin{aligned} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \exp\left\{ ind \frac{\omega}{c} (\beta^{-1} - \sin \theta \cos \phi) \right\} = \\ = \frac{\sin\left( N \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)}{\sin\left( \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)} \quad (45) \end{aligned}$$

компоненты магнитного поля излучения получаем в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_{\perp(F,B)}^R = & \frac{ie}{2\pi c} \beta\gamma(\varepsilon-1) \frac{\exp(ir\sqrt{\varepsilon\omega/c})}{r} \left( i \sin \theta \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \pm \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (\gamma^{-1} \cos \phi + \beta\gamma \sin \theta \sin^2 \phi) \right) \times \\ & \times \frac{1 - \exp\left\{ -b \frac{\omega}{v\gamma} \left( \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \mp i\beta\gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right\}}{\sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \left( \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \mp i\beta\gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)} \frac{\sin\left( \frac{d-a}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)}{1 - \beta \sin \theta \cos \phi} \times \\ & \times \frac{\sin\left( N \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)}{\sin\left( \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)} \exp\left( -h \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right), \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\parallel(F,B)}^R &= \frac{ie}{2\pi c} \beta \gamma (\varepsilon - 1) \frac{\exp(ir\sqrt{\varepsilon}\omega/c)}{r} \sqrt{\varepsilon} \sin \phi (\gamma^{-1} - \beta \gamma \sin \theta \cos \phi) \times \\
&\times \frac{1 - \exp \left\{ -b \frac{\omega}{v\gamma} \left( \sqrt{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \mp i \beta \gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right\}}{\sqrt{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \left( \sqrt{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \mp i \beta \gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)} \times \\
&\times \frac{\sin \left( \frac{d-a}{2} \frac{\omega}{c} (\beta^{-1} - \sin \theta \cos \phi) \right) \sin \left( N \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)}{1 - \beta \sin \theta \cos \phi \sin \left( \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)} \exp \left( -h \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right). \quad (46)
\end{aligned}$$

Здесь верхний знак соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $z$  (индекс ( $F$ )), а нижний — в отрицательном (индекс ( $B$ )). Использование тех же обозначений, что и в предыдущих разделах, обусловлено лишь соображениями удобства. Как видно из данных формул, число периодов решетки входит лишь в интерференци-

онный член вида  $\sin(Nx)/\sin x$ , что и соответствует векторному суммированию полей излучения от каждого стрипа. Подстановка компонент поля излучения в формулу для интенсивности (21) приводит к следующим выражениям для излучения в верхнее полупространство:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \right|_{\perp(up)} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{(\beta \gamma)^{-2} \cos^2 \theta}{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - (\sin \theta \cos \phi)^2} \right|^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{d-a}{2} \frac{\omega}{c} (\beta^{-1} - \sin \theta \cos \phi) \right)}{(1 - \beta \sin \theta \cos \phi)^2} \times \\
&\times \frac{\sin^2 \left( N \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)}{\sin^2 \left( \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)} \exp \left( -h \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \times \\
&\times \left| \left( \varepsilon \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( -ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \left( \varepsilon \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right|^{-2} \times \\
&\times \left| \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \varepsilon \cos \theta \right) \left( \sqrt{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} - \right. \right. \\
&\left. \left. - i \beta \gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \left( i \sin \theta \sqrt{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (\gamma^{-1} \cos \phi + \beta \gamma \sin \theta \sin^2 \phi) \right) \times \right. \\
&\times \exp \left( ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) + \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta \right) \left( \sqrt{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} + i \beta \gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \times \\
&\times \left( i \sin \theta \sqrt{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (\gamma^{-1} \cos \phi + \beta \gamma \sin \theta \sin^2 \phi) \right) \exp \left( -ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \\
&\left. - 2 \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \left( i \beta \cos \phi (\varepsilon - \sin^2 \theta) + i \sin \theta (1 + \varepsilon (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2) + \varepsilon \cos \theta \times \right. \right. \\
&\left. \left. \times \sqrt{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} (\gamma^{-1} \cos \phi - \beta \gamma \sin \theta \cos^2 \phi) \right) \exp \left( -b \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta \gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \right|^2, \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \right|_{\parallel(up)} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{(\beta\gamma)^{-2} \cos^2 \theta}{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \sin^2 \phi (\gamma^{-1} - \beta\gamma \sin \theta \cos \phi)^2 \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - (\sin \theta \cos \phi)^2} \right|^2 \times \\ &\times \frac{\sin^2 \left( \frac{d-a}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)}{(1 - \beta \sin \theta \cos \phi)^2} \frac{\sin^2 \left( N \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)}{\sin^2 \left( \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)} \exp \left( -h \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \times \\ &\times \left| \left( \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( -ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \left( \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right|^{-2} \times \\ &\times \left| \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \cos \theta \right) \left( \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} - i\beta\gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \exp \left( ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) + \right. \\ &+ \left. \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \cos \theta \right) \left( \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} + i\beta\gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \exp \left( -ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \right. \\ &\left. - 2\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \left( i\beta\gamma \cos \theta + \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \exp \left( -b \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \right|^2. \quad (47) \end{aligned}$$

Формулу для энергии, излученной в нижнее полупространство, т. е. туда, где нет частицы, можно получить по аналогии с нахождением интенсивности излучения «назад» в предыдущих разделах. Для этого траекторию движения заряда нужно зеркально отобразить относительно оси  $y$  в полупространство  $z < 0$ . В этом случае поле частицы будет отличаться от (44) знаком  $z$ -компоненты, а также заме-

ной  $z' \rightarrow -z'$  в показателе экспоненты. Компоненты магнитного поля излучения в полупространство  $z > 0$ , где нет частицы, будут отличаться от компонент (46) с индексом ( $B$ ) заменой знака  $b$  в показателе экспоненты (как в предыдущем разделе). С учетом данных рассуждений для интенсивности излучения в нижнее полупространство получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \right|_{\perp(down)} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{(\beta\gamma)^{-2} \cos^2 \theta}{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - (\sin \theta \cos \phi)^2} \right|^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{d-a}{2} \frac{\omega}{c} (\beta^{-1} - \sin \theta \cos \phi) \right)}{(1 - \beta \sin \theta \cos \phi)^2} \times \\ &\times \frac{\sin^2 \left( N \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)}{\sin^2 \left( \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)} \exp \left( -h \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \times \\ &\times \left| \left( \varepsilon \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( -ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \left( \varepsilon \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right|^{-2} \times \\ &\times \left| \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \varepsilon \cos \theta \right) \left( \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} + i\beta\gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( i \sin \theta \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (\gamma^{-1} \cos \phi + \beta\gamma \sin \theta \sin^2 \phi) \right) \times \right. \\ &\times \exp \left( ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) + \left. \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta \right) \left( \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} - i\beta\gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( i \sin \theta \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (\gamma^{-1} \cos \phi + \beta\gamma \sin \theta \sin^2 \phi) \right) \exp \left( -ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \right. \\ &\left. - 2\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \left( i\beta \cos \phi (\varepsilon - \sin^2 \theta) + i \sin \theta (1 + \varepsilon(\beta\gamma \sin \phi)^2) - \varepsilon \cos \theta \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} (\gamma^{-1} \cos \phi - \beta\gamma \sin \theta \cos^2 \phi) \right) \exp \left( b \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \right|^2, \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \right|_{\parallel(\text{down})} &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{(\beta\gamma)^{-2} \cos^2 \theta}{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \sin^2 \phi (\gamma^{-1} - \beta\gamma \sin \theta \cos \phi)^2 \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - (\sin \theta \cos \phi)^2} \right|^2 \times \\ &\times \frac{\sin^2 \left( \frac{d-a}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)}{(1 - \beta \sin \theta \cos \phi)^2} \frac{\sin^2 \left( N \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)}{\sin^2 \left( \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \sin \theta \cos \phi \right) \right)} \exp \left( -h \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \times \\ &\times \left| \left( \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( -ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \left( \cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 \exp \left( ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \right|^{-2} \times \\ &\times \left| \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \cos \theta \right) \left( \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} + i\beta\gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \exp \left( ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) + \right. \\ &+ \left. \left( \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \cos \theta \right) \left( \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} - i\beta\gamma \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) \exp \left( -ib \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \right) - \right. \\ &\left. - 2\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \left( -i\beta\gamma \cos \theta + \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \exp \left( b \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) \right|^2. \quad (48) \end{aligned}$$

Из сравнения формул (47), (48) видно, что переход от излучения «над решеткой» к излучению «под решеткой» осуществляется заменой, аналогичной (30) (везде кроме показателей экспонент):

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} &\rightarrow -\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}, \\ \cos \theta &\rightarrow -\cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp \left( -b \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right) &\rightarrow \quad (49) \\ \rightarrow \exp \left( b \frac{\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \theta \sin \phi)^2} \right). \end{aligned}$$

Подчеркнем, что входящий в формулу (48) импакт-параметр  $h$  отсчитывается, так же как и в (47), от плоскости  $z = 0$ , однако, кратчайшим расстоянием от траектории заряда до решетки в геометрии излучения «под решеткой» является параметр  $h - b$ , а не  $h$ . Причиной того, что в формулу (48) входит именно величина  $h$  (а не  $h - b$ ) является тот факт, что мы рассматриваем излучение в полупространстве  $z > 0$ , и в пределе проводящей решетки скин-эффект возникает в плоскости  $z = 0$ .

Формулы для интенсивности излучения (47), (48) можно также переписать в переменных  $\vartheta, \varphi$ , обычно используемых в геометрии излучения Смита-Парселла. Их связь с используемыми нами переменными имеет вид

$$\begin{aligned} \sin \theta \sin \phi &= \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \sin \theta \cos \phi = \cos \vartheta, \\ \cos \theta &= \sin \vartheta \cos \varphi, \end{aligned} \quad (50)$$

откуда, в частности, следуют соотношения

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= 1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi, \\ \sin \phi &= \frac{\sin \vartheta \sin \varphi}{\sqrt{1 - (\sin \vartheta \cos \varphi)^2}}, \\ \cos \phi &= \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1 - (\sin \vartheta \cos \varphi)^2}}. \end{aligned} \quad (51)$$

В полученные выражения для излученной энергии входит множитель

$$F_{strip} = 4 \sin^2 \left( \frac{d-a}{2} \frac{\omega}{v} (1 - \beta \cos \vartheta) \right), \quad (52)$$

описывающий интерференцию волн, излученных на левом и правом краях стрипа длиной  $d - a$ . В случае, когда заряд движется вблизи лишь одного стрипа большой длины, данный член, деленный на  $(1 - \beta \cos \vartheta)^2$ , по аналогии с (16) дает дельта-функцию, определяющую условие черенковского излучения в вакууме. Однако аргумент дельта-функции  $1 - \beta \cos \vartheta$  никогда не обращается в нуль, что отвечает условию полного внутреннего отражения излучения от верхней и нижней граней стрипа. Волны черенковского излучения выходят в вакуум только через торцы решетки под углами  $\vartheta \lesssim b/d$ , где рассматриваемая модель уже неприменима.

Для большого числа периодов  $N \gg 1$  в формулы для излученной энергии входит другая дельта-функция:

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{\sin^2 \left( N \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \cos \vartheta \right) \right)}{\sin^2 \left( \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \cos \vartheta \right) \right)} \rightarrow \\ &\rightarrow 2\pi N \sum_{m=1}^{\infty} \delta \left( d \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \cos \vartheta \right) - 2\pi m \right), \end{aligned} \quad (53)$$



нули которой дают известное соотношение Смита–Парселла:

$$\lambda_m = \frac{d}{m} \left( \frac{1}{\beta} - \cos \vartheta \right). \quad (54)$$

Подчеркнем, что полученные формулы (47), (48) допускают факторизацию вида

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \Big|_{screen} F_{strip} F_N, \quad (55)$$

где  $d^2W/d\omega d\Omega|_{screen}$  — интенсивность излучения, возникающего при пролете заряда над полубесконечным прямоугольным экраном параллельно плоскости, через которую рассматривается выход излучения в вакуум. Данное обстоятельство также является следствием использованного условия  $a \ll \lambda$ . В моделях излучения Смита–Парселла, основанных на точной постановке граничных условий в промежутках между идеально проводящими полосами, а также в моделях для решеток с периодическим профилем поверхности указанная факторизация не наблюдается (см., например, [7, 8, 25]).

В пределе идеально проводящей решетки ( $\epsilon'' \rightarrow \infty$ ) энергия, излученная в оба полупространства, одинакова и равна

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} &= \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \Big|_{\perp} + \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \Big|_{\parallel} = \frac{e^2}{\pi^2 c} \times \\ &\times \frac{1}{1 + (\beta\gamma \sin \vartheta \sin \varphi)^2} \{ \gamma^{-2} (1 - (\sin \vartheta \sin \varphi)^2) + \\ &+ 2\beta \cos \vartheta (\sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (\beta\gamma)^2 \sin^4 \vartheta \sin^2 \varphi \} \times \\ &\times \frac{\sin^2 \left( \frac{d-a}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \cos \vartheta \right) \right)}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2} \times \\ &\times \frac{\sin^2 \left( N \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \cos \vartheta \right) \right)}{\sin^2 \left( \frac{d}{2} \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - \cos \vartheta \right) \right)} \times \\ &\times \exp \left( -h \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \vartheta \sin \varphi)^2} \right). \quad (56) \end{aligned}$$

Зависимость от толщины решетки, как и ожидалось, исчезла (скин-эффект). Для большого числа периодов данное выражение можно проинтегрировать по частоте с помощью (53). Тогда угловое распределение энергии, излученной на  $m$ -й гармонике, имеет простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{dW_m}{d\Omega} &= \frac{2e^2\beta}{\pi d} R(\gamma, \vartheta, \varphi) \frac{\sin^2 \left( \pi m \frac{d-a}{d} \right)}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3} \times \\ &\times \exp \left( -h \frac{4\pi}{\beta\gamma\lambda_m} \sqrt{1 + (\beta\gamma \sin \vartheta \sin \varphi)^2} \right), \quad (57) \end{aligned}$$

где через  $R(\gamma, \vartheta, \varphi)$  обозначена «угловая» часть формулы (56):

$$\begin{aligned} R(\gamma, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{1 + (\beta\gamma \sin \vartheta \sin \varphi)^2} \times \\ &\times \{ \gamma^{-2} (1 - (\sin \vartheta \sin \varphi)^2) + 2\beta \cos \vartheta (\sin \vartheta \sin \varphi)^2 + \\ &+ (\beta\gamma)^2 \sin^4 \vartheta \sin^2 \varphi \}. \quad (58) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в ультрарелятивистском пределе ( $\gamma \sim 10^3$  и выше) для отличных от нуля углов  $\vartheta, \varphi$  выполняется соотношение

$$R(\gamma, \vartheta, \varphi) \rightarrow \sin^2 \vartheta. \quad (59)$$

Формула (57) в этом случае полностью совпадает с выражением, полученным в известной модели поверхностных токов [26].

Существенно, что формулу (56) для идеально проводящей бесконечно тонкой решетки можно также получить совершенно другим методом. А именно, можно предположить, что излучение генерируется наведенным на решетке поверхностным током. Такой подход, развитый в задаче об излучении Смита–Парселла в работе [26] (см. также [27]), имеет тот недостаток, что поверхностный ток обычно полагается имеющим всего две тангенциальные компоненты (по аналогии с теорией дифракции плоских волн). Как показано в работе [4], в общем случае, когда падающее на идеально проводящую поверхность поле имеет все три компоненты, поверхностная плотность наведенного тока также должна иметь три компоненты, включая нормальную поверхности компоненту. Лишь в ультрарелятивистском случае, когда поле частицы  $\mathbf{E}^0$  можно считать поперечным, нормальной компонентой тока можно пренебречь. Интенсивность излучения Смита–Парселла, найденная на основе такой модели обобщенного поверхностного тока, полностью совпадает с (56) [28]. Как и следовало ожидать, в ультрарелятивистском пределе данный результат совпадает с результатом, рассчитанным в модели с поверхностным током без нормальной компоненты в работе [26]. Это, возможно, и объясняет согласие предсказаний модели [26] с результатами эксперимента [29], проведенного на пучке электронов с энергией 28.5 ГэВ.

Заметим также, что наличие множителя  $1 + (\beta\gamma \sin \vartheta \sin \varphi)^2$  в знаменателях формул (47), (48),

(56) по аналогии с предыдущим разделом приводит к тому, что для больших углов  $\vartheta \gg \gamma^{-1}$  излучение сосредоточено в плоскости, перпендикулярной плоскости решетки (т. е. вблизи малых азимутальных углов  $\varphi \lesssim \gamma^{-1}$ ). При этом строго под углом  $\varphi = 0$  имеем минимум, исчезающий в ультррелятивистском пределе согласно (59).

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Физически все рассматриваемые в статье виды излучения (черенковское, переходное, дифракционное, излучение Смита–Парселла) возникают в результате динамической поляризации атомов среды полем внешнего источника. Поэтому использование единого формализма для их описания представляется вполне естественным. Как было продемонстрировано, метод индуцированных токов позволяет находить характеристики различных видов поляризационного излучения и применим для широкого класса форм поверхности. В данной работе систематически проведен учет реальных диэлектрических свойств вещества в задачах о поляризационном излучении в средах с резкими границами сложной формы. В предельном случае идеальной проводимости все полученные результаты совпадают с известными в литературе. Можно показать, что и в другом предельном случае  $|\varepsilon(\omega) - 1| \ll 1$  найденные решения согласуются с соответствующими результатами, полученными по теории возмущений, например, в работах [9, 30].

Полученные результаты могут оказаться полезными в различных приложениях поляризационного излучения, в частности, при разработке новых типов источников монохроматического излучения, а также в физике ускорителей. При этом в каждой из рассмотренных задач можно указать границы применимости полученных результатов.

1. В задаче об излучении в цилиндрическом канале в разд. 2 мы полагали толщину экрана  $d$  малой настолько, чтобы пренебречь излучением, вышедшим в вакуум из среды через внешние и внутренние стенки цилиндра. В релятивистском случае условие применимости полученного решения можно записать в виде лишь одного неравенства. Действительно, эффективная область экрана, участвующая в формировании излучения, дается соотношением  $(b - a)_{eff} \approx \gamma\lambda$ . Поэтому волны, излученные через «внешнюю» поверхность цилиндра, могут играть роль только в том случае, если внешний радиус  $b \ll \gamma\lambda$ . С другой стороны, на «внешнюю» поверхность цилиндра фактически падают лишь вол-

ны черенковского излучения (при выполнении соответствующего условия), поскольку волны дифракционного излучения распространяются под малыми в релятивистском случае углами  $\theta \sim \gamma^{-1} \ll 1$ . Черенковское излучение, падающее как на внешнюю, так и на внутреннюю поверхности цилиндра, испытывает полное внутреннее отражение и может выйти в вакуум через переднюю и заднюю грани экрана под углами  $\theta \approx \pi/2$ . Если ограничиться углами излучения, не слишком близкими к  $\pi/2$ , то для всех значений радиуса канала  $a \gg \lambda$  и значений ширины экрана  $b - a \gtrsim \gamma\lambda$  условие применимости полученных результатов имеет простой вид:

$$d \ll \gamma\lambda. \quad (60)$$

Для экспериментальных значений  $d$  больше нескольких миллиметров отсюда следует, что для оптического и инфракрасного диапазонов частот полученное решение может использоваться лишь для ультррелятивистских частиц. Для частот рентгеновского диапазона можно не учитывать переотражения и ограничение на толщину экрана (60) теряет силу.

2. В задаче об излучении от прямоугольного экрана в разд. 3 следует рассмотреть два предельных значения длины экрана:  $a > \gamma\lambda$  и  $a \lesssim \gamma\lambda$ . В первом случае длину экрана можно считать равной бесконечности и условие на допустимую толщину экрана совпадает с (60). Во втором случае играет роль геометрический размер экрана, поэтому должно выполняться условие

$$d \ll a. \quad (61)$$

3. Условия применимости решения задачи об излучении от решетки в разд. 4 (неравенства (41), (42), (43)) имеют еще большую значимость, поскольку определяют также границы применимости известных ранее решений, полученных для идеально проводящих решеток с помощью моделей поверхностных токов, где эти границы не очевидны. Действительно, в этих моделях поле излучения от решетки в вакууме представляется в виде векторной суммы полей излучения от каждого стрипа. При этом поиск выражения для плотности тока, наведенного на поверхности стрипа полем движущегося заряда, в разных моделях осуществляется разными методами (см., например, [26–28, 31]). Для решетки, состоящей из стрипов конечной диэлектрической проницаемости, разделенных вакуумными промежутками, такое суммирование возможно только в том случае, если стрипы расположены достаточно близко ( $a \ll \lambda \sim d$ ), и многократным переотражением волн в промежутках можно пренебречь. Данное условие,

разумеется, остается в силе и для случая идеально проводящих бесконечно тонких стрипов, однако обычно не указывается в моделях поверхностных токов, где задача изначально решается для идеального проводника.

Действительно, на первый взгляд, для бесконечно тонких стрипов переотражениями можно пренебречь, и полученные результаты (формула (56)) должны быть применимы при любых значениях ширины вакуумных промежутков  $a$ . Однако, как подчеркивалось ранее, учет реальных диэлектрических свойств материала решетки приводит к тому, что векторное суммирование полей излучения от каждого стрипа проводится внутри среды, а не в вакууме. Такая процедура имеет смысл только в том случае, если стрипы расположены достаточно близко. При этом использование коэффициентов Френеля, а также формулы (21) для интенсивности излучения, выведенных для бесконечной пластинки, в задаче о решетке также ограничено условием (42). В моделях поверхностных токов само выражение для тока обычно находится в пренебрежении искажением на краях стрипа, т. е. как для идеально проводящей полуплоскости [26, 31]. Такое приближение и соответствует пренебрежению переотражением излучения между стрипами, а также использованию коэффициентов Френеля для бесконечной пластинки в задаче с конечной проводимостью решетки. Поскольку решетки с вакуумными промежутками между стрипами обычно используются для генерации излучения в терагерцевом и СВЧ-диапазонах, неравенство  $a \ll d$  легко осуществимо экспериментально.

В заключение заметим, что известный факт обращения интенсивности излучения в нуль на четных гармониках для случая  $a = d/2$ , предсказываемый моделями поверхностных токов (см. формулу (57), а также работы [26, 31]) и отсутствующий в модели Ван ден Берга [25], объясняется тем, что модели поверхностных токов при данных значениях ширины вакуумных промежутков могут использоваться лишь для качественного анализа.

Автор благодарен А. П. Потылицыну, А. А. Тищенко и Л. Г. Сухих за конструктивную критику и полезные замечания. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.», контракты ГК П1199 от 04 июня 2010 г., ГК П1143 от 27 августа 2009 г., а также ГК 02.740.11.0238.

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Ya. Amusia, *Radiat. Phys. Chem.* **75**, 1232 (2006).
2. В. Е. Пафомов, *Труды ФИАН* **44**, 28 (1969).
3. Д. В. Карловец, А. П. Потылицын, *ЖЭТФ* **134**, 887 (2008).
4. D. V. Karlovets and A. P. Potylitsyn, *Phys. Lett. A* **373**, 1988 (2009).
5. P. M. van den Berg and A. J. A. Nijica, *J. Phys. A: Math. Gen.* **9**, 1133 (1976).
6. И. А. Гилянский, *Электромагнитные поверхностные явления*, Наука, Новосибирск (1990).
7. V. P. Shestopalov, *The Smith-Purcell Effect*, Nova Sci. Publ., New York (1998).
8. G. Kube, *Nucl. Instr. Meth. B* **227**, 180 (2005).
9. A. P. Potylitsyn, M. I. Ryazanov, M. N. Strikhanov et al., *Diffraction Radiation from Relativistic Particles*, Springer, Berlin-Heidelberg (2010).
10. L. Durand, *Phys. Rev. D* **11**, 89 (1975).
11. М. И. Рязанов, *ЖЭТФ* **127**, 528 (2005).
12. И. Н. Топтыгин, *Современная электродинамика*, т. 2, Регулярная и хаотическая динамика, Москва-Ижевск (2005).
13. Б. М. Болотовский, *УФН* **75**, 295 (1961).
14. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, Москва (1963).
15. V. P. Zrellov, M. Klimanova, V. P. Lupiltsev et al., *Nucl. Instr. Meth.* **215**, 141 (1983).
16. М. И. Рязанов, *Электродинамика конденсированного вещества*, Наука, Москва (1984).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, Москва (2005).
18. Д. В. Карловец, А. П. Потылицын, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 368 (2009).
19. В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович, *Переходное излучение и переходное рассеяние (некоторые вопросы теории)*, Наука, Москва (1984).
20. М. Л. Тер-Микаелян, *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях*, Изд-во АН АрмССР, Ереван (1969).

21. Г. М. Гарибян, Ян Ши, *Рентгеновское переходное излучение*, Изд-во АН АрмССР, Ереван (1983).
22. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ДАН СССР **124**, 1026 (1959).
23. Б. М. Болотовский, Е. А. Галстян, УФН **170**, 809 (2000).
24. D. Xiang, W.-H. Huang, Y.-Z. Lin et al., Phys. Rev. ST Accel. Beams **11**, 024001 (2008).
25. P. M. van den Berg, J. Opt. Soc. Amer. **63**, 1588 (1973).
26. J. H. Brownell, J. Walsh, and G. Doucas, Phys. Rev. E **57**, 1075 (1998).
27. A. S. Keser, Phys. Rev. ST Accel. Beams **8**, 072801 (2005).
28. Д. В. Карловец, Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, Томский политехнический университет, Томск (2008).
29. V. Blackmore, G. Doucas, C. Perry et al., Phys. Rev. ST Accel. Beams **12**, 032803 (2009).
30. N. F. Shul'ga and V. V. Syshchenko, J. Phys.: Conf. Ser. **236**, 012010 (2010).
31. A. P. Potylitsyn, Phys. Lett. A **238**, 112 (1998).