

ПЕРЕНОС КВАНТОВЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ СО СВЕТА НА АТОМЫ ПРИ НЕОБРАТИМОЙ ЭВОЛЮЦИИ

*В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко**

*Государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 24 марта 2010 г.

Рассмотрена необратимая динамика двух двухуровневых атомов, взаимодействующих с двухсоставным широкополосным электромагнитным полем в перепутанном состоянии, образующем термостат с квантовой корреляцией. С помощью техники стохастического интегрирования Ито выведено кинетическое уравнение для атомов, найдено их стационарное состояние, которое оказывается несепарабельным и приводит к нарушению неравенств Белла. Рассмотрено применение найденного атомного состояния в качестве квантового канала для процесса телепортации. Вычислено значение качества канала или достоверности (fidelity), которое определяет возможности использования канала, в частности, характеризует его секретность. Рассмотрен процесс телепортации с помощью квантового канала, образованного перепутанным термостатом. Сравнение двух каналов — атомного и светового — показало, что они имеют разные свойства в отношении сепарабельности и одинаковые в отношении нелокальности. Это означает, что нелокальность может полностью переноситься со света на атомы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о переносе квантовых корреляций с одной физической системы на другую представляет интерес как с теоретической точки зрения, поскольку связан с изучением фундаментальных квантовых свойств, так и с практической точки зрения, поскольку ведет к созданию новых ресурсов для квантовых информационных процессов. Приготовить физическую систему в состоянии с квантовыми корреляциями можно двумя способами — путем проекционного измерения [1] либо путем динамического взаимодействия, как это происходит, например, в параметрическом источнике света [2]. Динамика может быть и неунитарной, когда физическая система взаимодействует с термостатом. Если взять термостат с квантовыми корреляциями, образованный широкополосным сжатым светом [3] и поместить в него два атома, то они будут образовывать пару Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР) [4, 5].

Квантовый термостат может быть образован разными физическими системами, в качестве которых может выступать двухсоставная система из широкополосных световых полей в перепутанном состо-

янии [6, 7]. Если в такой термостат поместить две независимые физические системы, каждая из которых взаимодействует со своей подсистемой термостата, то между исходными системами будет возникать квантовая корреляция. Перенос квантовых корреляций от такого термостата на систему, состоящую из помещенного в высокочастотный резонатор одиночного атома, взаимодействующего с резонаторной модой, возбуждаемой одной из компонент двухсоставного термостата, приводит к физическим особенностям в спектре спонтанного излучения и динамике атомной инверсии в модели Джейнса – Каммингса [8].

В данной работе мы рассматриваем взаимодействие двух независимых атомов, помещенных в двухсоставной термостат, образованный двумя электромагнитными полями с квантовой корреляцией. Для описания эволюции подобных систем используется подход Гардинера [3]. Физической моделью двухсоставного термостата может служить излучение параметрического генератора света [2]. Такое излучение обладает квантовыми корреляциями, реализовано экспериментально и широко используется для задач квантовой теории информации [9, 10]. Подход Гардинера применяется для задач квантовой оптики, где известен эффект замедления спон-

*E-mail: trubilko.andrey@gmail.com

танного распада атома [11], который существенным образом зависит от поляризационных степеней свободы как атома, так и поля [12]. Основой подхода является вывод кинетического уравнения для одной из взаимодействующих систем. Кинетическое уравнение может быть получено разными способами. Мы используем технику стохастического интегрирования Ито в марковском приближении. В роли термостата в нашем случае выступает двухсоставная система из двух световых полей. Она получается путем смещения на полупрозрачной непоглощающей делительной пластинке света от двух независимых вырожденных параметрических источников. Полоса синхронизма последних предполагается много большей характерных обратных времен релаксации атомов, что и позволяет рассматривать излучение источников как систему с большим числом степеней свободы. Рассматриваемая модель приводит к кинетическому уравнению для атомов с новым видом релаксационного оператора, который имеет полный набор всех отличных от нуля коэффициентов матрицы Линдблада–Коссаковского. В частном случае выведенное уравнение также описывает и воздействие на атомы невырожденного широкополосного параметрического источника света. Стационарное состояние двухатомной системы, как мы показываем, обладает квантовыми корреляциями, связанными с двумя свойствами системы — несепарабельностью и нелокальностью. В условиях, когда состояния электромагнитных полей, воздействующих на атомы, характеризуются квантовыми корреляциями и их можно рассматривать как двухсоставной термостат, изучается вопрос как корреляция термостата преобразуется в корреляцию атомов. В таком контексте можно говорить о переносе корреляционных свойств фотонных термостатов на атомы.

Чтобы ответить на вопрос, в какой мере переносятся квантовые свойства, можно использовать всевозможные критерии перепутанности, недостатка которых в литературе нет. Вместе с тем можно отметить, что состояния с квантовой корреляцией используются в приложениях для решения разных задач, например, в качестве квантовых каналов для передачи информации. Как и для каких задач можно использовать данный канал, определяется его качеством, которое в свою очередь зависит от характера квантовых корреляций. В конкретных протоколах, как правило, возникает величина — значение той или иной наблюдаемой, — которая характеризует качество канала. В общем случае эта величина известна как достоверность (fidelity). Если считать, что квантовый канал образован за счет взаи-

модействия с термостатом, то значение указанной наблюдаемой позволит судить о том, как переносятся квантовые корреляции. Такая оценка переноса квантовых корреляций позволяет сравнивать системы разной физической природы и, на наш взгляд, будет представлять больший интерес, чем абстрактные критерии перепутанности, которые трудно связать с измеряемыми в опыте наблюдаемыми.

В литературе термин квантовые корреляции имеет много значений. Часто под квантовыми корреляциями понимают нарушение некоторых неравенств при квантовом описании физической системы. Так, например, для одной моды электромагнитного поля в сжатом состоянии дисперсия квадратурного оператора будет меньше, чем для когерентного состояния [13], которое определяет границу квантовых и классических свойств. В случае двух и более систем говорят о несепарабельности и нелокальности, имея в виду соответствующие критерии или неравенства.

Для дискретных систем с небольшим числом степеней свободы несепарабельность состояния устанавливается по критерию Переса [14] и Хородецких [15] или близкому критерию, названному конкуренцией Вуттерса [16]. Если системы описываются непрерывными переменными, например, две моды электромагнитного поля, то используют критерий Саймона [17]. Поскольку физическая природа корреляций весьма разнообразна, универсальных методов определения несепарабельности нет, все известные критерии носят ограниченный характер, а их согласованность является открытым вопросом. Несмотря на это обстоятельство, квантовые корреляции, которые можно описать как несепарабельность, позволяют реализовать такие задачи как телепортация, плотное кодирование, квантовое распределение ключа и другие.

Другой тип квантовых корреляций проявляется при нарушении неравенств Белла [18], в литературе это свойство называют нелокальностью. Известным примером является синглетное состояние частиц с полуцелым спином, которое к тому же оказывается несепарабельным и перепутанным. Эксперименты по нарушению неравенств Белла представлены в работах [19]. Различие между несепарабельностью и нелокальностью не очень простое. В качестве примера можно указать смешанное вернеровское состояние, которое является несепарабельным, однако неравенство Белла оно не нарушает [14].

Задача о переносе квантовых корреляций представляет интерес для создания квантовых свойств в системах разной физической природы. Она может рассматриваться для атомов, помещенных в

разные [20] или один [21] резонатор, где они взаимодействуют с высокочастотными резонаторными модами. В качестве системы, на которую переносятся квантовые корреляции, могут выступать также полупроводниковые структуры [22]. Чтобы проанализировать, как переносятся квантовые корреляции со света на атомы, помимо формальных критериев мы рассмотрели критерии, основанные на наблюдаемых, которые могут быть измерены в эксперименте. К последним относится достоверность, которая определяет возможности квантового канала для процесса телепортации. Роль квантового канала может играть несепарабельное состояние атомов, которое возникло в термостате, либо сами полевые моды, образующие термостат. Значение достоверности позволяет выявить свойства канала: поддерживает ли он квантовый протокол или является классическим, можно ли клонировать частицы из канала [23]. Другой наблюдаемой, характеризующей квантовые корреляции, является оператор Белла и связанные с ним неравенства типа Клаузера – Хорна – Шимони – Хольта [24]. Сравнение достоверности и условий нарушения неравенств Белла для состояния атомов и мод позволяет определить, как переносятся корреляции со света на атомы. Так, для нашего случая квантовая корреляция, которая приводит к нарушениям неравенств Белла полностью воспроизводится на атомах, в отличие от несепарабельности. Это означает, что полностью квантовое состояние на атомах не воспроизводится. Этот результат находится в соответствии с теоремой о невозможности клонирования [25], с точки зрения которой термостат в заданном, но произвольном квантовом состоянии и взаимодействующая с ним система представляет собой клонирующую машину.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 с помощью техники Ито выводится уравнение для атомов. В разд. 3 найдено стационарное состояние атомов, несепарабельность которого рассмотрена в разд. 4. В разд. 5 рассматривается проявление квантовых корреляций на примере телепортации с помощью атомного (разд. 5.1) и светового (разд. 5.2) каналов. В разд. 5.3 обсуждается нарушение неравенств Белла для состояний атомов, а в разд. 5.4 — для мод.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для двух атомов, каждый из которых взаимодействует со своим широкополосным электромагнитным полем, можно записать кинетическое уравне-

ние, считая поле термостатом. Если поля скоррелированы и образуют, например, ЭПР-пару, то кинетическое уравнение будет содержать новые, дополнительные к известным, слагаемые, описывающие корреляцию атомов.

Пусть два независимых неподвижных двухуровневых атома расположены в разных точках пространства и взаимодействуют с двумя широкополосными электромагнитными полями, центральные частоты которых резонансны частотам атомных переходов ω_0 . Оператор такого взаимодействия имеет вид

$$V_m = -i\hbar \int d\omega \eta_m(\omega) (b_m(\omega) S_m^+ \times \exp(-i(\omega - \omega_0)t) - \text{H.c.}), \quad (1)$$

где атомные операторы $S_m^\pm$ подчиняются коммутационным соотношениям алгебры $su(2)$: $[S_m^+, S_n^-] = S_z \delta_{mn}$; $m, n = 1, 2$; S_z — оператор инверсии перехода, $\eta_m(\omega)$ — константа взаимодействия, а $b_m^\dagger(\omega)$, $b_m(\omega)$ — операторы рождения и уничтожения мод электромагнитного поля на частоте ω . Последние отвечают коммутационным соотношениям

$$[b_m(\omega), b_n^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega') \delta_{mn}.$$

При выводе выражения (1) используются резонансное электродипольное приближение и приближение вращающейся волны, а интегрирование проводится по всей широкой полосе источника. Также мы пренебрегаем эффектами отдачи при поглощении и излучении фотона атомом, вырождением атомных уровней по проекциям углового момента и поляризационным состоянием световых полей. Предположение о широкополосности световых полей позволяет рассматривать их в качестве термостата, состояние которого не изменяется при взаимодействии (1), и описывать поведение атомов с помощью кинетического уравнения.

Чтобы вывести кинетическое уравнение для атомов, воспользуемся техникой стохастического интегрирования Ито и стандартными марковскими приближениями. В этих приближениях [3] константы взаимодействия не зависят от частоты: $\eta_m(\omega) = \sqrt{\gamma_m/2\pi}$, а развитие гейзенберговских операторов мод определяется только свободной эволюцией:

$$c_m(\omega, t) = b_m(\omega, t_0) \exp(-i\omega(t - t_0)).$$

Введем квантовые винеровские процессы

$$B_m^-(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' b_m(t'),$$

где

$$b_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \exp(-i\omega(t-t_0)) b_m(\omega, t_0),$$

с коммутационными соотношениями $[B_m^-(t, t_0), B_n^\dagger(t, t_0)] = t - t_0$; $m, n = 1, 2$. Тогда для двухатомной наблюдаемой A имеем стохастическое уравнение Ито

$$dA = -i\hbar^{-1}[A, H_{sys}] dt + \sqrt{\gamma_1}([A, S_1^+]dB_1^-(t) - [A, S_1^-]dB_1^\dagger(t)) + \sqrt{\gamma_2}([A, S_2^+]dB_2^-(t) - [A, S_2^-]dB_2^\dagger(t)) + \mathcal{I} dt. \quad (2)$$

Здесь $H_{sys} = H_b + H_{at} + V_1 + V_2$ — полный гамильтониан всей системы, описывающий двухсоставной фотонный источник, два атома и их взаимодействия. Свободные гамильтонианы полей и атомов отвечают выражениям

$$H_b = \hbar \sum_{m=1,2} \int d\omega \omega b_m^\dagger(\omega) b_m(\omega_m),$$

$$H_{at} = (1/2)\hbar \sum_{n=1,2} \omega_0 S_{z,n}.$$

Явный вид выражения для $\mathcal{I}$ можно определить из правила дифференцирования Ито:

$$d(A_1 A_2) = d(A_1) A_2 + A_1 d(A_2) + d(A_1) d(A_2),$$

и соотношений для винеровских процессов:

$$dB_m^i dB_n^j = \mathcal{K}_{mn}^{i,j} dt, \quad dB_m^i(t) dt = dt dB_m^i = dt dt = 0,$$

которые определяются корреляционными функциями

$$\langle b_m^i(t) b_n^j(t + \tau) \rangle = \mathcal{K}_{mn}^{i,j} \delta(\tau). \quad (3)$$

В выражении (3) верхние индексы отвечают операторам рождения или уничтожения: $i, j = \dagger, -$, а нижние индексы нумеруют две составляющие источника: $m, n = 1, 2$. Явный вид корреляционной матрицы определяется конкретными свойствами светового источника, но для вывода кинетического уравнения он не требуется.

Пусть ρ — матрица плотности атомов, тогда для нее следует кинетическое уравнение, которое в представлении взаимодействия имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{m=1,2} R_m \rho + R_{12} \rho. \quad (4)$$

Здесь первые два слагаемых описывают независимую релаксацию каждого атома в термостате, который может обладать квантовыми корреляциями

или быть сжатым, если не равны нулю аномальные корреляторы $\mathcal{K}_{mm}^{i,i}$:

$$R_m \rho = \frac{\gamma_m}{2} \{ \mathcal{K}_{mm}^{\dagger,-} (S_m^- S_m^+ \rho - 2S_m^+ \rho S_m^- + \rho S_m^- S_m^+) + \mathcal{K}_{mm}^{-,\dagger} (S_m^+ S_m^- \rho - 2S_m^- \rho S_m^+ + \rho S_m^+ S_m^-) - \mathcal{K}_{mm}^{\dagger,\dagger} (S_m^- S_m^- \rho - 2S_m^- \rho S_m^- + \rho S_m^- S_m^-) - \mathcal{K}_{mm}^{-,-} (S_m^+ S_m^+ \rho - 2S_m^+ \rho S_m^+ + \rho S_m^+ S_m^+) \}.$$

Последнее слагаемое в правой части (4) описывает корреляцию атомов. Оно возникает, если между двумя полевыми подсистемами, образующими термостат, существует взаимная корреляция с ненулевыми средними $\mathcal{K}_{12}^{i,j}$:

$$R_{12} \rho = - \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2} \{ \mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} (S_1^- S_2^- \rho - 2S_2^- \rho S_1^- + \rho S_1^- S_2^-) + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} (S_2^- S_1^- \rho - 2S_1^- \rho S_2^- + \rho S_2^- S_1^-) \} - \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2} \{ \mathcal{K}_{12}^{-,-} (S_1^+ S_2^+ \rho - 2S_2^+ \rho S_1^+ + \rho S_1^+ S_2^+) + \mathcal{K}_{21}^{-,-} (S_2^+ S_1^+ \rho - 2S_1^+ \rho S_2^+ + \rho S_2^+ S_1^+) \} + \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2} \{ \mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} (S_1^- S_2^+ \rho - 2S_2^+ \rho S_1^- + \rho S_1^- S_2^+) + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-} (S_2^+ S_1^- \rho - 2S_1^- \rho S_2^+ + \rho S_2^+ S_1^-) \} + \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2} \{ \mathcal{K}_{12}^{-,\dagger} (S_1^+ S_2^- \rho - 2S_2^- \rho S_1^+ + \rho S_1^+ S_2^-) + \mathcal{K}_{21}^{-,\dagger} (S_2^- S_1^+ \rho - 2S_1^+ \rho S_2^- + \rho S_2^- S_1^+) \}.$$

Мы не накладывали никаких ограничений на корреляционную матрицу (3), полагая, что она представлена всеми возможными билинейными средними, поэтому полученное уравнение (4) является обобщенным уравнением Линдблада с полным отличным от нуля набором коэффициентов матрицы Линдблада — Коссаковского.

Для анализа полученного кинетического уравнения требуется задать физическую модель термостата, который определяется полным набором корреляционных функций (3). Требуемый термостат может быть образован двумя широкополосными скоррелированными световыми полями, которые получают путем смешения на полупрозрачной делительной пластинке двух пучков от двух независимых параметрических источников. При этом можно взять вырожденные параметрические источники. Если ширина каждой световой компоненты, определяемая фазовым синхронизмом, будет много больше, чем скорость спонтанного распада атомов γ_m , то поля можно считать широкополосными. Поскольку в марковском приближении характер эволюции атомов, который описывается формулой (4), определяется кор-

реляционными функциями огибающих $b_m(t)$, можно ограничиться простой моделью источников. Тогда временная δ -функция в (3) является крупномасштабной и определяется обратной шириной спектральной полосы фазового синхронизма. Приведенная модель обладает всеми возможными корреляционными функциями, определяющими матрицу $\mathcal{K}_{mn}^{i,j}$, которая имеет вид [26]

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} &= \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-} = \frac{1}{2}(\text{sh}^2 r_1 + \text{sh}^2 r_2), \\ \mathcal{K}_{11}^{-,\dagger} &= \mathcal{K}_{22}^{-,\dagger} = \frac{1}{2}(\text{ch}^2 r_1 + \text{ch}^2 r_2), \\ \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger} &= \mathcal{K}_{22}^{\dagger,\dagger} = \frac{1}{2}(\text{ch } r_1 \text{ sh } r_1 \exp(-i\phi_1) + \\ &\quad + \text{ch } r_2 \text{ sh } r_2 \exp(-i\phi_2)), \\ \mathcal{K}_{11}^{-,-} &= \mathcal{K}_{22}^{-,-} = \frac{1}{2}(\text{ch } r_1 \text{ sh } r_1 \exp(i\phi_1) + \\ &\quad + \text{ch } r_2 \text{ sh } r_2 \exp(i\phi_2)), \\ \mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} &= \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} = \frac{1}{2}(\text{ch } r_1 \text{ sh } r_1 \exp(-i\phi_1) - \\ &\quad - \text{ch } r_2 \text{ sh } r_2 \exp(-i\phi_2)), \\ \mathcal{K}_{12}^{-,-} &= \mathcal{K}_{21}^{-,-} = \frac{1}{2}(\text{ch } r_1 \text{ sh } r_1 \exp(i\phi_1) - \\ &\quad - \text{ch } r_2 \text{ sh } r_2 \exp(i\phi_2)), \\ \mathcal{K}_{12}^{-,\dagger} &= \mathcal{K}_{21}^{-,\dagger} = \frac{1}{2}(\text{ch}^2 r_1 - \text{ch}^2 r_2), \\ \mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} &= \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-} = \frac{1}{2}(\text{sh}^2 r_1 - \text{sh}^2 r_2),\end{aligned}\quad (5)$$

где r_m — параметры сжатия двухсоставного термостата, $m = 1, 2$, а ϕ_m — фазы полей накачек, которые проявляются при гетеродинном приеме анализируемых полей. Коэффициенты пропускания и отражения полупрозрачной пластинки положены одинаковыми.

Различные значения параметров сжатия и фаз позволяют получить разнообразные состояния двухсоставного светового поля, образующего термостат. Если в формуле (5) выбрать фазы $\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi$, то состояние будет обладать квантовыми корреляциями в отношении разностной координаты $Q_- = q_1 - q_2$ и суммарного импульса $P_+ = p_1 + p_2$, где каноническая координата и импульс q_m и p_m ($m = 1, 2$) составляющей определены соотношением $b_m = q_m + ip_m$. При больших значениях параметров сжатия r_1 и r_2 возникает ЭПР-пара непрерывных переменных, которая является собственным состоянием операторов Q_- , P_+ и отвечает нулевым собственным числам. Если в формуле (5) выбрать $\phi_1 = \pi, \phi_2 = 0$, то возникает перепутанное состояние в отношении операторов суммарной координаты Q_+ и разностного импульса P_- .

3. СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХ АТОМОВ

Если рассматриваемый двухсоставной термостат, в котором находятся атомы, является перепутанным, то у атомов также может возникать несепарабельное состояние с квантовыми корреляциями, свойства которого можно определить из найденного кинетического уравнения.

Из уравнения (4) следует, что эволюция отдельного атома, описываемого матрицей плотности $\rho_m = Sp_n \rho$, $m \neq n$, определяется релаксационным оператором R_m , $m = 1, 2$, который в общем случае описывает взаимодействие со сжатым термостатом. В сжатом термостате будет возникать стационарное состояние со значением инверсии

$$\langle S_z \rangle = -\frac{1}{\text{sh}^2 r_1 + \text{sh}^2 r_2 + 1}. \quad (6)$$

В этом состоянии стационарная поляризация атома равна нулю: $\langle S_m^+ + S_m^- \rangle = 0$. Особенностью кинетического уравнения (4) является то обстоятельство, что оператор R_{12} не оказывает никакого влияния на динамику отдельного атома, а его роль проявляется в свойствах двухатомного состояния.

Чтобы определить состояние двух атомов, решение уравнения (4) для атомной матрицы плотности ρ будем искать в виде разложения по двухчастичному базису $|m\rangle \otimes |n\rangle$, $m, n = 0, 1$. Введем обозначения для базисных состояний $|e\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$, $|f\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$, $|l\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$, $|g\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$, где векторы $|e\rangle$ и $|g\rangle$ описывают состояния, в которых оба атома возбуждены или находятся на нижнем уровне, векторы $|f\rangle$ и $|l\rangle$ — состояния с одним возбужденным атомом. В качестве начального условия выберем состояние $|g\rangle$, в котором оба атома находятся на нижнем уровне. Для выбранного начального условия $\rho_{gg}(t = 0) = 1$, а остальные матричные элементы равны нулю. Состояние двухсоставного термостата будем считать перепутанным в отношении разностной координаты Q_- и суммарного импульса P_+ , полагая в формуле (5) $\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi$. Также будем считать, что атомы имеют одинаковые константы релаксации $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$.

Полагая

$$\rho = \sum_{\mu, \nu} \mathcal{R}_{\mu\nu} |\mu\rangle \langle \nu|, \quad (7)$$

где $\mu, \nu = g, f, l, e$, найдем стационарное решение кинетического уравнения (4), которое определяется корреляционными функциями термостата. В стац-

онарном состоянии матричные элементы $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{ff} = \mathcal{R}_{ll} &= D_1^{-1} \left[(\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger}) \times \right. \\ &\times \left(2\mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} \mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}) \right) - \\ &- (\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger}) (\mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-})^2) \left. + \right. \\ &+ \frac{D_0}{2} (\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} (1 - \langle S_z \rangle) + \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger} (1 + \langle S_z \rangle)) \left. \right], \\ \mathcal{R}_{ee} &= \frac{1}{2} (1 + \langle S_z \rangle) - \mathcal{R}_{ll}, \\ \mathcal{R}_{gg} &= \frac{1}{2} (1 - \langle S_z \rangle) - \mathcal{R}_{ll}, \\ \mathcal{R}_{lf} = \mathcal{R}_{fl} &= D_0^{-1} \left[2\mathcal{R}_{ll} \left(2\mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}) - \right. \right. \\ &- (\mathcal{K}_{21}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger}) (\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger}) \left. - \right. \\ &- \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger}) (\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger}) \left. \right], \\ \mathcal{R}_{eg} = \mathcal{R}_{ge} &= D_0^{-1} \left[2\mathcal{R}_{ll} \left(2\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger}) - \right. \right. \\ &- (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}) (\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger}) \left. - \right. \\ &- \mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}) (\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger}) \left. \right],\end{aligned}\quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}D_1 &= 2 \left[(\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger}) D_0 + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} \left(4\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger}) - \right. \right. \\ &- 2(\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}) (\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger}) \left. + \right. \\ &+ (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger}) \left(2\mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}) - \right. \\ &\quad \left. \left. - (\mathcal{K}_{21}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger}) (\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger}) \right) \right], \\ D_0 &= (\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} + \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger})^2 - 4\mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger},\end{aligned}$$

а стационарная инверсия $\langle S_z \rangle$ определена соотношением (6).

Зависимости $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ от параметров сжатия исходных источников представлены на рис. 1. Мы ограничились значениями параметров r , не превышающими 2, поскольку в последних экспериментах удается достичь значений порядка 1.2. Как показывает анализ, $\mathcal{R}_{lf} = 0$ во всей области параметров r . По приведенным графикам можно сделать следующие заключения. Величина $\mathcal{R}_{ll} = 0$ для источника с равными значениями параметров сжатия $r_1 = r_2$

(рис. 1а), такой термостат для определенности будем называть симметричным. Максимальное значение $\mathcal{R}_{ll}$, равное 0.25, наблюдается для термостата, образованного путем смешения на полупрозрачной делительной пластинке сильно сжатого света, $r \gg 1$, и света в вакуумном состоянии. Такой термостат будем называть предельно несимметричным. Поведение других диагональных элементов двухатомной матрицы плотности приведено на рис. 1б,в. Для симметричного термостата величина $\mathcal{R}_{gg}$ уменьшается от 1.0 до 0.5, в то время как величина $\mathcal{R}_{ee}$ растет от 0 до того же значения. В случае предельного несимметричного термостата величины $\mathcal{R}_{gg}$ и $\mathcal{R}_{ee}$ в области больших r ограничены значением 0.25. Наконец, на рис. 1г представлена зависимость недиагонального матричного элемента $\mathcal{R}_{eg}$, описывающего двухатомную когерентность в анализируемой системе. Величина $\mathcal{R}_{eg}$ растет в случае симметричного термостата и достигает в области больших r предельного значения, равного 0.5. Для предельно несимметричного термостата имеется максимум, отвечающий параметру сжатия $r = 0.6$, при котором $\mathcal{R}_{eg}^{max} = 0.192$. Возникновение коллективной, в данном случае двухатомной, когерентности и отвечает за возможное появление несепарабельного состояния атомов. Следует заметить, что найденное состояние является смешанным.

4. НЕСЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ

Чтобы определить, является ли найденное стационарное состояние атомов несепарабельным, воспользуемся критерием Переса–Хородецких [14, 15]. Согласно этому критерию необходимым и достаточным условием несепарабельности смешанного состояния систем малой размерности типа 2×2 и 2×3 является отрицательность хотя бы одного из собственных чисел матрицы плотности ρ_m^T , полученной транспонированием по переменным одной из подсистем, $m = 1, 2$. В данном случае транспонированная по первому атому матрица плотности, или матрица Переса–Хородецких, имеет вид

$$\rho_1^T = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{ee} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{ff} & \mathcal{R}_{eg} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{ge} & \mathcal{R}_{ll} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{gg} \end{pmatrix},$$

а ее собственные числа $\lambda_i, i = 1, 2, 3, 4$ определяются корнями уравнения

$$[(\mathcal{R}_{ff} - \lambda)(\mathcal{R}_{ll} - \lambda) - \mathcal{R}_{eg}\mathcal{R}_{ge}](\mathcal{R}_{ee} - \lambda)(\mathcal{R}_{gg} - \lambda) = 0.$$

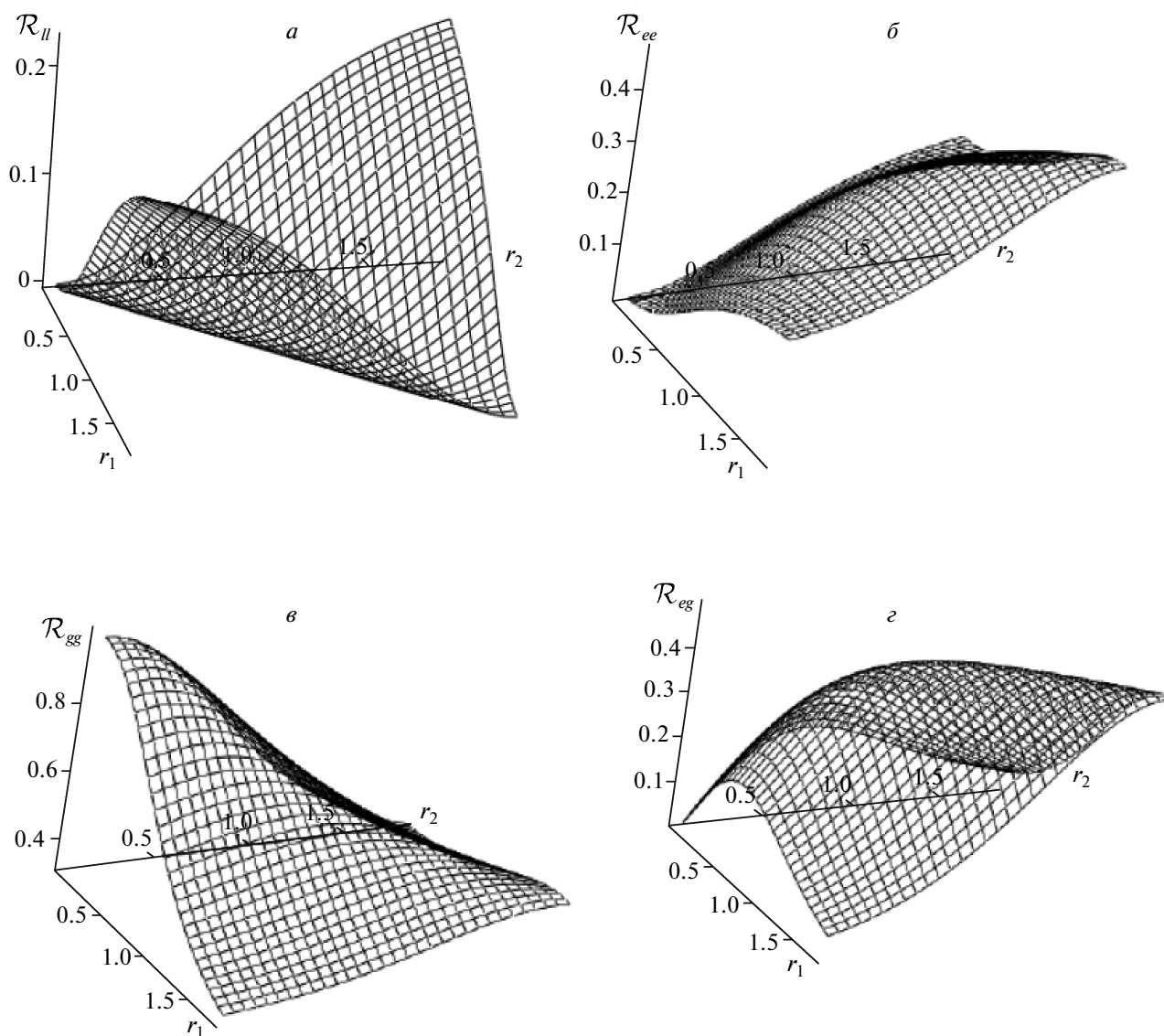


Рис. 1. Зависимости матричных элементов стационарной двухатомной матрицы плотности от параметров сжатия исходных источников

Один из корней этого уравнения $\Lambda = \mathcal{R}_{11} - \mathcal{R}_{eg}$ оказывается отрицательным. Это означает, что состояние атомов является несепарабельным и характеризуется квантовыми корреляциями атомов. На рис. 2 приведена зависимость значения величины этого корня от параметров сжатия. Нетрудно видеть, что модуль величины Λ для симметричного термостата, а следовательно, и степень перепутывания двух атомов тем больше, чем большее значение имеют параметры r . Зависимость величины Λ для предельно несимметричного термостата имеет минимальное значение $\Lambda_{min} = -0.129$ при $r = 0.44$. Для это-

го же случая наблюдается переход от несепарабельного состояния атомов к сепарабельному. Действительно, при $r = 1.05$ величина $\Lambda = 0$ и становится положительной при дальнейшем увеличении r . Это означает, что несепарабельность разрушается, другими словами, корреляция между двумя атомами при $r \geq 1.05$ становится классической. Можно отметить, что физической причиной деградации квантовых корреляций служит исчезновение двухатомной когерентности $\mathcal{R}_{eg}$, которая в рассматриваемой области параметров сжатия уменьшается, стремясь к нулю с ростом r , что демонстрирует рис. 1г.

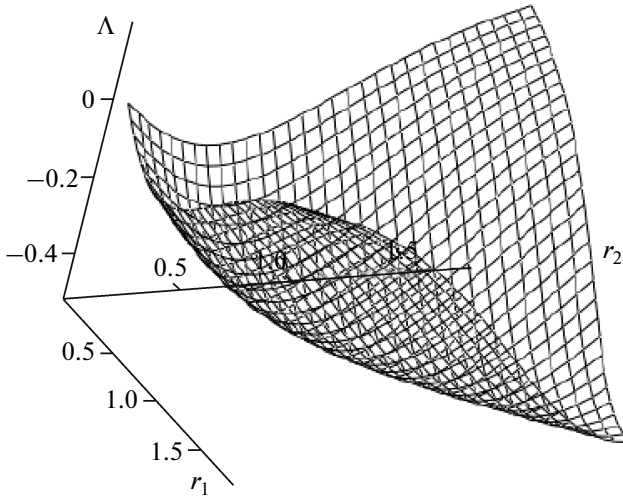


Рис. 2. Зависимость отрицательного собственного значения частично транспонированной матрицы плотности от параметров сжатия исходных источников

Другой критерий несепарабельности, основанный на вычислении величины, известной как конкуренция $\mathcal{C}$ [16], позволяет ввести количественную оценку. Для двух кубитов, в нашем случае двух двухуровневых атомов, конкуренция определяется соотношением

$$\mathcal{C} = \max(0, \sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_3} - \sqrt{\epsilon_4}),$$

где ϵ_i — собственные числа неэрмитовой матрицы $\rho\tilde{\rho}$, записанные в выражении для $\mathcal{C}$ в порядке уменьшения: $\epsilon_1 < \epsilon_2 \dots$. Матрица $\tilde{\rho}$ определяется как

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)}) \rho^* (\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)}),$$

где ρ^* — комплексно-сопряженная ρ матрица, а $\sigma_y^{(m)}$ — матрица Паули атома, $m = 1, 2$. Матрицы Паули удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\sigma_x^{(m)}, \sigma_y^{(n)}] = (1/2i) \sigma_z^{(m)} \delta_{mn}$$

и связаны с атомными операторами как

$$\sigma_x^{(m)} = S_m^+ + S_m^-, \quad \sigma_y^{(m)} = \frac{1}{i}(S_m^+ - S_m^-),$$

$$\sigma_z^{(m)} = S_m^+ S_m^- - S_m^- S_m^+.$$

Положительное значение величины $\mathcal{C}$ соответствует несепарабельным состояниям. Если состояние несепарабельно, то, чем ближе конкуренция к единице, тем выше степень перепутанности. Предельное значение $\mathcal{C}_{max} = 1$ означает, что возни-

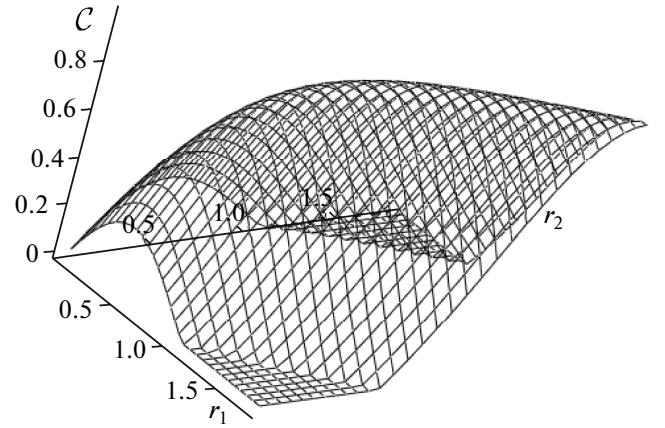


Рис. 3. Зависимость конкуренции Вуттерса $\mathcal{C}$ стационарного двухатомного состояния от параметров сжатия исходных источников

кает ЭПР-пара, состояние которой является максимально перепутанным. Для рассматриваемого случая функция $\mathcal{C}$ принимает вид

$$\mathcal{C} = \max\left(0, \frac{2(|\mathcal{R}_{eg}| - \mathcal{R}_{ll})}{\mathcal{R}_{ee} + \mathcal{R}_{ff} + \mathcal{R}_{ll} + \mathcal{R}_{gg}}\right). \quad (9)$$

Зависимость конкуренции от параметров сжатия приведена на рис. 3. В случае симметричного термостата у атомов всегда возникает несепарабельное состояние, причем для больших значений параметров сжатия состояние близко к ЭПР-паре. Для предельно несимметричного термостата возникает переход к сепарабельному состоянию атомов, если значения параметра сжатия $r = 1.05$, что совпадает с выводом, полученным с помощью критерия Переса–Хородецких. Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что оба критерия являются согласованными.

Причина возникновения несепарабельного квантового состояния, наличие которого установлено двумя известными критериями, достаточно очевидна. Световые поля, образующие термостат, находятся в перепутанном состоянии и взаимодействуют с атомами, поэтому квантовая корреляция переносится на атомы. Вместе с тем, ни критерий Переса–Хородецких, ни рассчитанная конкуренция не дают ответа на вопросы, насколько хорошо переносится корреляция с поля на атомы, какое несепарабельное состояние лучше: у которого конкуренция равна 0.7 или 0.8? Чтобы ответить на эти вопросы, можно, например, использовать данное несепарабельное состояние в протоколах квантовой теории информации, где требуется квантовая корреляция.

5. ПРОЯВЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

Квантовые корреляции являются основным ресурсом квантовых информационных процессов, таких как телепортация, где используются перепутанные состояния, и могут приводить к нарушениям неравенств Белла. Оба указанных примера содержат вычисление некоторой наблюдаемой, ее величина позволяет судить о проявлении квантовых корреляций в данном состоянии и может быть использована для сравнения состояний таких разных физических систем, как поле и атомы.

5.1. Атомный квантовый канал для телепортации

Рассмотрим возможность использования найденного несепарабельного состояния двух атомов (7) в качестве квантового канала для процесса телепортации [27]. Несепарабельность канала определяет качество телепортации, для описания которого используется параметр, известный как достоверность.

Пусть квантовый канал распределен между Алисой и Бобом, и Алиса желает отправить Бобу двухуровневый атом в неизвестном состоянии

$$|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (10)$$

где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Как хорошо известно, задача решается путем белловского измерения, двух битов классической информации, кодирующих исходы измерений, и набора восстанавливающих операторов, которые применяет Боб к своей частице, чтобы восстановить посланное состояние. В данном случае

общее состояние представляет собой произведение $\Upsilon = |\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes \rho$, где состояние канала ρ определено согласно формуле (7), а измерение проводится над неизвестным кубитом и одним из атомов, который для определенности назовем атомом 1. Обозначим как Π_k и U_k , $k = 1, 2, 3, 4$, набор проекторов на белловские состояния Φ^+ , Φ^- , Ψ^+ , Ψ^- , а соответствующий ему набор восстанавливающих операторов — как $1, \sigma_z, \sigma_x, i\sigma_y$. Белловские состояния имеют известный вид:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle \pm |1\rangle \otimes |1\rangle),$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle \pm |1\rangle \otimes |0\rangle).$$

Процесс телепортации характеризуется параметром качества или достоверности, который описывает соответствие между неизвестным состоянием φ и состоянием атома 2, которое получается в результате очередного измерения и действия восстанавливающего оператора

$$\mathcal{F}^{(k)} = \frac{1}{\text{Prob}(k)} \langle \varphi | (U_k^\dagger \otimes \Pi_k) \Upsilon (\Pi_k^\dagger \otimes U_k) | \varphi \rangle, \quad (11)$$

где $\text{Prob}(k) = \text{Sp}(\Pi_k \Upsilon \Pi_k^\dagger)$ — вероятность k -го исхода. Для расчета $\mathcal{F}^{(k)}$ нужно использовать свойства квантового канала, определенного согласно формуле (8). Так, оказывается, что при проектировании на пары белловских состояний $\Phi^\pm$, $k = 1, 2$ и $\Psi^\pm$, $k = 3, 4$ значения достоверности равны соответственно

$$\mathcal{F}^{(1,2)} = \frac{|\alpha|^4 \mathcal{R}_{gg} + (1 - |\alpha|^2)^2 \mathcal{R}_{ee} + |\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) (\mathcal{R}_{ll} + \mathcal{R}_{ff} + \mathcal{R}_{eg} + \mathcal{R}_{ge})}{\mathcal{R}_{ll} + \mathcal{R}_{ee} + (\mathcal{R}_{gg} - \mathcal{R}_{ee})|\alpha|^2} \quad (12)$$

и

$$\mathcal{F}^{(3,4)} = \frac{|\alpha|^4 \mathcal{R}_{ee} + (1 - |\alpha|^2)^2 \mathcal{R}_{gg} + |\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) (\mathcal{R}_{ll} + \mathcal{R}_{ff} + \mathcal{R}_{eg} + \mathcal{R}_{ge})}{\mathcal{R}_{ll} + \mathcal{R}_{gg} + (\mathcal{R}_{ee} - \mathcal{R}_{gg})|\alpha|^2}. \quad (13)$$

В случае симметричного термостата, когда параметры сжатия $r_1 = r_2 \gg 1$, будет возникать состояние атомов близкое к идеальной ЭПР-паре. В этих условиях значения матричных элементов атомной матрицы плотности (8) равны $\mathcal{R}_{ll} = \mathcal{R}_{ff} = 0$, $\mathcal{R}_{ee} = \mathcal{R}_{gg} = \mathcal{R}_{eg} = 0.5$. Тогда $\mathcal{F}^{(1,2)} = \mathcal{F}^{(3,4)}$, сам параметр качества перестает зависеть от свойств исходного состояния и принимает значение, равное 1. Это означает, что неизвестное состояние полностью воспроизводится на выходе, поскольку канал является

идеальным. Для предельно несимметричного термостата, когда, например, $r_2 = 0$ и $r_1 \gg 1$, матричный элемент, отвечающий двухатомной когерентности, $\mathcal{R}_{ge} \approx 0$, а $\mathcal{R}_{ll} = \mathcal{R}_{ff} = \mathcal{R}_{ee} = \mathcal{R}_{gg} = 0.25$. Такой канал обладает только классическими корреляциями, для него $\mathcal{F}^{(k)} = 1/2$ для всех исходов измерения. Последнее означает, что возникающее состояние на выходе будет содержать лишь 50 % свойств исходного.

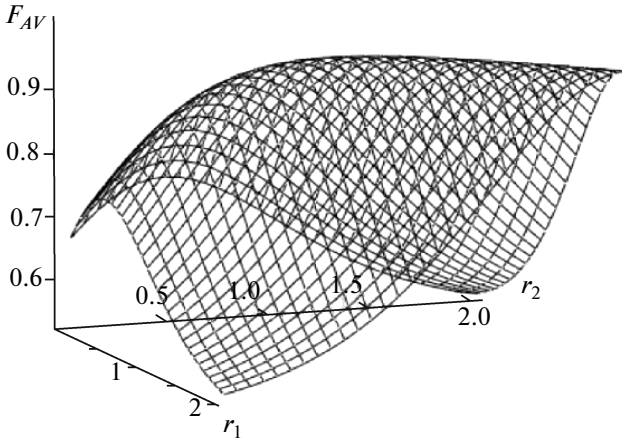


Рис. 4. Зависимость средней достоверности F_{AV} для атомного канала от параметров сжатия источников

Поскольку состояние кубита, который посылает Алиса, считается неизвестным, т. е. произвольным, для характеристики процесса телепортации вводится средняя достоверность (average fidelity) F_{AV} . Эта величина представляет собой среднее от $\mathcal{F}^{(k)}$ по всем исходам измерения $k = 1, \dots, 4$ и по всем состояниям неизвестного кубита (10), где $\alpha = \cos(\theta/2)$, $\beta = \sin(\theta/2) \exp(-i\phi)$, с равномерным распределением θ и ϕ на сфере Блоха:

$$F_{AV} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_k \text{Prob}(k) \mathcal{F}^{(k)}(\theta, \phi) d\phi \sin \theta d\theta. \quad (14)$$

Для дискретного канала с классическими корреляциями верхняя граница F_{AV} не превышает значения $2/(1+d)$ [28], где d — размерность гильбертова пространства частицы, которую телепортируют. В нашем случае $d = 2$ и для квантового канала среднее значение достоверности лежит в пределах $2/3 < F_{AV} \leq 1$, где верхняя граница соответствует идеальному каналу, образованному ЭПР-парой. Для квантового канала важным значением является величина $F_{AV} = 5/6$ [29], которая связана с теоремой о запрете клонирования [25]. Так, если $F_{AV} > 5/6$, то из запрета клонирования следует, что нельзя получить копию ни одной из частиц канала. С этой точки зрения канал становится совершенно секретным, а область $2/3 < F_{AV} \leq 5/6$ называют областью квантового факса, поскольку остается возможность клонировать одну из частиц с хорошим качеством.

Для рассматриваемого канала для средней достоверности следует выражение

$$F_{AV} = \frac{2}{3} \times \left(\mathcal{R}_{gg} + \mathcal{R}_{ee} + \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{ll} + \mathcal{R}_{ff} + \mathcal{R}_{eg} + \mathcal{R}_{ge}) \right), \quad (15)$$

где атомные матричные элементы определены согласно (8). Зависимость величины F_{AV} от параметров сжатия исходных источников света приведена на рис. 4. Из этого рисунка следует, что при значениях $r_1, r_2 \leq 1$, величина $F_{AV} > 2/3$. Это означает, что в данной области канал обладает квантовыми корреляциями. Для симметричного термостата, когда $r_1 = r_2 \gg 1$, увеличение значений параметров сжатия отвечает тому, что состояние канала приближается к ЭПР-паре, поэтому $F_{AV} \rightarrow 1$. При этом, начиная со значений $r_1 = r_2 \geq 0.28$ квантовый канал превращается в совершенно секретную систему, поскольку $F_{AV} \geq 5/6$. Для предельно несимметричного термостата, когда, например, $r_2 = 0$, квантовые корреляции между атомами пропадают и при значениях r_1 , больших $r_1 = 1.05$, канал становится классическим, поскольку $F_{AV} \leq 2/3$. Заметим, что этот вывод находится в полном соответствии с рассмотренными выше критерием сепарабельности Переса–Хородецких и критерием на основе конкуренции.

Поскольку световые поля, образующие термостат, в котором находятся атомы, сами могут обладать квантовой корреляцией, их также можно использовать как квантовый канал для телепортации. В процессе телепортации качество канала, обусловленное несепарабельностью состояния световых полей, может быть описано средней достоверностью F_{AV} , равно как и канала, образованного атомами. Тогда сравнение значений F_{AV} для атомного и светового каналов позволяет ответить на вопрос, как квантовые корреляции, связанные с несепарабельностью, переносятся со света на атомы.

5.2. Световой канал для телепортации

Рассматривая процесс телепортации на основе двухсоставного светового поля, ограничимся случаем одинаковых значений параметров сжатия $r = r_1 = r_2$ обеих компонент. Свойства такого поля полностью соответствуют излучению невырожденного источника, а его волновая функция имеет следующий вид [30]:

$$|\Xi\rangle = \frac{1}{\text{ch } r} \sum_{n=0}^{\infty} \text{th}^n r |n\rangle \otimes |n\rangle, \quad (16)$$

где $|n\rangle$ — фоковские состояния. Пусть неизвестное состояние, которое Алиса отправляет Бобу с помо-

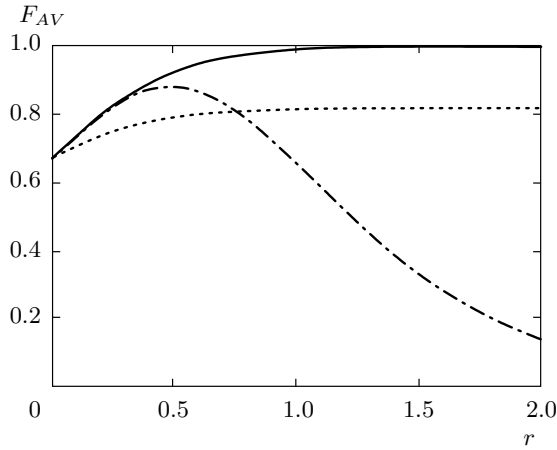


Рис. 5. Зависимости средней достоверности F_{AV} различных симметричных каналов от параметров сжатия источников. Сплошная кривая соответствует атомному каналу, штрихпунктирная — световому каналу при телепортации дискретного кубита, пунктирная — световому каналу при телепортации сжатого света

щью канала (16), имеет вид (10), где $|0\rangle, |1\rangle$ — фоковские состояния фотона. Мы имеем систему с бесконечным числом степеней свободы, поэтому с помощью белловского базиса $\Phi^\pm, \Psi^\pm$ задачу решить нельзя. Необходимый двухчастичный перепутанный базис можно построить из фоковских состояний, содержащих четное и нечетное число фотонов. Он имеет вид

$$|\Psi_{nm}^\pm\rangle = (1/\sqrt{2})(|2n\rangle \otimes |2m+1\rangle \pm |2n+1\rangle \otimes |2m\rangle),$$

$$|\Phi_{nm}^\pm\rangle = (1/\sqrt{2})(|2n\rangle \otimes |2m\rangle \pm |2n+1\rangle \otimes |2m+1\rangle).$$

Поскольку нашей задачей является сравнение квантовых каналов, вычислим величину средней достоверности, определенную согласно (14). Используя найденный базис, получим

$$F_{AV} = \frac{2}{3\text{ch}^2 r}(1 + \text{th}^2 r + \text{th} r).$$

Зависимость $F_{AV}(r)$ представлена на рис. 5. Сплошная кривая отвечает атомному каналу, образованному парой атомов, штрихпунктирная — двухсоставному световому каналу. Оба графика описывают процесс телепортации однокубитного суперпозиционного состояния (10). Для светового канала область, где канал имеет классические корреляции, удовлетворяет неравенству $F_{AV} \leq 1/2$. Область квантового факса определяется значениями $1/2 < F_{AV} \leq 2/3$, область совершенной секретности, где полностью

исключено копирование, определяется значениями $F_{AV} > 2/3$ [31]. В рассматриваемом случае световой канал оказывается полностью секретным при следующих значениях параметров сжатия источников: $0 < r < 0.98$. Величина средней достоверности имеет максимальное значение $F_{AV\max}(r = 0.5) = 0.88$, а область квантового факса соответствует параметру сжатия $0.98 < r < 1.22$. Это неравенство означает, что световой канал, который используется для телепортации кубита, только в этой области параметров сжатия обладает квантовыми корреляциями. На этом же рисунке пунктирной линией показана зависимость $F_{AV}(r)$ для светового канала (16), который используется для телепортации сжатых состояний одномодового светового поля. Исследование этого случая представлено в работе [32]. При телепортации сжатого света $F_{AV} \leq 0.8$, причем максимум достигается только для очень большого значения параметра сжатия r . Однако $F_{AV} > 2/3$ во всей области изменения параметра сжатия. Поэтому при телепортации сжатого состояния световой канал (16) является совершенно секретным, поскольку его невозможно копировать.

Из полученных результатов следует, что при телепортации световой квантовый канал (16) может перенести только часть свойств неизвестного состояния, в отличие от атомного канала. Оба исследуемых канала оказываются неэквивалентными в отношении телепортации. Если теперь вспомнить, что атомный канал был образован световым при взаимодействии атомов со световыми полями, обладающими квантовыми корреляциями, то возникает следующее наблюдение. В процессе необратимого переноса квантовых корреляций со света на атомы концентрация несепарабельности или, по крайней мере, та ее часть, которая требуется для телепортации, может увеличиться.

5.3. Неравенства Белла для несепарабельного состояния атомов

В работе Переса [14] показано, что несепарабельность состояния является необходимым условием нарушения неравенств Белла [18], которые являются одним из инструментов изучения квантовых флуктуаций. Это утверждение подтверждается неравенствами Клаузера–Хорна–Шимони–Хольта [24], которые будем использовать для характеристики квантовых корреляций двухсоставного светового поля и атомов.

Рассмотрим вначале найденное стационарное состояние атомов (8). Пусть первый атом находит-

ся у наблюдателя, которого будем обозначать верхним индексом 1, а второй атом — у наблюдателя 2. Каждый из наблюдателей может проводить измерение соответствующих им физических величин $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, заданных единичными векторами. Измерение в данном контексте сводится к проецированию наблюдаемой. Так, например, результат измерения наблюдателем 1 величины $\mathbf{a}$ имеет вид

$$\sigma^{(1)}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = a_x \sigma_x^{(1)} + a_y \sigma_y^{(1)} + a_z \sigma_z^{(1)}.$$

Здесь компоненты вектора $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = (\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \sigma_z^{(1)})$ являются матрицами Паули первого атома. Такой выбор наблюдаемых отвечает введению оператора Белла [33]

$$\mathcal{B} = \sigma^{(1)}(\mathbf{a}) \otimes \sigma^{(2)}(\mathbf{b}) + \sigma^{(1)}(\mathbf{a}) \otimes \sigma^{(2)}(\mathbf{b}') + \sigma^{(1)}(\mathbf{a}') \otimes \sigma^{(2)}(\mathbf{b}) - \sigma^{(1)}(\mathbf{a}') \otimes \sigma^{(2)}(\mathbf{b}'), \quad (17)$$

который описывает два кубита, роль которых здесь играют двухуровневые атомы. Статистическое усреднение оператора Белла по любым «классическим» распределениям, а также в рамках теорий скрытых параметров, приводит к неравенству Белла

$$|\langle \mathcal{B} \rangle| \leq 2. \quad (18)$$

Оно нарушается, если состояние обладает квантовой корреляцией. Самым распространенным примером состояния, обладающего корреляциями ЭПР, является синглетное спиновое состояние. Оно приводит к максимальному значению $|\langle \mathcal{B} \rangle|_{max} = 2\sqrt{2}$, которое является верхней границей в общем случае [34].

Для стационарного состояния (8) нетрудно определить среднее $\langle \sigma^{(1)}(\mathbf{a}) \otimes \sigma^{(2)}(\mathbf{b}) \rangle$. Вводя полярные θ_a, θ_b и азимутальные φ_a, φ_b углы для двух кубитов на сфере Блоха единичного радиуса, найдем

$$\langle \sigma^{(1)}(\mathbf{a}) \otimes \sigma^{(2)}(\mathbf{b}) \rangle = 2 \sin \theta_a \sin \theta_b \cos(\varphi_a + \varphi_b) \mathcal{R}_{eg} + \cos \theta_a \cos \theta_b \{ \mathcal{R}_{ee} + \mathcal{R}_{gg} - \mathcal{R}_{ll} - \mathcal{R}_{ff} \}, \quad (19)$$

что дает возможность определить среднее значение величины (17). Оптимизация среднего значения оператора Белла приводит к определенным значениям параметров, при которых реализуется максимальное нарушение неравенства (18). Для анализируемого состояния этими значениями, например, являются равные нулю все азимутальные углы $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_{a'} = \varphi_{b'} = 0$ и следующие значения полярных углов: $\theta_a = \pi/2$, $\theta_{a'} = \pi$, $\theta_b = 3\pi/4$, $\theta_{b'} = \pi/4$.

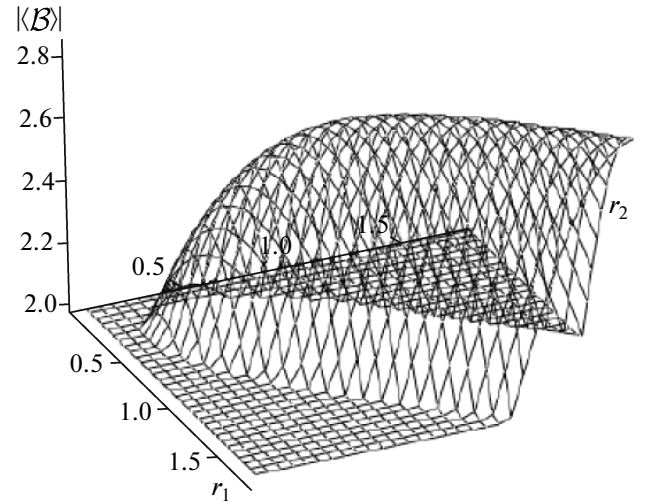


Рис. 6. Зависимость среднего значения оператора Белла от параметров сжатия исходных источников. Показана только область нарушения неравенства (18)

На рис. 6 представлена зависимость $|\langle \mathcal{B} \rangle|$ от параметров сжатия, где область нарушения неравенств Белла имеет вид некоторой выпуклой фигуры, расположенной над плоскостью $|\langle \mathcal{B} \rangle| = 2$. Линия основания отвечает состояниям атомов, для которых неравенство Белла еще не нарушается. Если состояния атомов получены при равных значениях параметров сжатия или в случае воздействия на атомы симметричного источника, то нарушение неравенств начинается со значений $r = r_1 = r_2 \approx 0.22$. Максимальное значение $|\langle \mathcal{B} \rangle|_{max} \rightarrow 2\sqrt{2}$ лежит в области $r \gg 1$. В этой области состояние атомов приближается к ЭПР-паре, что совпадает с критерием Переса–Хородецких (см. рис. 2) и критерием на основе конкуренции (см. рис. 3).

Для несимметричного случая, когда, например, $r_2 = 0$, неравенства Белла не нарушаются при любом значении r_1 . Этот результат находится в полном соответствии с утверждением Переса [14], согласно которому наличие отрицательного собственного числа у частично транспонированной матрицы плотности является необходимым, но недостаточным условием нарушения неравенств Белла.

5.4. Неравенства Белла для двухсоставного светового поля

Рассмотрим теперь нарушение неравенств Белла для двухсоставного светового поля с квантовой корреляцией. Необходимо отметить, что для

двухмодового состояния общего вида неравенства Белла неизвестны. Трудность вызвана введением оператора Белла, который, в частности, нельзя построить из квадратурных операторов [35]. Попытки получить неравенство Белла, исходя из соотношений неопределенности, собственного значения шумовой корреляционной матрицы света [36] и свойств симметрии алгебры $su(1, 1)$, приводят к известному неравенству [17]. Существуют неравенства Нха–Кима [37], отвечающие несепарабельности, построенные на средних от полевых операторов алгебры $su(2)$. Однако в рамках этих переменных рассматриваемая нами модель является сепарабельной при любых значениях параметров сжатия исходных источников.

Вместе с тем для симметричного случая, когда $r_1 = r_2 = r$ и состояние поля имеет вид (16), известны два способа введения неравенств Белла. Первый способ определяет некоторое среднее в вигнеровском представлении [38], которое ассоциировано с оператором Белла и не превышает значения 2.19. Это значение не соответствует верхней границе для состояний с максимальными квантовыми корреляциями [34]. Второй способ заключается во введении для одной из световых подсистем операторов квазиспина $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$, построенных на фоковских состояниях [39]

$$\begin{aligned} s_x &= \sum_{n=0}^{\infty} (|2n\rangle\langle 2n+1| + \text{H.c.}), \\ s_y &= i \sum_{n=0}^{\infty} (|2n\rangle\langle 2n+1| - \text{H.c.}), \\ s_z &= \sum_{n=0}^{\infty} (|2n+1\rangle\langle 2n+1| - |2n\rangle\langle 2n|). \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что эти операторы обладают коммутационными соотношениями, характерными для систем с полуцелым спином: $[s_z, s_{\pm}] = \pm 2s_{\pm}$, $[s_+, s_-] = s_z$.

Используя операторы (20), измерение величины $\mathbf{a}$, которое проводит наблюдатель 1, можно описать оператором

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(1)}(\mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{s}^{(1)} = \\ &= s_z \cos \theta_a + \sin \theta_a (s_- \exp(i\varphi_a) + s_+ \exp(-i\varphi_a)), \end{aligned}$$

где θ_a, φ_a — полярный и азимутальный углы вектора

$$\mathbf{a} = (\sin \theta_a \cos \varphi_a, \sin \theta_a \sin \varphi_a, \cos \theta_a)$$

на сфере единичного радиуса. Коммутационные соотношения и равенство $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}^{(1)})^2 = I$ определяют собственные значения эрмитового оператора $\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}^{(1)}$, ко-

торые оказываются равными ± 1 . Аналогичные рассуждения можно провести и для второго наблюдателя, который измеряет величину $\mathbf{b}$. В итоге оператор Белла записывается в виде (17) с заменой $\sigma^{(1)}(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{s}^{(1)}(\mathbf{a})$, $\sigma^{(2)}(\mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{s}^{(2)}(\mathbf{b})$. Проводя усреднение этого оператора по состоянию двух мод, определяемому волновой функцией (16), имеем средние вида

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{s}^{(1)}(\mathbf{a}) \otimes \mathbf{s}^{(2)}(\mathbf{b}) \rangle &= \\ &= \cos \theta_a \cos \theta_b + \text{th}(2r) \sin \theta_a \sin \theta_b, \end{aligned} \quad (21)$$

где значения всех азимутальных углов положены равными нулю. Выбирая теперь значения полярных углов равными $\theta_a = 0, \theta_{a'} = \pi/2, \theta_b = -\theta_{b'} = \pi/4$, найдем зависимость $|\langle B \rangle|$ как функцию параметра сжатия r .

С помощью найденных средних (19) и (21) для несепарабельных атомов и двухсоставного светового поля по нарушению неравенств Белла можно ответить на вопрос, как переносятся квантовые корреляции от света к атомам. Из сравнения графиков следует, что они полностью совпадают. Это означает, что те квантовые корреляции световых полей, которые определяют нарушение неравенств Белла, полностью переносятся на атомы при рассмотренном необратимом взаимодействии. Однако квантовые корреляции, которые проявляются как несепарабельность состояния, на атомах не воспроизводятся. Таким образом состояние света на атомы полностью не переносится, что, однако, находится в соответствии с теоремой о запрете клонирования, с точки зрения которой рассматриваемое нами необратимое воздействие мод на атомы представляет собой некоторую неунитарную клонирующую машину.

6. ВЫВООДЫ

Мы рассмотрели возможность описания переноса квантовых корреляций со света на атомы в необратимом процессе взаимодействия. Заметим, что эти системы разной физической природы и описываются в рамках разных переменных — непрерывных и дискретных, а также разных алгебр операторов, их образующих. Двухсоставной источник световых полей, обладающий полным набором корреляционных функций второго порядка, отвечающих за их квантовые свойства, получен путем смешения на полупрозрачной пластинке излучений от двух независимых вырожденных параметрических источников. В условиях, когда спектральные ширины составляющих светового поля много больше характерных вре-

мен релаксации атомов, для последних в марковском приближении выведено кинетическое релаксационное уравнение, содержащее все коэффициенты матрицы Линдблада–Коссаковского. Мы продемонстрировали появление в стационарном атомном состоянии квантовых корреляций, которые можно отождествить с переносом квантовых свойств света на атомы.

Для характеристики несепарабельности и нелокальности, являющихся двумя свойствами (особенностями) квантовых корреляций двухсоставных систем, были выбраны критерии, основанные на непосредственно наблюдаемых в эксперименте величинах. Мы рассмотрели возможность использования найденных состояний атомов и исходного состояния светового поля в качестве квантового канала для телепортации, где и проявляется свойство несепарабельности. Рассчитанная величина качества канала показала, что такой канал может поддерживать квантовый протокол и даже являться совершенно секретным с точки зрения теоремы о запрете клонирования. Анализ нарушения неравенств Белла, которые отвечают свойству нелокальности, показывает, что квантовые свойства, проявляющиеся через нарушение этих неравенств, передаются от света к атомам полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **80**, 3891 (1998); N. Takei, H. Yonezawa, T. Aoki, and A. Furusawa, Phys. Rev. Lett. **94**, 220502 (2005).
2. Д. Н. Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, Наука, Москва (1980).
3. C. W. Gardiner and M. J. Collett, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985).
4. G. M. Palma and P. L. Knight, Phys. Rev. A **39**, 1962 (1989).
5. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **75**, 151 (2002); А. М. Башаров, ЖЭТФ **121**, 1249 (2002).
6. M. Paternostro, W. Son, M. S. Kim, G. Falci, and G. M. Palma, Phys. Rev. A **70**, 022320 (2004).
7. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ **89**, 571 (2009).
8. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **135**, 227 (2009).
9. T. Iskhakov, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, Phys. Rev. Lett. **102**, 183602 (2009).
10. N. Takei, H. Yonezawa, T. Aoki, and A. Furusawa, Phys. Rev. Lett. **94**, 220502 (2005); H. Yonezawa, S. L. Braunstein, and A. Furusawa, Phys. Rev. Lett. **98**, 110503 (2007).
11. C. W. Gardiner, Phys. Rev. Lett. **56**, 1917 (1986).
12. А. М. Башаров, ЖЭТФ **111**, 25 (1997).
13. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2000).
14. A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
15. M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
16. W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
17. L.-M. Duan, G. Gedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2002); R. Simon, Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2002).
18. J. H. Bell, Physics **1**, 195 (1964).
19. S. J. Freedman and J. F. Clauser, Phys. Rev. Lett. **28**, 938 (1972); A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982); P. G. Kwiat, A. M. Steinberg, and R. Y. Chiao, Phys. Rev. A **47**, R2472 (1993).
20. W. Son et al., J. Mod. Opt. **49**, 1739 (2002); J. Zou et al., Phys. Rev. A **73**, 042319 (2006); F. Casagrande et al., Phys. Rev. A **79**, 022307 (2009); S. Chan et al., J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **42**, 065507 (2009).
21. K. Harkonen, F. Plastina, and S. Maniscalco, Phys. Rev. A **80**, 033841 (2009).
22. M. Paternostro, G. Falci, M. Kim, and G. M. Palma, Phys. Rev. B **69**, 214502 (2004).
23. S. L. Braunstein and P. van Loock, Rev. Mod. Phys. **77**, 513 (2005).
24. J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
25. W. K. Wootters and W. H. Zurek, Nature **299**, 802 (1982).
26. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **132**, 355 (2007).
27. C. H. Bennett et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
28. S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, and J. H. Kimble, J. Mod. Opt. **47**, 267 (2000).
29. R. F. Werner, Phys. Rev. A **58**, 1827 (1998).

-
30. D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer, Berlin (1994).
31. F. Grosshans and P. Grangier, Phys. Rev. A **64**, 010301(R) (2001).
32. C. M. Caves and K. Wodkiewicz, Open Systems and Information Dynamics **11**, 309 (2004).
33. S. L. Braunstein, A. Mann, and M. Revzen, Phys. Rev. Lett. **68**, 3259 (1992).
34. B. S. Cirelson, Lett. Math. Phys. **4**, 93 (1980).
35. A. Salles, D. Cavalcanti, and A. Asin, Phys. Rev. Lett. **101**, 040404 (2008).
36. E. Shchukin and W. Vogel, Phys. Rev. Lett. **95**, 230502 (2005); A. Miranowicz and M. Piani, Phys. Rev. Lett. **97**, 058901 (2006); E. Shchukin and W. Vogel, Phys. Rev. A **74**, 030302(R) (2006).
37. H. Nha and J. Kim, Phys. Rev. A **75**, 012326 (2007).
38. K. Banaszek and K. Wodkiewicz, Phys. Rev. A **58**, 4345 (1998).
39. Z.-B. Chen, J.-W. Pan, G. Hou, and Y.-D. Zhang, Phys. Rev. Lett. **88**, 040406 (2002).