

ОГИБАЮЩАЯ, ФАЗА И ЧАСТОТА ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА СО СВЕРХШИРОКИМ СПЕКТРОМ В ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ

Ю. А. Шполянский*

*Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 29 марта 2010 г.

Приведены основанные на формализме аналитического сигнала выражения для огибающей поля излучения с широким спектром и произвольным временным профилем, редко встречающиеся в современных работах по нелинейной оптике, использующих подход огибающих. Продемонстрировано, что огибающая, фаза и мгновенная частота фемтосекундного излучения со сверхшироким спектром в прозрачной среде могут иметь осцилляции с характерным временным масштабом, заметно меньшим одного периода колебаний на центральной частоте спектра. Среди эффектов, приводящих к таким особенностям, — интерференция импульсов и генерация кратных частот. Проиллюстрирована неоднозначность комплексной огибающей при несоблюдении ограничений, следующих из теории аналитического сигнала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Формализм комплексной огибающей широко применяется для теоретического описания эволюции лазерных импульсов в оптических средах, в том числе импульсов фемтосекундной длительности [1–4]. Увеличивается число работ, в которых уравнения для огибающих решают и для случая импульсов со сверхширокими (континуумными) спектрами с шириной, сопоставимой с центральной частотой излучения или даже превышающей ее [4–15]. Принципиальным этапом для такого обобщения была работа [5], авторы которой показывали, что уравнение, по форме мало отличающееся от известных ранее уравнений для огибающих, применимо для оптических импульсов с длительностями вплоть до одного колебания поля. Действительно, уравнения для огибающих успешно применяются для теоретического описания сверхширения спектра в оптических волноводах [5–8] и объемных средах [10–15].

Однако в современных книгах и статьях по нелинейной оптике практически не обсуждаются особенности комплексной огибающей поля со сверхшироким спектром и сложным временным профилем. Часто не приводится даже процедура расчета огибающей для таких импульсов. В теоретических ис-

следованиях комплексная огибающая считается заданной априори, далее изучается ее эволюция. Такой подход не применим к оптическим сигналам со сложной структурой, для которых вид огибающей не угадать. Корректное определение и трактовка комплексной огибающей, а также процедура ее расчета на основе электрического поля необходимы при анализе с ее помощью эволюции излучения с континуумным спектром. Кроме того, не любая комплексная функция может использоваться в качестве огибающей, на что специально будет обращено внимание.

Для излучения с произвольным временным профилем комплексная огибающая может быть корректно введена на основе аналитического сигнала [16, 17]. Такой подход позволяет, в частности, обобщить привычные для квазимонохроматических импульсов понятия амплитуды, фазы и мгновенной частоты на случай излучения со сверхшироким спектром. Выражения для расчета комплексной огибающей и ее спектра, а также амплитуды, фазы и частоты приведены в разд. 2. Однако эти величины для излучения со сверхшироким спектром могут проявлять неожиданные свойства, например, иметь осцилляции с характерным временным масштабом, заметно меньшим одного периода колебаний на центральной частоте излучения. В следующих разделах иллюстрируется, что к таким особенностям при оперировании с импульсами из малого числа колебаний

*E-mail: shpolyan@mail.ru

светового поля приводят эффекты, внутренне присутствующие многим оптическим экспериментам, — линейная интерференция и генерация кратных частот.

2. КОМПЛЕКСНАЯ ОГИБАЮЩАЯ ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА СО СВЕРХШИРОКИМ СПЕКТРОМ И ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВРЕМЕННЫМ ПРОФИЛЕМ. РАСЧЕТ АМПЛИТУДЫ, ФАЗЫ И ЧАСТОТЫ

Будем рассматривать эволюцию линейно поляризованного светового излучения в прозрачном одномодовом оптическом волноводе, считая структуру электрического поля E неизменной в поперечном направлении. Для того чтобы ввести комплексную огибающую \mathcal{E} , применим традиционное представление действительного электрического поля, явно выделив осциллирующий множитель $\exp(i\omega_0 t)$:

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(z, t) \exp(i\omega_0 t) + \text{c.c.}, \quad (1)$$

где z — направление, вдоль которого распространяется излучение, t — время, ω_0 — определенная по некоторому правилу фиксированная (не зависящая от z) центральная частота спектра. Для квазимонохроматических импульсов (импульсов с узким временным спектром) величину ω_0 называют несущей частотой. Для импульсов с широким спектром выбор неоднозначен, так как нет выделенной несущей частоты.

В качестве способа расчета ω_0 можно рекомендовать выражение для момента первого порядка от распределения квадрата модуля спектральной плотности по положительным частотам на входе в среду ($z = 0$) [2]:

$$\langle \omega \rangle_z = \int_0^\infty \omega |G(z, \omega)|^2 d\omega / \int_0^\infty |G(z, \omega)|^2 d\omega, \quad (2)$$

где $G(z, \omega) = F(E(z, t))$, $E(z, t) = F^{-1}(G(z, \omega))$, F , F^{-1} — операторы прямого и обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} F(E(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt, \\ F^{-1}(G(\omega)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Достоинством формулы (2) является то, что она определяет интегральное «энергетическое» среднее — учитывает распределение энергии всех

спектральных компонент по частотам. Для квазимонохроматических импульсов такое определение будет давать «несущую» частоту или величину, очень близкую к ней. Однако заметим, что в нелинейной среде изменения спектра по мере распространения излучения обычно не симметричны, поэтому величина $\langle \omega \rangle_0 = \langle \omega \rangle_{z=0}$ в общем случае не будет являться центральной частотой при $z > 0$: $\langle \omega \rangle_z \neq \langle \omega \rangle_0$.

Основной практический смысл введения частоты ω_0 определяется двумя факторами. Первый — это выделение линейного по времени слагаемого $\omega_0 t$ в полной фазе поля, которое должно быть в ней существенным, чтобы вынесенные за огибающую осцилляции были относительно «быстрыми». Второй — использование ω_0 для определения системы координат со «сдвинутым» временем

$$\tau = t - z/V_0^g, \quad (4)$$

движущейся с постоянной групповой скоростью V_0^g на частоте ω_0 , $V_0^g = V^g(\omega_0)$, и сопровождающей оптический импульс. Групповая скорость как функция частоты определяется выражением

$$V^g(\omega) = \frac{1}{k'(\omega)}, \quad k'(\omega) = \frac{dk}{d\omega}, \quad (5)$$

где $k(\omega)$ — дисперсионная зависимость константы распространения от частоты. Замена времени (4) фактически компенсирует «быстрые» осцилляции поля по z , которые и определяют сдвиг импульса как целого. Это можно понять, просто подставив выражение (4) в (1) — появляется компенсирующий фазовый множитель $\exp(i\omega_0 z/V_0^g) = \exp[i\omega_0 k'(\omega_0)z]$.

Для аналитических и, особенно, численных исследований важно, чтобы сдвиг импульса в системе координат (z, τ) был минимален, так как обычно основной интерес представляет изменение формы импульса, а не его равномерное перемещение с групповой скоростью. Неудачный выбор ω_0 приводит к движению импульса как целого в системе координат (z, τ) и, как следствие, к необходимости расширения границ временной области рассмотрения полей и огибающих, что увеличивает трудоемкость получения результатов и не дает ничего взамен. Использование $\langle \omega \rangle_0$ в качестве ω_0 не является обязательным, однако такой выбор обычно обеспечивает малый сдвиг импульса со сплошным спектром, если введено сдвинутое время (4).

Заметим, что требованием к теории, развиваемой на основе метода огибающих, является независимость результирующего электрического поля, восстанавливаемого по формуле (1) от, вообще говоря,

искусственного параметра ω_0 , несмотря на то что значения комплексной огибающей \mathcal{E} , разумеется, от выбора ω_0 зависят. Сопоставление результатов, получаемых при разных ω_0 , помогает выявить области достоверности результатов и пределы применимости уравнений.

Как следует из теории аналитического сигнала [16, 17], после фиксирования параметра ω_0 для любого физически значимого распределения электрического поля можно взаимно однозначно определить его комплексную огибающую, удовлетворяющую (1). Рассмотрим произвольную вещественнозначную функцию времени $s(t)$, для которой существует преобразование Фурье $g(\omega) = F[s(t)]$. Разделяя положительные и отрицательные частоты в комплексном спектре $g(\omega)$ имеем

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\infty g(\omega)e^{i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^0 g(\omega)e^{i\omega t} d\omega \right] = a(t) + c.c. \quad (6)$$

Здесь введена комплексная функция $a(t) = A(s(t))$ — аналитический сигнал функции $s(t)$ [16, 17]:

$$A(s(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(\omega)e^{i\omega t} d\omega = F^{-1}(H(\omega)F(s(t))), \quad (7)$$

спектр которого построен из спектральных компонент $g(\omega)$ на частотах $\omega \geq 0$:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0, \\ 1/2, & \omega = 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для получения правой части выражения (6) во втором интегральном слагаемом величина ω заменена на $-\omega$ и использовано свойство спектра вещественной функции: $g(-\omega) = g^*(\omega)$, где «*» обозначает комплексное сопряжение. Сопоставляя выражения (1) и (6), имеем

$$\mathcal{E}(z, t) = 2 \exp(-i\omega_0 t) A(E(z, t)) = 2 \exp(-i\omega_0 t) F^{-1}(H(\omega)F(E(z, t))). \quad (9)$$

В частотной области формула (9) переходит в выражение для спектра комплексной огибающей:

$$\mathcal{E}(z, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{E}(z, t) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] dt = 2H(\omega)G(z, \omega), \quad (10)$$

где $G(z, \omega) = F(E(z, t))$, или

$$\mathcal{E}(z, \omega) = 2H(\omega + \omega_0)G(z, \omega + \omega_0). \quad (10')$$

Таким образом, с точностью до множителя 2 частотный спектр огибающей получается из спектральных компонент электрического поля с неотрицательными частотами, сдвинутых влево по оси частот на ω_0 . Выражения (1), (9) взаимно однозначны, если спектр $\mathcal{E}(z, t)$ не содержит компонент на частотах $\omega < -\omega_0$:

$$\mathcal{E}(z, \omega) \equiv 0, \quad \omega < -\omega_0. \quad (11)$$

Из выражения (10') видно, что условие (11) всегда выполнено при расчете огибающей по известному распределению электрического поля. Однако огибающая, построенная искусственно (без учета приведенных выше выкладок, связанных с вещественностью поля) формально может иметь любые спектральные компоненты. Если не требовать выполнения (11), то, как показано ниже, можно построить бесконечное множество различных комплексных огибающих со спектральными компонентами на частотах $\omega < -\omega_0$, которые после подстановки в (1) будут давать одно и то же распределение электрического поля $E(z, t)$.

Пусть некоторая комплексная функция $\mathcal{E}(z, \omega)$ не удовлетворяет (11). Для краткости опуская зависимость от z , запишем ее в виде

$$\tilde{\mathcal{E}}(\omega) = \mathcal{E}_1(\omega) + \mathcal{E}_2(\omega), \quad (12)$$

где

$$\mathcal{E}_1(\omega) \equiv 0, \quad \omega < -\omega_0,$$

$$\mathcal{E}_2(\omega) \equiv 0, \quad \omega \geq -\omega_0,$$

т. е. \mathcal{E}_1 удовлетворяет (11), а \mathcal{E}_2 содержит все спектральные компоненты $\tilde{\mathcal{E}}$ с частотами $\omega < -\omega_0$. Несложно убедиться, что комплексная функция

$$\mathcal{E}(z, \omega) = \mathcal{E}_1(z, \omega) + \mathcal{E}_2^*(z, -2\omega_0 - \omega) \quad (13)$$

не только удовлетворяет (11), но и после обратного преобразования Фурье и подстановки в (1) дает ту же величину $E(z, t)$, что и $\tilde{\mathcal{E}}$. Так как функция $\tilde{\mathcal{E}}$ выбрана произвольно, видно, что одной огибающей \mathcal{E}

в левой части (13), удовлетворяющей (11), соответствует бесконечно много функций вида (12) с частотами $\omega < -\omega_0$, подстановка которых в (1) восстанавливает то же вещественное электрическое поле, что и \mathcal{E} . При этом взаимная однозначность поля и комплексной огибающей, определяемая преобразованиями (1), (9), имеет место только для \mathcal{E} . Прикладная ценность выражений (12), (13) будет проиллюстрирована в разд. 4.

Если перед мнимой единицей в определении преобразования Фурье выбран противоположный по сравнению с (3) знак, то знаки перед i в формуле (1) и последующих также противоположны.

Выражения (9), (10) позволяют рассчитать комплексную огибающую и ее частотный спектр для произвольного оптического сигнала. Модуль комплексной огибающей дает временную огибающую — амплитуду:

$$|\mathcal{E}(z, t)| = 2|A(E(z, t))| = 2|F^{-1}(H(\omega)F(E(z, t)))|, \quad (14)$$

которая, как видно из (14), однозначно определяется значениями вещественной функции $E(z, t)$ и не зависит в общем случае от искусственного параметра ω_0 .

Полная фаза $\Phi(z, t)$ вещественного электрического поля определяется как комплексная фаза его аналитического сигнала

$$A(E(z, t)) = |A(E(z, t))| \exp[i\Phi(z, t)].$$

Из первого равенства в выражении (9) видна связь между $\Phi(z, t)$ и фазой $\varphi(z, t)$ комплексной огибающей $\mathcal{E}(z, t) = |\mathcal{E}(z, t)| \exp[i\varphi(z, t)]$:

$$\Phi(z, t) = \omega_0 t + \varphi(z, t). \quad (15)$$

Мгновенная частота является производной по времени от полной фазы:

$$\omega_{inst}(z, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} = \omega_0 + \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t}. \quad (16)$$

Знак перед вторым слагаемым в правой части выражения (16) совпадает со знаком перед i в (1).

Нередко из одного уравнения для комплексной огибающей выводят отдельные, независимые или связанные, уравнения для ее амплитуды и фазы. В этом случае фаза может быть получена как результат решения соответствующего уравнения. Ее значения могут превышать 2π и не испытывать разрывов (скачков) при переходе через $2\pi m$, где m — целое

число, несмотря на периодичность комплексного аргумента. Однако если фаза рассчитывается из полученного ранее комплексного числа — аналитического сигнала электрического поля или комплексной огибающей, то применяется функция \arg — главное значение комплексного аргумента в пределах $[0, 2\pi)$. Это приводит к появлению скачков при переходе через значения, кратные 2π . Для восстановления полной фазы необходимо выявлять точки разрыва как границы областей непрерывности и добавлять $\pm 2\pi$ в зависимости от знака скачка. Если этого не делать, то мгновенная частота (16) будет обращаться соответственно в $\pm\infty$ в точках разрыва.

В следующих разделах будет показано, что огибающая и фаза оптического сигнала с континуумным спектром и сложным временным профилем могут иметь непривычные свойства, например, осцилляции с характерным временным масштабом, заметно меньшим одного периода колебаний на частоте ω_0 .

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЙ ОГИБАЮЩЕЙ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ СО СВЕРХШИРОКИМ СПЕКТРОМ В ПРОЗРАЧНОМ ОПТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим эволюцию фемтосекундных импульсов из малого числа колебаний светового поля в оптическом волноводе из кварцевого стекла. Этот процесс может быть изучен на основе уравнения для комплексной огибающей сигнала со сверхшироким спектром в прозрачном оптическом волноводе [5, 6, 9]:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(z, \omega)}{\partial z} + i \frac{(\omega + \omega_0)n(\omega + \omega_0)}{c} \mathcal{E}(z, \omega) + \frac{2\pi}{cN_0} F \left(\frac{\partial}{\partial t} P_{\mathcal{E}}^{NL}(\mathcal{E}(z, t)) \right) = 0, \quad (17)$$

где $n(\omega)$ — зависящий от частоты показатель преломления оптической среды, например, измеренный экспериментально, а $P_{\mathcal{E}}^{NL}$ — комплексная огибающая нелинейной поляризации среды.

Константа распространения связана с показателем преломления соотношением $k(\omega) = \omega n(\omega)/c$, где c — скорость света в вакууме. При выводе (17) предполагается, что отклонения $\Delta n(\omega)$ относительно основного уровня N_0 малы:

$$n(\omega) = N_0 + \Delta n(\omega), \quad \Delta n(\omega) \ll N_0 = \text{const}(\omega), \quad (18)$$

что выполняется для большинства прозрачных сред. Зависимость $\Delta n(\omega)$ — произвольная глад-

кая функция, удовлетворяющая (18). Удобной аппроксимацией дисперсии среды часто является выражение [18, 19]

$$n(\omega) = N_0 + ac\omega^2 - \frac{bc}{\omega^2}, \quad (19)$$

где a, b — дисперсионные константы среды. Для кварцевого стекла константы имеют значения [18]: $N_0 = 1.4508$, $a = 2.7401 \cdot 10^{-44} \text{ c}^3/\text{см}$, $b = 3.9437 \cdot 10^{17} (\text{c} \cdot \text{см})^{-1}$.

В соответствии с (1) вещественная нелинейная поляризация среды P^{NL} выражается через свою комплексную огибающую $P_{\mathcal{E}}^{NL}$ как

$$P^{NL} = \frac{1}{2} P_{\mathcal{E}}^{NL} \exp(i\omega_0 t) + \text{c.c.} \quad (20)$$

В поле фемтосекундных импульсов, состоящих из малого числа колебаний светового поля, основным механизмом нелинейного поляризационного отклика прозрачного однородного изотропного материала сердцевины волновода является безынерционная кубическая нелинейность электронной природы [6]:

$$P^{NL} = \chi E^3, \quad (21)$$

где χ — нелинейная кубическая восприимчивость. Подстановка (1) в (21) дает

$$P^{NL} = \frac{1}{2} \chi \left[\frac{3}{4} \mathcal{E} |\mathcal{E}|^2 \exp(i\omega_0 t) + \frac{1}{4} \mathcal{E}^3 \exp(3i\omega_0 t) \right] + \text{c.c.} \quad (22)$$

Сопоставляя (20) и (22) и дифференцируя $P_{\mathcal{E}}^{NL}$ по времени (для последующей подстановки в (17)), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_{\mathcal{E}}^{NL} [\mathcal{E}(z, t)] &= \frac{3\chi}{4} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E} |\mathcal{E}|^2) + i\omega_0 \mathcal{E} |\mathcal{E}|^2 \right] + \\ &+ \frac{3\chi}{4} \mathcal{E}^2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + i\omega_0 \mathcal{E} \right) \exp(2i\omega_0 t). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь первое слагаемое описывает эффекты самовоздействия [1–3], а второе — генерацию утроенных частот и их взаимодействие с излучением на основных частотах [9, 18].

Количественной характеристикой нелинейности кварцевого стекла (21) является коэффициент его нелинейного показателя преломления, который оценивается как $\tilde{n}_2 = 2.9 \cdot 10^{-13} \text{ см}^2/\text{кВт}$ [3], $\tilde{n}_2 [\text{см}^2/\text{кВт}] = (4\pi^2/N_0^2) \chi [\text{СГСЭ}]$ [2].

Уравнение (17) совместно с (18), (19) и (23) применимо для описания эволюции излучения со сверхшироким спектром, компоненты которого остаются

в области прозрачности среды и далеки от резонансных частот. Можно сказать, что существуют некоторые минимальная ω_{min} и максимальная ω_{max} граничные частоты, за которые спектр импульса $\tilde{\omega}$ не выходит:

$$0 < \omega_{min} < \tilde{\omega} < \omega_{max}. \quad (24)$$

В этом интервале можно пользоваться частотными зависимостями показателя преломления в виде (18), (19). Заметим, что выражение (19), часто обеспечивающее высокоточную аппроксимацию показателя преломления в области прозрачности, становится, очевидно, бессмысленным при $\omega \rightarrow 0$, так как третье слагаемое неограниченно возрастает и, например, условие (18) перестает выполняться. При соблюдении условия (24) эта математическая трудность отсутствует.

Условие (24) выполнимо для многих прозрачных сред даже для излучения с континуумным спектром. Например, для кварцевого стекла высокочастотный и низкочастотный резонансы среды характеризуются длинами волн порядка 0.1 и 10 мкм [3]. Спектры фемтосекундных импульсов на лазерных частотах в видимой или инфракрасной области даже после сверхширения в кварцевом стекле от этих резонансных длин волн обычно остаются далеки.

Из условия (24), в частности, следует, что спектр излучения не должен содержать постоянной составляющей на входе в среду (при $z = 0$). В линейном режиме распространения новые гармоники не появляются и условие (24) далее автоматически выполняется при всех z . В нелинейном режиме отсутствие постоянной составляющей при $z > 0$ следует из интегрального закона сохранения для нелинейной части уравнения (17). Записанная для электрического поля во временной области нелинейная часть уравнения (17) имеет вид

$$\frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = -\frac{2\pi}{cN_0} \frac{\partial}{\partial t} P^{NL} (E(z, t)). \quad (25)$$

Интегрирование выражения (25) по времени в бесконечных пределах дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) dt &= \\ &= -\frac{2\pi}{cN_0} P^{NL} (E(z, t)) \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

т. е. постоянная составляющая электрического поля ($\omega = 0$) не меняется по мере распространения под воздействием нелинейности, сохраняя начальное нулевое значение:

$$G(z, \omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) dt = \text{const}(z) = 0. \quad (27)$$

Равенство нулю в правой части выражения (26) следует из ограниченности импульса во времени.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ СО СВЕРХШИРОКИМИ СПЕКТРАМИ В ОПТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ ИЗ КВАРЦЕВОГО СТЕКЛА

Рассмотрим сначала простую задачу интерференции двух импульсов из малого числа колебаний светового поля. Интенсивность импульсов выберем недостаточной для проявления нелинейных эффектов, поэтому будем пренебрегать третьим слагаемым в уравнении (17). В таких условиях на импульсы воздействует только дисперсия кварцевого стекла, которая описывается вторым слагаемым в (17). Центральные частоты выберем заметно различающимися, чтобы импульсы, изначально разнесенные по времени, двигались с разными групповыми скоростями и проходили «друг сквозь друга», создавая интерференционное поле. Будем изучать профиль амплитуды комплексной огибающей суммарного поля, рассчитанной численно на основе решения уравнения (17). Само поле будем восстанавливать, используя (1).

Перечисленным условиям удовлетворяет экспериментально реализуемое начальное распределение электрического поля суперпозиции импульсов 1 и 2 вида

$$E(0, t) = E_1 \exp\left(-2\frac{t^2}{\Delta t_1^2}\right) \sin(\omega_1 t) + E_2 \exp\left(-2\frac{(t-t_{12})^2}{\Delta t_2^2}\right) \sin[\omega_2(t-t_{12})], \quad (28)$$

где E_1 , E_2 — максимальные значения амплитуд электрического поля, $\omega_1 = 2\pi c/\lambda_1$ и $\omega_2 = 2\pi c/\lambda_2 = 2\omega_1$ — их центральные частоты, соответствующие длинам волн первой ($\lambda_1 = 780$ нм) и второй ($\lambda_2 = 390$ нм) гармоник лазера на сапфире с титаном, $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 8$ фс — начальные длительности по уровню e^{-1} от максимума интенсивности, $t_{12} = 25$ фс — начальная временная дистанция между импульсами. Пиковые интенсивности импульсов определим равными [2],

$$I_1 = I_2 = 10^4 \frac{\text{кВт}}{\text{см}^2}, \quad I_{1,2} \left[\frac{\text{кВт}}{\text{см}^2} \right] = \frac{3N_0}{8\pi} E_{1,2}^2 \text{ [СГСЭ]},$$

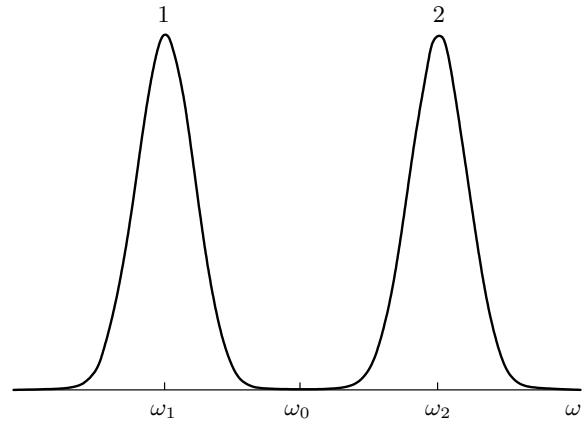


Рис. 1. Спектр электрического поля (28)

что обеспечивает пренебрежимо малость нелинейных эффектов на рассматриваемых ниже расстояниях z .

Спектр огибающей начального поля, $\mathcal{E}(0, \omega)$, получается применением формулы (10') к (28). Амплитуда спектра изображена на рис. 1. Как видно из (17), эволюция огибающей $\mathcal{E}(0, \omega)$ в отсутствие нелинейности и поглощения (также малого на рассматриваемых расстояниях) состоит в изменении под воздействием дисперсии среды спектральной фазы без изменения спектральной амплитуды:

$$\mathcal{E}(z, \omega) = \exp[-ik(\omega + \omega_0)z] \mathcal{E}(0, \omega). \quad (29)$$

Из рис. 1 видно, что распределение (28) не содержит постоянной составляющей, так как профиль электрического поля каждого из импульсов на входе в среду симметричен относительно своего центра. Выражение (29) показывает, что постоянная составляющая отсутствует и при $z > 0$, поскольку новые гармоники не образуются.

Комплексная огибающая во временной области, $\mathcal{E}(z, t)$, получается применением обратного преобразования Фурье к $\mathcal{E}(z, \omega)$. Это решение проиллюстрировано на рис. 2. Для определения огибающей в качестве ω_0 выбрана полусумма центральных частот импульсов 1 и 2:

$$\bar{\omega}_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2. \quad (30)$$

Из рис. 2 видно, что высокочастотный импульс 2, изначально опережающий по времени, проходит «сквозь» низкочастотный импульс 1 и постепенно отстает от него из-за нормальной групповой дисперсии кварцевого стекла в рассматриваемом спектральном диапазоне. Амплитуда интерференционного поля, показанная жирной линией, испытывает

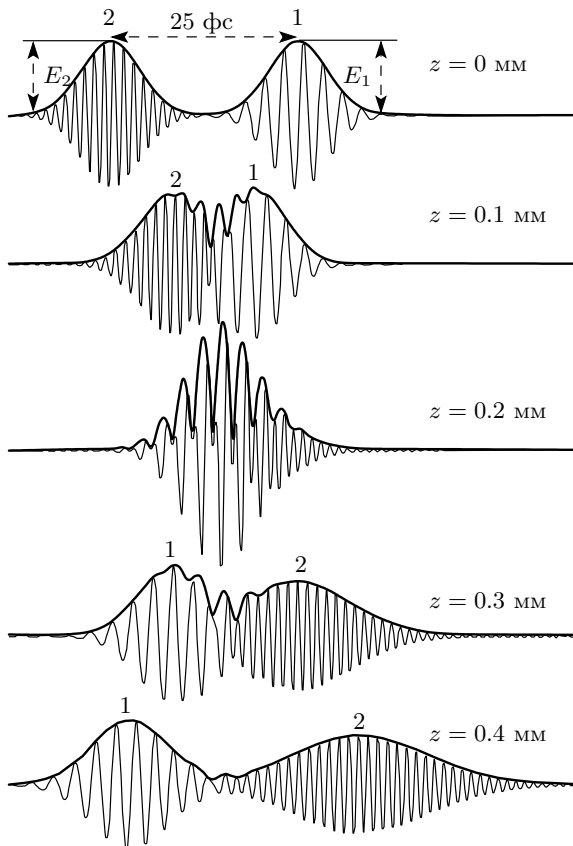


Рис. 2. Эволюция амплитуды огибающей (жирная линия) и электрического поля (тонкая линия) при интерференции импульсов

осцилляции с характерным временным масштабом, заметно меньшим периода колебаний на частоте ω_0 . Фаза и мгновенная частота поля могут быть рассчитаны по формулам (15), (16), однако для случая интерференции импульсов с сильно различающимися центральными частотами они мало информативны и здесь не приводятся.

На рис. 2 центр всей временной структуры практически остается на месте в сопровождающей системе координат с задержанным временем (4). Высоко-частотный импульс перемещается вправо, низкочастотный — влево от этой области. Можно сказать, что сопровождающая система координат выбрана удачно для изучения процесса прохождения импульсов друг сквозь друга. Заметим, что при равных интенсивностях, $I_1 = I_2$, и длительностях, $\Delta t_1 = \Delta t_2$, в (28) формулы (30) и (2) дают одинаковые значения центральной частоты. Однако, например, при различающихся I_1 и I_2 совпадения (30) с (2) уже не будет. Несмотря на это, при сопоставимых интенсивностях импульсов использование $\bar{\omega}_0$ в качестве ω_0 вполне

оправдано, по меньшей мере в отсутствие нелинейности, поскольку картины эволюции поля и огибающей будут качественно совпадать с приведенной на рис. 2 — взаимное расположение импульсов будет определяться их групповыми скоростями, каждый из них будет испытывать дисперсионное уширение, в области их перекрытия будет формироваться суперпозиционная картина со сложной временной огибающей. Применение (30) в линейной системе приводит в общем случае к более эффективному выбору системы координат (z, τ) , чем применение (2). Это указывает на то, что в случае несплошных и/или сильно неоднородных спектров формула (30) для расчета ω_0 может не быть самой предпочтительной.

Далее рассмотрим распространение одного интенсивного импульса первой гармоники лазера на сапфире с титаном в таком же волноводе. Параметры импульса в соответствии с (28) имеют следующие значения:

$$\lambda_1 = 780 \text{ нм}, \quad \Delta t_1 = 8 \text{ фс}, \quad I_1 = 4 \cdot 10^{10} \frac{\text{кВт}}{\text{см}^2},$$

$$I_1 \left[\frac{\text{кВт}}{\text{см}^2} \right] = \frac{3N_0}{8\pi} E_1^2 [\text{СТГСЭ}].$$

В этом случае нелинейность существенна и в уравнении (17) необходимо учитывать все слагаемые. В подавляющем большинстве работ в уравнениях для огибающих пренебрегают генерацией утроенных частот — вторым слагаемым в правой части уравнения (23). Мы будем учитывать в расчетах и это слагаемое, поскольку интенсивность импульса высока, и отдельно изучим его вклад.

Как и ранее, комплексная огибающая и ее спектр при $z = 0$ получаются применением формул (9), (10') к начальному распределению электрического поля. Естественным выбором центральной частоты здесь является $\omega_0 = \omega_1$, что совпадает с (2). Далее численно решается уравнение (17) для огибающей с использованием метода расщепления шага по z на линейный и нелинейный подшаги [3]. На рис. 3–5 приведены спектральные (рис. 3) и временные (рис. 4, 5) распределения, рассчитанные на основе уравнения (17) с нелинейным оператором (23) как с учетом, так и без учета в (23) второго слагаемого, ответственного за генерацию утроенных частот. На рис. 3 и 4 линии с кружками соответствуют огибающей на входе в волокно ($z = 0$), остальные кривые представляют численные решения на расстоянии $z = 50\lambda_1$. Спектральная и временная амплитуды огибающей без учета утроенных частот при $z = 50\lambda_1$ показаны на рис. 3, 4 линиями с ромбами.

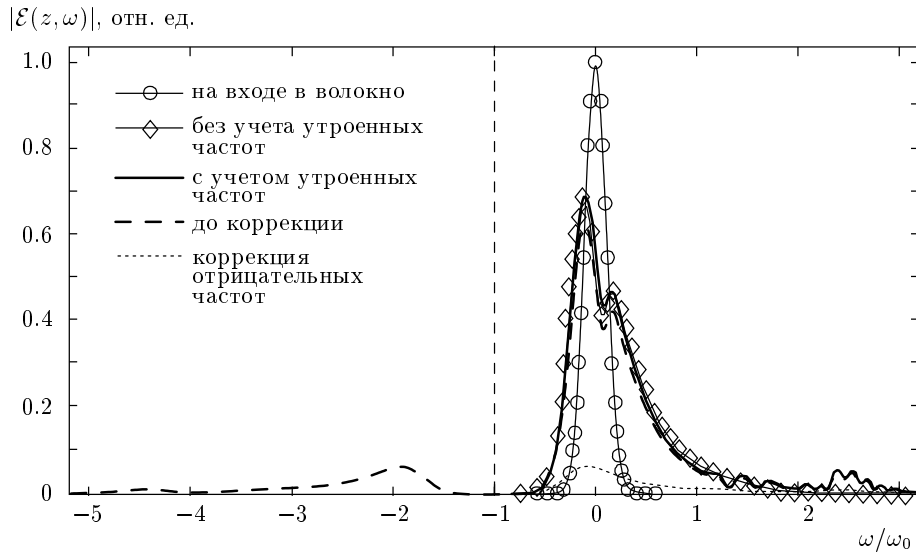


Рис. 3. Частотные зависимости амплитуды спектра огибающей, полученные в результате различных расчетов. Значения амплитуд отнесены к максимуму при $z = 0$. Частоты нормированы на ω_0

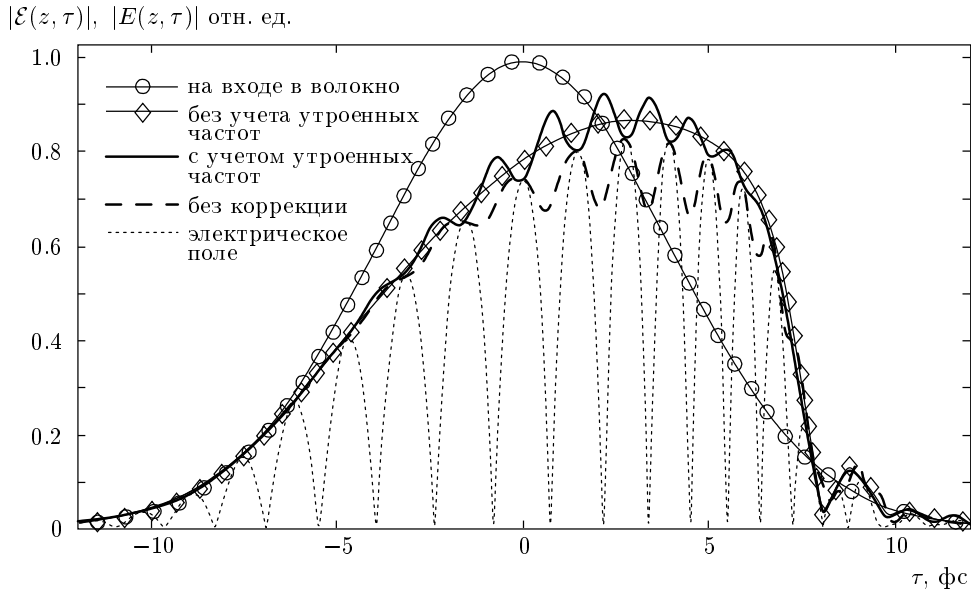


Рис. 4. Временные зависимости амплитуды огибающей, полученные в результате различных расчетов, а также электрического поля, полученного при учете утроенных частот. Значения отнесены к максимуму амплитуды при $z = 0$

Видно, что имеет место сильное асимметричное уширение спектра (рис. 3) и укрупнение заднего фронта временной огибающей (рис. 4), типичные для фазовой самомодуляции излучения (первое слагаемое в правой части (23)) в среде с кубической нелинейностью и нормальной дисперсией групповой скорости [1–3].

Результаты для комплексной огибающей, полученные непосредственно решением уравнения (17) с учетом утроенных частот в (23), показаны на рис. 3, 4 штриховыми линиями. Из рис. 3 видно, что спектр огибающей в этом случае содержит частоты $\omega < -\omega_0$, т. е. не удовлетворяет условию взаимной однозначности электрического поля и комплексной

огibaющей (11). Действительно, последовательное применение формул (1) для восстановления электрического поля и (10'), (10) для получения взаимно однозначной ему «истинной» комплексной огибающей, удовлетворяющей (11), дает другие спектральное и временное распределения, показанные на рис. 3, 4 сплошными линиями. При этом из различающихся огибающих в обоих случаях на основе (1) восстанавливается одно и то же электрическое поле, модуль которого показан на рис. 4 пунктирной линией. Из рис. 4 видно, что обе огибающие соответствуют своему названию — огибают профиль поля.

Приведенный неожиданный результат объясняется следующим. При выводе уравнения для комплексной огибающей представление (1) подставляется в уравнение для электрического поля. Физически значимый вещественный нелинейный поляризационный отклик P^{NL} принимает вид (22), т. е. содержит сумму слагаемых, после дифференцирования по времени формирующих правую часть выражения (23), и их комплексно-сопряженных. После применения преобразования Фурье уравнение для спектра поля переходит в сумму уравнения (17), домноженного на $\exp(i\omega_0 t)$, и комплексно-сопряженного ему уравнения, домноженного на $\exp(-i\omega_0 t)$. Уравнение для $\mathcal{E}(z, \omega)$ должны формировать слагаемые с частотами $\omega \geq -\omega_0$, удовлетворяющие (11). Компоненты с частотами $\omega < -\omega_0$ формируют комплексно-сопряженное уравнение. Слагаемые, содержащие множитель $\exp(i\omega_0 t)$, традиционно формируют уравнение для огибающей $\mathcal{E}(z, t)$ или ее спектра $\mathcal{E}(z, \omega)$. Решения этого уравнения обычно удовлетворяют (11).

При учете второго слагаемого в уравнении (23) ситуация изменяется. Само по себе это слагаемое содержит множитель $\exp(2i\omega_0 t)$, который, в соответствии с известными свойствами преобразования Фурье, осуществляет сдвиг компонент спектра на $2\omega_0$. В нашем случае эти компоненты видны на рис. 3 на частотах вокруг $2.5\omega_0$. Отличие этого значения от $2\omega_0$ связано со сдвигом центра спектра огибающей на основных частотах от нуля при $z = 0$ в положительную область примерно до $0.5\omega_0$ при $z = 50\lambda_1$. Частоты около $2.5\omega_0$ в спектре огибающей соответствуют $2.5\omega_0 + \omega_0 = 3.5\omega_0$ в спектре поля (см. разд. 2). Во временном профиле амплитуды огибающей на рис. 4 эти компоненты видны как осцилляции на удвоенной частоте, совпадающей с частотой колебаний модуля электрического поля. Обратим внимание, что осцилляции амплитуды «истинной» огибающей осуществляются относительно огибающей на основных частотах (рис. 4). Размах

этих осцилляций в центре импульса достигает 10 % от пиковых значений амплитуды при $z = 50\lambda_1$.

Первое слагаемое в правой части (23) содержит произведение $\mathcal{E}|\mathcal{E}|^2 = \mathcal{E}(t)\mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t)$. Записанное через свертку в спектральной области и подставленное в (17), это слагаемое определяет четырехволновый процесс $\tilde{\omega}_4 = \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_3$, где минус появляется из-за комплексного сопряжения в произведении (тильды указывают на то, что рассматриваются не отдельные гармоники, а некоторые области спектра). Частным случаем является процесс самодействия $\tilde{\omega}_0 = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}_0$, для которого автоматически выполнено условие фазового синхронизма, и потому он эффективен. Он проявляется как самомодуляция фазы. Если в спектре поля появляются частоты $3\tilde{\omega}_0$, то, в частности, имеем процесс: $-\tilde{\omega}_0 = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_0 - 3\tilde{\omega}_0$, для которого также автоматически выполнено условие фазового синхронизма. Для спектра огибающей то же самое можно условно записать как $-2\tilde{\omega}_0 = \tilde{0} + \tilde{0} - 2\tilde{\omega}_0$. Таким образом, совместное действие первого и второго слагаемых в (23) математически приводит к появлению в спектре огибающей отрицательных частот вокруг $-2\omega_0$ в результате решения уравнения (17) — штриховая линия на рис. 3. В отсутствие второго слагаемого сплошной спектр, формируемый в результате самомодуляции в волноводе с нормальной дисперсией групповой скорости, обычно не достигает утроенных частот, и этот эффект не наблюдается.

Обсуждение выше указывает на неполную корректность уравнения (17). Для правильной трактовки результатов необходима дополнительная процедура — получение «истинной» комплексной огибающей поля. Компоненты на частотах $\omega < -\omega_0$, появляющиеся из-за нелинейных процессов, должны попадать в уравнение, комплексно-сопряженное основному уравнению для огибающей. Появление частот $\omega < -\omega_0$ при решении не учитывающего этот факт уравнения (17) говорит о том, что в комплексно-сопряженном ему (тоже неидеальном) уравнении появились компоненты с такой же, но комплексно-сопряженной спектральной плотностью, симметрично отраженные от $-\omega_0$. Спектральная амплитуда этих компонент показана на рис. 3 пунктирной линией. Эти компоненты должны быть добавлены к спектру на частотах $\omega \geq -\omega_0$ для «исправления» уравнения (17) и получения «истинной» огибающей. Математически эта процедура соответствует переходу от (12) к (13). Точно такой же результат дает более трудоемкая процедура последовательного применения (1), (10') к результату решения уравнения (17) — необходимо дополнительно выполнить

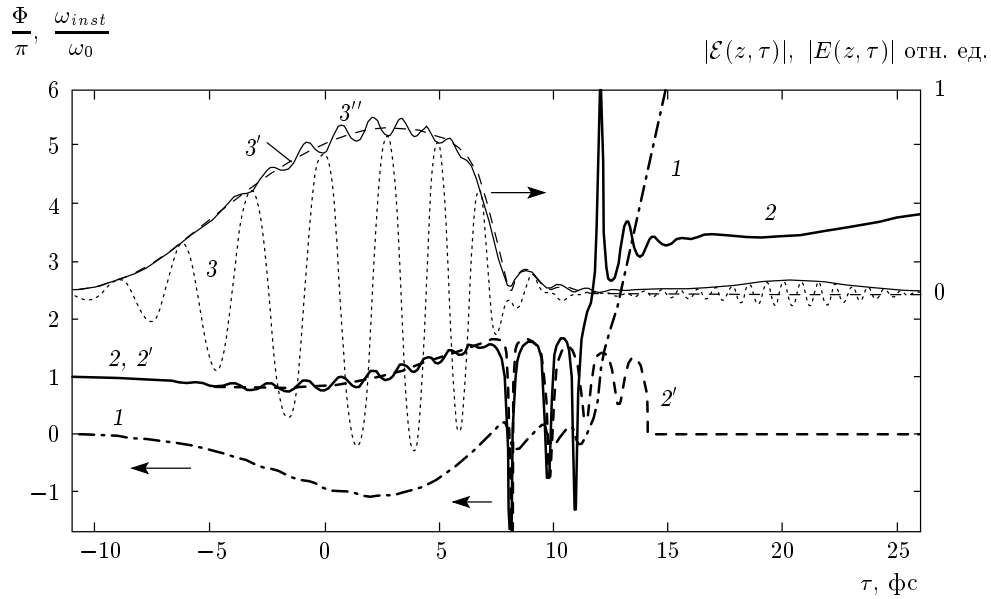


Рис. 5. Временные зависимости полной фазы Φ/π с учетом утроенных частот (кривая 1) и мгновенной частоты ω_{inst}/ω_0 с учетом (2) и без учета (2') утроенных частот, полученные в результате различных расчетов, а также электрическое поле (3) и огибающие без учета (3') и с учетом (3'') утроенных частот

прямое и обратное преобразования Фурье.

Заметим, что численное решение уравнения для электрического поля, из которого выведено уравнение (17), с вычислительной точностью совпадает с полем, полученным из огибающей при учете утроенных частот, что подтверждает надежность приведенных теоретических выкладок и численных расчетов. Огибающая, получаемая применением (10), (10') к решению уравнения для поля, совпадает с истинной огибающей, показанной на рис. 3, 4 сплошной линией. Это, в частности, говорит о том, что амплитуда истинной огибающей не зависит от значения искусственного параметра ω_0 , так как в уравнении для поля ω_0 никак не фигурирует. Решение уравнения (17) без коррекции зависит от ω_0 . Обратим внимание на то (см. рис. 3), что и в существенно нелинейном режиме в соответствии с (24), (27) в импульсе отсутствует постоянная составляющая, как на входе в среду, так и далее по мере его распространения.

На рис. 5 приведены распределения полной фазы (15), нормированной на π , и мгновенной частоты (16), нормированной на ω_0 . Для наглядности в верхней части рисунка даны также амплитуда огибающей и электрическое поле. Видно, что при учете утроенных частот фаза и мгновенная частота, как и амплитуда огибающей, приобретают осцилляции относительно более плавных зависимостей, получаемых без учета утроенных частот. Отрезок време-

ни на рис. 5 длиннее, чем на рис. 4, поэтому удается показать импульс утроенной частоты, отстающий от основного импульса из-за нормальной дисперсии групповой скорости кварцевого волокна. Видно, что даже для такого сложного временного профиля удастся восстановить непрерывные распределения полной фазы и мгновенной частоты сигнала. Значения мгновенной частоты соответствуют локальному «периоду» осцилляций. В основном импульсе мгновенная частота имеет значения, близкие к ω_0 , а в импульсе на утроенных частотах — $3.5\omega_0$, что согласуется со спектральной структурой излучения (см. рис. 3). Сильные осцилляции фазы и мгновенной частоты имеют место на временных фронтах, где абсолютные значения огибающей и электрического поля малы. Кроме этого в области перекрытия импульсов основной и утроенной частоты имеет место суперпозиция компонент с сильно различающимися частотами.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что комплексная огибающая, амплитуда, фаза и частота фемтосекундного излучения со сложной спектральной и временной структурой могут быть рассчитаны на основе формализма аналитического сигнала [16, 17]. Однако оперирование этими понятиями требует аккуратности, поскольку

они могут проявлять свойства, не типичные для оптических импульсов большей длительности с узкими спектрами.

Центральная частота ω_0 для импульсов со сплошным спектром может быть определена по формуле (2), что обеспечивает хороший выбор сопровождающей импульс системы координат с «задержанным» временем (4), в которой сдвиг импульса как целого практически отсутствует. Для импульсов с разрывным или сильно неоднородным спектром значение ω_0 должно учитывать границы всей спектральной области с существенными спектральными компонентами и приблизительно соответствовать ее середине.

Для взаимной однозначности поля и огибающей необходимо выполнение условия (11) для спектра последней. Продемонстрировано, что невыполнение этого условия позволяет получать различающиеся комплексные огибающие, восстанавливающие по формуле (1) одно и то же распределение электрического поля.

Показано, что при интерференции импульсов из малого числа колебаний поля с сильно различающимися частотами амплитуда огибающей может испытывать осцилляции с характерным периодом, меньшим периода колебаний на частоте ω_0 . При распространении интенсивных одиночных импульсов генерация утроенных частот также приводит к появлению осцилляций амплитуды, фазы и частоты. Их период вдвое меньше периода локальных колебаний электрического поля. Размах осцилляций амплитуды достигает 10% от значения последней.

Автор признателен С. А. Козлову и М. А. Бахтину за стимулирующие обсуждения. Финансирование работы осуществлено грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (№ МК-844.2009.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Р. Шен, *Принципы нелинейной оптики*, Наука, Москва (1989).
2. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
3. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, Москва (1996).
4. А. М. Желтиков, *Сверхкороткие импульсы и методы нелинейной оптики*, Физматлит, Москва (2006).
5. Th. Brabec and F. Krausz, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3282 (1997).
6. N. Karasawa, Sh. Nakamura, N. Nakagawa et al., *IEEE J. Quant. Electron.* **37**, 398 (2001).
7. E. E. Serebryannikov, A. M. Zheltikov, N. Ishii et al., *Phys. Rev. E* **72**, 056603 (2005).
8. J. M. Dudley, G. Genty, and S. Coen, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1135 (2006).
9. G. Genty, P. Kinsler, B. Kibler et al., *Opt. Express* **15**, 5382 (2007).
10. A. L. Gaeta, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3582 (2000).
11. В. П. Кандидов, И. С. Голубцов, О. Г. Косарева, КЭ **34**, 348 (2004).
12. N. Akozbek, S. A. Trushin, A. Baltuska et al., *New J. Phys.* **8**, 177 (2006).
13. E. E. Serebryannikov, E. Goulielmakis, and A. M. Zheltikov, *New J. Phys.* **10**, 093001 (2008).
14. L. Berge and S. Skupin, *Phys. Rev. E* **77**, 036406 (2008).
15. O. G. Kosareva, N. A. Panov, V. P. Kandidov et al., *Appl. Phys. B* **91**, 35 (2009).
16. D. Gabor, *J. Inst. Electr. Eng.* **93**, 429 (1946).
17. Д. Е. Вакман, Л. А. Вайнштейн, УФН **123**, 657 (1977).
18. V. G. Bespalov, S. A. Kozlov, Yu. A. Shpolyanskiy et al., *Phys. Rev. A* **66**, 013811 (2002).
19. М. Борн, Э. Вольф, *Оптика*, Наука, Москва (1973).