

К ТЕОРИИ СМЕКТИЧЕСКИХ ТЕКСТУР

*В. И. Марченко**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

*Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 22 марта 2010 г.

Рассмотрены деформации в смектиках за рамками малоуглового приближения. Определены энергии конфокальных и конических текстур.

Энергия упругих деформаций смектика при малых отклонениях ориентации слоев от горизонтальной плоскости xy равна [1, (44.6)]

$$E = \frac{A}{2} \int ((\partial_z u)^2 + (\lambda \Delta_{\perp} u)^2) dV, \quad (1)$$

где $u(\mathbf{r})$ — смещение слоев вдоль вертикали (ось z), $\Delta_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $A > 0$ — упругая постоянная, λ — параметр длины. Гармоническое приближение (1), однако, применимо лишь для весьма ограниченного круга задач: тепловые флуктуации смектических слоев [2, § 137], винтовая дислокация [1, § 45]; точечный дефект (примесь) [3]; точечный источник момента сил, линейное включение, лежащее в смектическом слое [4]. Дело в том, что в смектиках зачастую существенны нелинейные эффекты даже при сколь угодно малых отклонениях ориентации слоев. Тогда упругие поля соответствуют минимуму энергии

$$E = \frac{A}{2} \int \left(\left(\partial_z u - \frac{(\partial_{\alpha} u)^2}{2} \right)^2 + (\lambda \Delta_{\perp} u)^2 \right) dV, \quad (2)$$

где $(\partial_{\alpha} u)^2 = (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2$ (см. [1, (44.13)]). Примерами таких нелинейных задач являются неустойчивость Хелфриша при растяжении смектика [1, задача к § 44]; краевая дислокация [5, 6]; деформации в аномально большой области вокруг горизонтального цилиндрического включения радиуса $R > 2\lambda$ [3]; однородный сдвиг, вертикальное линейное включение с нарушенной симметрией $z \rightarrow -z$, элементарная ступень на базисной грани смектика, линейное распределение момента сил в базисной плоскости [4];

границы двойников [7]; точечное и линейное распределения сил [8, 9].

В смектиках известны текстуры [10, 11], в которых напряжения малы, а ориентация смектических слоев меняется существенно. Тогда приближение малых углов (2) неприменимо. Поля деформаций в таких случаях следует определять в рамках общего приближения малых деформаций

$$E = \frac{A}{2} \int \left\{ \left(\frac{\delta a}{a} \right)^2 + (\lambda \mathcal{H})^2 + \beta \mathcal{K} \right\} dV, \quad (3)$$

где a — равновесное межслоевое расстояние, δa — отклонение межслоевого расстояния от a , \mathcal{H} , \mathcal{K} — средняя и гауссова кривизны слоев, β — материальная константа, пропорциональная λ^2 . Приближение (3) верно, если все члены в фигурных скобках малы. Член с гауссовой кривизной отличается от члена со средней кривизной на полную производную. Тем не менее при вычислении энергии текстур следует учитывать оба члена.

Состояние смектика полностью характеризуется заданием профиля смектических слоев. Возможны различные способы задания этого профиля. Рассмотрим, например, смектик, помещенный между двумя концентрическими цилиндрами радиусов $r_2 > r_1 \gg \lambda \sim a$. В случае, когда минимуму поверхностной энергии соответствует параллельная стенкам ориентация слоев, должна реализоваться текстура, представленная на рис. 1а.

В первом приближении текстура представляет собой набор концентрических слоев с одинаковым расстоянием между ними. Эффект кривизны приводит к слабому нарушению эквидистантности. Пусть

*E-mail: mar@kapitza.ras.ru

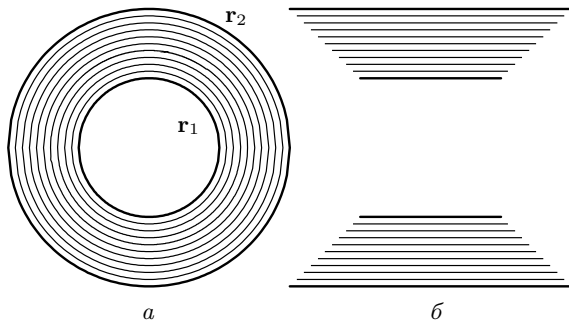


Рис. 1. *a* — Цилиндрическая и сферическая текстуры, *b* — соответствующие недеформированные состояния

данный слой находится на расстоянии $r + \eta(r)$ от центра, где r — его радиус в исходном эквидистантном состоянии. Энергия такой текстуры равна

$$E = \pi A \int_{r_1}^{r_2} \left(\dot{\eta}^2 + \frac{\lambda^2}{(r + \eta)^2} \right) r dr, \quad (4)$$

где $\dot{\eta} = \partial_r \eta$. Уравнение механического равновесия в данном случае принимает вид

$$\ddot{\eta} + \frac{\dot{\eta}}{r} + \frac{\lambda^2}{(r + \eta)^3} = 0. \quad (5)$$

Без учета деформации стенок имеем граничные условия $\eta(r_1) = \eta(r_2) = 0$. Радиальное смещение слоев η оказывается малым, и уравнение (5) сводится к

$$\ddot{\eta} + \frac{\dot{\eta}}{r} + \frac{\lambda^2}{r^3} = 0. \quad (6)$$

Его общее решение есть

$$\eta = -\frac{\lambda^2}{r} + C \ln \frac{r}{b},$$

где C и b — константы интегрирования. Учитывая граничные условия, находим

$$\eta = \lambda^2 \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \right\}. \quad (7)$$

Отклонения от равновесного межплоскостного расстояния действительно малы, и при нахождении энергии (4) можно положить $\eta = 0$, тогда

$$E = \pi A \lambda^2 \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (8)$$

Эта энергия текстуры является платой за пропорциональный площади поверхности выигрыш в энергии контакта смектика со стенками. Если внутренний цилиндр отсутствует, то $r_1 \sim a$. Такой дефект представляет собой пример дисклинации в смектике.

В аналогичной задаче со сферической симметрией удобно ввести радиальное смещение слоев. Используя прежние обозначения, для энергии текстуры получаем

$$E = 2\pi A \int_{r_1}^{r_2} \left(\dot{\eta}^2 + \frac{s}{(r + \eta)^2} \right) r^2 dr, \quad (9)$$

где $s = 4\lambda^2 + \beta$. Для сферы радиуса R

$$\mathcal{H} = \frac{2}{R}, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{R^2}.$$

Пренебрегая смещением η , найдем

$$E = 2\pi A s (r_2 - r_1). \quad (10)$$

Для поля смещений нетрудно получить

$$\eta = \frac{s}{r} \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \ln \frac{r_2}{r_1} - \ln \frac{r}{r_1} \right). \quad (11)$$

В общем случае, так же как и в пределе малых углов (1), теорию упругости смектиков можно сформулировать в терминах поля смещения $u(\mathbf{r})$ относительно некоторого исходного эквидистантного плоского состояния. Действительно, при однородном сжатии вдоль оси z состояния с горизонтальными смектическими слоями с равновесным периодом a имеем $\delta a = a \partial_z u$. Создавая далее однородную деформацию $\partial_x u$, получим межплоскостное расстояние

$$a + \delta a = a(1 + \partial_z u) \cos \varphi,$$

где $\text{tg} \varphi = \partial_x u$. При второй операции каждый слой поворачивается на угол φ при неизменном расстоянии между слоями по вертикали. Из стереометрии имеем

$$\text{tg}^2 \varphi = (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = (\partial_\alpha u)^2. \quad (12)$$

Таким образом,

$$\delta a = \{(1 + \partial_z u) \cos \varphi - 1\} a. \quad (13)$$

При такой параметризации профиля смектических слоев рассмотренная выше цилиндрическая текстура в исходном недеформированном состоянии представляет собой два изолированных участка (рис. 1б, в сечении — трапеции). Поля смещений —

$$u = -\sqrt{z^2 - x^2} - z$$

для нижней трапеции ($z < 0$) и

$$u = \sqrt{z^2 - x^2} - z$$

для верхней ($z > 0$). При этом края верхних и нижних слоев сшиваются и получается текстура, показанная на рис. 1а. Соответственно, для сферической текстуры имеем

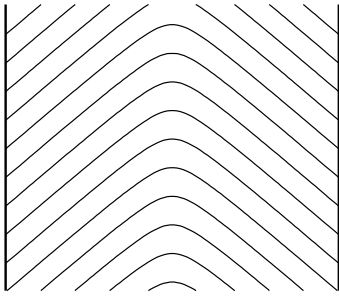


Рис. 2. Аксиально симметричная коническая текстура

$$u = \pm \sqrt{z^2 - x^2 - y^2} - z.$$

Эти функции являются решениями уравнения $\delta a = 0$:

$$1 + \partial_z u = \frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2}. \quad (14)$$

Особенности рассмотренных выше цилиндрической и сферической текстур, а также опыт решения нелинейных задач малоуглового приближения указывают на стратегию решения задач за рамками малоуглового приближения. В первом приближении можно пренебречь эффектами кривизны, положив $\lambda = 0$. Тогда уравнение равновесия сводится к

$$\partial_\alpha \{ (1 + \partial_z u) \cos^3 \varphi [(1 + \partial_z u) \cos \varphi - 1] \partial_\alpha u \} - \partial_z [(1 + \partial_z u) \cos^2 \varphi - \cos \varphi] = 0. \quad (15)$$

Это уравнение следует решать в областях сжатия смектика ($\delta a < 0$). Области растяжения ($\delta a > 0$) отсутствуют в силу неустойчивости Хелфриша, и в остальных областях реализуется состояние с нулевым напряжением ($\delta a = 0$). В основной части объема смектика учет эффектов кривизны, пропорциональной λ^2 , приводит к малым поправкам к профилю слоев. Эффекты кривизны, однако, существенны в двойниковых границах и при приближении к корам дисклинаций.

По-видимому, при определенных граничных условиях в состоянии равновесия должны возникать двойниковые границы молекулярной толщины с немалыми углами или некоторое распределение дислокаций [12].

Заметим, что если $\partial_z u = \varepsilon$, где ε — положительная постоянная, то, согласно уравнению (14),

$$\cos \varphi = \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

Таким образом, возможно существование аксиально симметричной текстуры $u = r \operatorname{tg} \varphi$, представляющей

собой стопку смектических слоев, имеющих форму конуса (рис. 2). Такая текстура должна возникать в сосуде цилиндрической формы, если на стенках выгодна наклонная ориентация смектических слоев. Для конуса

$$\mathcal{H} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \mathcal{K} = 0.$$

Соответственно, энергия конической текстуры (конической дисклинации) в первом приближении есть

$$E = \pi A \lambda^2 \sin^2 \varphi \ln \frac{R}{\tilde{a}}, \quad (16)$$

где R — радиус сосуда, $\tilde{a} \sim a$.

Благодарю Е. А. Бренера, В. К. Долганова и Е. И. Каца за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00483).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1995).
3. C. D. Santangelo and R. D. Kamien, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 045506 (2003).
4. Е. А. Бренер, В. И. Марченко, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 446 (2007).
5. Е. А. Brener and V. I. Marchenko, *Phys. Rev. E* **59**, R4752 (1999).
6. T. Ishikawa and O. L. Lavrentovich, *Phys. Rev. E* **60**, R5037 (1999).
7. В. И. Марченко, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 841 (2007).
8. Е. А. Бренер, В. И. Марченко, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 153 (2009).
9. Е. А. Бренер, В. И. Марченко, Д. А. Пилипенко, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 761 (2009).
10. С. Чандрасекар, *Жидкие кристаллы*, Мир, Москва (1980).
11. А. С. Блинов, *Введение в физику жидких кристаллов*, Наука, Москва (1983).
12. P. Oswald and L. Lejcek, *Eur. Phys. J. E* **19**, 441 (2006).