

# ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В ЗАДАЧЕ РАЗЛИЧЕНИЯ ДВУХ БЛИЗКИХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

*В. Н. Горбачев\**, *М. В. Чехова*

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения  
190000, Санкт-Петербург, Россия*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 мая 2010 г.

Предлагается использовать обратную связь (ОС) в задаче различения двух когерентных состояний с малыми амплитудами и с фазами, отличающимися на  $\pi$ . Из-за неортогональности таких состояний при их различении возникает ошибка, которая уменьшается при использовании ОС. Рассмотрена схема оптического квантового канала, на вход которого подается классический сигнал, представленный двумя когерентными состояниями с малой амплитудой. Для случая с обратной связью рассчитана вероятность ошибки регистрации и вычислена взаимная энтропия, определяющая степень соответствия посланной и полученной информации. Мы нашли, что включение в квантовый канал петли обратной связи при измерении канонической координаты и числа фотонов может увеличивать взаимную энтропию.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В задачах, где для передачи информации используются состояния квантовой системы, например, в квантовой криптографии, важное место занимает вопрос об оптимальном различении двух неортогональных квантовых состояний  $|\psi_1\rangle$  и  $|\psi_2\rangle$ . Здесь существуют по крайней мере два подхода. В одном из них результатов измерения может быть три: либо с вероятностью единица идентифицируется  $|\psi_1\rangle$ , либо с вероятностью единица идентифицируется  $|\psi_2\rangle$ , либо никакого вывода сделать нельзя (так называемый inconclusive result). При втором подходе результатов измерения только два, но каждый из них неизбежно содержит ошибку. Так, если послано состояние  $|\psi_1\rangle$ , то с вероятностью  $P(\psi_2|\psi_1)$  оно ошибочно принимается за  $|\psi_2\rangle$ , и наоборот. Полная вероятность ошибки при таком подходе составляет

$$p_e = \lambda_1 P(\psi_2|\psi_1) + \lambda_2 P(\psi_1|\psi_2), \quad (1)$$

где  $\lambda_k$  — вероятность того, что посылается  $|\psi_k\rangle$ ,  $k = 1, 2$ . Хелстром [1] впервые показал, что минимально возможная вероятность ошибки определяется скалярным произведением  $\psi_1$  и  $\psi_2$ :

$$P_H = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - 4\lambda_1\lambda_2 |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2} \right]. \quad (2)$$

Эта вероятность называется пределом (гранью) Хелстрома. Соотношение (2) носит фундаментальный характер, однако оно не дает рецептов, как достичь  $P_H$ . Для ее достижения в каждом конкретном случае стратегия должна определяться исходя из природы состояний  $|\psi_1\rangle$  и  $|\psi_2\rangle$ . Так, сравнительно просто достичь грани Хелстрома при различении двух однофотонных поляризационных состояний [2], для которых размерность гильбертова пространства равна двум. Сложнее обстоит дело с различением двух близких когерентных состояний  $|\alpha\rangle$  и  $|\alpha - \alpha\rangle$ , где  $\alpha$  — амплитуда состояния,  $|\alpha| \leq 1$  (рис. 1) — задача, часто возникающая в квантовой теории информации (см., например, [3]). Стандартная стратегия в этом случае — это гомодинное детектирование, что соответствует измерению канонической координаты: если при измерении координаты результат оказывается положительным, то делается вывод, что принято состояние  $|\alpha\rangle$ , если отрицательным, то  $|\alpha - \alpha\rangle$  (для определенности полагаем, что  $\text{Re } \alpha > 0$ ). Однако эта стратегия неоптимальна и не позволяет достичь грани Хелстрома [4], которая в этом случае равна (при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ )

\*E-mail: valery.gorbachev@gmail.com

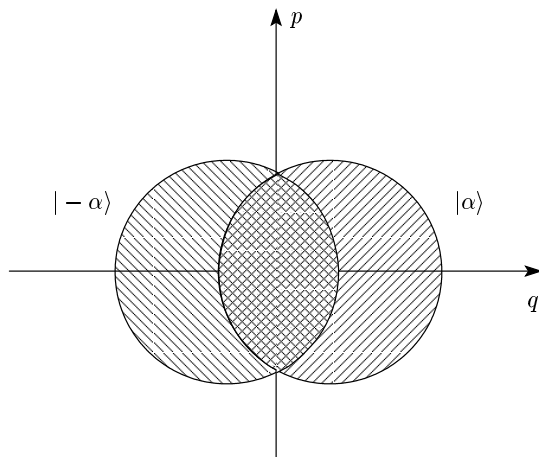


Рис. 1. Перекрытие функций распределения на комплексной плоскости  $\alpha$  не дает возможности с достоверностью различить два неортогональных состояния  $|\alpha\rangle$  и  $|-\alpha\rangle$

$$P_{coh} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \exp(-4|\alpha|^2)} \right]. \quad (3)$$

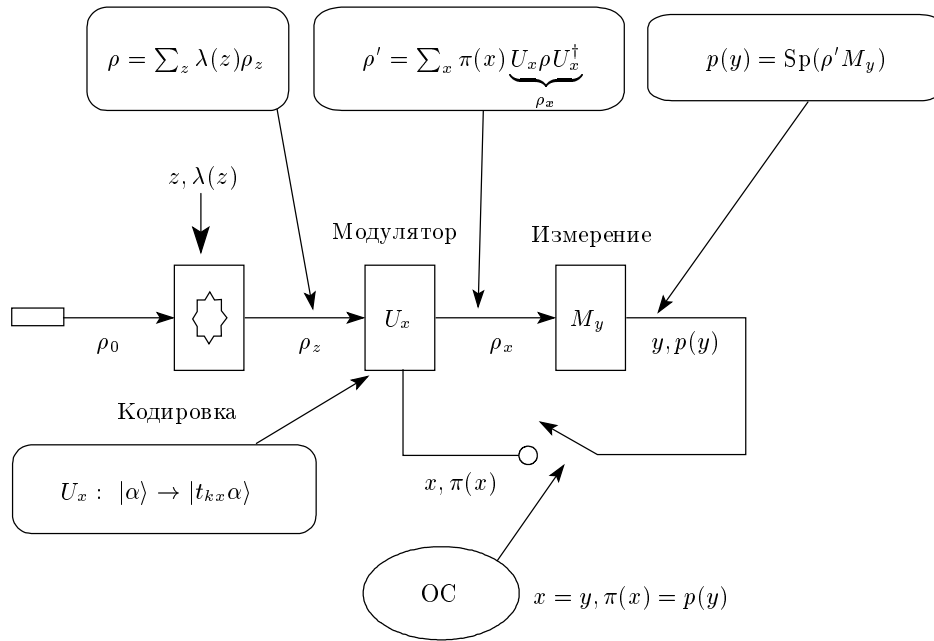
Более выигрышной оказывается стратегия на основе приемника Кеннеди: с помощью опорной волны состояния «сдвигаются», становясь вакуумом  $|0\rangle$  и когерентным состоянием двойной амплитуды  $|2\alpha\rangle$ , а затем измерение проводится детектором, работающим в режиме счета фотонов («счетным» детектором) [5]. Тем не менее, и этот метод не позволяет достичь грани Хелстрема. Не позволяет ее достичь и более совершенный метод, в котором измерение «счетным» детектором проводится после гауссовских операций из более общего класса, включающего не только сдвиг, но и сжатие [6, 7]. Заметим, что даже используя только операции сдвига (но не обязательно на величину  $\alpha$ , а на специально выбранную в каждом конкретном случае величину), авторам работы [7] удалось добиться лучшего результата, чем позволяют гомодинное детектирование и приемник Кеннеди.

Известно [4, 8], что грань Хелстрема достигается так называемым приемником Долинара, в котором реализуется обратная связь (ОС): в зависимости от сигнала «счетного» детектора измеряемое состояние испытывает тот или другой сдвиг путем подмешивания определенного сигнала опорной волны. Такой приемник недавно был реализован [9]; однако его конструкция требует использования сверхбыстрого «счетного» детектора, что в настоящее время невозможно. Имеющиеся результаты [9] пока лишь ненамного превосходят полученные методом гомодинного детектирования.

В настоящей работе мы рассмотрим новый способ различения квантовых состояний  $|\alpha\rangle$  и  $|-\alpha\rangle$ , основанный на применении обратной связи [10]. Идея нашего способа заключается в том, что обратную связь, которая лежит в основе приемника Долинара, можно реализовать и в режиме гомодинного детектирования. Известно [10–14], что для излучения внутри петли обратной связи флуктуации измеряемой квадратуры меняются (увеличиваются при положительной обратной связи и уменьшаются при отрицательной). Принципиальную трудность составляет тот факт, что при выводе из петли обратной связи излучение теряет свои свойства. Однако эта проблема решается, если вывод излучения из петли обратной связи не нужен, а именно так обстоит дело с задачей различения двух близких когерентных состояний.

Описание действия петли обратной связи на квантовое состояние излучения сравнительно просто выполняется в рамках линейного приближения, когда на входе в петлю обратной связи амплитуды полей велики, и относительные флуктуации числа фотонов и квадратур могут считаться малыми. Такой подход использовался, в частности, в работах [10, 15]. В рассматриваемом случае этот подход неприменим по двум причинам: во-первых, при  $|\alpha|^2 \ll 1$  относительные флуктуации числа фотонов велики, а во-вторых, для когерентного состояния с малой амплитудой статистика флуктуаций света не является гауссовой. Поэтому в данной работе действие обратной связи описывается с помощью квантово-информационного подхода.

Наш подход позволяет рассматривать схему с обратной связью как канал, по которому передается классическая информация, представленная когерентными состояниями  $|\alpha\rangle$  и  $|-\alpha\rangle$ . Тогда задача оптимального различения двух неортогональных состояний сводится к поиску максимума взаимной шенноновской информации между входом и выходом. Такая постановка задачи представляет непосредственный интерес для приложений, поскольку дает оценку классической пропускной способности квантового канала, показывая, какое количество информации получено в расчете на посланный бит. Для описания обратной связи мы используем модель модулятора с поглощением, которое зависит от сигнала детектора. В схеме, содержащей обратную связь, детектор измеряет квантовую наблюдаемую, например, каноническую координату, канонический импульс или число фотонов. Основное приближение, которое используется при решении задачи, — это условие слабой обратной связи.



**Рис. 2.** Квантовый канал с обратной связью. На вход канала подается классический сигнал  $z$  с вероятностью  $\lambda(z)$ , который кодируется состояниями квантовой системы  $\rho_z$ , в частности, когерентными состояниями  $|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle$ . С помощью модулятора классический сигнал  $x$ , имеющий вероятность  $\pi(x)$ , преобразуется в состояние квантовой системы  $\rho_x$ . Выходом канала является классический сигнал  $y$ , он имеет вероятность  $p(y)$  и получается в результате квантового измерения, которое описывается разложением единицы  $\sum_y M_y = 1$

Рассматривая схемы с измерением канонической координаты и числа фотонов, мы нашли, что взаимная информация будет увеличиваться при использовании положительной обратной связи. Этот вывод можно пояснить следующим образом. В схеме гомодинного детектирования степень различия двух когерентных состояний  $|\alpha\rangle$  и  $|-\alpha\rangle$  определяется областью, где перекрываются их распределения амплитуд, которые в координатном представлении имеют гауссов вид. Положительная обратная связь приводит к увеличению средней амплитуды, поэтому распределения расходятся и область перекрытия уменьшается. Поскольку обратная связь слабая, уширения гауссовых распределений не происходит.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 выводятся уравнения, описывающие состояние поля в схеме с обратной связью, в разд. 3 используется приближение слабой обратной связи, когда вероятность некоторого исхода измерения раскладывается в ряд по малому параметру — силе обратной связи. В разд. 4 рассматриваются конкретные примеры с измерением канонической координаты и числа фотонов. В разд. 5 вычисляется вероятность ошибки и взаимная информация между входом и выходом.

В конце раздела приводится краткое описание возможного эксперимента. Заключение и выводы содержатся в разд. 6.

## 2. КВАНТОВЫЙ КАНАЛ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Будем рассматривать передачу классической информации с помощью квантового канала с обратной связью, где классическая информация кодируется когерентными состояниями светового пучка.

Пусть на вход канала, представленного на рис. 2, подается классический сигнал  $z$  с вероятностью  $\lambda(z)$  и преобразуется в состояние квантовой системы

$$z \rightarrow \rho_z,$$

которое далее будем считать когерентным,  $|\alpha\rangle\langle\alpha|$  или  $|-\alpha\rangle\langle-\alpha|$ .

Тогда состояние квантовой системы будет описываться матрицей плотности [16]

$$\rho = \sum_z \lambda(z) \rho_z. \tag{4}$$

Пусть далее это состояние преобразуется модулятором, который управляется другим классическим сигналом  $x$

$$U_x : x \rightarrow \rho_x = U_x \rho U_x^\dagger, \quad (5)$$

где оператор  $U_x$  описывает модулятор. Преобразование  $U_x$  не обязательно унитарное, но оно сохраняет след матрицы плотности. Пусть  $\pi(x)$  — вероятность классического сигнала  $x$ . Тогда состояние квантовой системы на выходе модулятора имеет вид

$$\rho' = \sum_x \pi(x) \rho_x. \quad (6)$$

Чтобы извлечь передаваемую информацию, над квантовой системой проводится измерение некоторой наблюдаемой, которое описывается разложением единицы  $\sum_y M_y = 1$ .

На выходе схемы измерения возникает классический сигнал  $y$  с вероятностью  $p(y)$ , где

$$\begin{aligned} p(y) &= \text{Sp}(\rho' M_y) = \sum_{x,z} \text{Sp}(M_y U_x \rho_z U_x^\dagger) \lambda(z) \pi(x) = \\ &= \sum_{x,z} p(y|z, x) \lambda(z) \pi(x), \end{aligned} \quad (7)$$

где условная вероятность или передаточная функция канала определяется соотношением

$$p(y|z, x) = \text{Sp}(M_y U_x \rho_z U_x^\dagger). \quad (8)$$

В результате получился квантовый канал с двумя классическими входами  $Z = \{z, \lambda(z)\}$  и  $X = \{x, \pi(x)\}$ . Он передает классическую информацию  $Z, X \rightarrow Y$ , где сигнал на выходе  $Y = \{y, p(y)\}$ , а передаточная функция  $p(y|z, x)$  равна вероятности получить при квантовом измерении значение  $y$ , если классический сигнал на входе в канал имеет значение  $z$ , а на модуляторе —  $x$ .

Для матрицы плотности  $\rho$  используем представление по когерентным состояниям

$$\rho = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} P_N(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|,$$

где глауберовская квазивероятность

$$P_N(\alpha) = \sum_z \lambda(z) P_{Nz}(\alpha) \quad (9)$$

описывает состояние света на входе в модулятор, а  $P_{Nz}(\alpha)$  соответствует матрице плотности  $\rho_z$ . Модулятор будем описывать как линейный поглотитель, считая, что он также может вносить фазовый сдвиг.

Коэффициент поглощения модулятора и сдвиг фазы зависят от величины классического сигнала  $x$ . Тогда модулятор преобразует когерентное состояние в когерентное, но с меньшей амплитудой и измененной фазой:

$$U_x |\alpha\rangle = |t_{kx}\alpha\rangle, \quad (10)$$

где  $k$  — часть сигнала  $x$ , которая управляет модулятором.

Величина  $t_{kx}$  в общем случае может быть комплексной, при этом требуется выполнение условия

$$|t_{kx}| \leq 1. \quad (11)$$

Полагая  $k = k_a + ik_p$ , возьмем  $t_{kx}$  в виде

$$t_{kx} = \exp\{-(u + k_a c_x + ik_p d_x)\}.$$

Здесь величина  $u \geq 0$  определяет некоторый уровень поглощения, около которого ведется модуляция. Слагаемое  $k_a c_x$  описывает амплитудную модуляцию за счет поглощения, когда сигнал  $x$  сначала преобразуется  $x \rightarrow c_x$  без внесения шумов, а затем его часть  $k_a$  используется для модуляции. Аналогично, слагаемое  $k_p d_x$  описывает фазовую модуляцию. В отсутствие модуляции  $k_a = k_p = 0$ , тогда  $t_0 = \exp(-u)$  не зависит от  $x$ , а величина  $u$  может описывать, например, неидеальную квантовую чувствительность фотоприемника. С учетом модуляции передаточная функция канала будет зависеть от  $k$  и  $x$ ,

$$p_k(y|z, x) = \int d^2\alpha P_{Nz}(\alpha) \text{Sp}(M_y |t_{kx}\alpha\rangle \langle t_{kx}\alpha|),$$

а вероятность сигнала на выходе определяется соотношением

$$p_k(y) = \sum_{xz} p_k(y|z, x) \lambda(z) \pi(x).$$

Обратную связь будем описывать, полагая  $\pi(x) = p_k(x)$ . Это условие означает, что сигнал с выхода детектора управляет модулятором, его можно пояснить следующим образом. Если ОС нет, то две случайные величины  $X$  и  $Y$ , описывающие сигнал на входе модулятора и выходе детектора, являются независимыми с распределением вероятности  $\pi(x)p_k(y) = \omega(x|y)p_k(y)$ , где условная вероятность  $\omega(x|y) = \pi(x)$ . Из-за ОС  $X$  и  $Y$  будут коррелированы:  $\omega(x|y) = \delta_{xy}$ , в результате

$$\pi(x) = \sum_y \omega(x|y)p_k(y) = p_k(x).$$

Тогда для  $p_k(y)$  следует уравнение

$$p_k(y) = \sum_{x,z} p_k(y|z, x)p_k(x)\lambda(z). \quad (12)$$

Это уравнение является исходным, оно описывает сигнал в цепи ОС, представленный своей вероятностью  $p_k(y)$ , и имеет простой смысл. Так, в формуле (12) сумма по  $x$ , равная  $\zeta_k(y|z) \equiv \sum_x p_k(y|z, x)$ , представляет собой передаточную функцию бинарного канала, связывающего между собой случайные величины на входе и выходе  $Z$  и  $Y$ , представленные своими вероятностями:  $p_k(y) = \sum_z \zeta(y|z)\lambda(z)$ . Эта формула хорошо известна и используется для описания процесса передачи информации через дискретный канал [17].

В используемой модели сигнал в цепи ОС зависит от трех основных параметров: 1) начальное состояние света на входе в модулятор  $P_N(\alpha)$ , 2) процедура измерения  $M_y$ , 3) способ амплитудной и фазовой модуляции  $c_x, d_x$ . Однако прежде, чем обсуждать влияние этих параметров, нужно получить решение (12). Это сложное уравнение, поэтому будем использовать теорию возмущений.

Подчеркнем, что в нашем подходе ОС формально считается мгновенной. Это предположение позволяет существенно упростить рассмотрение, которое и без того достаточно сложно. Хотя в реальных системах время срабатывания ОС конечно, на практике оно по крайней мере может быть сделано много меньше длительности импульса когерентного сигнала. Так, в эксперименте достижимы времена срабатывания ОС порядка десятков наносекунд, тогда как длительность когерентного импульса может составлять единицы микросекунд. Заметим, что то же требование (время срабатывания ОС много меньше длительности импульса) предъявляется к приемнику Долинара [8, 9].

### 3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Обратную связь будем считать слабой. Это условие позволяет получить решения для вероятностей  $p_k(y|z, x)$  и  $p_k(y)$  и средних, используя теорию возмущений.

Основой служит разложение условной вероятности  $p_k(y|z, x)$ , которую представим в виде (12), где  $\text{Sp}(|t_{kx}\alpha\rangle\langle t_{kx}\alpha|M_y)$  — передаточная функция при исходном когерентном состоянии света  $|\alpha\rangle$  на входе в модулятор. Раскладывая эту передаточную функцию в ряд по степеням  $k$ , найдем

$$\begin{aligned} \text{Sp}(|t_{kx}\alpha\rangle\langle t_{kx}\alpha|M_y) &= \\ &= \text{Sp}(|e^{-u}\alpha\rangle\langle e^{-u}\alpha|M_y)(1 + kA_\alpha(x, y) + \\ &\quad + (k^2/2)B_\alpha(x, y) + \dots). \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} p_k(y|z, x) &= \int d^2\alpha P_{Nz}(\alpha) \times \\ &\quad \times \text{Sp}(|e^{-u}\alpha\rangle\langle e^{-u}\alpha|M_y)(1 + kA_\alpha(x, y) + \\ &\quad + (k^2/2)B_\alpha(x, y) + \dots) = \\ &= p_0(y|z) + p_k^{(1)}(y|z, x) + p_k^{(2)}(y|z, x) + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Используя это выражение, можно построить приближенные решения для вероятностей  $p_k(y)$  и  $p_k(y|z) = \sum_x p_k(y|z, x)p_k(x)$ . Так, с точностью до  $k^2$ , например, для  $p_k(y|z)$  следует выражение

$$\begin{aligned} p_k(y|z) &= p_0(y|z) + \sum_x (p_k^{(1)}(y|z, x)p_0(x) + \\ &\quad + p_k^{(1)}(y|z, x) \sum_{x'z'} p_k^{(1)}(x|z', x')p_0(x')\lambda(z') + \\ &\quad + p_k^{(2)}(y|z, x)p_0(x)), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$p_0(y|z) = \int d^2\alpha P_{Nz}(\alpha)\text{Sp}(|e^{-u}\alpha\rangle\langle e^{-u}\alpha|M_y),$$

а условия нормировки

$$\sum_y p_0(y) = \sum_y p_0(y|z) = 1, \quad \sum_y p_k^{(1,2)}(y|z, x) = 0.$$

### 4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ: ИЗМЕРЕНИЕ КООРДИНАТЫ И ИЗМЕРЕНИЕ ЧИСЛА ФОТОНОВ

Для иллюстрации рассмотрим решения для передаточной функции  $p_k(y|z)$  в линейном приближении, когда классический бинарный сигнал на входе  $z = 0, 1$  кодируется двумя когерентными состояниями  $|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle$ . Пусть когерентные состояния посылаются на вход модулятора с вероятностями  $\lambda$  и  $1 - \lambda$ . Тогда поле на входе в модулятор представляет собой смесь двух когерентных состояний с комплексными амплитудами  $\alpha$  и  $-\alpha$ , и формула (4) принимает вид

$$\rho = \lambda|\alpha\rangle\langle\alpha| + (1 - \lambda)|-\alpha\rangle\langle-\alpha|. \quad (16)$$

Будем считать, что измеряется либо каноническая координата, либо число фотонов.

**4.1. Измерение координаты**

Измерение координаты соответствует в эксперименте гомодинному детектированию. В этом случае

$$y = q, \quad M_q = |q\rangle\langle q|, \quad \langle q|q'\rangle = \delta(q - q'),$$

$$\int dq |q\rangle\langle q| = 1.$$

Тогда

$$p_k(q|z, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\{-2(q - (-1)^z \operatorname{Re}(t_{kx}\alpha))^2\}.$$

Раскладывая это выражение в ряд по  $k$ , найдем решение в линейном приближении:

$$p_k(q|z) = p_0(q|z)[1 - (-1)^z 4e^{-u}(k_a \langle c_q \rangle_0 \operatorname{Re} \alpha - k_p \langle d_q \rangle_0 \operatorname{Im} \alpha)(q - (-1)^z e^{-u} \operatorname{Re} \alpha)], \quad (17)$$

где

$$p_0(q|z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\{-2(q - (-1)^z e^{-u} \operatorname{Re} \alpha)^2\},$$

$$\langle c_q \rangle_0 = \int dq c_q p_0(q), \quad \langle d_q \rangle_0 = \int dq d_q p_0(q),$$

$$p_0(q) = \lambda p_0(q|0) + (1 - \lambda)p_0(q|1).$$

Без ОС величина  $k = 0$ , тогда вероятность получить при измерении координату  $q$ , если послали состояние, отвечающее  $z = 0, 1$ , будет равна  $p_0(q|z)$ .

**4.2. Измерение числа фотонов**

Измерение числа фотонов нечувствительно к фазе когерентного состояния, поэтому вместо суперпозиции (16) возьмем «сдвинутые» состояния  $|0\rangle$  и  $|2\alpha\rangle$ , для которых скалярное произведение, а следовательно, и предел Хелстрема (2) такие же, как для исходных состояний. Тогда

$$\rho = \lambda|0\rangle\langle 0| + (1 - \lambda)|2\alpha\rangle\langle 2\alpha|. \quad (18)$$

Такая процедура, с последующим измерением числа фотонов, в эксперименте соответствует использованию приемника Кеннеди. Для этого случая  $y = n$ ,  $M_n = |n\rangle\langle n|$ ,  $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn}$ ,  $\sum_n M_n = 1$ , а передаточная функция имеет вид

$$p_k(n|z, x) = \frac{|t_{kx}z \cdot 2\alpha|^{2n}}{n!} \exp(-|t_{kx}z \cdot 2\alpha|^2).$$

Используя разложение передаточной функции в ряд по  $k$ , в линейном приближении найдем

$$p_k(n|z) = p_0(n|z)[1 - 2k_a \langle c_n \rangle_0 (n - e^{-2u} |z \cdot 2\alpha|^2)], \quad (19)$$

где

$$p_0(n|z) = \frac{|e^{-u}z \cdot 2\alpha|^{2n}}{n!} \exp(-|e^{-u}z \cdot 2\alpha|^2),$$

$$\langle c_n \rangle_0 = \sum_n p_0(n) c_n,$$

$$p_0(n) = \lambda \delta_{n0} + (1 - \lambda) \frac{|e^{-u}2\alpha|^{2n}}{n!} \exp(-|e^{-u}2\alpha|^2).$$

**5. ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ КООРДИНАТЫ И ЧИСЛА ФОТОНОВ**

**5.1. Ошибка при измерении координаты**

Пусть исходное состояние имеет вид (16), тогда вероятность ошибки, которая определяется вероятностью принять  $|\alpha\rangle$  за  $|\alpha\rangle$ , если исход измерения  $q < 0$ , и наоборот (напомним, что  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ ), равна

$$p_e = \lambda \int_{q \leq 0} p_k(q|z = 0) dq + (1 - \lambda) \times \int_{q > 0} p_k(q|z = 1) dq. \quad (20)$$

Для вычисления ошибки будем использовать выражение (17) для условной вероятности  $p_k(q|z)$ , записанное в линейном приближении.

Без ОС имеем

$$\int_{q \leq 0} p_0(q|z = 0) dq = \int_{q > 0} p_0(q|z = 1) dq = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{2}e^{-u} \operatorname{Re} \alpha), \quad (21)$$

где

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dt \exp(-t^2).$$

Это выражение совпадает с вероятностью ошибки при гомодинном детектировании [7] с учетом потерь, вносимых модулятором.

Вероятность ошибки при наличии ОС принимает вид

$$p_e = (1/2) \operatorname{erfc}(\sqrt{2}e^{-u} \operatorname{Re} \alpha) + \Delta_k,$$

т. е. ОС вносит поправку

$$\Delta_k = e^{-u} [k_a \langle c_q \rangle_0 \operatorname{Re} \alpha - k_p \langle d_q \rangle_0 \operatorname{Im} \alpha] \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\{-2 \exp(-2u) (\operatorname{Re} \alpha)^2\} \quad (22)$$

к вероятности ошибки при гомодинном детектировании. При  $\Delta_k < 0$  вероятность ошибки уменьшается. Напомним, что здесь величины  $\langle c_q \rangle_0$  и  $\langle d_q \rangle_0$  означают преобразование сигналов в цепи обратной связи  $q \rightarrow c_q$  и  $q \rightarrow d_q$ .

Рассмотрим случай амплитудной модуляции, когда  $k_p = 0$ . Здесь величина  $\Delta_k$  имеет максимум в зависимости от  $\text{Re } \alpha$ . Так, при  $\text{Re } \alpha = (1/2) \exp u$  найдем

$$\max \Delta_k = k_a \langle c_q \rangle_0 \frac{1}{2\sqrt{\pi e}}.$$

Вероятность ошибки будет уменьшаться при  $k_a \langle c_q \rangle_0 < 0$ . Если считать, что усредненная по начальному гауссовому распределению величина  $\langle c_q \rangle_0 > 0$ , то для уменьшения ошибки нужна положительная ОС, для которой  $k_a < 0$ .

Такое поведение можно объяснить следующим образом. В данном случае в линейном приближении ОС приводит к изменению среднего значения сигнала, а его дисперсия не меняется. Таким образом, ОС раздвигает два распределения, которые отвечают когерентным состояниям  $|\alpha\rangle$  и  $|\alpha\rangle$ , и их перекрытие, определяющее вероятность ошибки, уменьшается.

### 5.2. Ошибка при измерении числа фотонов

Пусть в исходном состоянии (18) нужно отличить когерентный сигнал от вакуумного с помощью «счетного» детектора. Тогда вероятность ошибки будет равна

$$p_e = \lambda(1 - p_k(n=0|z=0)) + (1 - \lambda)p_k(n=0|z=1)$$

или, с учетом (19),

$$p_e = (1 - \lambda)e^{-e^{-2u}|2\alpha|^2} (1 + 2k_a \langle c_n \rangle_0 e^{-2u}|2\alpha|^2). \quad (23)$$

Здесь первое слагаемое в скобках соответствует ошибке при детектировании с помощью приемника Кеннеди [5]. Наличие ОС дает поправку к этому выражению (второе слагаемое). Как и в случае измерения координаты, вероятность ошибки уменьшится, если ОС положительна:  $k_a \langle c_n \rangle_0 < 0$ .

Рассмотрим частный случай. Обозначим среднее значение числа фотонов без ОС как  $n_0 = e^{-2u}|2\alpha|^2$  и, полагая  $\lambda = 1/2$ , запишем выражение для ошибки:

$$p_e = (1/2)e^{-n_0} (1 + n_0 - \langle n \rangle).$$

Отсюда следует, что ОС будет приводить к уменьшению ошибки, если  $\langle n \rangle > n_0$ .

### 5.3. Взаимная энтропия при измерении числа фотонов в линейном приближении

Вход и выход канала с ОС описываются двумя случайными величинами  $Z = \{z, \lambda(z)\}$  и  $Y = \{y, p(y)\}$ , где в случае измерения числа фотонов  $y = n$ . Шенноновская или взаимная энтропия между входом и выходом определяется стандартным выражением

$$I_k(Z : Y) = \sum_{n,z} p_k(n|z) \lambda(z) \log_2 \frac{p_k(n|z)}{p_k(n)}. \quad (24)$$

В отсутствие ОС канал переводит входной сигнал  $z = 0, 1$ , представленный парой состояний  $|0\rangle, |2\alpha\rangle$ , в выходной сигнал  $n = 0, \mu$ , где  $\mu = 1, 2, \dots$ , и характеризуется следующей передаточной функцией:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 0, \text{ prob } 1, \\ 0 &\rightarrow \mu, \text{ prob } 0, \\ 1 &\rightarrow 0, \text{ prob } g, \\ 1 &\rightarrow \mu, \text{ prob } 1 - g, \end{aligned}$$

где  $g = p_0(0|1)$  — вероятность принять «1» за «0». Выражение для взаимной энтропии имеет вид

$$I_0(Z : Y) = -[\lambda + (1 - \lambda)g] \log_2[\lambda + (1 - \lambda)g] + (1 - \lambda)g \log_2[(1 - \lambda)g] - (1 - \lambda) \log_2(1 - \lambda). \quad (25)$$

Отсюда следует, что если  $g = 0$ , то взаимная энтропия равна энтропии на входе:

$$I_0(Z : Y) = H(Z) = -\lambda \log_2 \lambda - (1 - \lambda) \log_2(1 - \lambda) \leq 1.$$

При  $g = 1$  имеет место канал со стиранием

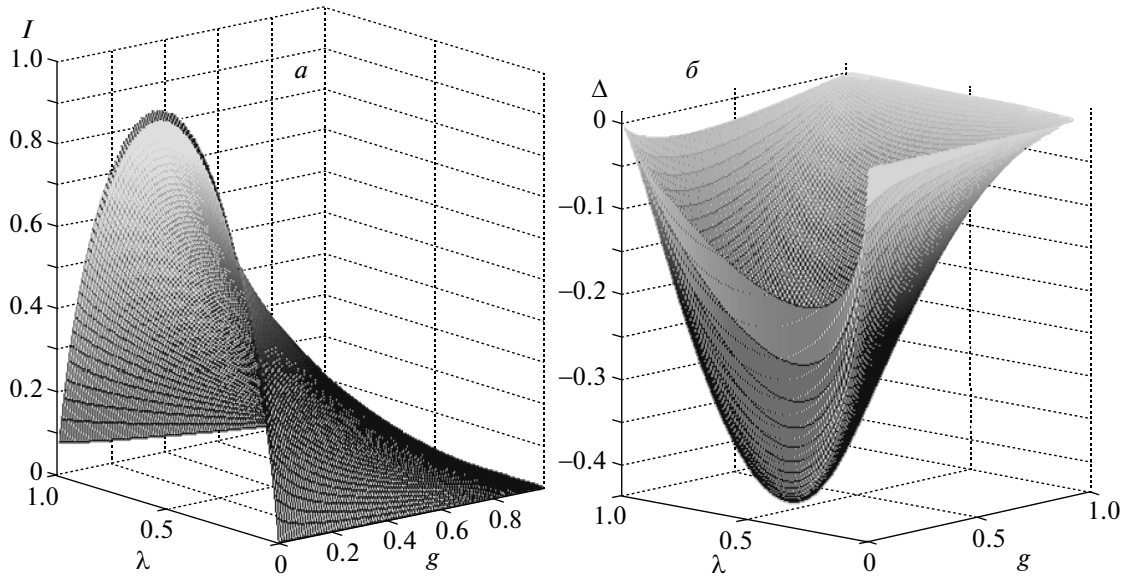
$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 0, \text{ prob } 1 \\ 1 &\rightarrow 0, \text{ prob } 1, \end{aligned}$$

по которому информацию передавать нельзя, поскольку  $I_0(Z : N) = 0$ . С помощью соотношения

$$e_0 = (1 - \lambda)p_0(0|1) = (1 - \lambda) \exp(-s|2\alpha|^2) \quad (26)$$

взаимную энтропию можно выразить через величину  $e_0 = (1 - \lambda)g$ , которая имеет смысл вероятности ошибки различить вакуумное и когерентное состояния без ОС. Тогда найдем

$$I_0(Z : N) = -(\lambda + e_0) \log_2(\lambda + e_0) + e_0 \log_2 e_0 - (1 - \lambda) \log_2(1 - \lambda). \quad (27)$$



**Рис. 3.** Взаимная энтропия в зависимости от вероятности входного сигнала  $\lambda$  и величины ошибки  $g$ . *a* — канал без ОС. Если ошибки нет,  $g = 0$ , то взаимная энтропия определяется количеством информации на входе, которое максимально при  $\lambda = 1/2$ . При максимальной ошибке возникает стирающий канал, для которого взаимная энтропия равна нулю. *б* — величина  $\Delta$  для канала с ОС. При  $g = 0, 1$ , когда ошибка отсутствует или максимальна, ОС никакого влияния не оказывает, поскольку  $\Delta = 0$ . Положительная ОС может приводить к увеличению взаимной информации

Здесь  $\lambda \in [0, 1], e_0 \in [0, 1 - \lambda)$ . Отсюда следует, что в отсутствие ошибки, когда  $e_0 = 0$ , взаимная информация определяется количеством информации на входе:

$$I_0(Z : N) = H(Z) = -\lambda \log_2 \lambda - (1 - \lambda) \log_2 (1 - \lambda) \leq 1.$$

Если вероятность ошибки  $e_0 \approx 1$ , что возможно при  $\lambda = 0$ , то взаимная информация между входом и выходом  $I_0(Z : N) = 0$ . Это связано с тем, что в этом случае передается только одно когерентное состояние и количество информации на входе  $H(Z) = 0$ .

Рассмотрим частный случай  $\lambda = 1/2$ , тогда для взаимной энтропии следует выражение

$$I_0(Z : N) = -\left(e_0 + \frac{1}{2}\right) \log_2 \left(e_0 + \frac{1}{2}\right) + e_0 \log_2 e_0 + \frac{1}{2}, \quad (28)$$

где  $e_0 \in [0, 1/2)$ . Отсюда следует, что при максимальной ошибке  $e_0 \approx 1/2$  взаимная информация между входом и выходом равна нулю.

Используя выражение для  $I_0(Z : Y)$ , найдем выражение для взаимной энтропии с учетом ОС в линейном приближении:

$$I_k(Z : Y) = I_0(Z : N) + 2k_a \langle c_n \rangle_0 \Delta,$$

где

$$\Delta = g \ln g (1 - \lambda) \log_2 \frac{\lambda + (1 - \lambda)g}{(1 - \lambda)g}. \quad (29)$$

Влияние ОС описывается величиной  $\Delta$ , показанной на рис. 3. При  $g = 0$  или  $g = 1$  величина  $\Delta = 0$ . Это означает, что в отсутствие ошибки или в условиях максимальной ошибки обратная связь не изменяет взаимную энтропию. Произведение логарифмов в формуле (29) будет всегда отрицательной величиной, поэтому ОС может приводить к увеличению взаимной информации, если только  $k_a \langle c_n \rangle_0 < 0$ , т. е. ОС положительна. Именно в этом случае уменьшается вероятность ошибки  $p_e$ .

#### 5.4. Пример возможного эксперимента

В качестве примера рассмотрим возможный эксперимент с амплитудной модуляцией и детектированием координаты.

С помощью лазера с шириной линии 100 кГц и ячейки Погкельса, помещенной между двумя скрещенными поляризаторами, приготавливаются когерентные импульсы длительностью 1 мкс. Для этого на ячейку, ось которой ориентирована под углом



$45^\circ$  к направлению поляризации падающего излучения, подаются импульсы напряжения длительностью 1 мкс и амплитудой, много меньшей полуволнового напряжения. Полярность импульсов может быть как положительной, так и отрицательной; она определяет фазу приготавливаемого состояния. Далее излучение дополнительно ослабляется фильтрами. При средней мощности такого пучка 0.1 нВт его яркость будет составлять 1 фотон на моду. На этом этапе заканчивается приготовление состояний  $|\alpha\rangle$  и  $|- \alpha\rangle$  [7].

Для осуществления ОС используется второй модулятор, который также может быть реализован на базе ячейки Поккельса [10]. Ячейка устанавливается между двумя параллельными поляризаторами. Ось ячейки находится под углом  $45^\circ$  к направлению поляризации. При выключенной ОС на ячейку подается четвертьволновое напряжение  $U_{QW}$ ; при этом пропускание модулятора по интенсивности равно 50 %, так что  $u = \ln 2/2$ . При изменении напряжения на ячейке от нуля до полуволнового напряжения пропускание модулятора меняется от 100% до нуля. Напряжение на ячейке меняется в окрестности полуволнового:  $U = U_{QW} + \Delta U$ ,  $|\Delta U| \ll U_{QW}$ . Тогда пропускание модулятора по амплитуде зависит от  $\Delta U$  линейно,

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi\sqrt{2}\Delta U}{8U_{QW}}.$$

На этапе измерения излучение сбивается с опорной волной (излучением гомодина, мощностью порядка микроватт) на 50 %-ом светоделителе. На выходах светоделителя устанавливаются рип-диоды, фототоки с которых вычитаются. Результирующий сигнал после нормировки на амплитуду гомодина дает значение координаты  $q$ . Этот сигнал усиливается и управляет модулятором. Быстродействие ОС должно быть не хуже 10 нс; при этом применимо приближение «мгновенной» ОС.

Существенно, что для правильной работы ОС пропускание модулятора должно определяться не самой координатой, а ее модулем или квадратом. Физически это следует из того, что ОС должна приводить не к сдвигу распределений координаты в одну сторону, а к их раздвиганию. Например, в случае квадратичной зависимости пропускание модулятора будет меняться по закону  $t = \exp\{-(u + k_a q^2)\}$ ,  $k_a < 0$ . При этом условие применимости теории возмущений имеет вид

$$|k_a| \ll \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n(n+1)}},$$

что в рассматриваемом случае  $n = 1$  соответствует  $|k_a| \ll 0.7$ . Возможный эксперимент заключался бы в измерении ошибки в зависимости от среднего числа фотонов  $n$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе исследовано влияние обратной связи на считывание бинарного сигнала, закодированного двумя когерентными состояниями малой амплитуды. В силу неортогональности таких состояний их распознавание неизбежно содержит ошибку. В работе показано, что наличие обратной связи меняет эту ошибку. Так, ошибка может быть уменьшена при использовании положительной обратной связи. В качестве примеров рассмотрены два типа измерений — измерение канонической координаты, реализуемое в эксперименте с помощью гомодинного детектора, и измерение числа фотонов, реализуемое в эксперименте с помощью детектора Кеннеди. В обоих случаях получены поправки к известным из литературы выражениям для ошибки распознавания двух состояний без ОС. При использовании положительной ОС эти поправки оказываются отрицательными, т. е. ОС позволяет уменьшить ошибку. Для случая измерения числа фотонов вычислена взаимная энтропия (шенноновская информация) между входом и выходом квантового канала. Показано, что в случае положительной ОС эта информация увеличивается.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 08-02-00555, 08-02-00741а), фонда «Научный потенциал» (договор 187), а также программы поддержки научных школ (грант НШ-157/08М).

## ЛИТЕРАТУРА

1. C. W. Helstrom, *Mathematics in Science and Engineering*, Academic, New York (1979), Vol. 123; C. W. Helstrom, *Inf. Control* **10**, 254 (1967).
2. S. Barnett and E. Riis, *J. Mod. Opt.* **44**, 1061 (1991).
3. T. C. Ralph, *Phys. Rev. A* **61**, 010303(R) (1999); D. Elser, T. Bartley, B. Heim, Ch. Wittmann, D. Sych, and G. Leuchs, *New J. Phys.* **11**, 045014 (2008).
4. J. M. Geremia, *Phys. Rev. A* **78**, 022320 (2008).
5. R. S. Kennedy, Research Laboratory of Electronics, MIT, *Quarterly Progress Rep.* No. 111 (1973), p. 115.

6. M. Takeoka and M. Sasaki, *Phys. Rev. A* **78**, 022320 (2008).
7. Ch. Wittmann, M. Takeoka, K. Cassemiro, M. Sasaki, G. Leuchs, and U. L. Andersen, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 210501 (2008).
8. S. Dolinar, Research Laboratory of Electronics, MIT, *Quarterly Progress Rep.* No. 108 (1973), p. 219.
9. R. L. Cook, P. J. Martin, and J. M. Geremia, *Nature (London)* **446**, 774 (2007).
10. Д. Н. Клышко, А. В. Масалов, *УФН* **165**, 1249 (1995).
11. А. С. Трошин, *Опт. и спектр.* **70**, 662 (1991).
12. Y. Yamamoto, S. Machida, N. Imoto, M. Kitagawa, and G. Björk, *J. Opt. Soc. Amer. B* **4**, 1645 (1987).
13. Я. А. Фофанов, *КЭ* **16**, 2593 (1989).
14. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, *Опт. и спектр.* **83**, 295 (1997).
15. A. V. Masalov, A. A. Putilin, and M. V. Vasilyev, *J. Mod. Opt.* **41**, 1941 (1994).
16. А. С. Холево, *Введение в квантовую информацию*, МЦНМО, Москва (2002).
17. К. Шеннон, *Работы по теории информации и кибернетике*, Изд-во иностр. лит., Москва (1963).