

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ–ИЗОЛЯТОР В АНСАМБЛЕ ФЕРМИ-АТОМОВ В ОПТИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

В. А. Кашурников, А. В. Красавин***

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 октября 2009 г.

Квантовым методом Монте-Карло моделируется ультрахолодный ферми-газ в оптической решетке с параболическим потенциалом. В рамках модели Хаббарда рассчитан профиль плотности газа и показано, что внутри ловушки существует область с плотностью один атом на «узел», что отвечает состоянию моттовского изолятора. Фаза изолятора окружена сверхтекучей областью, занимающей как центр ловушки, так и ее периферию.

В экспериментах по ультрахолодным газам в магнитооптических ловушках в последнее время наибольший интерес привлекают исследования ферми-систем, таких как ${}^6\text{Li}$ [1], ${}^{40}\text{K}$ [2]. Важно, что с помощью резонанса Фешбаха [3] в них можно менять знак амплитуды рассеяния частиц a в зависимости от величины постоянного магнитного поля B , переходя из отрицательного в положительный режим межчастичного взаимодействия. Свойства разреженного ферми-газа при низких температурах при условии, что масштаб взаимодействия много меньше, чем среднее расстояние между частицами, полностью определяются параметром $k = 1/k_F a$, где k_F — импульс Ферми. Эксперименты [1, 2], а также теоретические исследования и расчеты квантовыми методами Монте-Карло [4, 5] свидетельствуют о переходе от режима спаривания типа БКШ при $k \rightarrow -\infty$ к режиму бозе-эйнштейновской конденсации при $k \rightarrow \infty$.

Наиболее интересен последний случай, так как было продемонстрировано рождение ультрахолодных молекул ${}^{40}\text{K}_2$ и ${}^6\text{Li}_2$ вблизи резонанса Фешбаха при значениях B , соответствующих положительной длине рассеяния. Для поляризованных по спину фермионов это означает, что происходит взаимодействие атомов в разных сверхтонких состояниях. Такое возбужденное состояние относительно долгоживущее, и молекулы образуют газ композитных бозо-

нов, конденсация которого наблюдается экспериментально [1, 2].

Для моделирования ситуации используют как однокомпонентный ферми-газ [5, 6] с притяжением, так и многокомпонентную смесь ферми- и бозе-систем [5, 7], что позволяет учесть появление бозе-компаундов — молекул из пары ферми-частиц.

В недавней работе [8] обсуждался ферми-газ в условиях оптической решетки. Периодический оптический потенциал с учетом параболического профиля ловушки приводит к эффективной модели Хаббарда в неоднородном внешнем поле. Было показано в рамках аналитических оценок, что возможно появление фазы моттовского изолятора, что приводит к характерным особенностям в профиле плотности газа.

Однородный ферми-газ можно непрерывно перевести из режима БКШ в режим бозе-эйнштейновской конденсации, меняя длину рассеяния. Учет периодического оптического потенциала нарушает такой процесс. Увеличивая амплитуду оптического потенциала, можно перевести систему в режим моттовского изолятора, характеризующегося фиксированным единичным заполнением «узлов» решетки. Точный численный анализ фазовых состояний ферми-системы и определение границ раздела фаз как функции межчастичного взаимодействия и амплитуды оптического потенциала является задачей данной работы.

В данной работе подобная система исследуется с помощью квантового метода Монте-Карло (CTWL)

*E-mail: kashurnikov@tochka.ru

**E-mail: avkrasavin@mail.ru

[9]. Для расчета была выбрана модель Хаббарда следующего вида:

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle, \sigma} (a_{i\sigma}^{\dagger} a_{j\sigma} + \text{H.c.}) + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} + V \sum_{\langle ij \rangle, \sigma, \sigma'} n_{i\sigma} n_{j\sigma'} + \sum_{i\sigma} \mu_i n_{i\sigma}. \quad (1)$$

Здесь $U > 0$, а внешний параболический потенциал вводится следующим образом:

$$\mu_i = -\mu + k i^2. \quad (2)$$

Кривизна параболы k подбирается из расчета нулевого заполнения на «узлах», расположенных на расстояниях, больших, чем 10 периодов от центра ловушки. Изменяя химический потенциал μ , можно подобрать заполнение ловушки со средним значением $\langle n \rangle \sim 1$.

Параметры Хаббарда t, U являются результатом перехода от модели континуальной ферми-системы к эффективной узельной схеме с функциями Ванье, локализованными в минимумах оптического потенциала. Таким образом, периодический потенциал, в котором находится континуальный газ, учитывается в эффективной модели (1), а его параметры — в величинах t, U . Как известно [10], расчет точной задачи на «узле» приводит к следующему соотношению между ними и параметрами оптической решетки — энергией отдачи E_R и амплитуды оптического потенциала V_0 :

$$t = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) E_R \zeta^3 \exp(-2\zeta^2), \quad (3)$$

$$U = \pi E_R \left(\frac{|a|}{d} \right) \zeta^3, \quad \zeta = \left(\frac{V_0}{E_R} \right)^{1/4}.$$

Роль хаббардовского отталкивания в этой модели — расщепление зон и возможность реализации зонного изолятора. В континуальной модели [8] это достигается введением периодического оптического потенциала амплитуды V_0 .

Межчастичное взаимодействие может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака амплитуды рассеяния. Параметр взаимодействия V связан с амплитудой рассеяния a следующим образом [5]:

$$\frac{m}{4\pi a} = V^{-1} + \frac{m}{\pi l_0}, \quad (4)$$

где $l_0 = 2\pi/k_c$, k_c — максимальный импульс, введенный для обрезания сверху области импульсов, где эффективно реализуется взаимодействие (ультрафиолетовое ограничение) [5, 7, 8].

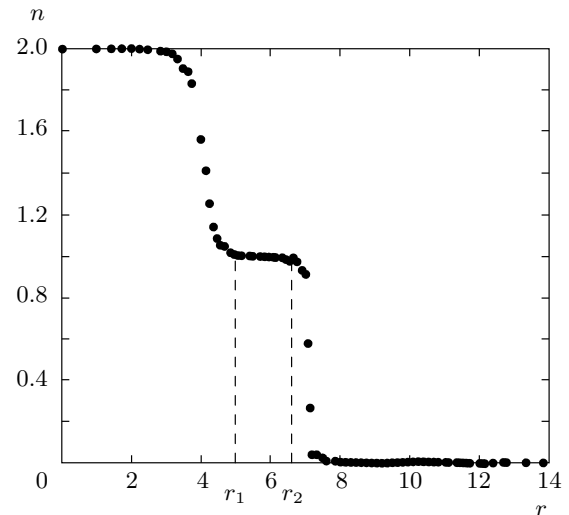


Рис. 1. Радиальное распределение плотности при $U/t = 20, V/t = 0, \beta = 15, N_a = 16^3$

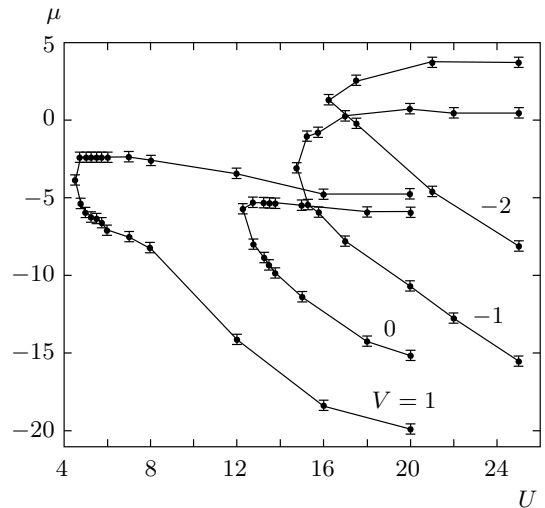


Рис. 2. Фазовая диаграмма сверхтекучесть–изолятор при различных параметрах взаимодействия V

Расчет системы из $N_a = 16^3$ узлов в параболической ловушке показал, что на профиле радиального распределения плотности при $\langle n \rangle = 1$ действительно имеется плато (рис. 1). Его ширина зависит от параметров взаимодействия, так что при слабом взаимодействии оно может исчезать.

Этих данных достаточно для построения фазовой диаграммы эффекта (рис. 2), качественно совпадающей с диаграммой из работы [8]. Действительно, рассмотрим профиль радиального распределе-

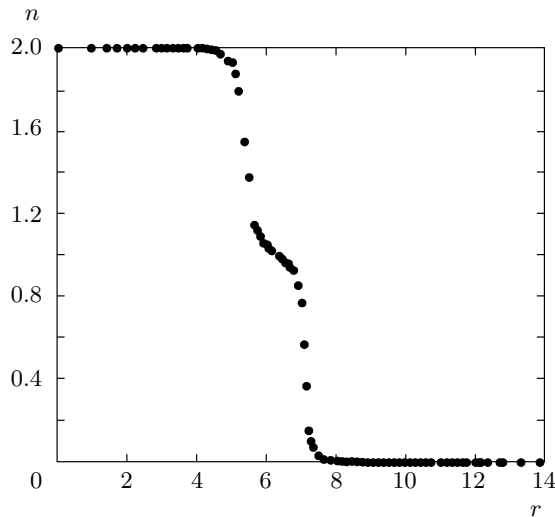


Рис. 3. Радиальное распределение плотности вблизи трикритической точки при $U/t = 13$, $V/t = 0$

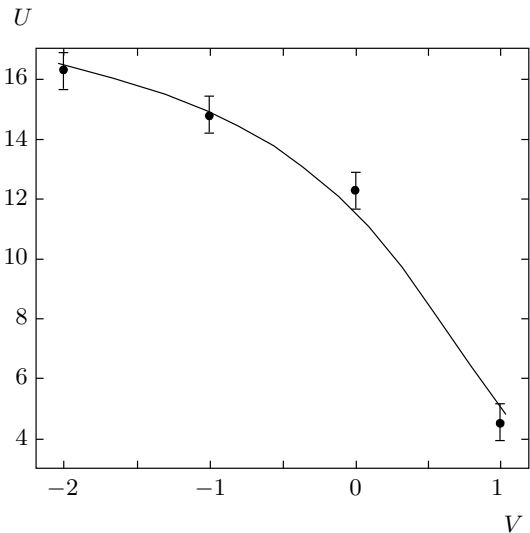


Рис. 4. Трикритическая точка $U = U_c$ как функция параметра взаимодействия

ния плотности (рис. 1). Границы плато r_1 , r_2 соответствуют двум значениям химического потенциала

$$\mu_{1,2} = \mu + kr_{1,2}^2 \quad (5)$$

в неоднородном потенциале ловушки. Это и есть минимальное и максимальное значения химического потенциала, ограничивающие область моттовского изолятора на фазовой диаграмме, так что, меняя значение параметра U , можно воспроизвести полную диаграмму (рис. 2), а контролируя взаимодействие на соседних узлах — построить фазовые диаграммы для различных параметров V .

Из данных, представленных на рис. 2, видно, что при минимальном значении U_c (зависящем от V) границы моттовской области схлопываются, так что $\mu_1 = \mu_2$, а плато на радиальном распределении исчезает (рис. 3). Зависимость этого критического значения (отмечающего трикритическую точку диаграммы) от параметра притяжения V представлена на рис. 4.

Сопоставим результаты, представленные на рис. 4, с данными работы [8], полученными в рамках приближения среднего поля. Расчет [8] проводился для континуального ферми-газа в условиях периодического оптического потенциала. Фазовые диаграммы, аналогичные данным рис. 2, и критическая величина оптического потенциала, определяющего трикритическую точку на фазовой диаграмме, рассчитывались в работе [8] как функции параметра $k = 1/k_F a$, т. е. фактически

обратной длины рассеяния. Заметим, что в нашей эффективной узельной формулировке задачи хаббардовский параметр U , согласно пересчету (3), отражает именно величину оптического потенциала, а параметр межчастичного взаимодействия V связан с амплитудой рассеяния согласно (4). Результаты качественно соответствуют данным, полученным в работе [8], так что при переходе от режима притяжения к режиму отталкивания трикритический параметр уменьшается, и область моттовского изолятора реализуется в большем диапазоне оптического потенциала согласно данным рис. 2.

Область моттовского изолятора образует оболочку (слой) конечного объема в ловушке, а внутри и снаружи этой оболочки находятся области ферми-газа, имеющего сверхсвойства при определенных значениях параметра взаимодействия (конечно, при достаточно низкой температуре).

Почему можно полагать, что внутри и снаружи моттовской области при низкой температуре могут наблюдаться сверхсвойства ферми-газа (т. е. недиагональный дальний порядок)? Мы опираемся на многочисленные аналитические данные и численные расчеты ферми-систем (см., например, [5–7]), согласно которым в области вне единичного заполнения, что соответствует положению уровня Ферми в одной из хаббардовских подзон, фермионы с противоположно направленными спинами могут образо-

вать связанное состояние — пару [5]. Для выявления сверхсвойств рассчитывалась парная корреляционная функция, и ее скейлинг давал ответ, находится ли фермионная система в сверхпроводящем (сверхтекучем) состоянии при определенной температуре. Было рассчитано конечное значение критической температуры, ниже которой наблюдалось спаривание частиц с противоположными спинами [5], в широком диапазоне значений параметра $1/k_F a$ (как положительных, так и отрицательных), что и давало основания предполагать сценарий спаривания либо по типу БКШ ($a < 0$), либо по типу бозе-эйнштейновской конденсации ($a > 0$).

В представленных здесь расчетах такого анализа пока не проводилось, это достаточно сложная задача в нашей неоднородной геометрии с необходимостью выделения отклика только одной оболочки и проведения корректного скейлинга. Кроме того, в режиме стандартного узельного СТWL-алгоритма [9] для фермионов, с необходимостью учета проблемы знака (Minus Sign), расчет парной корреляционной функции или импульсного распределения является непростой задачей.

Что касается области моттовской фазы, то в ней реализуется единичное заполнение, так что заполнена полностью одна хаббардовская подзона, а следующая отстоит от нее на величину порядка U . Основное состояние (изолятор) при этом отделено щелью $\Delta = \mu_2 - \mu_1$ от возбужденных состояний. В терминах оптической решетки это соответствует достаточно высокой амплитуде оптического потенциала V_0 , который эффективно приводит к расщеплению плотности состояний на две подзоны [8].

Таким образом, можно заключить, что при сверхнизком охлаждении ансамбля ферми-атомов в условиях периодического оптического потенциала с параболическим профилем возможно наблюдение словесных (оболочечных) структур, разделяющих различные фазовые состояния системы:

1) моттовский изолятор с щелью в спектре возбуждений, наблюдаемый как плато на профиле радиального распределения плотности ($n = n_\uparrow + n_\downarrow = 1$) в ловушке;

2) ферми-газ с уровнем Ферми в зоне, наблюдаемый как в области с плотностью $n > 1$ (в центре ловушки), так и при $n < 1$ (на периферии), монотонно меняющейся с увеличением расстояния от центра ловушки, который, согласно расчетам [5–7] при определенной температуре и взаимодействии может переходить в сверхтекучее (сверхпроводящее) состояние.

Заметим, что похожие оболочечные структуры с чередованием сверхтекучих фаз и фаз изолятора были рассчитаны ранее в бозе-системе [11] в рамках модели Бозе–Хаббарда, а затем напрямую наблюдались экспериментально [12, 13].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-02-00701), а также Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. K. Chin et al., *Nature* **443**, 961 (2006).
2. T. Stoferle, H. Moritz, K. Gunter, M. Kohl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 030401 (2006).
3. E. Tiesinga, B. J. Verhaar, and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* **47**, 4114 (1993).
4. Y. Ohashi and A. Griffin, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 1300402 (2002).
5. E. Burovski et al., *Phys. Rev. Lett.* **101**, 090402 (2008).
6. S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215 (2008); C. C. Chien, Q. Chen, and K. Levin, *Phys. Rev. A* **78**, 043612 (2008).
7. Ю. Каган, Л. А. Максимов, *Письма в ЖЭТФ* **82**, 70 (2005).
8. H. Zhai and T.-L. Ho, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 100402 (2007).
9. N. V. Prokof'ev, B. V. Svistunov, and I. S. Tupitsyn, arXiv:cond-mat/9703200; Н. В. Прокофьев, Б. В. Свистунов, И. С. Тупицын, *Письма в ЖЭТФ* **64**, 853 (1996); Н. В. Прокофьев, Б. В. Свистунов, И. С. Тупицын, *ЖЭТФ* **87**, 310 (1998); N. V. Prokof'ev, B. V. Svistunov, and I. S. Tupitsyn, *Phys. Lett. A* **238**, 253 (1998); V. A. Kashurnikov, A. V. Krasavin, and B. V. Svistunov, *Phys. Rev. B* **58**, 1826 (1998); V. A. Kashurnikov, N. V. Prokof'ev, B. V. Svistunov, and M. Troyer, *Phys. Rev. B* **59**, 1162 (1999).
10. D. Jaksch et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998); D. van Oosten, P. van der Straten, and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* **63**, 053601 (2001).
11. V. A. Kashurnikov, N. V. Prokof'ev, and B. V. Svistunov, *Phys. Rev. A* **66**, 031601 (2002).
12. T. Muller, S. Folling, A. Widera, and I. Bloch, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 200405 (2007).
13. S. Folling, A. Widera, T. Muller, F. Gerbier, and I. Bloch, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 060403 (2006).