

ДИФFUЗИЯ АРНОЛЬДА В СИСТЕМЕ С 2.5 СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ: КЛАССИЧЕСКИЙ И КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ

А. И. Малышев, Л. А. Чижова*

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 13 июля 2009 г.

Работа посвящена изучению универсального явления нелинейной динамики — диффузии Арнольда — в модельной системе с 2.5 степенями свободы. При учете влияния лишь трех основных резонансов, действующих в фазовом пространстве, проводится сопоставление результатов, полученных при классическом и квантово-механическом подходах. Показано, что зависимость скорости квантовой диффузии Арнольда от параметров задачи имеет характер, подобный классическому, при этом по абсолютной величине коэффициент квантовой диффузии отстает примерно на порядок. Обнаружено, что наличие порога по параметрам возмущения, на который указывалось ранее, не является обязательной чертой квантовой диффузии Арнольда. Также в работе показано, что в квантовой системе в режиме слабого перекрытия резонансов возможно и протекание гибридного процесса, не имеющего классического аналога, — диффузии вдоль резонанса, на которую накладывается процесс колебаний поперек перекрывшихся резонансов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена изучению одного из ярких явлений нелинейной динамики — диффузии Арнольда. Наблюдение такого рода диффузии возможно только в многомерных нелинейных системах, что является одной из характерных черт данного феномена. Связано это с тем, что в системах с числом степеней свободы, большим двух, стохастические слои различных резонансов в фазовом пространстве пересекаются и формируют единую связанную сеть, при движении вдоль которой становится возможным переход траектории с одного резонанса на другой, даже если возмущение крайне мало. Такое движение имеет диффузионный характер и впервые было предсказано Арнольдом [1].

К настоящему времени диффузия Арнольда достаточно подробно изучена на примере ряда систем. В этой связи можно упомянуть задачу о движении материальной точки между двумя плоскостями, одна из которых гофрирована в двух направлениях [2], задачу о двух слабозаимодействующих осцилляторах, один из которых помещен во внешнее периодическое во времени поле [3]. В работе [4] авторы

смогли визуализировать «паутину» Арнольда, образованную многими пересекающимися стохастическими слоями резонансов, для атома водорода, помещенного в скрещенные поля. Отметим также, что именно с диффузией Арнольда в настоящее время принято связывать особенности движения заряженных частиц в ускорителях, а также наличие люков Кирквуда в астероидном кольце Солнечной системы [5].

Возможность проявления диффузии Арнольда в квантовых системах до последнего времени была неочевидна. С одной стороны, уравнение Шредингера линейно, что поначалу ставило под сомнение существование квантового хаоса вообще [6]. С другой стороны, принцип соответствия указывает на то, что в квазиклассической области, когда масштабы системы становятся сравнимы с длиной волны де Бройля, квантовая механика непрерывным образом переходит в классическую. Первая попытка квазиклассического подхода к описанию диффузии Арнольда в рамках модели стохастической накачки была предпринята в работе [7]. Позже в работах [8, 9] на примере двух физически разных систем была рассмотрена по сути одна задача — через изучение временной эволюции квантовой системы из двух нелинейных

*E-mail: malyshev@phys.unn.ru

осцилляторов, на один из которых действует внешняя сила с двумя гармоническими составляющими, изучался квантовый аналог классической диффузии Арнольда вдоль резонанса связи двух степеней свободы.

Настоящая работа посвящена изучению диффузии Арнольда на примере системы, состоящей из двух слабозадействующих осцилляторов, один из которых помещен во внешнее переменное поле. Однако, в отличие от работы [3], где изучалась диффузия вдоль резонанса связи двух пространственных степеней свободы, в данном случае в центре внимания находится диффузия Арнольда вдоль резонанса с внешним полем. Необходимо также отметить, что подобно работам [8, 9] изучение эволюции системы и диффузии Арнольда в ней проводится как с позиций классической механики, так и с позиций квантовой. Таким образом, оказывается возможным увидеть не только сходства и различия в этих ситуациях, но и сравнить величину эффекта.

Работа построена следующим образом. Раздел 2 посвящен классической системе: здесь проводится ее описание, наглядно объясняется механизм диффузии Арнольда, а также приводится аналитическая оценка скорости диффузии. Раздел 3 посвящен решению квантово-механической задачи. Здесь в первую очередь рассматривается квантовый нелинейный резонанс одномерной системы с внешним полем, а затем и переходы вдоль него, вызванные «включением» слабого взаимодействия со второй пространственной степенью свободы. В заключении проводится сравнение результатов, касающихся диффузии Арнольда и полученных в рамках классического и квантово-механического подходов.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФУЗИЯ АРНОЛЬДА: МЕХАНИЗМ И ОЦЕНКА СКОРОСТИ

Выберем следующую модельную систему: пусть материальная точка совершает движение в двумерной бесконечно глубокой потенциальной яме размерами $a \times a$:

$$U(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < a/2 \text{ и } |y| < a/2, \\ \infty, & \text{если } |x| \geq a/2 \text{ и } |y| \geq a/2, \end{cases} \quad (1)$$

помещенной во внешнее переменное поле $U_{ext}(x, t) = -f_0 x \cos \Omega t$, где $f_0 \ll 1$. За слабое взаимодействие двух степеней свободы будет отвечать потенциал вида

$$V(x, y) = -\mu(x + y) \left(xy - \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^2 \right), \quad (2)$$

где μ — малый параметр. Причины выбора потенциала взаимодействия в такой форме станут ясны далее. Таким образом, движение материальной точки единичной массы внутри потенциальной ямы описывается следующим гамильтонианом:

$$H(x, y, p_x, p_y, t) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - f_0 x \cos \Omega t - \mu(x + y) \left(xy - \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^2 \right). \quad (3)$$

Гамильтониан невозмущенной ($f_0 = \mu = 0$) системы в переменных действие–угол выглядит известным образом:

$$H_0(I_x, I_y) = \frac{\pi^2}{2a^2} (I_x^2 + I_y^2), \quad (4)$$

а зависимость координаты x (как и y) от времени может быть представлена, например, в виде ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\omega_x t)}{(2n+1)^2} = \frac{4a}{\pi^2} \left(\cos \omega_x t + \frac{\cos 3\omega_x t}{9} + \frac{\cos 5\omega_x t}{25} + \dots \right), \quad (5)$$

где частота колебаний ω_x определена обычным образом:

$$\omega_x = \frac{\partial H_0}{\partial I_x} = \frac{\pi^2}{a^2} I_x. \quad (6)$$

Поскольку вклад высоких гармоник в решение (5) достаточно мал, далее будем учитывать лишь первое слагаемое. Введя угловые переменные как $\theta_{x,y} = \omega_{x,y} t$, запишем гамильтониан (3) в переменных действие–угол, оставив при этом только наиболее медленные слагаемые:

$$H(I_x, I_y, \theta_x, \theta_y, t) = \frac{\pi^2}{2a^2} (I_x^2 + I_y^2) - f_0 \frac{2a}{\pi^2} \cos(\theta_x - \Omega t) - \frac{\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^3 (\cos(2\theta_x - \theta_y) + \cos(\theta_x - 2\theta_y)). \quad (7)$$

Из вида выражения (7) следует, что в изучаемой системе, кроме резонанса с внешним полем, определяемого равенством $\omega_x = \Omega$, в фазовом пространстве имеют место два резонанса связи, вызванные слабым взаимодействием двух степеней свободы —

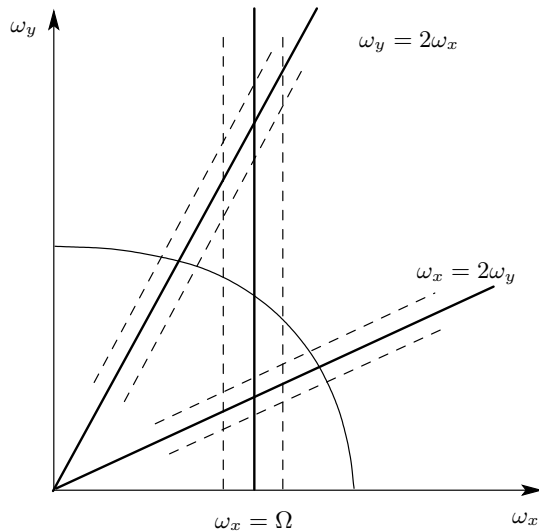


Рис. 1. Основные резонансы системы (7) в плоскости частот (ω_x, ω_y) . Схематично показана ширина резонансов, а также изоэнергетическая кривая

$\omega_x = 2\omega_y$ и $\omega_y = 2\omega_x$. Расположение этих резонансов, а также изоэнергетической кривой в плоскости частот представлено на рис. 1. Данный рисунок позволяет достаточно наглядно проиллюстрировать механизм диффузии Арнольда. В случае, когда $\mu = 0$, при помещении начальных условий в область резонанса с внешним полем в горизонтальном направлении система ведет себя, подчиняясь известным законам внутрирезонансной динамики. В вертикальном же направлении состояние не меняется, поскольку в этом случае $I_y = \text{const}$. Слабое взаимодействие двух пространственных степеней свободы ($\mu \ll 1$) порождает в фазовом пространстве системы два резонанса связи (именно с этим и связан выбор потенциала взаимодействия в форме (2)). Их влияние приводит к дополнительной хаотизации в области стохастического слоя резонанса с внешним полем и, самое главное, к медленному диффузионному изменению I_y — диффузии Арнольда вдоль резонанса $\omega_x = \Omega$.

В рамках введенного приближения, когда рассматривается динамика при наличии лишь трех основных резонансов, можно сделать аналитическую оценку скорости диффузии Арнольда вдоль резонанса с внешним полем [10]. Поскольку целью настоящей работы является, главным образом, изучение динамики квантовой системы, здесь ограничимся приведением лишь некоторых результатов, необходимых при дальнейшем изложении.

Для аналитической оценки скорости диффузии Арнольда вдоль резонанса с внешним полем необхо-

димо рассчитать дисперсию энергии в y -направлении $E_y = \pi^2 I_y^2 / 2a^2$ за половину периода фазовых осцилляций T_a и разделить на саму величину T_a [3]. Таким образом,

$$D_{theor} = \frac{\overline{(\Delta E_y)^2}}{T_a}. \quad (8)$$

Начальные условия при этом необходимо выбирать внутри стохастического слоя резонанса $\omega_x = \Omega$.

В работе [10] было показано, что полуширина стохастического слоя, образованного на различных ветвях сепаратрисы резонанса с внешним полем, с величиной которой связан период фазовых осцилляций [11], определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} h_{sl}^+ &= \mu \left(\frac{4\lambda}{\pi} \right)^3 \frac{a}{\Omega^2} \frac{\lambda^2}{\text{sh}(\pi\lambda)} e^{\pi\lambda/2}, \\ h_{sl}^- &= \mu \left(\frac{4\lambda}{\pi} \right)^3 \frac{a}{\Omega^2} \frac{2\lambda^2(\lambda^2 - 2)}{3 \text{sh}(\pi\lambda)} e^{\pi\lambda/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\lambda = \Omega \sqrt{a/2f_0}$. Знак «+» в определении h_{sl} указывает на принадлежность к верхней ветви сепаратрисы, а «-» — к нижней. При нахождении в одной из половин стохастического слоя резонанса с внешним полем поведение системы эффективно управляется лишь одним резонансом связи, вклад от второго при этом оказывается экспоненциально мал. Интересным здесь является то, что влияние двух одинаковых по характеристикам резонансов связи на процесс образования стохастического слоя оказывается различным. Эта ситуация качественно отличается от рассмотренной в работе [3], где влияние от двух резонансов с внешним полем на формирование стохастического слоя резонанса связи, а в итоге и на диффузию Арнольда вдоль последнего, было одинаковым.

В предположении, что движение в обеих частях стохастического слоя происходит независимо, можно показать, что коэффициент диффузии вдоль резонанса с внешним полем в целом определяется следующим выражением:

$$D_{theor} = \left(\frac{a\Omega}{\pi} \right)^4 \frac{\Omega}{\lambda^7} \frac{2(h_{sl}^+)^2 + (h_{sl}^-)^2/2}{\ln(32e/h_{sl}^+) + \ln(32e/h_{sl}^-)}. \quad (10)$$

Эта оценка скорости диффузии Арнольда достаточно хорошо согласуется с результатами численных экспериментов, к обсуждению которых обратимся в разд. 3.2 настоящей работы.

3. КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О ДИФФУЗИИ АРНОЛЬДА

Перейдем теперь к рассмотрению квантово-механического аналога задачи о диффузии Арнольда, рассмотренной в предыдущем разделе настоящей работы. Для этого необходимо решить нестационарное уравнение Шредингера для системы, гамильтониан которой имеет вид, полностью аналогичный (3):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2} - f_0 x \cos \Omega t - \mu(x+y) \left(xy - \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{\pi} \right)^2 \right) + U(x, y), \quad (11)$$

где $U(x, y)$ задает двумерную бесконечно глубокую потенциальную яму (см. (1)). Решение здесь распадается на ряд этапов, первым из которых является построение квантовых состояний, отвечающих резонансу системы с внешним полем в отсутствие взаимодействия между двумя степенями свободы. Второй этап состоит в изучении временной эволюции таких состояний (уже при $\mu \neq 0$) и наблюдении квантовой диффузии Арнольда вдоль резонанса с внешним полем.

3.1. Состояния на резонансе системы с внешним полем

Анализируя оператор Гамильтона (11), легко заметить, что в отсутствие взаимодействия между пространственными степенями свободы (при $\mu = 0$) переменные x и y разделяются, и движение в этих двух направлениях происходит независимо. Это означает, что при построении состояний, отвечающих резонансу системы с внешним полем, достаточно рассмотреть одномерную бесконечно глубокую потенциальную яму (по оси x), помещенную во внешнее периодическое во времени поле. Таким образом, задача сводится к решению нестационарного уравнения Шредингера для гамильтониана следующего вида:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2} - f_0 x \cos \Omega t + U(x), \quad (12)$$

где

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < a/2, \\ \infty, & \text{если } |x| \geq a/2. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляя волновую функцию в виде разложения по собственным функциям невозмущенной системы

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_n c_n(t) \sin \left(\frac{\pi n}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right),$$

перепишем уравнение в следующем виде:

$$i\hbar_0 \frac{dc_n}{dt} = E_n^0 c_n - f_0(\cos \Omega t) \sum_m x_{nm} c_m. \quad (14)$$

Здесь \hbar_0 — безразмерная эффективная постоянная Планка, а $E_n^0 = \pi^2 \hbar_0^2 n^2 / 2a^2$ — энергетический спектр частицы в потенциальной яме.

Будем рассматривать эволюцию системы вблизи резонансного уровня n_0 , т. е. считать выполненным равенство $\hbar_0 \Omega = E_{n_0+1}^0 - E_{n_0}^0$. Величину n_0 будем считать достаточно большой ($n_0 \gg 1$), что соответствует квазиклассической ситуации [12]. Вблизи резонансного уровня n_0 выражение для энергии E_n^0 удобно переписать в следующем виде:

$$E_n^0 = E_{n_0}^0 + \hbar_0 \Omega (n - n_0) + \frac{\pi^2 \hbar_0^2}{2a^2} (n - n_0)^2. \quad (15)$$

Далее путем замены $c_n(t) = a_n(t) \exp[-i(E_{n_0}^0/\hbar_0 + \Omega(n - n_0))t]$ можем ввести новые, более медленные переменные. В этом случае уравнение (14) примет следующий вид:

$$i\hbar_0 \frac{da_n}{dt} = \frac{\pi^2 \hbar_0^2}{2a^2} (n - n_0)^2 a_n - \frac{f_0}{2} \sum_m x_{nm} a_m \left(e^{i\Omega(n-m+1)t} + e^{i\Omega(n-m-1)t} \right). \quad (16)$$

Легко видеть, что наиболее медленными слагаемыми в сумме по m являются те, у которых $m = n \pm 1$, и, действуя далее в рамках резонансного приближения, будем учитывать только такие переходы. Заметим, что это приближение соответствует учету в классическом ряде Фурье (5) лишь первой гармоники.

Поскольку гамильтониан (12) инвариантен по отношению к сдвигу по времени на период внешнего поля $T = 2\pi/\Omega$, для решения задачи удобно использовать теорему Флоке и ввести оператор эволюции (см., например, [5]). Как известно [8, 9, 13, 14], для построения матрицы оператора эволюции в представлении невозмущенной системы необходимо решить уравнение (14) за период внешнего поля. Приведение матрицы к диагональному виду позволяет найти спектр квазиэнергий (QE) и квазиэнергетические функции (QF) системы.

Пример квазиэнергетического спектра данной системы представлен на рис. 2а; в рамках резонансного приближения он является спектром Матье [15]. В структуре QE-спектра можно выделить три области. Так, нижняя часть спектра соответствует состояниям вблизи центра резонанса; в этой области расстояние между уровнями с точностью до \hbar_0 равно

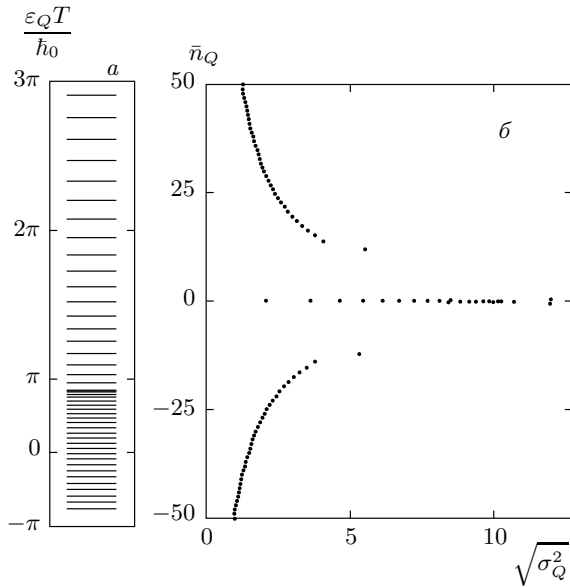


Рис. 2. Фрагмент квазиэнергетического спектра системы (11) (а) и диаграмма, характеризующая структуру квазиэнергетических функций (б). Здесь и далее $\Omega = a = 1$, $n_0 = 200$ (при этом $\hbar_0 = 1/\pi^2 n_0$), $f_0 = 0.001$

частоте малых колебаний на резонансе и с увеличением значения квазиэнергии уменьшается довольно медленно. Область сгущения уровней отвечает классической сепаратрисе резонанса, а уровни, лежащие еще выше, являются слабо расщепленными и соответствуют «пролетным» состояниям, не попавшим в резонанс.

Для изучения структуры квазиэнергетических функций A_n^Q , заданных в базисе невозмущенной системы, построим зависимость

$$\bar{n}_Q = \sum_n (n - n_0) |A_n^Q|^2$$

от квадратного корня из дисперсии

$$\sigma_Q^2 = \sum_n (n - n_0 - \bar{n}_Q)^2 |A_n^Q|^2.$$

Характер этой диаграммы, представленной на рис. 2б, ясно отражает структуру квазиэнергетических функций изолированного квантового нелинейного резонанса [15]. Здесь средней ветви отвечают QF, соответствующие колебательному режиму (подсепаратрисные уровни в спектре Матье), верхней и нижней — QF, соответствующие «вращательному» режиму (надсепаратрисные уровни). Состояниям в области сепаратрисы резонанса отвечают точки, лежащие на правом крае

средней ветви, что указывает на их наибольшую делокализацию.

Заметим, что аналогичная (12), (13) система рассматривалась в работе [16], где был проанализирован характер распределения межуровневых расстояний в квазиэнергетическом спектре в зависимости от величины возмущения. При этом, в частности, был реализован и режим перекрытия двух близких квантовых резонансов.

Рассмотрение резонанса одномерной системы с внешним полем и проведенное построение квазиэнергетических состояний позволяет определить начальные условия, которые будут использоваться на следующем этапе решения задачи — при изучении эволюции двумерной системы во внешнем поле.

3.2. Эволюция двумерной системы во внешнем поле. Квантовая диффузия Арнольда

Обратимся теперь к рассмотрению системы с гамильтонианом (11). Решение нестационарного уравнения Шредингера так же, как и в разд. 3.1, будем искать в виде разложения по собственным функциям невозмущенной системы:

$$\psi(x, y, t) = \frac{2}{a} \sum_{n,m} c_{nm}(t) \times \sin\left(\frac{\pi n}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi m}{a}\left(y + \frac{a}{2}\right)\right). \quad (17)$$

В этом случае уравнение примет следующий вид:

$$i\hbar_0 \frac{dc_{nm}}{dt} = (E_n^0 + E_m^0) c_{nm} - f_0(\cos \omega t) \times \sum_{n'} x_{nn'} c_{n'm} - \mu \sum_{n',m'} V_{nm,n'm'} c_{n'm'}. \quad (18)$$

Матричные элементы $V_{nm,n'm'}$ отвечают за переходы между состояниями, обусловленные наличием слабого взаимодействия между двумя степенями свободы. Значение матричного элемента существенно зависит от соотношения между квантовыми числами. Так, при $n' \neq n$ и $m' \neq m$ будет

$$V_{nm,n'm'} = \frac{32a^3}{\pi^4} \frac{\left((-1)^{n+m+n'+m'} - 1\right) n m n' m'}{(n^2 - n'^2)^2 (m^2 - m'^2)^2}. \quad (19)$$

Если же $n' = n$, но $m' \neq m$, то

$$V_{nm, nm'} = \frac{a^3}{3\pi^6} \frac{((-1)^{m+m'} - 1) mm'}{(m^2 - m'^2)^2} \times \left(\pi^4 - \frac{6\pi^2}{n^2} - 96 \right). \quad (20)$$

Аналогично выглядит и $V_{nm, n'm}$, а диагональные матричные элементы $V_{nm, nm}$ равны нулю.

Уравнение (18) будем решать в рамках резонансного приближения, как это делалось и в разд. 3.1. Для этого введем новые переменные

$$c_{nm}(t) = a_{nm}(t) \exp \left[-i \left((E_{n_0}^0 + E_{m_0}^0) / \hbar_0 + \Omega(n - n_0) + \Omega(m - m_0) \right) t \right].$$

При этом в первой сумме, как и ранее, оставим два слагаемых, отвечающих изменению квантового числа n на единицу, а во второй сумме — четыре слагаемых с $n' = n \pm 1$ и $m' = m \mp 2$, а также с $n' = n \pm 2$ и $m' = m \mp 1$.

Начальные условия зададим в виде $c_{nm}(0) = A_n^Q \delta_{mm_0}$, где A_n^Q — квазиэнергетические функции, отвечающие квантовому нелинейному резонансу с внешним полем (см. разд. 3.1), а $m_0 = n_0$, где n_0 было определено ранее. Такой выбор квантовых чисел соответствует равенству начальных значений действия I_x и I_y при решении уравнений Гамильтона соответствующей классической системы (см. разд. 2).

Чтобы охарактеризовать эволюцию состояний во времени, рассчитаем в каждый момент времени значение дисперсии энергии

$$\overline{(\Delta E_m)^2} = \hbar_0^2 \Omega^2 \Delta_m^2,$$

где

$$\Delta_m^2 = \sum_m (m - m_0 - \bar{m})^2 \sum_n |c_{nm}(t)|^2,$$

$$\bar{m} = \sum_m (m - m_0) \sum_n |c_{nm}(t)|^2.$$

Легко заметить, что определенная таким образом величина указывает на распределение состояний по квантовому числу m , т.е. на их протяженность вдоль резонанса с внешним полем.

На рис. 3 представлены примеры зависимостей $\Delta_m^2(t)$ для трех различных начальных условий: кривая *a* соответствует начальному состоянию, отвечающему нижнему уровню в спектре Матье (см. рис. 2*a*), *б* — начальному состоянию, взятому на одном из надсепаратрисных уровней, а кривая *в* — начальному состоянию, выбранному на одном из присепаратрисных уровней в области их сгущения. На

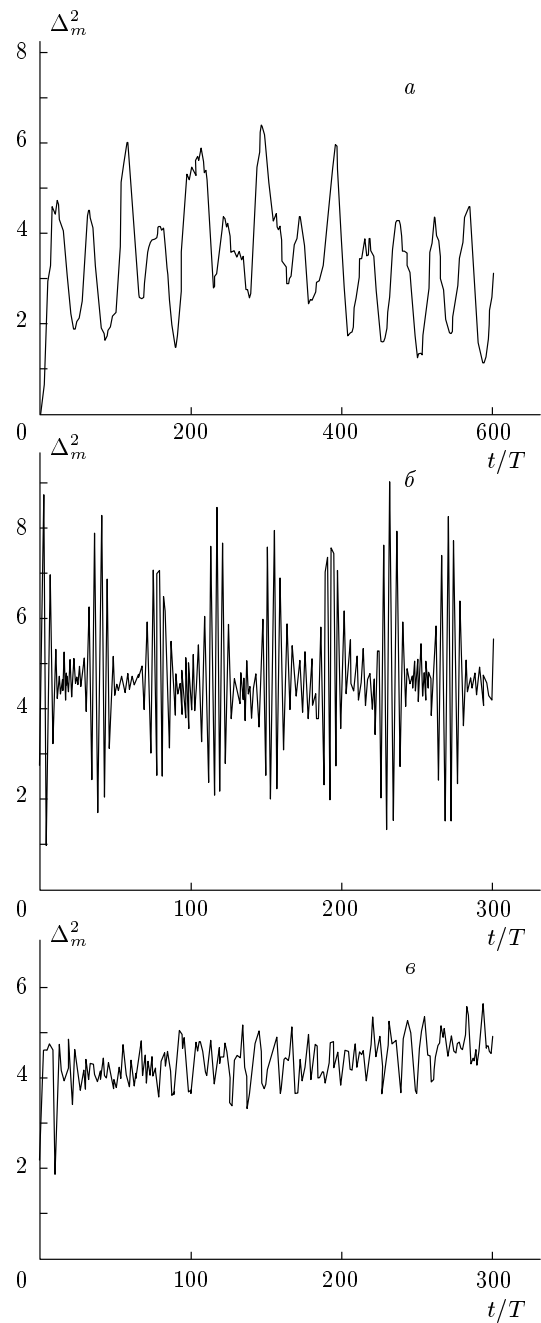


Рис. 3. Примеры зависимости дисперсии распределения состояния вдоль резонанса с внешним полем Δ_m^2 от времени для начального условия, отвечающего центру резонанса (*a*), начального условия, взятого вне резонанса (*б*), а также для начального условия вблизи сепаратрисы резонанса (*в*). Здесь $f_0 = 0.0095$, $\mu = 0.02$

рис. 3 видно, что для данных начальных условий существует явное различие между эволюциями во времени. Для состояний, взятых вблизи центра резонанса и над сепаратрисой, величина дисперсии Δ_m^2 совершает квазипериодические осцилляции около некоторого среднего значения. Для начальных состояний из области сепаратрисы, т. е. состояний, попавших в стохастический слой, дисперсия со временем растет. В течение некоторого времени этот рост в среднем является линейным, что явно указывает на диффузионный характер динамики. Таким образом, логично предположить, что в системе имеет место явление, подобное классической диффузии Арнольда, — квантовая диффузия Арнольда вдоль рассматриваемого резонанса. На скорость квантовой диффузии указывает угловой коэффициент наклона прямой, аппроксимирующей зависимость $\Delta_m^2(t)$ на участке линейного роста, а коэффициент диффузии можно найти как

$$D = \frac{\overline{(\Delta E_m)^2}(t)}{t} = \frac{\hbar_0^2 \Omega^2}{T} \frac{\Delta_m^2(t/T)}{t/T}. \quad (21)$$

На рис. 4 представлены зависимости коэффициентов классической и квантовой диффузии Арнольда от $1/\sqrt{f_0}$. Также здесь показана и аналитическая оценка скорости классической диффузии, приведенная в формуле (10). При численном моделировании расчет коэффициента классической диффузии Арнольда проводился с использованием метода, предложенного Чириковым [3]:

$$D_n = \frac{1}{\Delta t_n} \overline{(\Delta E_y)^2}. \quad (22)$$

Здесь $\overline{E_y}$ — значение энергии $E_y = \pi^2 I_y^2 / 2a^2$, усредненное по времени на интервале $\Delta t_n = 10^n T$, $\Delta \overline{E_y}$ — разность средних значений $\overline{E_y}$ на таких соседних интервалах, а вторая черта означает усреднение квадратов разностей $\Delta \overline{E_y}$ по многим интервалам. Такая процедура выбрана для того, чтобы снизить эффект случайных колебаний величины энергии системы и подчеркнуть общую тенденцию роста разброса ее значений. Полное время счета в численных экспериментах составляло 10^4 периодов внешнего поля. При каждом значении f_0 для десяти различных начальных условий, обеспечивающих нахождение системы внутри стохастического слоя резонанса, были проведены расчеты коэффициентов D_2 и D_3 . Дальнейшее усреднение полученных результатов и расчет погрешностей с доверительной вероятностью 0.95 позволили построить графики, представленные на рис. 4.

В квантовом случае для определения коэффициента диффузии использовалась формула (21), причем при каждом значении f_0 расчеты были проведены для четырех начальных условий, взятых в области стохастического слоя резонанса (на диаграмме, приведенной на рис. 2б, им отвечают точки, лежащие на правом крае средней ветви).

Теперь перейдем к обсуждению представленных результатов. Первое, на что следует обратить внимание, это то, что имеется хорошее согласие между результатами численного моделирования классической диффузии Арнольда и аналитической оценкой ее скорости в том диапазоне изменения f_0 , где диффузионный процесс имеет место (область, где коэффициенты D_2 и D_3 с учетом погрешностей совпадают [3]). При этом зависимости $\ln D_2$ и $\ln D_3$ от $1/\sqrt{f_0}$ практически линейны, а скорость диффузии, таким образом, пропорциональна $e^{-A/\sqrt{f_0}}$ (см. (10)). Впервые подобная оценка была получена Чириковым для трехрезонансной модели [3].

Заметим далее, что точки, отвечающие коэффициенту квантовой диффузии Арнольда, хорошо аппроксимируются прямой, параллельной графику аналитической оценки, при этом по величине скорость квантовой диффузии отстает от скорости классической приблизительно на порядок. Подобное «отставание», но несколько большей величины, наблюдалось и ранее при изучении квантовой диффузии Арнольда вдоль резонанса связи [8, 9] и ассоциировалось авторами с квантовыми эффектами. Основным же квантовым эффектом является, по-видимому, дискретность той «среды», в которой протекает диффузионный процесс. Однако вопрос о том, в какой степени определяющим является именно этот фактор, очевидно, требует более глубокой проработки.

В упомянутых выше работах [8, 9] также указывалось на наличие примечательной черты квантовой диффузии Арнольда, а именно, порога по параметрам возмущения. Вообще, очевидно, что для проявления диффузии необходимо наступление режима слабого квантового хаоса, что, понятным образом, однозначно связывается с большим числом квантовых состояний, попадающих в область классического стохастического слоя. Впервые на это было указано в работе Шурыяка [6]. Однако, что интересно, в рамках настоящего исследования указанный порог наблюдать не удалось. Так, на рис. 4 видно, что как квантовая диффузия, так и классическая, прекращают проявляться приблизительно одновременно в районе $1/\sqrt{f_0} \approx 11.5$: правее, в области меньших значений амплитуды f_0 коэффициен-

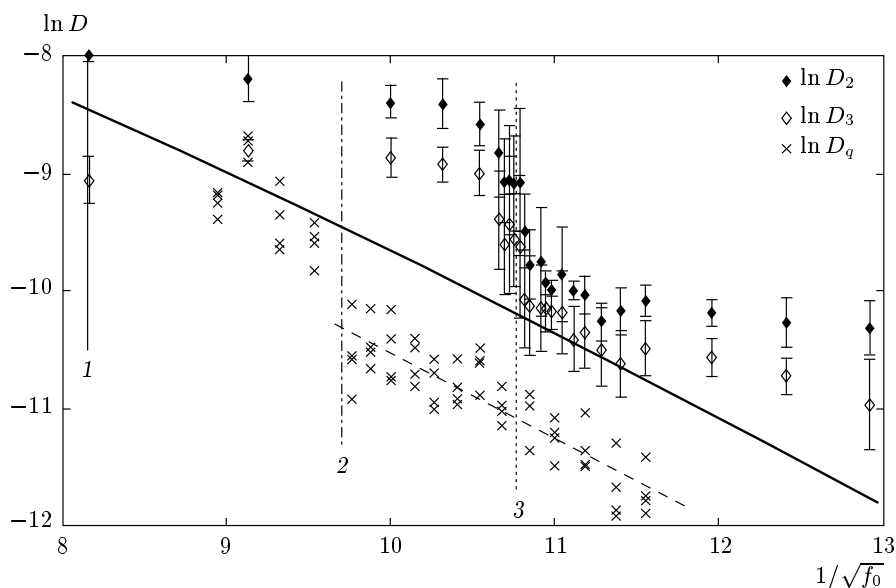


Рис. 4. Результаты расчетов коэффициента диффузии Арнольда в классическом случае (D_2 и D_3) и квантовом (D_q). Сплошная наклонная кривая отвечает аналитической оценке скорости диффузии (10). Вертикальная прямая 1 отвечает моменту перекрытия резонанса с внешним полем и резонанса связи $\omega_y = 2\omega_x$ согласно критерию Чирикова, 2 отвечает границе перекрытия квантовых резонансов, 3 соответствует границе, левее которой для всех начальных условий из области стохастического слоя перекрытие резонансов реализуется в течение 10^4 периодов внешнего поля. Здесь $\mu = 0.02$

ты D_2 и D_3 начинают заметно различаться, эволюция классической системы приобретает квазипериодический характер, а в квантовом случае на зависимости $\Delta_m^2(t)$ перестает прослеживаться какой-либо линейный рост. Отсутствие порога согласуется и с результатами сопоставления параметров квазиэнергетического спектра (см. рис. 2a) с оценками (9): в области $1/\sqrt{f_0} \approx 11.5$ число состояний, попадающих в интервал классического стохастического слоя, оказывается все еще заметно больше единицы. Таким образом, к новым результатам настоящего исследования можно отнести установление того факта, что при надлежащем соотношении между параметрами f_0 и μ квантовая диффузия Арнольда по отношению к «границе Шурыка» может быть нечувствительна.

Вертикальная линия 1 на рис. 4 отвечает теоретической оценке амплитуды внешнего поля, отвечающей моменту перекрытия резонанса с внешним полем с резонансом связи $\omega_y = 2\omega_x$. Линия 2 указывает на границу, когда описанное перекрытие резонансов реально наступает при численном моделировании. Эта граница довольно условна, поскольку переход траектории на другой резонанс может происходить и при меньших значениях амплитуды внешнего поля в зависимости от выбора начального условия: с ростом f_0 увеличивается лишь доля начальных усло-

вий, которые к этому приводят. Прямая 3 отвечает значению амплитуды внешнего поля, при превышении которой при всех начальных условиях (внутри стохастического слоя) перекрытие резонансов наступает в течение 10^4 периодов поля. С переходом за эту границу связано и то, что, согласно рис. 4, классическая диффузия Арнольда в этой области прекращается — между коэффициентами D_2 и D_3 появляются различия. На самом же деле диффузия как динамический процесс по-прежнему имеет место, однако в течение времени наблюдения за системой ($10^4 T$) она, вследствие перекрытия резонансов, сменяется процессом колебаний поперек резонанса связи, что качественно влияет на конечный результат. Можно было бы сократить время наблюдения и эффективно сместить таким образом границу 3 в левую сторону, однако это сделало бы невозможным единообразный расчет характеристик D_2 и D_3 .

Обсуждаемый эффект интересным образом сказывается на результатах, касающихся квантовой системы. Дело в том, что время наблюдения за ней в численных экспериментах не превышало одной-двух тысяч периодов внешнего поля. При моделировании было установлено, что правее границы 3 (см. рис. 4) характерное время протекания квантовой диффузии Арнольда составляет порядка 500–1000 перио-

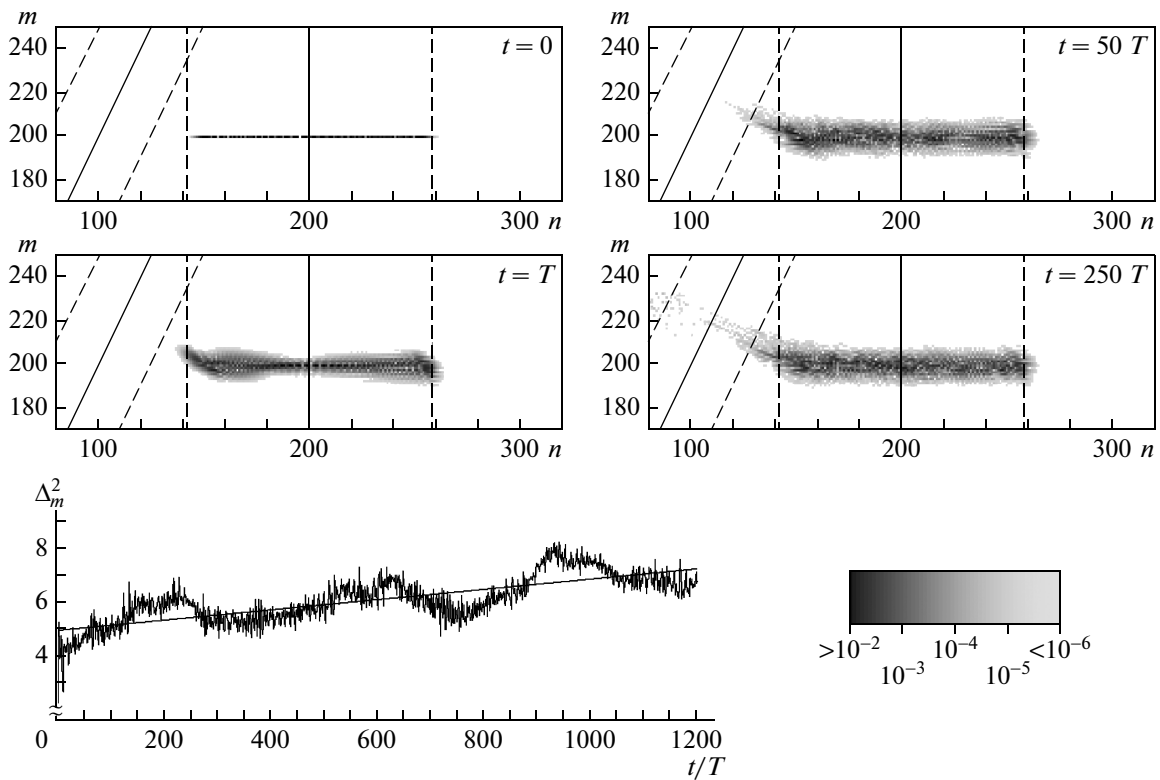


Рис. 5. Распределения вероятностей $|c_{nm}(t)|^2$ по невозмущенному базису в различные моменты времени для начального состояния вблизи сепаратрисы резонанса с внешним полем. Показаны также резонанс с внешним полем, резонанс связи $\omega_y = 2\omega_x$ и их ширины согласно классическим оценкам. В нижней части для этого же начального состояния приведен график зависимости дисперсии Δ_m^2 от времени. Здесь $f_0 = 0.0105(1/\sqrt{f_0} \approx 9.76)$, $\mu = 0.02$

дов поля, затем диффузия начинает «насыщаться» и зависимость $\Delta_m^2(t)$ теряет линейный характер. Подобный эффект отмечался и ранее [8, 9]; его принято связывать с явлением динамической локализации, подобной андерсоновской локализации в одномерном случайном потенциале.

При переходе через границу 3 в сторону увеличения амплитуды f_0 качественных изменений в характере зависимости Δ_m^2 от времени не происходит, однако с приближением к $1/\sqrt{f_0} \approx 10$ на фоне линейного роста в этой зависимости начинает проявляться колебательный процесс с периодом, измеряемым несколькими сотнями T . Последнее связано с произошедшим в некоторой степени перекрытием квантовых резонансов: часть распределения вероятностей «захватывает» край резонанса связи $\omega_y = 2\omega_x$. Описанная ситуация проиллюстрирована на рис. 5, где в различные моменты времени показано распределение состояния в невозмущенном базисе, т. е. $|c_{nm}(t)|^2$ при $1/\sqrt{f_0} \approx 9.76$. Соответствующий график зависимости Δ_m^2 от времени здесь также приведен. Таким образом, в интервале от $1/\sqrt{f_0} \approx 10$

до вертикальной границы 2 в системе наблюдается суперпозиция двух процессов — с одной стороны, линейный в среднем рост дисперсии распределения состояния вдоль резонанса с внешним полем, т. е. квантовая диффузия вдоль последнего, а с другой стороны, слабые колебания поперек резонанса связи. Этот режим не имеет классического аналога, поскольку в случае перекрытия резонансов в классической системе диффузия Арнольда полностью перестает быть заметной на фоне более сильного механизма диффузии поперек стохастических слоев перекрывшихся резонансов. По отношению к квантовой системе можно говорить о режиме слабого перекрытия резонансов, когда лишь малая часть распределения вероятностей по состояниям, относящимся к одному резонансу, «захватывает» небольшую долю состояний, относящихся к соседнему. При этом квантовая диффузия Арнольда вдоль резонанса по степени влияния на общее поведение оказывается сильнее диффузии поперек стохастических слоев слабо перекрывшихся резонансов.

Вертикальной линией 2 на рис. 4 отмечено зна-

чение амплитуды поля, при превышении которого на графике зависимости $\Delta_m^2(t)$ какой-либо линейный рост (на масштабах времени порядка нескольких сотен периодов поля) перестает быть заметен на фоне сильного колебательного процесса, связанного с перекрытием резонансов. Период этих колебаний с ростом f_0 заметно сокращается и в районе $1/\sqrt{f_0} \approx 9$ составляет уже менее $100T$. Линейный рост дисперсии, который удается выделить, длится не более этого времени, поэтому и расчет D_q в этой области проводился на основе данных за первые 100–150 периодов поля. Таким образом, так же как и в классическом случае, видимый скачок скорости квантовой диффузии при переходе границы 2 связан с изменением характера эволюции системы, вызванным перекрытием квантовых резонансов, и к процессу диффузии Арнольда, строго говоря, отношения уже не имеет.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В порядке подведения итогов настоящего исследования кратко отметим следующие результаты.

При классическом описании системы было установлено, что влияние двух одинаковых по характеристикам резонансов связи на формирование стохастического слоя резонанса с внешним полем и процесс диффузии Арнольда вдоль него оказываются различными. Эта ситуация качественно отличается от рассмотренной в работе Чирикова [3] и была изучена впервые.

Зависимость коэффициента классической диффузии Арнольда вдоль резонанса с внешним полем от параметров задачи удалось получить аналитически. Полученная оценка хорошо согласуется с результатами численного моделирования.

При рассмотрении квантовой диффузии Арнольда в модельной системе было установлено, что зависимость ее скорости от амплитуды внешнего поля в некотором диапазоне изменения последней имеет тот же характер, что и при классическом подходе. По абсолютной величине коэффициент квантовой диффузии Арнольда отстает приблизительно на порядок. Подобный эффект имел место и в других работах [8, 9].

Новым результатом является то, что, как показали расчеты, при надлежащем соотношении между параметрами f_0 и μ квантовая диффузия Арнольда может быть нечувствительна к «границе Шурыяка», на существование которой указывалось ранее [8, 9]. Таким образом, наличие порога по параметрам возмущения не является обязательной чертой квантовой диффузии Арнольда.

В рамках данной задачи впервые удалось изучить поведение системы с 2.5 степенями свободы в режиме перекрытия двух резонансов разной природы. В частности, в работе показано, что в условиях слабого перекрытия резонансов (когда лишь малая часть распределения вероятностей «захватывает» край резонанса связи) возможно протекание гибридного процесса — диффузии вдоль резонанса с внешним полем, на которую накладывается процесс колебаний поперек перекрывшихся резонансов. По понятным причинам эта ситуация не имеет классического аналога.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00268) и фонда «Династия».

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Арнольд, ДАН СССР **156**, 9 (1964).
2. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Меркурий-ПРЕСС, Череповец (2000).
3. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
4. J. von Milczewski, G. H. F. Diercksen, and T. Uzer, Phys. Rev. Lett. **76**, 2890 (1996).
5. L. Reichl, *The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestation*, Springer-Verlag, New York (1992).
6. Э. В. Шурыяк, ЖЭТФ **71**, 2039 (1976).
7. D. M. Leitner and P. G. Wolynes, Phys. Rev. Lett. **79**, 55 (1997).
8. V. Ya. Demikhovskii, F. M. Izrailev, and A. I. Malyshev, Phys. Rev. Lett. **88**, 154101 (2002); Phys. Rev. E **66**, 036211 (2002).
9. V. Ya. Demikhovskii, F. M. Izrailev, and A. I. Malyshev, Phys. Lett. A **352**, 491 (2006); arXiv:cond-mat/0610390.
10. А. И. Малышев, Л. А. Чижова, Изв. вузов. ПНД **17**(1), 46 (2009).
11. Г. М. Заславский, *Физика хаоса в гамильтоновых системах*, Институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск (2004).
12. Г. М. Заславский, *Стохастичность динамических систем*, Наука, Москва (1984).
13. V. Ya. Demikhovskii, D. I. Kamenev, and G. A. Luna-Acosta, Phys. Rev. E **59**, 294 (1999).
14. M. E. Flatté and M. Holthaus, Ann. Phys. **245**, 113 (1996).
15. Г. П. Берман, А. Р. Коловский, УФН **162**(4), 95 (1992).
16. W. A. Lin and L. E. Reichl, Phys. Rev. A **37**, 3972 (1988).