

ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ ОБОЛОЧКИ

В. И. Докучаев^{a*}, *С. В. Чернов*^{a,b**}

^a *Институт ядерных исследований Российской академии наук
117312, Москва, Россия*

^b *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 1 апреля 2010 г.

Вычислен дискретный спектр и найдено точное аналитическое решение в виде полиномов Мейкснера для волновой функции тонкой гравитирующей оболочки в геометрии Рейсснера–Нордстрема. Показано, что в квантовом спектре гравитирующей оболочки отсутствует экстремальное состояние, как и в случае экстремальной черной дыры.

1. ВВЕДЕНИЕ

В отсутствие квантовой теории гравитации удобным методом описания квантовых эффектов на классическом фоне общей теории относительности является квазиклассическое приближение (гравитоны, эффект Хокинга, спектр первичных возмущений в космологии) и различные полукачественные «правдоподобные» модели (спектра масс черных дыр [1, 2]). Одной из моделей, в которой относительно легко можно получить спектр масс черных дыр, является модель тонкой гравитирующей оболочки [3].

В формализме тонких оболочек существует простой метод получения спектра масс. Он основан на естественном допущении, что масса гравитирующей системы (например, черной дыры) на пространственной бесконечности m_{out} есть гамильтониан системы, так как m_{out} представляет полную энергию всей системы, которая сохраняется при динамической эволюции оболочки. Тогда зная гамильтониан, можно легко написать волновое уравнение и найти из его решения соответствующий спектр масс.

Как известно, в общей теории относительности все свойства черной дыры Шварцшильда полностью определяются одним параметром, а именно, массой на пространственной бесконечности. Но если мы рассмотрим диаграмму Картера–Пенроуза для вечной шварцшильдовской черной дыры (см. рисунок),

которая описывает глобальную геометрию данного многообразия, то увидим, что существуют две пространственные бесконечности, так называемые области R_+ и R_- ([4], см. также [5]). Поэтому можно предположить, что в метрике Шварцшильда вечной черной дыры спектр масс может зависеть от двух квантовых чисел [4].

Рассмотрим динамическое уравнение, которое описывает эволюцию тонкой гравитирующей оболочки в метрике Рейсснера–Нордстрема. Это уравнение имеет хорошо известный вид (см., например, [5, 6], а также [7–10]):

$$\sigma_{in} \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1 - \frac{2m_{in}}{\rho} + \frac{Q_{in}^2}{\rho^2}} - \sigma_{out} \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1 - \frac{2m_{out}}{\rho} + \frac{Q_{out}^2}{\rho^2}} = 4\pi\rho\mu(\rho), \quad (1)$$

где $\sigma_{in,out} = \pm 1$, а m_{in} , m_{out} , Q_{in} , Q_{out} — соответственно масса и заряд черной дыры внутри и вне оболочки, $\rho = \rho(\tau)$ — радиус оболочки относительно наблюдателя, находящегося на оболочке, а точка над функцией обозначает производную по собственному времени τ этого наблюдателя. Будем рассматривать только пылевую оболочку, тогда функция $\mu(\rho) = A/\rho^2$, где $A > 0$ — постоянная интегрирования [6]. Для дальнейшего удобно определить величину $M = 4\pi A$, которая, как можно показать, является полной массой оболочки. Условия для знаков $\sigma_{in,out}$, как легко показать из уравнения (1), имеют следующий вид:

*E-mail: dokuchaev@ms2.inr.ac.ru

**E-mail: chernov@lpi.ru

$$\sigma_{in} = \text{sign} \left[m_{out} - m_{in} + \frac{Q_{in}^2 - Q_{out}^2 + M^2}{2\rho} \right], \quad (2)$$

$$\sigma_{out} = \text{sign} \left[m_{out} - m_{in} + \frac{Q_{in}^2 - Q_{out}^2 - M^2}{2\rho} \right]. \quad (3)$$

Везде ниже будем рассматривать случай, когда $m_{out} > m_{in}$, $M^2 \geq Q_{out}^2 - Q_{in}^2$ и во всей области пространства-времени $\sigma_{in} = 1$. В то же время знак σ_{out} может быть любым. Если возвести в квадрат уравнение (1), то получим выражение вида

$$m_{out} = m_{in} + \frac{Q_{out}^2 - Q_{in}^2 - M^2}{2\rho} + M\sigma_{in} \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1 - \frac{2m_{in}}{\rho} + \frac{Q_{in}^2}{\rho^2}}. \quad (4)$$

В левой части этого выражения стоит полная масса всей системы m_{out} , которая сохраняется со временем. Следуя более ранним работам [11–13], определим эту массу в качестве гамильтониана нашей системы H (см. также [14], где рассматривалась несколько иная модель). Сделаем в выражении (4) замену переменной $x = M\rho$ (см. [11–13]). Тогда гамильтониан примет вид

$$H = \sigma_{in} \sqrt{\dot{x}^2 + M^2 \left(1 - \frac{2m_{in}M}{x} + \frac{Q_{in}^2 M^2}{x^2} \right)} + m_{in} + M \frac{Q_{out}^2 - Q_{in}^2 - M^2}{2x}. \quad (5)$$

Зная гамильтониан (5), вычисляем лагранжиан рассматриваемой системы

$$L = \sigma_{in} \dot{x} \times \ln \left[\dot{x} + \sqrt{\dot{x}^2 + M^2 \left(1 - \frac{2m_{in}M}{x} + \frac{Q_{in}^2 M^2}{x^2} \right)} \right] - \sigma_{in} \sqrt{\dot{x}^2 + M^2 \left(1 - \frac{2m_{in}M}{x} + \frac{Q_{in}^2 M^2}{x^2} \right)} + M \frac{M^2 - Q_{out}^2 + Q_{in}^2}{2x} - \sigma_{in} \dot{x} \ln M - m_{in}, \quad (6)$$

а затем и канонический импульс

$$\rho = \sigma_{in} \times \ln \left[\frac{\dot{x}}{M} + \sqrt{\frac{\dot{x}^2}{M^2} + \left(1 - \frac{2m_{in}M}{x} + \frac{Q_{in}^2 M^2}{x^2} \right)} \right]. \quad (7)$$

Запишем теперь гамильтониан (5) в терминах канонического импульса (7). Для этого найдем из уравнения (7) переменную \dot{x} и подставим ее в гамильтониан (5). В результате зависимость гамильтониана

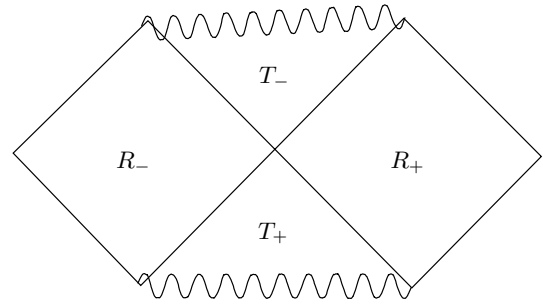


Диаграмма Картера–Пенроуза вечной черной дыры Шварцшильда

от координаты x и канонического импульса p примет вид

$$H = m_{in} - M \frac{M^2 - Q_{out}^2 + Q_{in}^2}{2x} + \frac{\sigma_{in} M}{2} \times \left[\exp(\sigma_{in} p) + \left(1 - \frac{2m_{in}M}{x} + \frac{Q_{in}^2 M^2}{x^2} \right) \times \exp(-\sigma_{in} p) \right]. \quad (8)$$

Запишем волновое уравнение $H\phi(x) = m_{out}\phi(x)$, используя стандартное коммутационное равенство вида $[p, x] = -i$, а также тождество

$$\exp \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi(x) = \phi(x + x_0). \quad (9)$$

В результате волновое уравнение запишется в виде

$$\phi(x - i) + \left(1 - \frac{2m_{in}M}{x} + \frac{Q_{in}^2 M^2}{x^2} \right) \phi(x + i) - \frac{M^2 - Q_{out}^2 + Q_{in}^2}{x} \phi(x) = 2E\phi(x), \quad (10)$$

где $E = (m_{out} - m_{in})/M$. Волновое уравнение (10) отличается от обычного уравнения Шредингера тем, что это не дифференциальное уравнение, а разностное. Это связано с тем, что квантование проводится по собственному времени наблюдателя на оболочке, а не по времени наблюдателя на бесконечности. Если мы представим экспоненту в виде ряда, то получится дифференциальное уравнение бесконечно-го порядка. Следовательно, это уравнение необходимо дополнить бесконечными граничными условиями. Они были найдены в статье [12] и в нашем случае имеют вид

$$\phi^{2l}(0) = 0, \quad l = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Также нужно потребовать, чтобы на пространственной бесконечности волновые функции не расходились.

Решение волнового уравнения выражается через полиномы Мейкснера (см., например, [12]), которые удовлетворяют следующему уравнению:

$$\sigma(x)[f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)] + \tau(x)[f(x+1) - f(x)] + \lambda f(x) = 0, \quad (12)$$

где $\sigma(x) = x$, $\sigma(x) + \tau(x) = \mu(\gamma + x)$, а μ и γ — некоторые постоянные. Будем решать волновое уравнение (10) в явном виде, приводя его к уравнению вида (12). Для начала сделаем преобразование координаты $x \rightarrow -ix$, означающее поворот на угол $-\pi/2$ в комплексной плоскости. При этом уравнение (10) примет вид

$$\phi(x+1) + \left(1 - \frac{2m_{in}Mi}{x} - \frac{Q_{in}^2 M^2}{x^2}\right) \phi(x-1) - i \frac{M^2 - Q_{out}^2 + Q_{in}^2}{x} \phi(x) = 2E\phi(x). \quad (13)$$

Рассмотрим сначала простой случай, когда $m_{in} = Q_{in} = 0$. Тогда решение уравнения (13) выражается через полиномы Мейкснера и имеет вид

$$\phi_n(x) = C(x) \frac{\beta^x x}{\beta^{2x+2n}} \Delta^n \left[\frac{\beta^{2x} \Gamma(x)}{\Gamma(x+1-n)} \right], \quad (14)$$

где

$$\beta = E + \sqrt{E^2 - 1}, \quad \Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad C(x) = C(x+1), \quad (15)$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция, $C(x)$ — периодическая функция с периодом 1. Разложим функцию $C(x)$ в ряд Фурье:

$$C(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(2\pi i k x). \quad (16)$$

Точно такой же множитель появляется в решении волнового уравнения, если перейти от координатного представления к импульсному [13, 15]. Коэффициенты c_k могут быть найдены из граничных условий к волновому уравнению (11). Не представляет труда показать, что волновые функции $\phi_n(x)$ ортогональны в следующем смысле. Если положить $x_i = x$ и $x_{i+1} = x_i + 1$, то, используя свойства полиномов Мейкснера, можно записать следующую сумму:

$$\sum_{x_i=0}^{\infty} \phi_n(x_i) \phi_m(x_i) \rho(x_i) = \delta_{nm} d_n^2, \quad (17)$$

где весовая функция $\rho(x) = 1/x C^2(x)$ и

$$d_n^2 = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\beta^{2n}}.$$

Из выражения (17) следует, что волновые функции $\phi_n(x)$ при $n \neq m$ ортогональны при условии $0 < \beta < 1$ [16]. Такое необычное условие ортогональности есть следствие того, что волновое уравнение является уравнением разностного типа, а не дифференциальным. Эти волновые функции легко модифицировать, чтобы они были также и ортонормированными.

Дискретный спектр масс E_n , соответствующий волновым функциям $\phi_n(x)$ в виде полиномов Мейкснера [16], удовлетворяет простому уравнению

$$i(M^2 - Q_{out}^2) = 2n\sqrt{E_n^2 - 1}. \quad (18)$$

В результате для искомого спектра масс находим

$$E_n^2 = \left(\frac{m_{out}}{M}\right)^2 = 1 - \frac{(M^2 - Q_{out}^2)^2}{4n^2}. \quad (19)$$

Найденный водородоподобный спектр масс обобщает результат, полученный ранее в работе [11], и совпадает с результатом работ [13, 15, 17], где он был получен другим способом. Дискретный спектр масс реализуется при условии $E_n < 1$. В случае же $E_n > 1$, будет иметь место непрерывный спектр масс [14]. Отметим, что в соответствии с выражением для спектра масс (19) полная гравитирующая масса метрики m_{out} из-за квантовых поправок оказывается меньше классического «голого» значения M , как и должно быть для гравитационно связанной системы.

В случае, когда $(M^2 - Q_{out}^2)^2/4 > 1$, можно написать условие применимости квазиклассического приближения. Действительно, в этом случае существует минимальное значение квантового числа $n_{min} = [(M^2 - Q_{out}^2)/2]$, где символ «[]» обозначает целую часть, для которого при $n \gg n_{min}$ квазиклассическое приближение будет заведомо хорошо выполняться. В случае выполнения обратного неравенства $(M^2 - Q_{out}^2)^2/4 < 1$ квазиклассическое приближение применимо при любом n .

Чтобы написать решение первоначального уравнения (10), необходимо сделать обратную замену переменной $x \rightarrow ix$. Выпишем для примера несколько первых полиномов:

$$\phi(x)_{n=1} = ix\beta^{ix} \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(-2\pi k x),$$

$$\begin{aligned} \phi(x)_{n=2} = ix\beta^{ix} \left[ix \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{\beta^4} \right] \times \\ \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(-2\pi k x). \end{aligned}$$

При выполнении требования, чтобы на бесконечности волновые функции были конечны, постоянные c_k будут равны нулю для всех $k < 0$. Остальные постоянные интегрирования могут быть легко найдены из граничных условий в начале координат. Это было сделано в работах [13, 15] для $n = 1$ и здесь мы их приводить не будем. Сделав замену $E = \cos \lambda$, решение можно представить в виде

$$\phi(x)_n = P_n(x) \exp(-\lambda x) C(x),$$

где $P_n(x)$ — некоторые полиномы степени n [13].

В экстремальном случае, когда $m_{out} = Q_{out}$, спектр вырождается (не зависит от n) и $E = 1$. Такое отсутствие в квантовом спектре экстремального состояния находится в полном согласии с аналогичным результатом для спектра масс черной дыры Рейсснера–Нордстема [18]. Этот результат можно интерпретировать в рамках постулированного третьего закона термодинамики черных дыр, в соответствии с которым экстремальное состояние черной дыры недостижимо. На квантовом уровне это означает невозможность переходов (распадов) черной дыры в экстремальное состояние [19–21]. Отметим, что формальное решение волнового уравнения (13) в экстремальном случае имеет вид

$$\phi(x) = C_1(x) + C_2(x)x,$$

где C_1, C_2 — периодические функции с периодом 1. Эти периодические функции также можно разложить в ряд Фурье, в результате получим

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp(-2\pi kx) + ix \sum_{k=0}^{\infty} d_k \exp(-2\pi kx), \quad (20)$$

где сделано обратное преобразование $x \rightarrow ix$ и учтено граничное условие на бесконечности. Используя граничные условия (11), можно найти все неизвестные коэффициенты c_k и d_k .

Можно рассмотреть случай, когда $M^2 \leq Q_{out}^2$. В этом случае σ_{in} может принимать два значения: $\sigma_{in} = \pm 1$. Для значений радиусов

$$\rho < (Q_{out}^2 - M^2)/2m_{out} < 2m_{out}$$

величина σ_{in} отрицательна, $\sigma_{in} = -1$. Не представляет труда выписать волновое уравнение и решить его. Решение для волновой функции будет иметь вид $\hat{\phi}(x) = (-1)^x \phi(x)$, где $\phi(x)$ — решение (14). Спектр масс не изменится.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда только $Q_{in} = 0$. Теперь, чтобы найти общее решение уравнения (10), сделаем другую замену переменной, а именно, $x \rightarrow ix$. Данное преобразование означает поворот на $\pi/2$ в комплексной плоскости. Тогда уравнение (10) переписется в виде

$$\phi(x-1) + \left(1 + \frac{2m_{in}Mi}{x}\right) \phi(x+1) + i \frac{M^2 - Q_{out}^2}{x} \phi(x) = 2E\phi(x). \quad (21)$$

Последнее уравнение также выражается через полиномы Мейкснера [16] и его решение имеет следующий вид:

$$\phi_n(x) = C(x) \frac{\tilde{\beta}^x \Gamma(x+1)}{\tilde{\beta}^{2x+2n} \Gamma(\gamma+x)} \times \Delta^n \left[\frac{\tilde{\beta}^{2x+2n} \Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(x+1-n)} \right], \quad (22)$$

где

$$\tilde{\beta} = E - \sqrt{E^2 - 1}, \quad \gamma = i2m_{in}M, \quad C(x) = C(x+1). \quad (23)$$

Эту функцию аналогичным образом можно разложить в ряд Фурье. Выпишем два первых полинома:

$$\begin{aligned} \phi(x)_{n=1} &= [\tilde{\beta}^2(\gamma+x) - x] \tilde{\beta}^x C(x), \\ \phi(x)_{n=2} &= \tilde{\beta}^x [\tilde{\beta}^4(\gamma+x+1)(\gamma+x) - 2\tilde{\beta}^2 x(\gamma+x) + x(x-1)] C(x). \end{aligned} \quad (24)$$

Если, как и раньше, положить $x = x_i, x_{i+1} = x_i + 1$ и просуммировать волновые функции с весом

$$\rho(x) = \frac{\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(1+x)\Gamma(\gamma)C^2(x)}, \quad (25)$$

то приведенные выше полиномы будут ортогональны [16]:

$$\sum_{x_i=0}^{\infty} \phi_n(x_i) \phi_m(x_i) \rho(x_i) = \delta_{nm} d_n^2, \quad (26)$$

где

$$d_n^2 = \frac{n! \Gamma(n+\gamma)}{\tilde{\beta}^{2n} (1-\tilde{\beta}^2)^\gamma \Gamma(\gamma)}. \quad (27)$$

Делая обратную замену переменной $x \rightarrow -ix$, окончательно получим следующие полиномы:

$$\begin{aligned} \phi(x)_{n=1} &= \left[\tilde{\beta}^2(\gamma - ix) + ix \right] \times \\ &\quad \times \tilde{\beta}^{-ix} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(-2\pi kx), \\ \phi(x)_{n=2} &= \tilde{\beta}^{-ix} \times \\ &\quad \times \left[\tilde{\beta}^4(\gamma - ix + 1)(\gamma - ix) + 2\tilde{\beta}^2 ix(\gamma - ix) + \right. \\ &\quad \left. + ix(ix + 1) \right] \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(-2\pi kx). \end{aligned} \quad (28)$$

Легко показать, что при $\gamma = 0$, т.е. при $m_{in} = 0$, решение (28) волнового уравнения перейдет в решение (20). Дискретный спектр масс задается теперь уравнением

$$i \left(M^2 - Q_{out}^2 + 2m_{in}M\tilde{\beta} \right) = 2n\sqrt{E_n^2 - 1}. \quad (29)$$

Спектр масс получился мнимым, это связано с тем, что при $m_{in} \neq 0$ гамильтониан (5) уже не будет эрмитовым. Существует один вырожденный случай, когда имеет место действительный спектр: при $E_n^2 = 1$ и $M^2 - Q_{out}^2 + 2m_{in}M\tilde{\beta} = 0$. Из этих двух уравнений получаем условия для параметров задачи, при которых спектр масс вырожден и действителен:

$$m_{out} = m_{in} + M, \quad M = -m_{in} + \sqrt{m_{in}^2 + Q_{out}^2}.$$

Этот предельный случай представляет переход от дискретного спектра масс к непрерывному. Чтобы сделать гамильтониан эрмитовым при $m_{in} \neq 0$, необходимо провести замену операторов

$$A(x)B(p) \rightarrow \frac{1}{2} [A(x)B(p) + B^*(p^*)A^*(x)],$$

которая в нашем случае соответствует замене

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \exp\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) &\rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} \exp\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) + \exp\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{1}{x} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

После такой замены операторов волновое уравнение для эрмитового гамильтониана имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \phi(x+i) + \phi(x-i) - m_{in}M \left[\frac{\phi(x+i)}{x} + \frac{\phi(x-i)}{x-i} \right] - \\ - \frac{M^2 - Q_{out}^2}{x} \phi(x) = 2E\phi(x). \end{aligned} \quad (31)$$

Это уравнение значительно более сложное. Его решение, а также энергетический спектр должны зависеть от двух квантовых чисел, определяющих спектр масс внутренней m_{in} и внешней m_{out} черных дыр. Нам удалось найти только приближенное решение этого уравнения в случае, когда масса оболочки M является малым параметром задачи, но массы $m_{in,out}$ не малы и одного порядка. Для простоты мы полагаем также, что $Q_{out} = 0$. При больших значениях радиуса ρ из выражения (4) видно, что разность масс черных дыр вне и внутри оболочки в рассматриваемом приближении также оказывается малой величиной порядка M . Следовательно, параметр задачи E не мал. Сделав, как и прежде, замену переменной $x \rightarrow ix$ в волновом уравнении (31), в результате с линейной точностью по малому параметру M получим уравнение

$$\begin{aligned} \phi(x+1) + \phi(x-1) + im_{in}M \left[\frac{\phi(x+1)}{x} + \frac{\phi(x-1)}{x-1} \right] = \\ = 2E\phi(x). \end{aligned} \quad (32)$$

Будем искать решение уравнения (32) в виде $\phi(x) = \phi_0(x) + My(x)$. В нулевом порядке по малому параметру M волновое уравнение сведется к простому разностному уравнению

$$\phi_0(x+1) + \phi_0(x-1) = 2E\phi_0(x), \quad (33)$$

решение которого имеет вид

$$\phi_0(x) = C_1(x)\beta^x + C_2(x)\tilde{\beta}^x, \quad (34)$$

где величины β и $\tilde{\beta}$ определяются соответственно выражениями (15) и (23), а функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ периодические с периодом 1.

В первом порядке малости функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} y(x+1) - 2Ey(x) + y(x-1) = \\ = im_{in} \left[C_1(x) \left(\frac{\beta^{x+1}}{x} + \frac{\beta^{x-1}}{x-1} \right) + \right. \\ \left. + C_2(x) \left(\frac{\tilde{\beta}^{x+1}}{x} + \frac{\tilde{\beta}^{x-1}}{x-1} \right) \right], \end{aligned}$$

решение которого имеет вид

$$y(x) = \frac{im_{in}}{2\sqrt{E^2 - 1}} \times \left\{ -C_1(x) \left[\frac{\beta^{x+1}}{x} [2F(x, 1, 1+x, \beta^2) - 1] + \beta^{x-1} [\beta^2 \Psi(x+1) + \Psi(x)] \right] + C_2(x) \left[\frac{\tilde{\beta}^{x+1}}{x} [2F(x, 1, 1+x, \tilde{\beta}^2) - 1] + \tilde{\beta}^{x-1} [\tilde{\beta}^2 \Psi(x+1) + \Psi(x)] \right] \right\}. \quad (35)$$

Здесь $F(x, 1, 1+x, \beta^2)$, $F(x, 1, 1+x, \tilde{\beta}^2)$ — гипергеометрические функции, а $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Рассмотрим физический смысл этого решения. Во-первых, решение (34) представляет собой две волны, бегущие в противоположные стороны. В этом легко убедиться, если решение представить в виде

$$\Psi \sim \exp(-iEt \pm x \ln \beta), \quad (36)$$

которое следует из нестационарного уравнения Шредингера

$$H\Psi = E\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (37)$$

Общее решение (34) напоминает решение уравнения Шредингера в периодическом потенциале (функция Блоха). Но это только качественное сходство, поскольку в данной задаче изначально нет периодических начальных условий. Полученное решение описывает непрерывный спектр масс, поэтому приближенное решение изначального уравнения (32) также имеет непрерывный спектр масс. Решение с дискретным спектром масс нам найти не удалось. Как видно из общего решения (35), оно также периодическое с периодом 1. Также можно видеть, что волновая структура уравнения осталась неизменной. А вот амплитуда теперь стала функцией аргумента и может изменяться по приведенному закону, что является следствием добавления нелинейности к разностному уравнению.

Была рассмотрена простейшая модель квазиклассического квантования тонкой оболочки в метрике Рейсснера–Нордстрема. Была использована гипотеза, основанная на вычислениях спектра масс более простой модели, что в случае, когда вне и внутри оболочки метрика описывается метрикой Шварцшильда, спектр масс оболочки должен зависеть от двух квантовых чисел. На более простом языке это можно объяснить следующим образом. Рассмотрим черную дыру Шварцшильда. На диаграмме

Картера–Пенроуза для этой метрики существуют две пространственно-временные области R_{\pm} . В соответствии с результатами работы [1, 2] для каждой области R_{\pm} получим, что спектр масс черной дыры должен зависеть от двух квантовых чисел.

Авторы признательны В. А. Березину за полезные обсуждения и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-02-00635-а), Министерства образования и науки РФ (грант НШ-3517.2010.2) и госконтрактов №№ 02.740.11.0244, 02.740.11.5092, 02.740.11.0250. Один из авторов (С. В. Ч.) благодарен также фонду некоммерческих программ «Династия» за финансовую поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Муханов, Письма в ЖЭТФ **44**, 50 (1986).
2. J. D. Bekenstein and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **360**, 7 (1995); arXiv:gr-qc/9505012.
3. W. Israel, Nuovo Cimento B **44**, 1 (1966).
4. V. A. Berezin, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 979 (2002); arXiv:gr-qc/0112022; И. Д. Новиков, Сообщения ГАИШ **132**, 43 (1964).
5. V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, Phys. Rev. D **36**, 2919 (1987); В. А. Березин, В. А. Кузьмин, И. И. Ткачев, ЖЭТФ **93**, 1159 (1987).
6. В. И. Докучаев, С. В. Чернов, ЖЭТФ **137**, 13 (2010).
7. В. И. Докучаев, С. В. Чернов, Письма в ЖЭТФ **85**, 727 (2007).
8. В. И. Докучаев, С. В. Чернов, ЖЭТФ **134**, 245 (2008).
9. S. V. Chernov and V. I. Dokuchaev, Class. Quant. Grav. **25**, 015004 (2008).
10. S. K. Blau, E. I. Guendelman, and A. H. Guth, Phys. Rev. D **35**, 1747 (1987).
11. V. A. Berezin, N. G. Kozimirov, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, Phys. Lett. B **212**, 415 (1988).
12. P. Hajicek, Comm. Math. Phys. **150**, 545 (1992).
13. В. А. Березин, ЭЧАЯ **34**, 48 (2003).
14. V. A. Berezin, Phys. Lett. B **241**, 194 (1990).
15. V. A. Berezin, Phys. Rev. D **55**, 2139 (1997).

16. А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, Наука, Москва (1985); A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhäuser Basel, Boston (1988).
17. V. A. Berezhin, A. M. Boyarsky, and A. Yu. Neronov, *Phys. Rev. D* **57**, 1118 (1998).
18. A. Barvinsky, S. Das, and G. Kunstatter, *Found. Phys.* **32**, 1851 (2002); arXiv:hep-th/0209039v1.
19. S. Das, A. Dasgupta, and P. Ramadevi, *Mod. Phys. Lett. A* **12**, 3067 (1997); arXiv:hep-th/9608162.
20. S. Das, P. Majumdar, and R. K. Bhaduri, *Class. Quant. Grav.* **19**, 2355 (2002); arXiv:hep-th/0111001.
21. A. J. M. Medved, arXiv:hep-th/0112056.